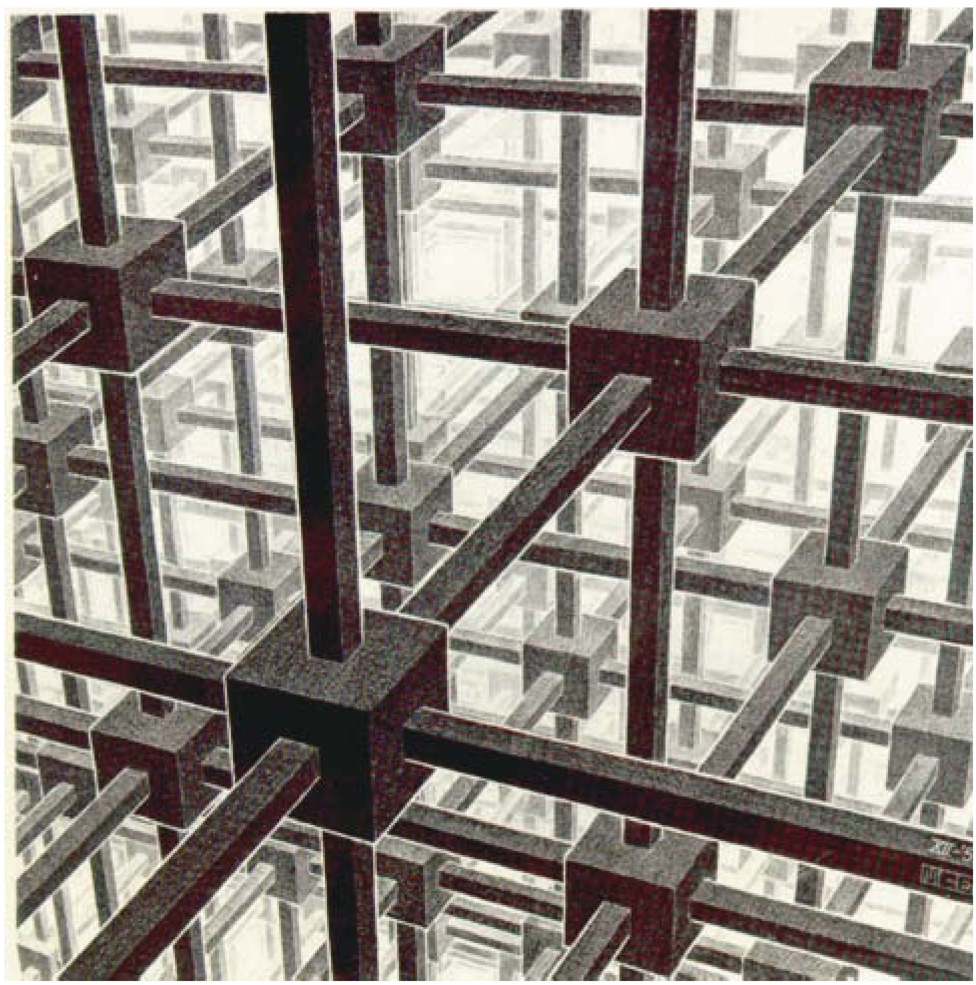
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

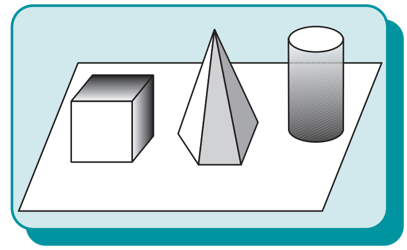
Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται βασικοί ορισμοί και αξιώματα που διέπουν τη γεωμετρία του χώρου και μελετώνται βασικές σχέσεις μεταξύ των θεμελιωδών στοιχείων του χώρου.

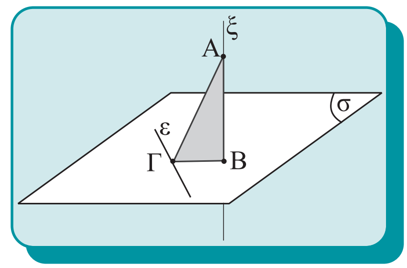


Maurits Cornelis Escher (Ολλανδός, 1898 - 1972), *«Κυβική διαίρεση χώρου»*.

12.1 Εισαγωγή

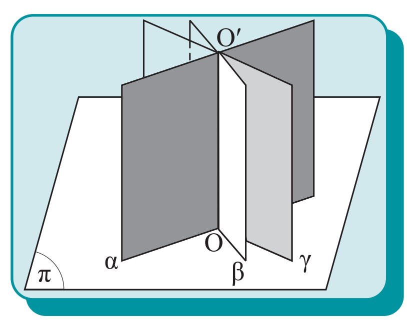
Ο γεωμετρικός χώρος έχει τρεις διαστάσεις, μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα σε κάθε κατεύθυνση, ενώ το επίπεδο, που μελετήσαμε έως τώρα, έχει δύο διαστάσεις. Ο χώρος περιλαμβάνει θεμελιώδη γεωμετρικά στοιχεία – σημεία, ευθείες, επίπεδα – αλλά και πιο πολύπλοκα σχήματα, τα οποία σχηματίζονται από αυτά ή τμήματα αυτών και λέγονται στερεά σχήματα για να αντιδιαστέλλονται από τα επίπεδα σχήματα (σχ.1). Ένα στερεό γεωμετρικό σχήμα μπορεί να είναι πεπερασμένο ή απεριόριστο, να καταλαμβάνει όγκο ή όχι (σχ.2) και να σχηματίζεται από τμήματα ευθειών και επιπέδων ή να είναι ακόμα πιο περίπλοκο. Στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε σχήματα του χώρου και τις ιδιότητές τους. Το σύνολο αυτών των ιδιοτήτων λέγεται ***Γεωμετρία του Χώρου*** ή ***Στερεομετρία***.
Τα σχήματα του χώρου παριστάνονται στο χαρτί για να υποβοηθείται η φαντασία μας. Έτσι, το επίπεδο, ως απεριόριστη επιφάνεια, ενώ δεν μπορεί να χωρέσει στην επιφάνεια του χαρτιού, παριστάνεται με ένα παραλληλόγραμμο, δηλαδή με ένα πεπερασμένο τμήμα του και το ονομάζουμε με ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα του αλφαβήτου, π.χ. π, σ, τ, κτλ. (με δείκτες ή τόνους ενδεχομένως), που σημειώνεται σε μία από τις γωνίες του παραλληλογράμμου.
Επειδή το επίπεδο είναι υποσύνολο του χώρου, στα αξιώματα του χώρου περιλαμβάνονται τα αξιώματα της γεωμετρίας του επιπέδου και επομένως, οι προτάσεις που ισχύουν στο επίπεδο ισχύουν σε κάθε επίπεδο του χώρου. Πολλές ιδιότητες του χώρου προκύπτουν, αν θεωρήσουμε το χώρο ως επέκταση του επιπέδου κατά μία διάσταση. Για παράδειγμα, η πρόταση: «στο επίπεδο υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο» επεκτείνεται στην πρόταση: «στον χώρο υπάρχουν άπειρα επίπεδα που διέρχονται από μία ευθεία». Αυτό γίνεται άμεσα φανερό αν θεωρήσουμε σε ένα επίπεδο (σχ.3) ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο και μετακινηθεί το επίπεδο «παράλληλα στον εαυτό του». Τότε, οι ευθείες γράφουν επίπεδα διερχόμενα από την ευθεία που γράφει το κοινό σημείο των ευθειών κατά τη μετακίνηση.
Η πλήρης κατανόηση, όμως, της υφής των γεωμετρικών στοιχείων, οι ιδιότητες και οι σχέσεις μεταξύ τους προκύπτουν έμμεσα, από τις προτάσεις που αποδεικνύονται στα επόμενα.
Στο σχ.4 παριστάνεται ένα επίπεδο που συμβολίζεται με το γράμμα σ και πάνω σε αυτό ένα σημείο Α και μία ευθεία ε. Αν


Σχήμα 1

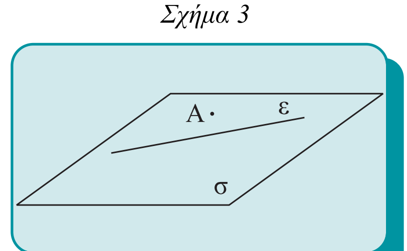


Σχήμα 2

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Η ονομασία ενός επιπέδου με το γράμμα π δεν προκαλεί σύγχυση γιατί από το κείμενο γίνεται φανερό ότι αναφερόμαστε σε επίπεδο και όχι στον αριθμό π. Ο αριθμός π συνήθως εμφανίζεται σε σχέσεις.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

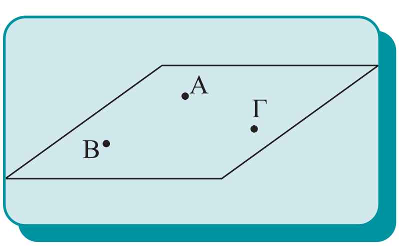
και βλέπουμε ένα πεπερασμένο σχήμα, θα θεωρούμε το επίπεδο ως απεριόριστη επιφάνεια.

Οι **γεωμετρικές κατασκευές** στον χώρο έχουν διαφορετική έννοια από αυτήν των κατασκευών στο επίπεδο. Εδώ δεν εννοούμε μόνο τις κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, αλλά και τον προσδιορισμό των σημείων του χώρου ως τομή γνωστών σχημάτων, π.χ. τομή δύο ευθειών ή τριών επιπέδων, τον προσδιορισμό μιας ευθείας από δύο γνωστά σημεία ή ως τομή δύο γνωστών επιπέδων και τον καθορισμό ενός επιπέδου από δύο τεμνόμενες ευθείες ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο μπορεί να προσδιορισθεί ένα επίπεδο. Δηλαδή, μια κατασκευή στο χώρο είναι **νοητή διαδικασία**.

Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο

12.2 Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του

Μία πρωταρχική απαίτηση, η οποία καθορίζει τη θέση και την ύπαρξη ενός επιπέδου στο γεωμετρικό χώρο, είναι το εξής αξίωμα:



Σχήμα 5

Αξίωμα I

Τρία σημεία που δεν είναι συνευθειακά ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο.

Αν Α, Β και Γ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία, τότε αυτά ορίζουν μοναδικό επίπεδο (σχ.5) και θα το συμβολίζουμε με (Α, Β, Γ).

Δεχόμαστε επίσης τα επόμενα αξίωματα.

Αξίωμα II

Σε κάθε επίπεδο υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία μη συνευθειακά.

Αξίωμα III

Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει σε δεδομένο επίπεδο.

Τα σημεία και γενικότερα τα σχήματα που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, λέγονται ***συνεπίπεδα***.

Αξίωμα IV

Δύο σημεία ενός επιπέδου ορίζουν ευθεία, τα σημεία της οποίας ανήκουν στο επίπεδο.

Άλλοι τρόποι για τον καθορισμό της θέσης ενός επιπέδου στο χώρο δίνονται από τις ακόλουθες προτάσεις:

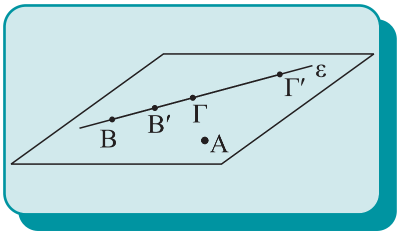
Πρόταση Ι

Μία ευθεία και ένα σημείο, που δεν ανήκει στην ευθεία, ορίζουν ένα επίπεδο, στο οποίο ανήκουν το σημείο και η ευθεία.

Απόδειξη

Αν Β και Γ είναι δύο διαφορετικά σημεία στη δοσμένη ευθεία ε (σχ.6), τότε τα σημεία Α, Β και Γ, ως μη συνευθειακά, ορίζουν ένα επίπεδο (Α, Β, Γ) στο οποίο ανήκουν το σημείο Α και η ευθεία ΒΓ, αφού δύο σημεία της ευθείας ανήκουν στο επίπεδο. Το επίπεδο αυτό είναι ανεξάρτητο από το ζεύγος των σημείων Β και Γ που επιλέξαμε πάνω στην ευθεία ε, διότι αν Β′ και Γ′ είναι δύο άλλα σημεία της ε, τότε το επίπεδο (Α, Β′, Γ′) περιέχει την ευθεία ε, άρα και τα σημεία Β και Γ.

Το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Α και την ευθεία ε, που δεν περιέχει το Α, συμβολίζεται με (ε, Α).



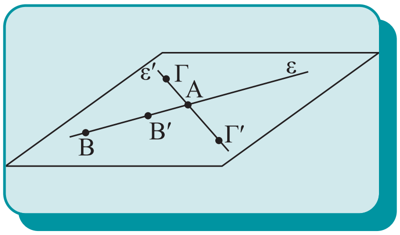
Σχήμα 6

Πρόταση ΙΙ

Δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο στο οποίο ανήκουν.

