Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

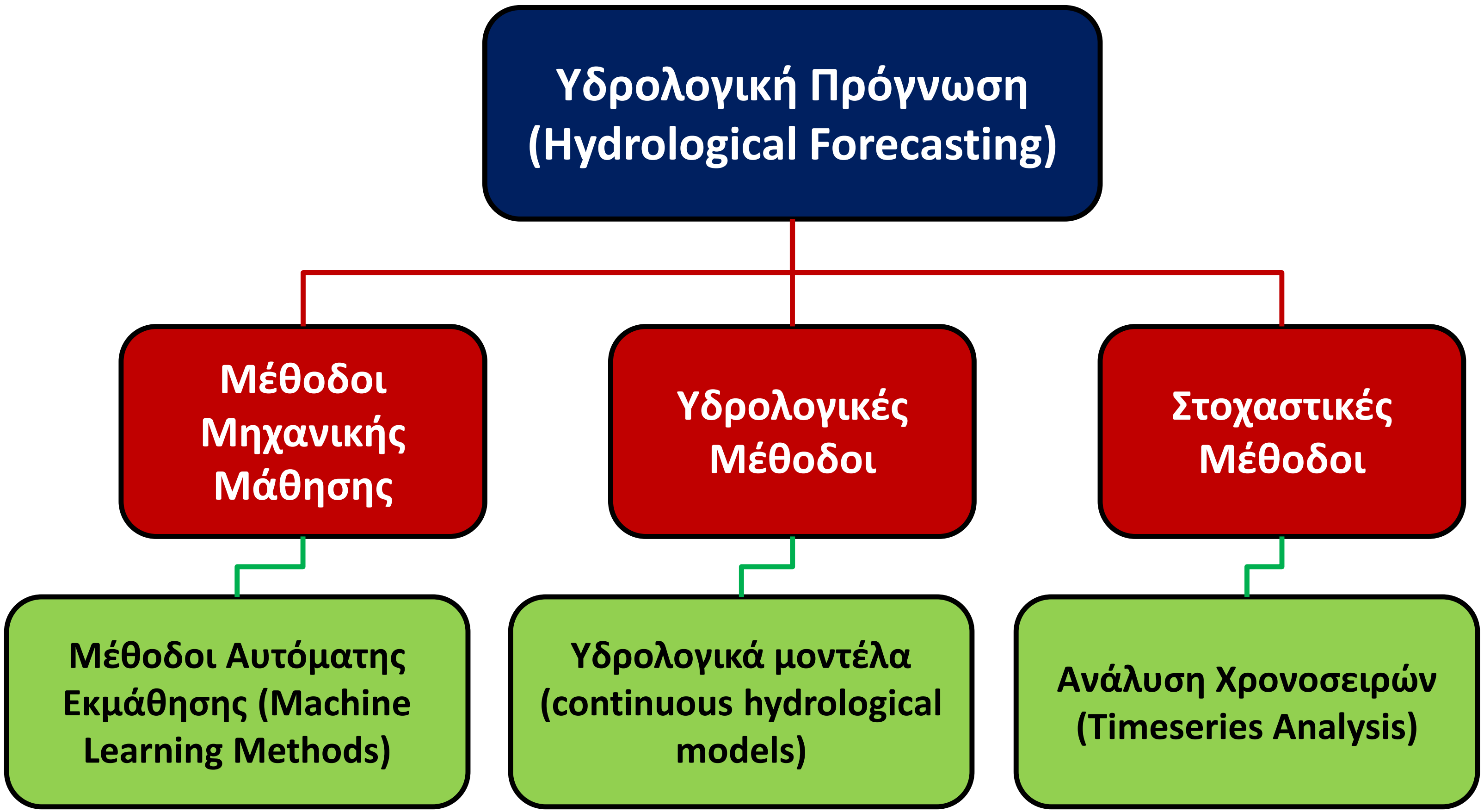
ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

Ενότητα 3: Υδρολογική πρόγνωση

3.3. Υδρολογική Πρόγνωση

Καθ. Αθανάσιος Λουκάς
Εργαστήριο Υδρολογίας και Ανάλυσης Υδατικών Συστημάτων
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΗΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ



ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

- ***Με απλή γραμμική παλινδρόμηση:***
  - Ανεξάρτητη μεταβλητή τη χρονοσειρά από ένα γειτονικό σταθμό και εξαρτημένη τη χ.σ. του σταθμού τα δεδομένα του οποίου θέλουμε να συμπληρώσουμε
- ***Πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση:***
  - Με πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές τις χρονοσειρές άλλων σταθμών
- ***Με μεθόδους αυτόματης εκμάθησης (machine learing methods):***
  - Νευρωνικά Δίκτυα
- ***Με μεθόδους που βασίζονται σε μοντέλα χρονοσειρών:***
  - **Γενικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο *ARIMA*(p,d,q)(P,D,Q)$_s$**
    - π.χ. AR(1), PAR(1)

Παράδειγμα ARMA(p,q) και Κατασκευή Συνθετικών Σειρών

Πίνακας 1: Παροχές στη θέση Σιάτιστα του ποταμού Αλιάκμονα