Απόδειξη

Έστω Α το κοινό σημείο των δύο τεμνόμενων ευθειών ε και ε′ (σχ.7) και Β, Γ σημεία των ευθειών ε και ε′ αντίστοιχα. Τότε, τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν ένα επίπεδο, στο οποίο ανήκουν οι ευθείες ε και ε′. Το επίπεδο αυτό δεν εξαρτάται από τα σημεία Β και Γ, διότι αν επιλέξουμε δύο άλλα σημεία, τα Β′ και Γ′ των ευθειών ε και ε′ αντίστοιχα, το επίπεδο (Α, Β′ Γ′) περιέχει τις ευθείες ε και ε′, άρα και τα σημεία Β και Γ. Επομένως, το επίπεδο που ορίζεται από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι μοναδικό.



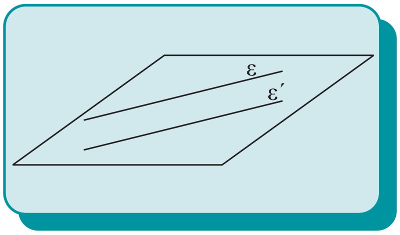
Σχήμα 7

Το επίπεδο που ορίζεται από τις τεμνόμενες ευθείες ε και ε′ συμβολίζεται με (ε, ε′).

Επαναλαμβάνουμε εδώ τον ορισμό των παράλληλων ευθειών, που συναντήσαμε στη γεωμετρία του επιπέδου.

Ορισμός

Δύο ευθείες λέγονται παράλληλες όταν είναι συνεπίπεδες και δεν τέμνονται (σχ.8).



Σχήμα 8

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι το ακόλουθο πόρισμα:

Πορισμα

Δύο παράλληλες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο, στο οποίο ανήκουν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

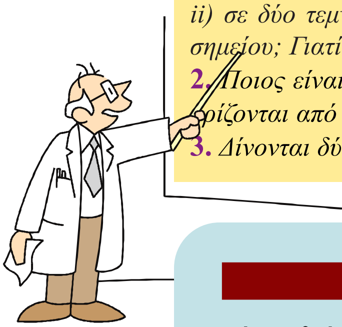
1. *Τι επιφάνεια παράγει μία ευθεία που ολισθαίνει:*
i) σε δύο παράλληλες ευθείες και
ii) σε δύο τεμνόμενες ευθείες, εκτός του κοινού τους σημείου; Γιατί εξαιρούμε το κοινό σημείο;

2. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών που ορίζονται από δύο διαφορετικά σημεία ενός κύκλου;*

3. *Δίνονται δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ε' και σημείο Α εκτός αυτών. Πώς θα ελέγξουμε αν το σημείο Α είναι σημείο του επιπέδου (ε, ε'), όπου ε και ε' δύο τεμνόμενες ευθείες;*

4. *Τι επιφάνεια παράγει μία ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο Α και τέμνει ευθεία ε, που δεν περιέχει το σημείο Α.*

5. *Πόσα επίπεδα ορίζουν τρία σημεία που βρίσκονται στην ίδια ευθεία;*



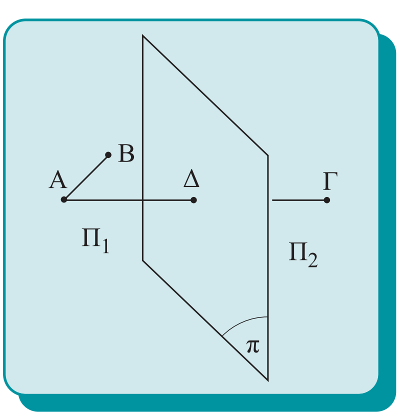
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μία ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο, αν και μόνο αν δύο σημεία της ανήκουν στο επίπεδο.
Ένα επίπεδο θεωρείται δεδομένο, όταν δίνονται:

- τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ή
- μία ευθεία και ένα σημείο που δεν ανήκει σ' αυτήν ή
- δύο τεμνόμενες ευθείες ή
- δύο παράλληλες ευθείες.

12.3 Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων

• Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων



Σχήμα 9

Αξίωμα V

Κάθε επίπεδο χωρίζει τα σημεία του χώρου, που δεν ανήκουν σε αυτό, σε δύο περιοχές ξένες μεταξύ τους.

Όπως είναι γνωστό, ένα επίπεδο χωρίζεται από μία ευθεία του σε δύο ημιεπίπεδα που έχουν ως τομή την ευθεία αυτή.
Κατ΄ αναλογία, ο χώρος χωρίζεται από ένα επίπεδο, που λέγεται ***αρχικό επίπεδο*** (σχ.9), σε δύο ***ημιχώρους*** $Π_1$, $Π_2$ που έχουν ως τομή το επίπεδο αυτό. Κάθε δύο σημεία που δεν ανήκουν στο π και βρίσκονται στον ίδιο ημιχώρο ορίζουν

ευθύγραμμο τμήμα που βρίσκεται εξ ολοκλήρου σε αυτόν τον ημιχώρο, π.χ. το τμήμα ΑΒ (σχ.9). Αν ένα σημείο ανήκει στον έναν ημιχώρο και το άλλο σημείο στον άλλο, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο αυτά σημεία τέμνει το αρχικό επίπεδο σε ένα σημείο μεταξύ των άκρων του, π.χ. το ΑΓ τέμνει το π στο Δ (σχ.9).

Αξίωμα VI

Αν δύο διακεκριμένα επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε τέμνονται σε μία ευθεία, που περιέχει το σημείο.

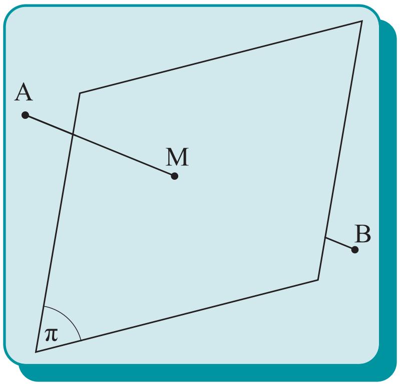
Ορισμός I

Δύο επίπεδα που δεν τέμνονται λέγονται *παράλληλα*.

Το αξίωμα VI μας βεβαιώνει ότι δύο επίπεδα δεν μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Αν έχουν ένα κοινό σημείο θα έχουν μία ευθεία κοινή που θα διέρχεται από το σημείο αυτό. Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο υπάρχουν επίπεδα που δεν έχουν κοινό σημείο. Άρα, δύο διαφορετικά επίπεδα είτε τέμνονται σε μία ευθεία είτε είναι παράλληλα.

• Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Γνωρίζουμε ήδη από το αξίωμα IV ότι, αν μία ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με ένα επίπεδο, τότε η ευθεία ανήκει στο επίπεδο. Επίσης, αν θεωρήσουμε δύο σημεία Α και Β του χώρου που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός επιπέδου π, (σχ.10), η ευθεία ΑΒ τέμνει το π σε ένα μόνο σημείο Μ μεταξύ των Α και Β. Διότι αν το έτεμνε σε δύο σημεία, τότε η ευθεία θα ανήκε στο επίπεδο. Δηλαδή, υπάρχουν ευθείες του χώρου που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με κάποιο επίπεδο. Το σημείο αυτό λέγεται ***σημείο τομής*** της ευθείας και του επιπέδου ή ***ίχνος*** της ευθείας στο επίπεδο.



Σχήμα 10

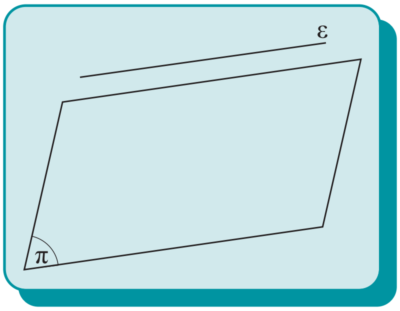
Τέλος, όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο με κάποιο επίπεδο. Για τις ευθείες αυτές έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός II

Μία ευθεία λέγεται *παράλληλη* σε ένα επίπεδο, αν η ευθεία και το επίπεδο δεν έχουν κοινό σημείο.

Τότε και το επίπεδο (σχ.11) λέγεται ότι είναι ***παράλληλο στην ευθεία***.

Την παραλληλία ευθείας ε και επιπέδου π τη συμβολίζουμε με ε//π.



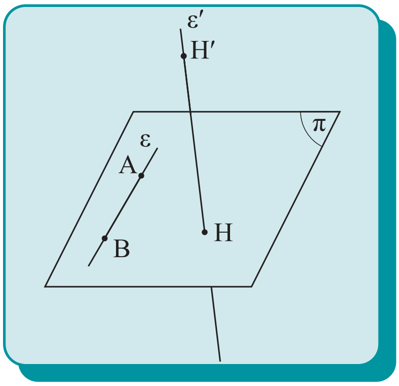
Σχήμα 11

• Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Γνωρίζουμε ήδη ότι δύο ευθείες του χώρου μπορεί να είναι παράλληλες ή τεμνόμενες. Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ζεύγη ευθειών που δεν τέμνονται, ενώ δεν είναι παράλληλες.

Θεώρημα

Αν μία ευθεία ε ανήκει σε ένα επίπεδο π και ευθεία ε′ τέμνει το π στο σημείο Η εκτός της ε, τότε δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει τις ευθείες ε και ε′.

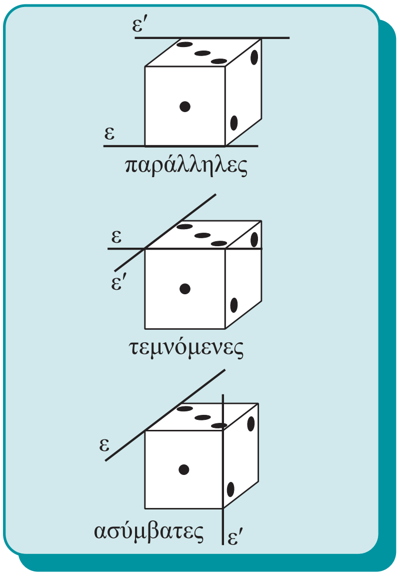


Σχήμα 12

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει επίπεδο που περιέχει τις ευθείες ε και ε′, (σχ.12), δηλαδή περιέχει όλα τα σημεία της ε και όλα τα σημεία της ε′. Αν Α και Β είναι δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας ε και Η, Η′ δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας ε′, τα επίπεδα (Α, Β, Η) και (Α, Β, Η′) θα ταυτίζονταν με το επίπεδο π. Τότε όμως η ευθεία ε′ θα είχε δύο κοινά σημεία με το π, τα Η και Η′, που είναι άτοπο.

Δηλαδή, υπάρχουν ζεύγη ευθειών του χώρου που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Για τις ευθείες αυτές δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:



Σχήμα 13

Ορισμός ΙΙΙ

Δύο ευθείες λέγονται *ασύμβατες*, αν δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο.

Επομένως, δύο διαφορετικές ευθείες του χώρου μπορεί να είναι ***παράλληλες***, ***τεμνόμενες*** ή ***ασύμβατες*** (σχ.13).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όπως είναι γνωστό, στο επίπεδο, από σημείο Α εκτός ευθείας ε απαιτούμε να άγεται μοναδική ευθεία παράλληλη στην ε. Αυτή η πρόταση ισχύει και στο χώρο. Η μοναδική παράλληλη στην ε από το σημείο Α βρίσκεται στο επίπεδο (ε, Α). Κάθε άλλη ευθεία που διέρχεται από το Α και τέμνει το επίπεδο (ε, Α) είναι ασύμβατη στην ε, σύμφωνα με το Θεώρημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας: i) δύο ευθείες παράλληλες και το επίπεδο που αυτές ορίζουν, ii) δύο ευθείες τεμνόμενες, το επίπεδο που αυτές ορίζουν και να βρείτε άλλες ευθείες πάνω σε αυτό, iii) δύο ευθείες ασύμβατες και να διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο και iv) τρεις ευθείες ανά δύο ασύμβατες.*

2. *Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας δύο επίπεδα: i) τεμνόμενα, ii) παράλληλα.*

3. *Να αναγνωρίσετε στην αίθουσα διδασκαλίας διάφορα επίπεδα και ευθείες: i) που ανήκουν σε αυτά, ii) που είναι παράλληλες προς αυτά ή (iii) που τα τέμνουν.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο Ο και τέμνει δύο σταθερές ασύμβατες ευθείες.*

2. *Δίνονται τρεις ευθείες ασύμβατες ανά δύο. Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τις τρεις.*

3. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε που διέρχεται από σημείο Α και τέμνει ευθεία ε' και κύκλο (Κ) του χώρου.*

4. *Δίνονται οι τεμνόμενες ευθείες ΧΟΧ' και ΨΟΨ' και ευθεία ε ασύμβατη σε αυτές. Αν Μ τυχαίο σημείο της ε, να βρείτε την τομή των επιπέδων (Μ, Χ, Χ') και (Μ, Ψ, Ψ').*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι επίπεδο και κύκλος, που δεν ανήκει σε αυτό, έχουν δύο το πολύ κοινά σημεία.*

2. *Να αποδείξετε ότι τρεις ευθείες: i) αν τέμνονται ανά δύο χωρίς να διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε είναι συνεπίπεδες, ii) αν τέμνονται ανά δύο χωρίς να είναι συνεπίπεδες, τότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

3. *Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, δύο σημεία Α και Β στην $ε_1$ και δύο σημεία Γ και Δ στην $ε_2$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ είναι ασύμβατες.*

4. *Δίνονται τέσσερις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$, από τις οποίες οι $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τις τέσσερις.*

5. *Να αποδείξετε ότι αν τρία επίπεδα τέμνονται ανά δύο, τότε οι τομές τους διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Δύο επίπεδα μπορεί να έχουν:

1. τρία κοινά σημεία, οπότε ταυτίζονται,
2. δύο μόνο κοινά σημεία, οπότε τέμνονται κατά την ευθεία που ορίζουν τα δύο αυτά σημεία,
3. κανένα κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλα.

Εάν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε τέμνονται σε μια ευθεία που περνάει από αυτό

Δύο ευθείες του χώρου μπορεί να:

1. Ταυτίζονται αν έχουν δύο κοινά σημεία.
2. Τέμνονται αν έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε ορίζουν ένα επίπεδο στο οποίο ανήκουν.
3. Είναι παράλληλες. Τότε ορίζουν ένα επίπεδο στο οποίο ανήκουν.
4. Είναι ασύμβατες. Δεν έχουν κοινό σημείο και δεν είναι παράλληλες. Τότε δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει.

Η παραλληλία και η καθετότητα στο χώρο

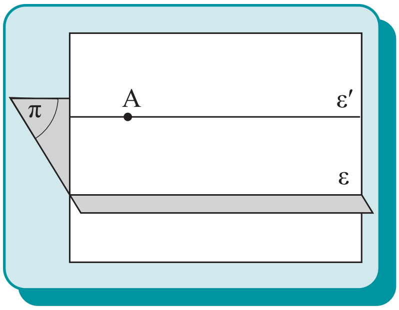
12.4 Ευθείες και επίπεδα παράλληλα-Θεώρημα του Θαλή

• Παραλληλία ευθείας και επιπέδου

Το επόμενο θεώρημα βεβαιώνει την ύπαρξη ευθειών που είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο και αποτελεί **κριτήριο** της παραλληλίας ευθείας και επιπέδου.

Θεώρημα I

Αν μία ευθεία ε′ είναι παράλληλη σε μία ευθεία ε ενός επιπέδου π και δεν ανήκει σε αυτό, τότε είναι παράλληλη στο π.



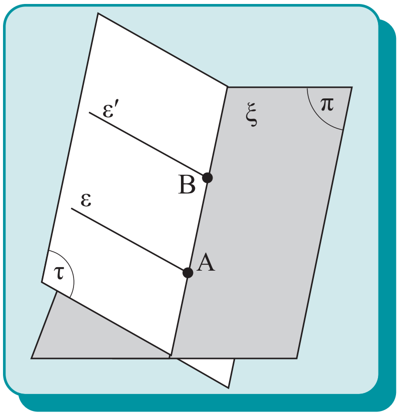
Σχήμα 14

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε και ε′ και π ένα επίπεδο που περιέχει την ε και όχι την ε′. Οι παράλληλες ευθείες ε και ε′ (σχ.14), ορίζουν το επίπεδο (ε, ε′). Τα κοινά σημεία των επιπέδων π και (ε, ε′) είναι τα σημεία της ευθείας ε. Αν η ευθεία ε′ έτεμνε το επίπεδο π, θα το έτεμνε σε σημείο της ευθείας ε, επομένως οι ευθείες ε και ε′ δε θα ήταν παράλληλες, που είναι άτοπο.

Θεώρημα II

Αν επίπεδο π τέμνει ευθεία ε, τότε θα τέμνει κάθε ευθεία παράλληλη στην ε.



Σχήμα 15

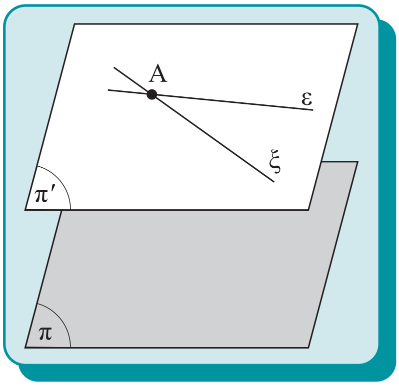
Απόδειξη

Έστω Α το κοινό σημείο της ε και του π και ε′ ευθεία παράλληλη στην ε (σχ.15). Οι ευθείες ε και ε′ ως παράλληλες ορίζουν επίπεδο τ. Τα επίπεδα π και τ έχουν ένα κοινό σημείο, το Α, άρα τέμνονται κατά μία ευθεία ξ. Η ευθεία ξ ανήκει στο επίπεδο τ των παράλληλων ευθειών και τέμνει την ε, άρα θα τέμνει και την ε′ σε ένα σημείο Β.

• **Παραλληλία επιπέδων**

Θεώρημα III

Αν δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ξ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο π, τότε το επίπεδο (ε, ξ) είναι παράλληλο στο π.



Σχήμα 16

Απόδειξη

Αν τα δύο επίπεδα π′= (ε,ξ) και π (σχ.16) είχαν κοινό σημείο, τότε θα τέμνονταν σε μία ευθεία ζ, η οποία με τη σειρά της θα έτεμνε τουλάχιστον μία από τις ευθείες ε και ξ, έστω την ε. (Η άλλη μπορεί να είναι παράλληλη στη ζ). Τότε όμως η ευθεία ε θα έτεμνε το επίπεδο π, που είναι άτοπο.

Πορισματα

i) Από σημείο εκτός επιπέδου άγεται μοναδικό επίπεδο παράλληλο σε αυτό.
ii) Δύο επίπεδα παράλληλα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους παράλληλα.

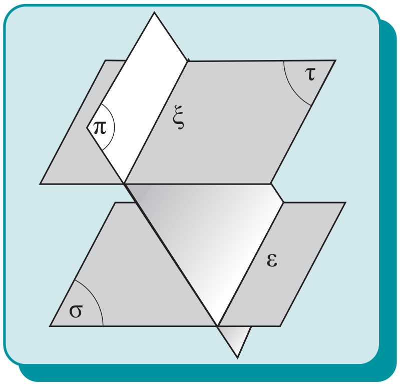
Το θεώρημα ΙΙΙ αποδεικνύει την ύπαρξη παράλληλων επιπέδων και ταυτόχρονα, δίνει τρόπο κατασκευής επιπέδου π′ που διέρχεται από σημείο Α και είναι παράλληλο σε άλλο. Το σημείο Α πρέπει να βρίσκεται εκτός του επιπέδου π αλλιώς οι ευθείες ε και ξ θα είναι ευθείες του π και έτσι το παράλληλο επίπεδο θα ταυτίζεται με το π.

Θεώρημα IV

Αν σ και τ είναι δύο παράλληλα επίπεδα, τότε κάθε επίπεδο π που τέμνει το ένα τέμνει και το άλλο και οι ευθείες τομής είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Απόδειξη

Έστω ότι το επίπεδο π (σχ.17), τέμνει το σ κατά την ευθεία ε και δεν τέμνει το τ. Τότε το π και το τ θα είναι παράλληλα. Όμως το σ, ως παράλληλο στο τ, θα είναι παράλληλο και στο π, σύμφωνα με το πόρισμα (ii), που είναι άτοπο. Επομένως το π τέμνει και το άλλο κατά μία ευθεία ξ.
Οι ευθείες ε και ξ είναι παράλληλες, διότι αν τέμνονταν, τότε τα επίπεδα π και τ θα είχαν κοινό σημείο, που είναι άτοπο.



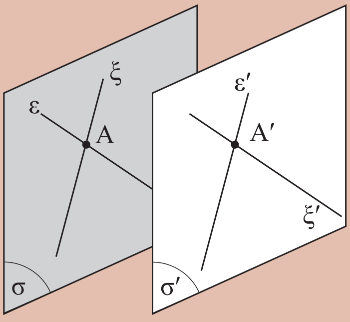
Σχήμα 17

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν ε και ε′ είναι δύο ασύμβατες ευθείες, τότε από τις ε και ε′ διέρχεται μοναδικό ζεύγος παράλληλων επιπέδων.

Απόδειξη

Από τυχαίο σημείο Α της ε φέρουμε ευθεία ξ//ε′ και από τυχαίο σημείο Α′ της ε′ φέρουμε ευθεία ξ′//ε (σχ.18). Τα επίπεδα σ = (ε,ξ) και σ′= (ε′,ξ′) είναι παράλληλα, γιατί το καθένα έχει δύο τεμνόμενες ευθείες παράλληλες στο άλλο. Είναι προφανές ότι τα επίπεδα σ και σ΄ είναι ανεξάρτητα των Α και Α′, επομένως είναι το μοναδικό ζεύγος παράλληλων επιπέδων που διέρχονται από τις ασύμβατες ευθείες ε και ε′ αντίστοιχα.



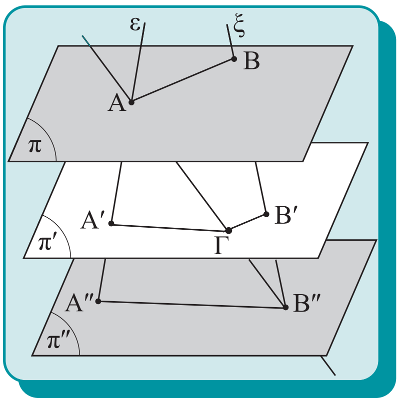
Σχήμα 18

Θεώρημα του Θαλή

Αν δύο ασύμβατες ευθείες ε και ξ τέμνουν τρία παράλληλα επίπεδα π, π′ και π″ στα σημεία Α, Α′, Α″ και Β, Β′, Β″ αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''}.$$

Απόδειξη



Σχήμα 19

Φέρουμε την ευθεία ΑΒ″ (σχ.19), η οποία τέμνει το επίπεδο π′ στο σημείο Γ. Τότε, οι τεμνόμενες στο Α ευθείες ε και ΑΒ″ ορίζουν επίπεδο που τέμνει τα παράλληλα επίπεδα π′ και π″ κατά τις παράλληλες ευθείες Α′Γ και Α″Β″. Τα τρίγωνα ΑΑ′Γ και ΑΑ″Β″ είναι όμοια και έχουμε:

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B''}.$$

Επίσης, οι τεμνόμενες στο Β″ ευθείες ξ και ΑΒ″ ορίζουν επίπεδο, το οποίο τέμνει τα επίπεδα π και π′ κατά τις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΒ′. Επομένως τα τρίγωνα Β″ΓΒ′ και Β″ΑΒ είναι όμοια και έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B''} = \frac{BB'}{B'B''}.$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει αμέσως:

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Από σημείο Ο να κατασκευάσετε επίπεδο παράλληλο σε δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2.*

2. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε, που διέρχεται από γνωστό σημείο Α, είναι παράλληλη σε δοσμένο επίπεδο π που δεν περιέχει το Α και τέμνει ευθεία ξ, τέμνουσα το π.*

3. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε, που είναι παράλληλη σε δοσμένο επίπεδο π και τέμνει δύο άλλες ασύμβατες ευθείες, οι οποίες τέμνουν το π.*

4. *Αν μία ευθεία είναι παράλληλη στην τομή δύο επιπέδων, τότε είναι παράλληλη στα δύο επίπεδα ή ανήκει σε ένα από αυτά και είναι παράλληλη στο άλλο.*

5. *Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα διέρχονται αντίστοιχα από δύο παράλληλες ευθείες, τότε η τομή των επιπέδων είναι παράλληλη σε αυτές.*

6. *Τα επίπεδα που περνάνε από ευθεία ξ τέμνονται: i) από επίπεδο π παράλληλο στην ευθεία ξ κατά ευθείες παράλληλες στην ξ, επομένως και μεταξύ τους παράλληλες και ii) από επίπεδο που τέμνει την ξ κατά ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

7. *Από σημείο Ο να κατασκευασθεί επίπεδο παράλληλο σε δοσμένη ευθεία ε.*

8. *Από δοσμένο σημείο να κατασκευάσετε ευθεία παράλληλη σε δύο τεμνόμενα επίπεδα.*

9. *Από δοσμένο σημείο να κατασκευάσετε επίπεδο παράλληλο σε δύο δοσμένες ευθείες.*

10. *Δίνονται τρεις τυχαίες ευθείες ε, ε_1 και ε_2. Να κατασκευάσετε επίπεδο σ_1 που να περιέχει την ε_1 και επίπεδο σ_2 που να περιέχει την ε_2 τέτοια, ώστε η τομή των σ_1 και σ_2 να είναι παράλληλη στην ε.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν Α, Β, Γ, Δ είναι τέσσερα σημεία που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, το σχήμα που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ λέγεται* ***στρεβλό τετράπλευρο*** *και γράφεται ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.*

2. *Δίνεται στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν σημεία επί των ΔΑ και ΔΒ αντίστοιχα τέτοια, ώστε* $\frac{ΔM}{MA} = \frac{ΔN}{NB}$. *Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα (Μ,Ν,Γ) και (Α,Β,Γ) τέμνονται κατά ευθεία παράλληλη στην ΑΒ.*

3. *Σε στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τα μέσα των απέναντι πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων ορίζουν ευθύγραμμα τμήματα τα οποία διχοτομούνται.*

4. *Αν Α, Α′, Α″ είναι σημεία ευθείας ε και Β, Β′, Β″ είναι σημεία ευθείας ξ, όπου οι ευθείες ε και ξ είναι ασύμβατες και ισχύει η σχέση*

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''},$$

τότε οι ευθείες ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο (αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή).

Σύνθετα θέματα

1. *Αν ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι δύο τρίγωνα που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και επιπλέον ανά δύο οι πλευρές τους είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΒ//Α′Β′, ΒΓ//Β′Γ′ και ΑΓ//Α′Γ′, τότε οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες. (Δύο τέτοια τρίγωνα λέγονται ομόλογα).*

2. *Αν ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι δύο τρίγωνα που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και επιπλέον, οι πλευρές ΑΒ και Α′Β′ τέμνονται στο σημείο* $Γ_1$, *οι ΒΓ και Β′Γ′ τέμνονται στο* A_1 *και οι ΑΓ και Α′Γ′ τέμνονται στο* B_1, *τότε: i) τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά και ii) οι ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες. (Δύο τέτοια τρίγωνα λέγονται ομόλογα).*

3. *Δίνεται ευθεία ε και δύο τυχαία σημεία Α και Β εκτός αυτής, ώστε οι ευθείες ΑΒ και ε να είναι ασύμβατες. Αν Γ τυχαίο σημείο της ε, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του βαρυκέντρου του τριγώνου ΑΒΓ.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

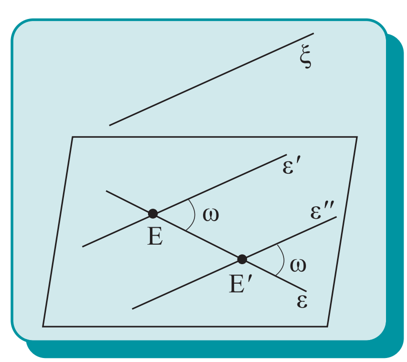
- Δύο επίπεδα είναι παράλληλα, αν δύο τεμνόμενες ευθείες του ενός είναι παράλληλες στο άλλο.
- Αν δύο επίπεδα είναι παράλληλα, κάθε ευθεία του ενός είναι παράλληλη στο άλλο.
- Δύο ευθείες τέμνονται από τρία παράλληλα επίπεδα σε τμήματα ανάλογα.

12.5 Γωνία δύο ευθειών – Ορθογώνιες ευθείες

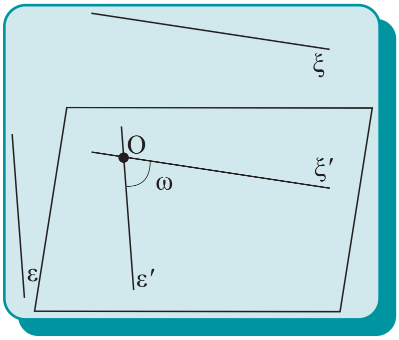
• Καθετότητα ασύμβατων ευθειών

Θεωρούμε δύο ασύμβατες ευθείες ε και ξ (σχ.20). Από τυχαίο σημείο Ε της ευθείας ε κατασκευάζουμε την ευθεία ε′, παράλληλη της ξ. Οι ευθείες ε και ε′, τέμνονται στο σημείο Ε, άρα είναι συνεπίπεδες. Η γωνία ω που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ε΄ λέγεται ***γωνία των δύο ασύμβατων*** ευθειών ε και ξ.

Η γωνία αυτή δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου Ε, γιατί αν φέρουμε την ε″ παράλληλη στην ξ από άλλο σημείο Ε΄ της ε, τότε οι ευθείες ε, ε′ και ε″ είναι συνεπίπεδες και επιπλέον οι ευθείες ε′ και ε″, ως παράλληλες, θα σχηματίζουν με την ε τις εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. Άρα, η γωνία των ασύμβατων ευθειών δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου Ε.



Σχήμα 20



Σχήμα 21

Αποδεικνύεται ότι η γωνία των ασύμβατων ευθειών μπορεί να κατασκευασθεί και ως εξής: Θεωρούμε ένα σημείο Ο του χώρου (σχ.21). Στο επίπεδο (Ο,ε) κατασκευάζουμε την ε′ παράλληλη της ευθείας ε από το Ο. Στο επίπεδο (Ο, ξ) κατασκευάζουμε την ξ΄, παράλληλη της ευθείας ξ από το Ο. Έτσι, στο Ο έχουμε τις τεμνόμενες, επομένως συνεπίπεδες, ευθείες ε′ και ξ′. Η γωνία των ευθειών αυτών είναι η γωνία των δύο ασύμβατων. Δύο ασύμβατες ευθείες λέγονται ***ορθογώνιες*** ή ***ασυμβάτως κάθετες***, όταν η γωνία τους είναι ορθή.

• Καθετότητα ευθείας και επιπέδου

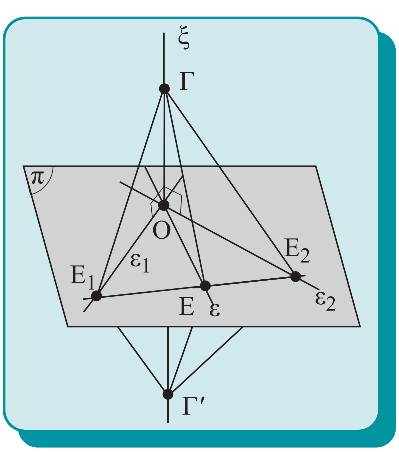
Ορισμός

Μία ευθεία λέγεται *κάθετη* σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της.

Επίσης, το επίπεδο λέγεται ***κάθετο στην ευθεία***. Κάθε ευθεία που δεν είναι κάθετη ούτε παράλληλη σε ένα επίπεδο λέγεται ***πλάγια*** ή λέμε ότι ***τέμνει πλάγια*** το επίπεδο.

Θεώρημα Ι

Αν μία ευθεία είναι κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες ενός επιπέδου στο κοινό τους σημείο, τότε είναι κάθετη σε όλες τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το ίχνος της.



Σχήμα 22

Απόδειξη

Αν ε_1 και ε_2 είναι οι τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου π (σχ.22), Ο το κοινό τους σημείο και ξ η κάθετη στις ε_1 και ε_2 στο Ο, θα αποδείξουμε ότι η ξ είναι κάθετη στην τυχαία ευθεία ε του επιπέδου π που διέρχεται από το Ο. Θεωρούμε τα σημεία Γ και Γ΄ της ευθείας ξ συμμετρικά ως προς Ο. Επίσης, θεωρούμε τα σημεία E_1, E_2 και Ε που είναι συνευθειακά και βρίσκονται στις ευθείες ε_1, ε_2 και ε αντίστοιχα. Τότε, έχουμε $ΓE_1=Γ'E_1$ και $ΓE_2=Γ'E_2$, διότι οι ευθείες OE_1 και OE_2 είναι μεσοκάθετοι του ΓΓ′. Τα τρίγωνα $ΓE_1E_2$ και $Γ'E_1E_2$ είναι ίσα, άρα οι γωνίες $Γ\hat{E}_1E_2$ και $Γ'\hat{E}_1E_2$ είναι ίσες. Τέλος, τα τρίγωνα $ΓE_1E$ και $Γ'E_1E$ είναι ίσα, άρα ΓΕ = Γ′Ε. Τότε, το τρίγωνο ΓΕΓ′ είναι ισοσκελές και η ΕΟ είναι διάμεσος, άρα και ύψος. Δηλαδή, η ευθεία ε είναι κάθετη στην ξ.

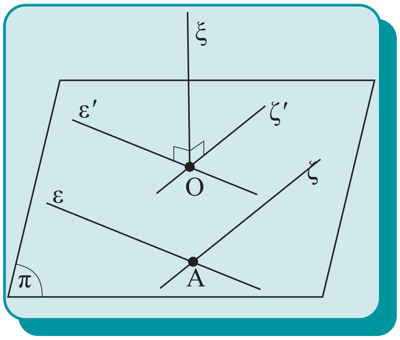
Θεώρημα ΙΙ

Μία ευθεία ορθογώνια σε δύο τεμνόμενες ευθείες είναι κάθετη στο επίπεδο που αυτές ορίζουν.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η ευθεία ξ, που είναι ορθογώνια στις ε και ζ (σχ.23), τέμνει το επίπεδο π = (ε, ζ). Έστω ότι η ξ δεν το τέμνει. Από τυχαίο σημείο Μ της ξ φέρουμε τις παράλληλες στις ε και ζ, οι οποίες μαζί με την ξ θα ανήκουν στο παράλληλο επίπεδο του π από το Μ. Αλλά τότε σε αυτό το επίπεδο έχουμε δύο κάθετες στην ξ από το Μ, που είναι άτοπο. Άρα η ξ τέμνει το π, έστω σε σημείο Ο. Από το Ο φέρουμε τις ευθείες ε΄και ζ΄ παράλληλες των ε και ζ. Η ξ τότε είναι κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου π, άρα είναι κάθετο στο π.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση:



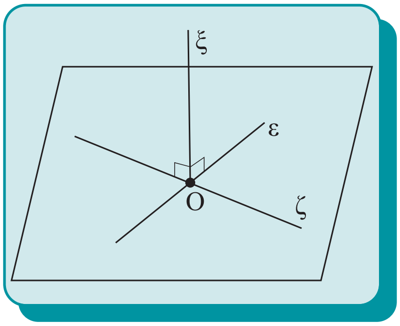
Σχήμα 23

Πρόταση Ι

Αν ε και ζ είναι δύο τεμνόμενες ευθείες και η ευθεία ξ είναι ορθογώνια στην ε και κάθετη στην ζ, τότε η ξ είναι κάθετη στο επίπεδο (ε,ζ).

Η καθετότητα ευθείας ξ και επιπέδου π συμβολίζεται με ξ⊥π.

Τα θεωρήματα Ι και ΙΙ και η παραπάνω πρόταση αποτελούν κριτήρια για τον έλεγχο της καθετότητας ευθείας και επιπέδου. Αρκεί δηλαδή να αποδείξουμε ότι **μία ευθεία είναι ορθογώνια ή κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου**.



Σχήμα 24

Θεώρημα ΙΙΙ

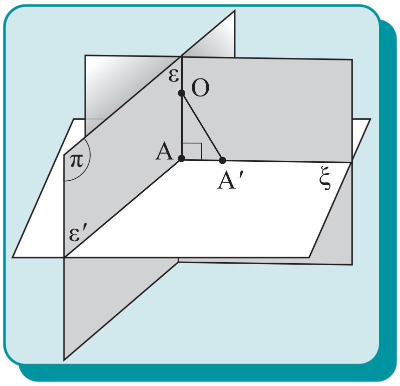
Υπάρχει μοναδικό επίπεδο κάθετο σε ευθεία ξ, που διέρχεται από σημείο Ο του χώρου.

Απόδειξη

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Το σημείο Ο ανήκει στην ευθεία ξ. Σε δύο επίπεδα που περιέχουν την ευθεία ξ κατασκευάζουμε δύο ευθείες ε και ζ κάθετες στην ξ (σχ.24), που διέρχονται από το Ο. Αυτές ορίζουν επίπεδο κάθετο στην ευθεία ξ. Το επίπεδο αυτό είναι μοναδικό, γιατί αν υπήρχε και δεύτερο θα περιείχε τις ευθείες ε και ζ, άρα τα επίπεδα θα ταυτίζονταν.

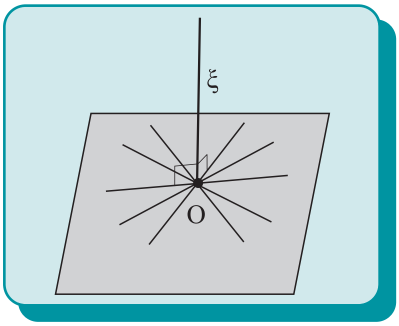
ii) Το σημείο Ο είναι εκτός της ξ. Στο επιπέδο (Ο, ξ) φέρουμε την ευθεία ε (σχ.25), κάθετη στην ξ και έστω Α το σημείο τομής των ευθειών αυτών. Επίσης, σε κάποιο άλλο επί-



Σχήμα 25

πεδο, που περιέχει την ξ, φέρουμε ευθεία ε′ κάθετη στην ξ στο Α. Οι ευθείες ε και ε΄ ορίζουν επίπεδο π κάθετο στην ξ, που περιέχει το Ο.

Έστω ότι υπάρχει και δεύτερο επίπεδο π′ κάθετο στην ξ που διέρχεται από το Ο. Το π′ δε μπορεί να τέμνει την ξ στο Α, γιατί τότε θα υπήρχαν δύο επίπεδα κάθετα στην ξ από το Α, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, το π΄ θα τέμνει την ξ σε άλλο σημείο, έστω το Α΄. Τότε όμως, στο επίπεδο (Ο,ξ) θα είχαμε δύο κάθετες στην ευθεία ξ, από το σημείο Ο εκτός αυτής, που είναι άτοπο.

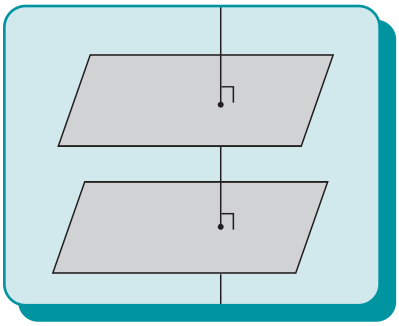


Σχήμα 26

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Το σύνολο των ευθειών του χώρου, που τέμνουν κάθετα μία ευθεία ξ σε ένα σημείο της Ο, βρίσκονται στο κάθετο επίπεδο της ξ στο Ο (σχ.26).

ii) Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα μεταξύ τους (σχ.27).

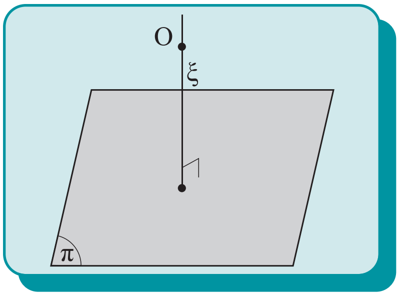


Σχήμα 27

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση ΙΙ

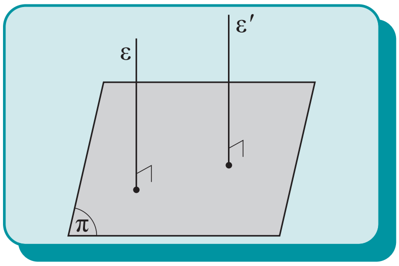
Υπάρχει μοναδική ευθεία ξ κάθετη σε επίπεδο π, που διέρχεται από σημείο Ο του χώρου (σχ. 28).



Σχήμα 28

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες (σχ.29).



Σχήμα 29

Θεώρημα των τριών καθέτων

i) Αν η ευθεία ΑΒ (σχ.30) είναι κάθετη σε επίπεδο π (Β σημείο του π) και η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη σε ευθεία ε του π, (Γ σημείο της ε), τότε η ΑΓ είναι κάθετη στην ευθεία ε.

ii) Αν η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη σε επίπεδο π και η ευθεία ΑΓ είναι κάθετη σε ευθεία ε του π, τότε η ΒΓ είναι κάθετη στην ευθεία ε.

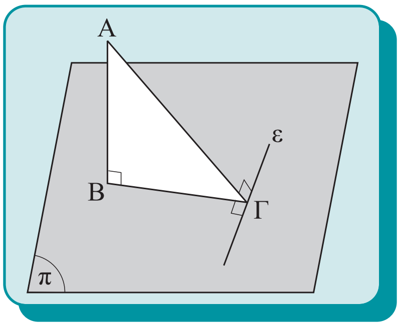
iii) Αν η ευθεία ΑΓ είναι κάθετη στην ε, η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη στην ε και η ΑΒ είναι κάθετη στη ΒΓ, τότε η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο π.

Απόδειξη

i) Η ευθεία ΑΒ είναι ορθογώνια και η ΒΓ είναι κάθετη στην ε (σχ.30), άρα το επίπεδο (ΑΒ, ΒΓ) είναι κάθετο στην ε και Γ είναι το ίχνος της ε πάνω σε αυτό. Τότε, κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος Γ είναι κάθετη στην ε. Άρα, η ΑΓ είναι κάθετη στην ε.

ii) Η ευθεία ΑΒ είναι ορθογώνια και η ΑΓ κάθετη στην ευθεία ε. Επομένως, η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο (ΑΒ, ΑΓ) στο Γ, σύμφωνα με την πρόταση Ι. Άρα η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ του επιπέδου (ΑΒ, ΑΓ), που διέρχεται από το ίχνος της Γ.

iii) Η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο (ΑΓ, ΒΓ), γιατί η ε είναι κάθετη στις ευθείες του ΑΓ και ΒΓ. Άρα η ευθεία ΑΒ του επιπέδου (ΑΓ, ΒΓ) είναι ορθογώνια στην ευθεία ε. Τέλος, η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο π, γιατί είναι ορθογώνια στην ε και κάθετη στη ΒΓ.



Σχήμα 30

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να δείξετε στην αίθουσα διδασκαλίας δύο ευθείες ασυμβάτως κάθετες.*

2. *Να δείξετε μία ευθεία κάθετη στο επίπεδο του δαπέδου.*

3. *Να θεωρήσετε έναν τοίχο της αίθουσας διδασκαλίας και να γίνει πρακτική εφαρμογή των τριών εκφράσεων του Θεωρήματος των τριών καθέτων.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να αποδειξετε ότι μία ευθεία και ένα επίπεδο κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα ή ότι το επίπεδο περιέχει την ευθεία.*

2. *Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, Μ το μέσο της βάσης ΒΓ και ΑΝ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι*

i) η ευθεία ΜΝ είναι κάθετη στην ΒΓ,

ii) η ΒΓ είναι κάθετη στο επίπεδο (Α,Μ,Ν).

3. *Να αποδείξετε ότι αν δύο ευθείες είναι ορθογώνιες, τότε υπάρχει επίπεδο που περιέχει τη μία και είναι κάθετο στην άλλη, και αντίστροφα.*

4. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε που διέρχεται από σημείο Ο, είναι παράλληλη σε επίπεδο π και ορθογώνια σε ευθεία ε του π.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω (Κ, ρ) κύκλος, ΑΚ ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο επίπεδο π του κύκλου και Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ.*

2. *Από το κέντρο Μ ορθογωνίου ΑΒΓΔ φέρουμε την ευθεία ε κάθετη στο επίπεδο του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που ορίζεται από το τυχαίο σημείο της ε και το μέσο Ν της ΑΒ είναι κάθετη στην ΑΒ και ορθογώνια στην ΓΔ.*

3. *Σε επίπεδο π φέρουμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Φέρουμε, επίσης, το τμήμα ΑΣ, κάθετο στο επίπεδο π στο Α, το τμήμα ΑΓ κάθετο στην ευθεία ΣΒ στο Γ και το τμήμα ΑΝ κάθετο στην ευθεία ΣΜ στο Ν. Να αποδείξετε ότι*

i) $\Sigma\hat{M}B = 90°$,

ii) $\Sigma A^2 = \Sigma M \cdot \Sigma N = \Sigma B \cdot \Sigma \Gamma$,

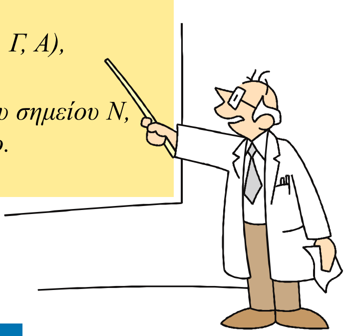
iii) τα τρίγωνα ΣΓΝ και ΣΜΒ είναι όμοια,

iv) $\Sigma\hat{\Gamma}N = 90°$,

v) η ΣΓ είναι κάθετη στο επίπεδο (Ν, Γ, Α),

vi) $\Gamma\hat{N}A = 90°$,

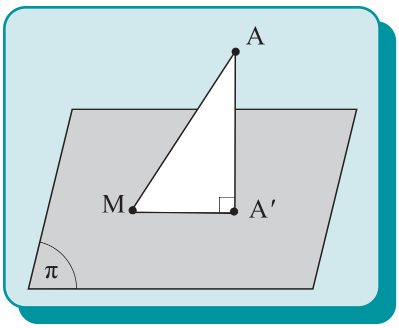
vii) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ν, αν το Μ κινείται στον παραπάνω κύκλο.



12.6 Απόσταση σημείου από επίπεδο - Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων

Ορισμός I

Ορθή προβολή **ή** ***προβολή*** **Α΄ σημείου Α στο επίπεδο π λέγεται το σημείο τομής του επιπέδου π με την κάθετο από το Α στο επίπεδο π (σχ 31).**

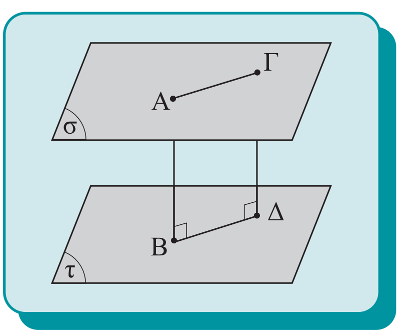


Σχήμα 31

Αν σημείο Α βρίσκεται εκτός επιπέδου π, Α′ είναι η προβολή του Α στο π και Μ τυχαίο σημείο του π (σχ.31), τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΑ′Μ προκύπτει ότι η κάθετη πλευρά ΑΑ′ είναι μικρότερη από την υποτείνουσα ΑΜ. Δηλαδή, το τμήμα ΑΑ′ είναι το μικρότερο από τα τμήματα με αρχή το σημείο Α και τέλος το τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου π.
Μπορούμε, επομένως, να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός II

Απόσταση σημείου Α από επίπεδο π **λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ′, όπου Α′ η προβολή του Α στο επίπεδο π.**



Σχήμα 32

Αν θεωρήσουμε δύο παράλληλα επίπεδα σ και τ και Β, Δ (σχ.32) είναι οι προβολές των σημείων Α, Γ του σ στο τ, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλα μεταξύ τους, ως κάθετα στο τ. Επίσης, τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι παράλληλα (θεώρημα IV §.12.4), άρα το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα.
Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός III

Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων **λέγεται η απόσταση ενός σημείου του ενός επιπέδου από το άλλο** (σχ.32).

Ορισμός IV

Το επίπεδο που είναι κάθετο στο μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος λέγεται ***μεσοκάθετο επίπεδο*** **του ευθύγραμμου τμήματος.**

Ορισμός V

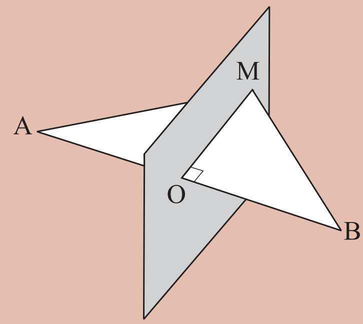
Το μήκος του τμήματος της κοινής καθέτου δύο ασύμβατων ευθειών, που περιλαμβάνεται μεταξύ τους, λέγεται ***απόσταση των ασύμβατων ευθειών*****.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι το μεσοκάθετο επίπεδο του ευθύγραμμου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω Μ το τυχαίο σημείο του χώρου που ισαπέχει από τα άκρα Α και Β του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (σχ.33). Το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές, επομένως η διάμεσος ΜΟ είναι και ύψος του τριγώνου. Δηλαδή, το Μ είναι σημείο της ευθείας ΟΜ που είναι κάθετη στο μέσο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το σύνολο των ευθειών αυτών ανήκουν στο επίπεδο που είναι κάθετο στο ΑΒ, στο μέσο Ο.



Σχήμα 33

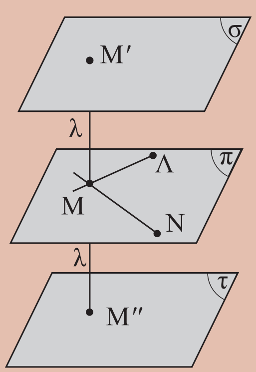
Αντίστροφα, αν Μ είναι το τυχαίο σημείο του μεσοκάθετου επιπέδου στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα, επομένως οι υποτείνουσες ΑΜ και ΒΜ είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από δύο παράλληλα επίπεδα είναι το μεσοπαράλληλο επίπεδο.

Απόδειξη – Κατασκευή

Αν σ και τ είναι δύο παράλληλα επίπεδα που απέχουν απόσταση 2λ, τα σημεία Μ του χώρου που ισαπέχουν από τα σ και τ απέχουν απόσταση λ από αυτά, επομένως βρίσκονται στο επίπεδο π που ισαπέχει από τα σ και τ.



Σχήμα 34

Αντίστροφα, αν Λ, Μ και Ν είναι τρία σημεία του τόπου μη συνευθειακά, τότε επειδή αυτά ισαπέχουν από το επίπεδο σ, οι τεμνόμενες ευθείες ΛΜ και ΝΜ είναι παράλληλες στο σ, άρα το επίπεδο που ορίζουν είναι παράλληλο στο σ, επομένως και στο τ. Επειδή τα σημεία Λ, Μ και Ν ισαπέχουν από τα σ και τ, ανήκουν σε επίπεδο που ισαπέχει από τα σ και τ και είναι παράλληλο σε αυτά.

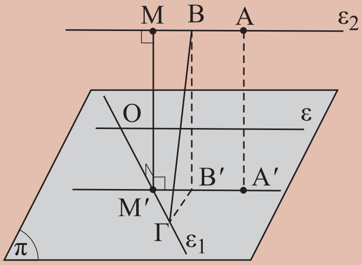
Το επίπεδο αυτό ονομάζεται ***μεσοπαράλληλο*** επίπεδο των σ και τ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Υπάρχει μοναδική ευθεία ε κάθετη σε δύο ασύμβατες ευθείες.

Απόδειξη

Έστω ε_1, ε_2 δύο ασύμβατες ευθείες και από τυχαίο σημείο Ο της ε_1 φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη στην ε_2 (σχ.35). Οι ευθείες ε και ε_1 ορίζουν επίπεδο π. Προφανώς, η ευθεία ε_2 εί-



Σχήμα 35

ναι παράλληλη στο π. Προβάλλουμε ένα σημείο Α της $ε_2$ στο επίπεδο π και έστω Α′ η προβολή του. Από το Α′ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $ε_2$, η οποία ανήκει στο επίπεδο π και τέμνει την $ε_1$ σε σημείο Μ′.

Οι ευθείες $ε_2$ και Α′Μ′, ως παράλληλες, ορίζουν επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η ΑΑ′ και η παράλληλη από το Μ′ στην ΑΑ′, η οποία θα τέμνει την $ε_2$ σε σημείο Μ. Η ευθεία ΜΜ′ είναι κάθετη στις ευθείες $ε_1$ και Α′Μ′, γιατί είναι κάθετη στο επίπεδο π. Όμως, η Α′Μ′ είναι παράλληλη στην $ε_2$, άρα η ευθεία ΜΜ′ είναι η κοινή κάθετος των $ε_1$ και $ε_2$.

Η ευθεία αυτή είναι μοναδική, γιατί αν υπήρχε και δεύτερη ευθεία ΝΝ΄ κάθετη στις $ε_1$ και $ε_2$, τότε οι παράλληλες ΜΜ′ και ΝΝ′ θα όριζαν ένα επίπεδο στο οποίο θα ανήκαν επίσης οι ασύμβατες $ε_1$ και $ε_2$, που είναι άτοπο.

Θα αποδείξουμε ότι το τμήμα ΜΜ′ είναι μικρότερο από το τυχαίο τμήμα ΒΓ, που ορίζεται μεταξύ δύο σημείων Β και Γ των $ε_1$ και $ε_2$ αντίστοιχα. Προβάλλουμε το σημείο Β στο π και έστω Β′ η προβολή του. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΒ′Γ προκύπτει ότι η υποτείνουσα ΒΓ είναι μεγαλύτερη από την κάθετη πλευρά ΒΒ′. Αλλά η ΒΒ′ είναι ίση με την ΜΜ′, άρα η ΒΓ είναι μεγαλύτερη από την ΜΜ′.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ενός επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από δύο σημεία που δεν ανήκουν σε αυτό.*

2. *Δίνονται δύο σημεία Α και Β και ευθεία ε, ασύμβατη με την ΑΒ. Να βρείτε σημείο Μ της ε τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ισοσκελές.*

3. *Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία ε που τέμνει πλάγια ένα επίπεδο π είναι κάθετη σε μία μόνο ευθεία του π.*

4. *Έστω επίπεδο π, ευθεία ε του π και Α σημείο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής Α′ του σημείου Α στο επίπεδο π, όταν το επίπεδο περιστρέφεται γύρω από την ευθεία ε.*

5. *Δίνεται επίπεδο π, σημείο Α του π και σημείο Ο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής του σημείου Ο στις ευθείες του π που περνάνε από το σημείο Α.*

6. *Δίνεται επίπεδο π, ευθεία ε του π και σημείο Ο εκτός του π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της προβολής του σημείου Ο στις ευθείες του π που είναι παράλληλες στην ε.*

7. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τις κορυφές ενός τριγώνου.*

8. *Να βρείτε σημείο του χώρου που ισαπέχει από τέσσερα σημεία, ανά τρία μη συνευθειακά.*

9. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου τα οποία απέχουν απόσταση λ από επίπεδο π.*

10. *Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Μ, σε τυχαία θέση. Να βρείτε επίπεδο που να διέρχεται από το Μ και να ισαπέχει από τα Α, Β και Γ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν Α και Β είναι τυχαία σημεία δύο ασύμβατων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ αντίστοιχα, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ για το οποίο ισχύει* $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = λ$*, όπου λ γνωστός αριθμός.*

2. *Να κατασκευάσετε ευθεία ε που τέμνει τρεις ασύμβατες ανά δύο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ σε σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, ώστε* $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = λ$*, όπου λ γνωστός αριθμός.*

3. *Δίνεται επίπεδο π και σημεία Α, Β εκτός του π. Να κατασκευάσετε σημείο του π, το οποίο να απέχει από τα σημεία Α και Β αποστάσεις μ και ν αντίστοιχα.*

Σύνθετα θέματα

1. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων ενός επιπέδου π, τα οποία βλέπουν υπό ορθή γωνία δύο σημεία που δε βρίσκονται στο επίπεδο π.*

2. *Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση σημείου Α από τα σημεία ενός κύκλου, όταν το Α δεν ανήκει στο επίπεδο του κύκλου.*

3. *Να κατασκευάσετε επίπεδο που να περνάει από ευθεία ε και να ισαπέχει από δύο σημεία Α και Β εκτός της ε.*

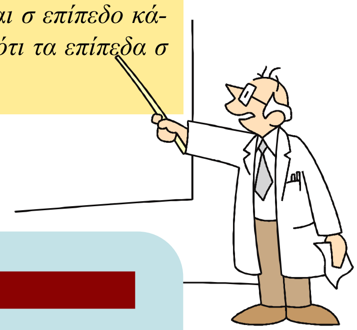
4. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του χώρου, για τα οποία ισχύει η σχέση $ΜΑ^2 – ΜΒ^2 = λ^2$, όπου Α και Β σταθερά σημεία και λ σταθερό μήκος.*

5. *Να αποδείξετε ότι για να είναι ορθογώνια δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ πρέπει και αρκεί να είναι:*
$ΓΑ^2 – ΓΒ^2 = ΔΑ^2 – ΔΒ^2$.

6. *Να αποδείξετε ότι αν Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία που δεν είναι συνεπίπεδα και δύο από τα ζεύγη τμημάτων (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΔΒ), (ΑΔ, ΓΒ) είναι ορθογώνια, τότε και το τρίτο ζεύγος είναι ορθογώνιο.*

7. *Να αποδείξετε ότι αν ΑΒΓΔ είναι στρεβλό τετράπλευρο, τότε τα έξι μεσοκάθετα επίπεδα στις πλευρές και τις διαγωνίους του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

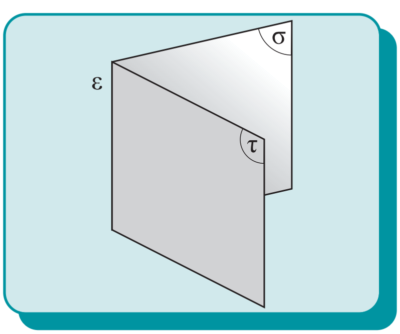
8. *Δίνεται επίπεδο π, ευθεία ε του π και σημείο Ο εκτός του π. Έστω Μ τυχαίο σημείο της ε και σ επίπεδο κάθετο στην ΟΜ στο Ο. Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα σ διέρχονται από σταθερό σημείο του π.*



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Απόσταση σημείου από επίπεδο είναι η απόσταση του σημείου από την προβολή του στο επίπεδο.
- Από τα τμήματα που έχουν αρχή ένα σημείο και τέλος τυχαίο σημείο ενός επιπέδου, το κάθετο είναι το μικρότερο από όλα τα άλλα.
- Για κάθε δύο ασύμβατες ευθείες υπάρχει μοναδική κοινή κάθετη ευθεία.

12.7 Δίεδρη γωνία – Αντίστοιχη επίπεδη μίας δίεδρης – Κάθετα επίπεδα

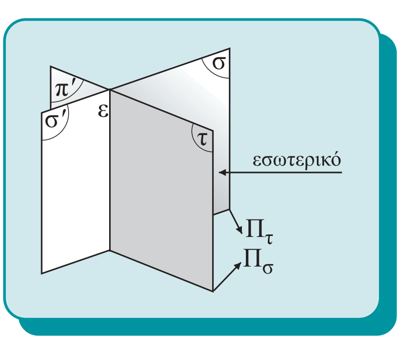


Σχήμα 36

Ορισμός Ι

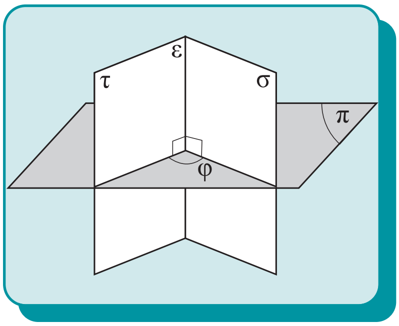
Δίεδρη γωνία **λέγεται το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα, σ και τ, με κοινή αρχική ευθεία ε και τη συμβολίζουμε με ε(σ,τ).**

Τα ημιεπίπεδα σ και τ (σχ.36) λέγονται ***έδρες*** της διέδρης και η αρχική ευθεία λέγεται ***ακμή*** της διέδρης γωνίας.
Το επίπεδο του ημιεπιπέδου σ χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους. Καλούμε $Π_τ$ τον ημιχώρο στον οποίο βρίσκεται το ημιεπίπεδο τ (σχ. 37). Επίσης, το επίπεδο του ημιεπιπέδου τ χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους. Καλούμε $Π_σ$ τον ημιχώρο στον οποίο βρίσκεται το ημιεπίπεδο σ. Η τομή των περιοχών $Π_σ$ και $Π_τ$ λέγεται ***κυρτή δίεδρη*** γωνία. ***Εσωτερικό*** της διέδρης γωνίας ε(σ,τ) θα λέμε τα σημεία της κυρτής διέδρης που δεν ανήκουν στις έδρες ή στην ακμή της. Τα σημεία του χώ-



Σχήμα 37

ρου, που δεν είναι εσωτερικά της δίεδρης, δεν ανήκουν στις έδρες ούτε στην ακμή της, θα λέγονται ***εξωτερικά*** σημεία της δίεδρης. Η δίεδρη γωνία που έχει την ίδια ακμή και τις ίδιες έδρες αλλά περιέχει τα εξωτερικά σημεία της αρχικής δίεδρης λέγεται ***μη κυρτή*** ή ***αντικείμενη*** της αρχικής.
Τα αντικείμενα ημιεπίπεδα, σ΄ και τ΄ μιας δίεδρης γωνίας ε(σ,τ) σχηματίζουν μία άλλη δίεδρη γωνία (σχ.37), με την ίδια ακμή ε, που λέγεται ***κατακορυφήν*** της αρχικής και συμβολίζεται με ε(σ′,τ′).

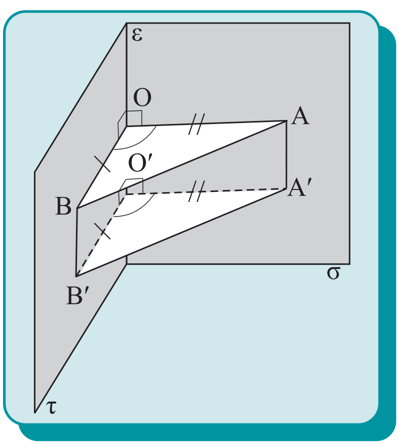


Σχήμα 38

Ορισμός ΙΙ

Η τομή μιας δίεδρης γωνίας με επίπεδο κάθετο στην ακμή της είναι μία επίπεδη γωνία στο κάθετο επίπεδο, η οποία λέγεται *αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης* (σχ.38)**.**

Αν θεωρήσουμε δύο αντίστοιχες επίπεδες γωνίες $A\hat{O}B$ και $A'\hat{O'}B'$ της δίεδρης γωνίας ε(σ,τ), με $OA = O'A'$ και $OB = O'B'$ (σχ.39), προκύπτει ότι τα $OO'B'B$ και $OO'A'A$ είναι ορθογώνια, άρα $AA'//=BB'$. Αλλά από το παραλληλόγραμμο $AA'B'B$ έχουμε $AB=A'B'$, επομένως τα τρίγωνα OAB και $O'A'B'$ είναι ίσα, άρα και οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $A'\hat{O'}B'$ είναι ίσες. Από αυτά προκύπτει ότι δύο τυχαίες επιπέδες γωνίες μίας δίεδρης γωνίας είναι ίσες.



Σχήμα 39

Ορισμός ΙΙΙ

Δύο δίεδρες γωνίες λέγονται *ίσες*, αν τοποθετώντας τη μία πάνω στην άλλη εφαρμόζουν ακριβώς.

Δίεδρη γωνία δύο τεμνόμενων επιπέδων λέγεται η μικρότερη ή ίση της ορθής δίεδρη γωνία που σχηματίζουν τα δύο επίπεδα. ***Γωνία δύο επιπέδων*** λέγεται η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης των δύο επιπέδων.

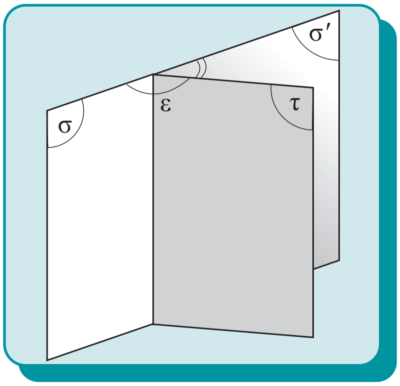
Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα I

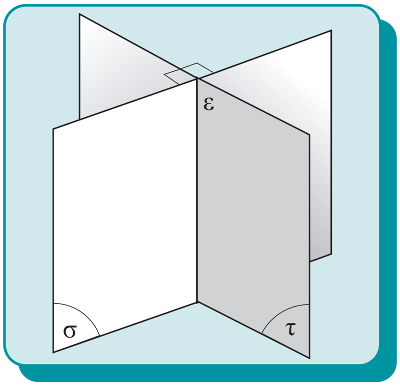
Αν δύο δίεδρες γωνίες είναι ίσες, τότε και οι αντίστοιχες επίπεδες γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα.

Με αυτό το θεώρημα μεταφέρουμε στις δίεδρες όλους τους ορισμούς τα μέτρα και τις ιδιότητες των επίπεδων γωνιών. Έτσι έχουμε:

- **Δύο δίεδρες γωνίες, που έχουν κοινή ακμή, μία έδρα κοινή και τις άλλες εκατέρωθεν της κοινής, λέγονται** *εφεξής*.
- **Δύο εφεξής δίεδρες των οποίων οι μη κοινές έδρες είναι αντικείμενα ημιεπίπεδα λέγονται** *παραπληρωματικές* (σχ. 40).
- **Μία δίεδρη γωνία λέγεται** *οξεία, ορθή* **ή** *αμβλεία*, **αν η αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.**
- **Όταν δύο επίπεδα τεμνόμενα σχηματίζουν μία από τις τέσσερις δίεδρες γωνίες ορθή** (σχ. 41)**, τότε και οι τέσσερις είναι ορθές.**



Σχήμα 40



Σχήμα 41

Ορισμός IV

Δύο επίπεδα που σχηματίζουν μία ορθή δίεδρη λέγονται ***κάθετα επίπεδα*.**

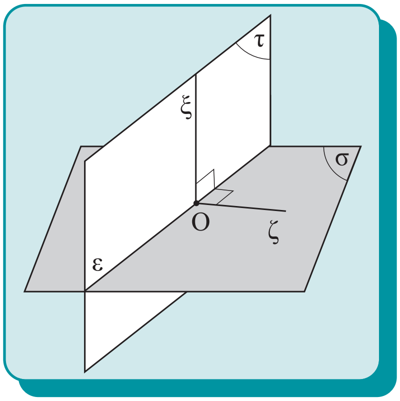
Την καθετότητα δύο επιπέδων σ και τ τη συμβολίζουμε με σ⊥τ.

Θεώρημα II

Αν μία ευθεία ξ είναι κάθετη σε ένα επίπεδο σ, τότε κάθε επίπεδο που περιέχει την ξ είναι κάθετο στο σ.

Απόδειξη

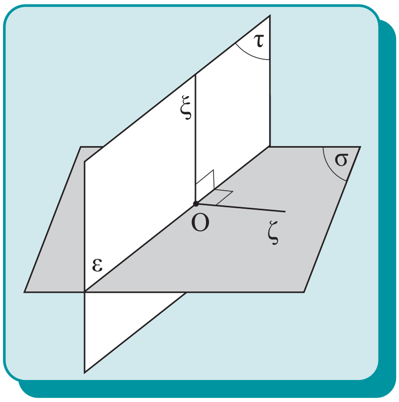
Έστω Ο το κοινό σημείο της ξ με το επίπεδο σ (σχ.42), ε η ευθεία τομής των επιπέδων σ και τ και ζ ευθεία του σ κάθετη στην ε, στο σημείο Ο. Η γωνία των ευθειών ξ και ζ είναι η αντίστοιχη της δίεδρης των επιπέδων σ και τ, αφού οι ευθείες ξ και ζ είναι κάθετες στην ακμή ε. Επειδή όμως η ευθεία ξ είναι κάθετη στο επίπεδο σ, θα είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που περνάει από το Ο, άρα και στη ζ. Επομένως, η επίπεδη γωνία των ευθειών ξ και ζ είναι ορθή.



Σχήμα 42

Θεώρημα ΙΙΙ

Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα, κάθε ευθεία του ενός κάθετη στην τομή τους είναι κάθετη στο άλλο.



Σχήμα 42α

Απόδειξη

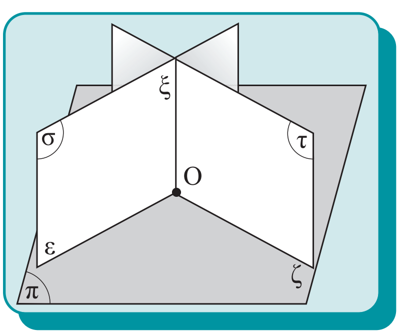
Έστω ξ ευθεία του επιπέδου τ (σχ.42α), κάθετη στην κοινή ευθεία ε των κάθετων επιπέδων σ και τ και Ο το ίχνος της ξ στο επίπεδο σ. Έστω ζ η ευθεία του επιπέδου σ που είναι κάθετη στην ε και περνάει από το Ο. Οι ευθείες ξ και ζ ορίζουν την αντίστοιχη επίπεδη γωνία της δίεδρης που έχει ως έδρες δύο από τα τέσσερα ημιεπίπεδα των επιπέδων σ και τ. Επειδή τα επίπεδα είναι κάθετα, η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης είναι ορθή. Άρα, οι ευθείες ξ και ζ είναι κάθετες. Τότε η ευθεία ξ είναι κάθετη σε δύο ευθείες, τις ε και ζ, του επιπέδου σ, άρα η ευθεία ξ είναι κάθετη στο σ.

Πορισματα

i) Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε η ευθεία που είναι κάθετη στο πρώτο και διέρχεται από σημείο του δευτέρου, βρίσκεται στο δεύτερο επίπεδο.

ii) Αν μία ευθεία ξ είναι κάθετη σε επίπεδο σ, τότε κάθε επίπεδο παράλληλο στην ξ είναι κάθετο στο επίπεδο σ.

iii) Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα είναι κάθετα σε επίπεδο π, τότε η τομή τους είναι κάθετη στο π.



Σχήμα 43

Απόδειξη

Η απόδειξη των πορισμάτων i) και ii) είναι προφανής.

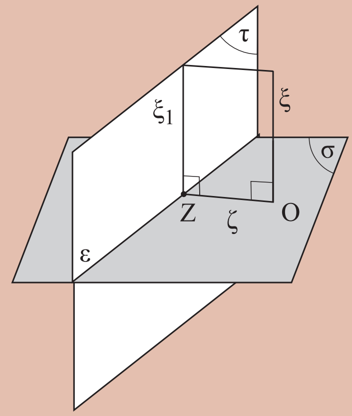
iii) Τα επίπεδα σ και τ τέμνουν το π κατά τις ευθείες ε και ζ αντίστοιχα. Έστω Ο το κοινό σημείο των ε και ζ (σχ.43). Τότε, η ευθεία που είναι κάθετη στο π και περνάει από το Ο, σύμφωνα με το πόρισμα (i), ανήκει στο επίπεδο σ. Αλλά για τον ίδιο λόγο ανήκει και στο τ. Άρα είναι η κοινή ευθεία των δύο επιπέδων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα, τότε κάθε ευθεία ξ κάθετη στο ένα είναι παράλληλη στο άλλο ή ανήκει σε αυτό.

Απόδειξη

Από το σημείο τομής Ο της ευθείας ξ και του επιπέδου σ φέρουμε την ευθεία ζ (σχ. 44), κάθετη στην κοινή ευθεία ε των δύο επιπέδων. Έστω Ζ το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ. Η ευθεία ζ είναι κάθετη στο επίπεδο τ, γιατί από την κατασκευή είναι κάθετη στην τομή των δύο κάθετων επιπέδων. Το επίπεδο των τεμνόμενων ευθειών ξ και ζ τέμνει το τ κατά την ευθεία $ξ_1$ που είναι κάθετη στην ζ λόγω της καθετότητας του επιπέδου τ με την ευθεία ξ. Οι ευθείες ξ και $ξ_1$ είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες στην ευθεία ζ και βρίσκονται στο επίπεδο $(ξ, ξ_1)$. Αν το ίχνος Ο της ευθείας ξ στο σ είναι σημείο της ευθείας ε, τότε η ευθεία ξ ανήκει στο τ.



Σχήμα 44

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πώς βρίσκουμε την αντίστοιχη επίπεδη μίας δίεδρης γωνίας;*

2. *Πώς κατασκευάζεται το επίπεδο που διχοτομεί μία δίεδρη γωνία;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε επίπεδο, που διέρχεται από σημείο Ο και είναι κάθετο σε δοσμένο επίπεδο π.*

2. *Να αποδείξετε ότι αν ένα επίπεδο είναι κάθετο στην ακμή μιας δίεδρης, είναι κάθετο και στις έδρες.*

3. *Στην έδρα σ δίεδρης ε(σ,τ) δίνονται δύο σημεία Β, Γ εκτός της ε. Να βρεθεί σημείο Α της έδρας τ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο Α.*

4. *Από δοσμένο σημείο Ο να κατασκευάσετε επίπεδο π κάθετο σε επίπεδο σ και παράλληλο σε ευθεία ε.*

5. *Δίνεται ευθεία ε και επίπεδο π. Να κατασκευάσετε επίπεδο που διέρχεται από την ευθεία ε και είναι κάθετο στο π.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- Ίσες δίεδρες γωνίες έχουν ίσες αντίστοιχες επίπεδες και αντίστροφα.
- Κάθε επίπεδο που διέρχεται από ευθεία ξ κάθετη σε επίπεδο π είναι κάθετο στο π.
- Δύο τεμνόμενα επίπεδα κάθετα στο π τέμνονται σε ευθεία κάθετη στο π.

12.8 Προβολή σημείου και ευθείας σε επίπεδο – Γωνία ευθείας και επιπέδου

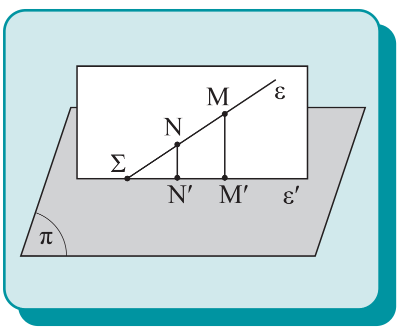
• Προβολή σημείου και ευθείας σε επίπεδο

Έχουμε ήδη ορίσει την προβολή σημείου σε επίπεδο στην § 12.5. Γενικεύοντας αυτόν τον ορισμό έχουμε:

Ορισμός Ι

***Ορθή προβολή* ή απλώς *προβολή ενός σχήματος σε επίπεδο π* λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των ορθών προβολών όλων των σημείων του σχήματος στο επίπεδο.**

Το επίπεδο π λέγεται ***επίπεδο προβολής*.**



Σχήμα 45

Θεώρημα Ι

Η προβολή ευθείας ε σε επίπεδο π, που δεν είναι κάθετο σε αυτή, είναι ευθεία.

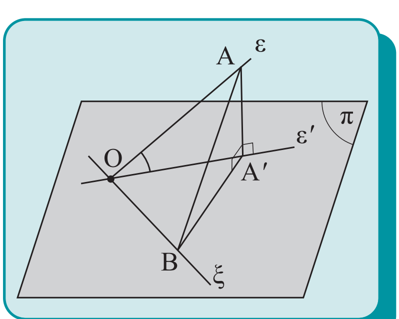
Απόδειξη

Αν M′ είναι η προβολή σημείου M της ευθείας ε στο επίπεδο π, η ευθεία MM′ (σχ. 45) είναι κάθετη στο π, άρα το επίπεδο τ=(ε, MM′) είναι κάθετο στο π και έστω ε′ η τομή των δύο επιπέδων. Αν προβάλλουμε το τυχαίο σημείο N της ε (διάφορο του M), η προβάλλουσα ευθεία είναι παράλληλη στην MM′ και ένα σημείο της (το N) ανήκει στο τ, άρα θα ανήκει στο τ και θα τέμνει το σ σε σημείο N′ της ευθείας ε′. Άρα η προβολή της ε είναι η ευθεία ε′.

• Γωνία ευθείας και επιπέδου

Θεώρημα ΙΙ

Η γωνία που σχηματίζει μία ευθεία ε, που τέμνει ένα επίπεδο π, με την προβολή της ε′, είναι η μικρότερη από τις γωνίες που σχηματίζει η ευθεία ε με τυχαία ευθεία του π που την τέμνει.



Σχήμα 46

Απόδειξη

Θεωρούμε σημείο A της ευθείας ε και έστω A′ η προβολή του στο π (σχ.46). Στην τυχαία ευθεία ξ του επιπέδου π που περνάει από το O παίρνουμε σημείο B τέτοιο, ώστε OA′= OB. Προφανώς έχουμε AA′<AB, γιατί η AA′ είναι κάθετη στο επίπεδο. Τα τρί-

γωνα ΟΑΑ′ και ΟΑΒ έχουν την ΟΑ κοινή και ΟΑ′= ΟΒ και ΑΑ′<ΑΒ, άρα $A\hat{O}A' < A\hat{O}B$. Η γωνία των ευθειών ε και ε′ είναι η μικρότερη, καθώς αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε ευθεία ξ που περνάει από το Ο και είναι διάφορη της ε′.

Ορισμός ΙΙ

***Γωνία ευθείας και επιπέδου* λέγεται η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με την προβολή της στο επίπεδο.**

Διχοτόμο ημιεπίπεδο μιας δίεδρης ε(σ,τ) λέγεται το ημιεπίπεδο π που έχει ως αρχική ευθεία την ακμή ε και χωρίζει την δίεδρη σε δύο ίσες δίεδρες. Το αντικείμενο του διχοτόμου ημιεπιπέδου μιας δίεδρης είναι το διχοτόμο ημιεπίπεδο π΄ της αντικείμενης δίεδρης γωνίας. Τα ημιεπίπεδα π και π΄ σχηματίζουν ένα επίπεδο που διχοτομεί τη δίεδρη γωνία και την αντικείμενή της και λέγεται ***διχοτόμο επίπεδο*** της δίεδρης.

ΣΧΟΛΙΟ

*Πολλές φορές στη βιβλιογραφία η γωνία ευθείας και επιπέδου λέγεται και **κλίση ευθείας** ως προς επίπεδο. Επειδή όμως ο όρος “κλίση” έχει ορισθεί στην αναλυτική γεωμετρία ως η εφαπτομένη γωνίας, αποφεύγουμε τη χρησιμοποίηση αυτού του όρου για να μη γίνεται σύγχυση.*

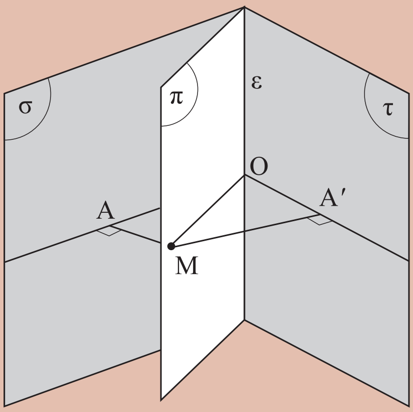
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του εσωτερικού μιας κυρτής δίεδρης που ισαπέχουν από τις έδρες της είναι το διχοτόμο ημιεπίπεδο της δίεδρης.

Απόδειξη

Αν ΜΑ και ΜΑ′, (σχ.47), είναι οι αποστάσεις του εσωτερικού σημείου Μ της δίεδρης ε(σ,τ), από τις έδρες σ και τ, έχουμε ΑΜ = ΜΑ′. Οι ευθείες ΜΑ και ΜΑ′ είναι ορθογώνιες στην ακμή ε, ως κάθετες στα επίπεδα σ και τ αντίστοιχα, και επειδή είναι τεμνόμενες, ορίζουν επίπεδο κάθετο στην ακμή ε που την τέμνει στο Ο. Οι ευθείες τομής του επιπέδου αυτού από τις έδρες σ και τ ορίζουν την $A\hat{O}A'$, αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης ε(σ,τ).

Τότε τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΑ′ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια στις κορυφές Α και Α′, έχουν την ΟΜ κοινή και ΜΑ = ΜΑ′. Επομένως, οι γωνίες $A\hat{O}M$ και $A'\hat{O}M$ είναι ίσες. Αυτές όμως είναι οι αντίστοιχες επίπεδες των διέδρων ε(σ,π) και ε(π,τ).



Σχήμα 47

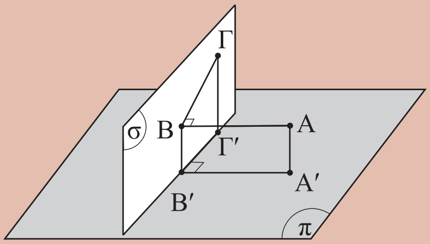
Αντίστροφα, αν Μ είναι σημείο του ημιεπιπέδου π που διχοτομεί τη δίεδρη ε(σ,τ) και το προβάλλουμε στις έδρες σ και τ στα Α και Α′ αντίστοιχα, τα τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΑ′ είναι ορθογώνια στα Α και Α′, έχουν την ΟΜ κοινή και $A\hat{O}M = A'\hat{O}M$. Επομένως ΜΑ = ΜΑ′.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν η μία πλευρά ορθής γωνίας είναι παράλληλη σε επίπεδο και η άλλη δεν είναι κάθετη στο επίπεδο, τότε η γωνία προβάλλεται ως ορθή.

Απόδειξη

Θεωρούμε την ορθή γωνία $A\hat{B}\Gamma$, (σχ.48), της οποίας η πλευρά ΑΒ είναι παράλληλη στο επίπεδο π και έστω $A'B'\Gamma'$ η προβολή της στο π. Το επίπεδο σ που είναι κάθετο στην ευθεία ΑΒ στο Β περιέχει τη ΒΓ, αφού $AB \perp B\Gamma$. Το επίπεδο που προβάλλει την ΑΒ στο π τέμνει το π κατά την ευθεία $A'B'$ που είναι παράλληλη στην ΑΒ, άρα η $A'B'$ είναι κάθετη στο σ. Επομένως η $A'B'$ είναι κάθετη στην $B'\Gamma'$.



Σχήμα 48

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Η προβολή $A'B'$ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε επίπεδο π έχει μήκος μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με αυτό του ΑΒ; Πότε ισχύει η ισότητα;*

2. *Το μέσο ευθύγραμμου τμήματος προβάλλεται στο μέσο της προβολής;*

3. *Ευθύγραμμο τμήμα προβάλλεται σε επίπεδο. Ποια πρέπει να είναι η γωνία που σχηματίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με το επίπεδο, ώστε η προβολή του να έχει μήκος το μισό του μήκους του;*

4. *Πότε μία ευθεία προβάλλεται σε ένα επίπεδο ως σημείο;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε επίπεδο τ που διέρχεται από ευθεία ε και είναι κάθετο σε επίπεδο π.*

2. *Να αποδείξετε ότι αν σημείο Μ διαιρεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, τότε η προβολή του ΑΒ σε ένα επίπεδο π, που δεν είναι κάθετο στο ΑΒ, διαιρείται από την προβολή του Μ στον ίδιο λόγο.*

3. *Αν $A'B'\Gamma'$ είναι η προβολή τριγώνου ΑΒΓ σε επίπεδο π, να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους Κ του τριγώνου ΑΒΓ προβάλλεται στο κέντρο βάρους K' του $A'B'\Gamma'$.*

4. *Να αποδείξετε ότι παράλληλες ευθείες προβάλλονται σε παράλληλες ευθείες σε επίπεδο π, στο οποίο δεν είναι κάθετες.*

5. *Να αποδείξετε ότι η προβολή παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σε επίπεδο π, που δεν είναι κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου, είναι παραλληλόγραμμο.*

6. *Να αποδείξετε ότι η προβολή ορθής γωνίας σε επίπεδο που τέμνει τις πλευρές της ορθής είναι αμβλεία γωνία.*

7. *Τα άκρα Α και Β ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ απέχουν από επίπεδο π 20 και 23 και οι προβολές A' και B' των σημείων Α και Β απέχουν μεταξύ τους 4. Πόσο απέχουν τα Α και Β μεταξύ τους;*

8. *Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ μήκους α σε επίπεδο π, όταν η γωνία του ΑΒ ως προς το π είναι:*
i) 30°, ii)45° και iii) 60°.

9. *Να κατασκευάσετε ευθεία που να σχηματίζει γωνία 60° με επίπεδο π, να διέρχεται από σημείο Α του π και να προβάλλεται σε ευθεία ε του π, που διέρχεται από το Α.*

10. *Να αποδείξετε ότι ο λόγος των προβολών δύο ευθύγραμμων τμημάτων της ίδιας ευθείας ισούται με τον λόγο των τμημάτων αυτών.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν σ και τ είναι δύο τεμνόμενα επίπεδα και Ο σημείο του σ, να αποδείξετε ότι η ευθεία του σ που διέρχεται από το Ο και σχηματίζει τη μεγαλύτερη γωνία με το τ είναι η κάθετη στην κοινή ευθεία ε.*

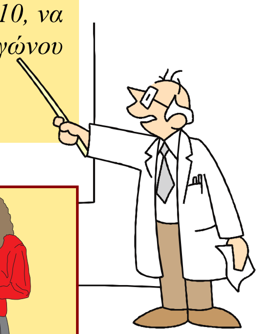
2. *Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα που είναι κάθετα στο επίπεδο ενός τριγώνου και περιέχουν τις διχοτόμους του τριγώνου τέμνονται σε μία ευθεία.*

3. *Να αποδείξετε ότι σε στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, που έχει τις μη διαδοχικές πλευρές ίσες, η ευθεία που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του είναι κοινή κάθετος των διαγωνίων.*

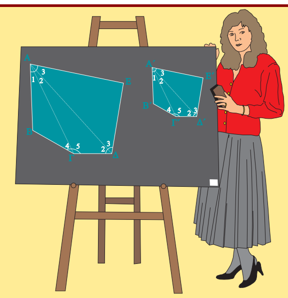
4. *Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευάσετε επίπεδο π που να περιέχει την ΑΒ τέτοιο, ώστε η γωνία $\hat{\Gamma}$ να προβάλλεται ως ορθή.*

5. *Εάν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει τα άκρα του επί των εδρών μιας δίεδρης γωνίας, τότε το διχοτόμο επίπεδο της δίεδρης χωρίζει το ΑΒ σε δύο τμήματα, ανάλογα των αποστάσεων των άκρων Α και Β από την ακμή της δίεδρης.*

6. *Αν ένα σημείο Α απέχει από επίπεδο π απόσταση 6 και από ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ του π απόσταση 10, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της προβολής του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με $\frac{4}{5}$ του εμβαδού του τριγώνου.*



Δραστηριότητες



1. *Να κατασκευάσετε την αντίστοιχη επίπεδη μιας δίεδρης γωνίας .*
Εναλλακτική κατασκευή αντίστοιχης επίπεδης μιας δίεδρης, με ευθείες κάθετες στις έδρες σε ένα σημείο της ακμής.

2. *Να μελετήσετε τη προβολή τριγώνου σε επίπεδο. Για το εμβαδόν Ε τριγώνου να αποδείξετε ότι ισχύει Ε'= Εσυνφ, όπου Ε' το εμβαδόν της προβολής και φ η γωνία των δύο επιπέδων.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο αν:

- η ευθεία είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου,
- η ευθεία είναι κάθετη σε μία ευθεία του επιπέδου και ορθογώνια σε μία άλλη και
- η ευθεία είναι ορθογώνια σε δύο ευθείες του επιπέδου.

Γενικότερα, η ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, αν είναι κάθετη ή ορθογώνια σε δύο ευθείες που είναι παράλληλες στο επίπεδο.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ξ.*

2. *Αν δύο επίπεδα τέμνονται σε ευθεία ε, κάθε ευθεία ξ κάθετη στο ένα, προβάλλεται στο άλλο σε ευθεία κάθετη στην ε.*

3. *Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ε και ξ, που σχηματίζουν ίσες γωνίες με επίπεδο π και έχουν προβολές στο επίπεδο π ευθείες παράλληλες. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που συναντούν τις ε και ξ και είναι παράλληλες στο επίπεδο π, συναντούν μία ευθεία που είναι κάθετη στο π.*

4. *Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που τέμνει τις έδρες μίας δίεδρης γωνίας σε σημεία που ισαπέχουν από την ακμή της, σχηματίζει ίσες γωνίες με τις έδρες και αντίστροφα.*

5. *Για να ισαπέχουν δύο σημεία Α και Β από ευθεία ε, πρέπει και αρκεί οι αποστάσεις των σημείων Α και Β από τα επίπεδα (ε,Β) και (ε,Α) αντίστοιχα, να είναι ίσες.*

6. *Να αποδείξετε ότι αν M_1 και M_2 είναι οι προβολές σημείου Μ σε δύο τεμνόμενα επίπεδα π_1 και π_2, οι προβολές των M_1 και M_2 στην τομή συμπίπτουν.*

7. *Δίνεται στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και επίπεδο π. Να βρεθούν τέσσερις ευθείες παράλληλες που περνάνε από τις κορυφές Α, Β, Γ και Δ και τέμνουν το π σε σημεία Α', Β', Γ' και Δ', ώστε το Α'Β'Γ'Δ' να είναι παραλληλόγραμμο.*

8. *Αν ε και ε' είναι δύο ασύμβατες ευθείες και Μ, Ν είναι δύο σημεία της ε, συμμετρικά ως προς την κοινή κάθετο των ε και ε', να αποδείξετε ότι αυτά ισαπέχουν από την ε' και αντίστροφα.*

«*Γεωμετρικές Συνθέσεις*» Δ. Τηνιακός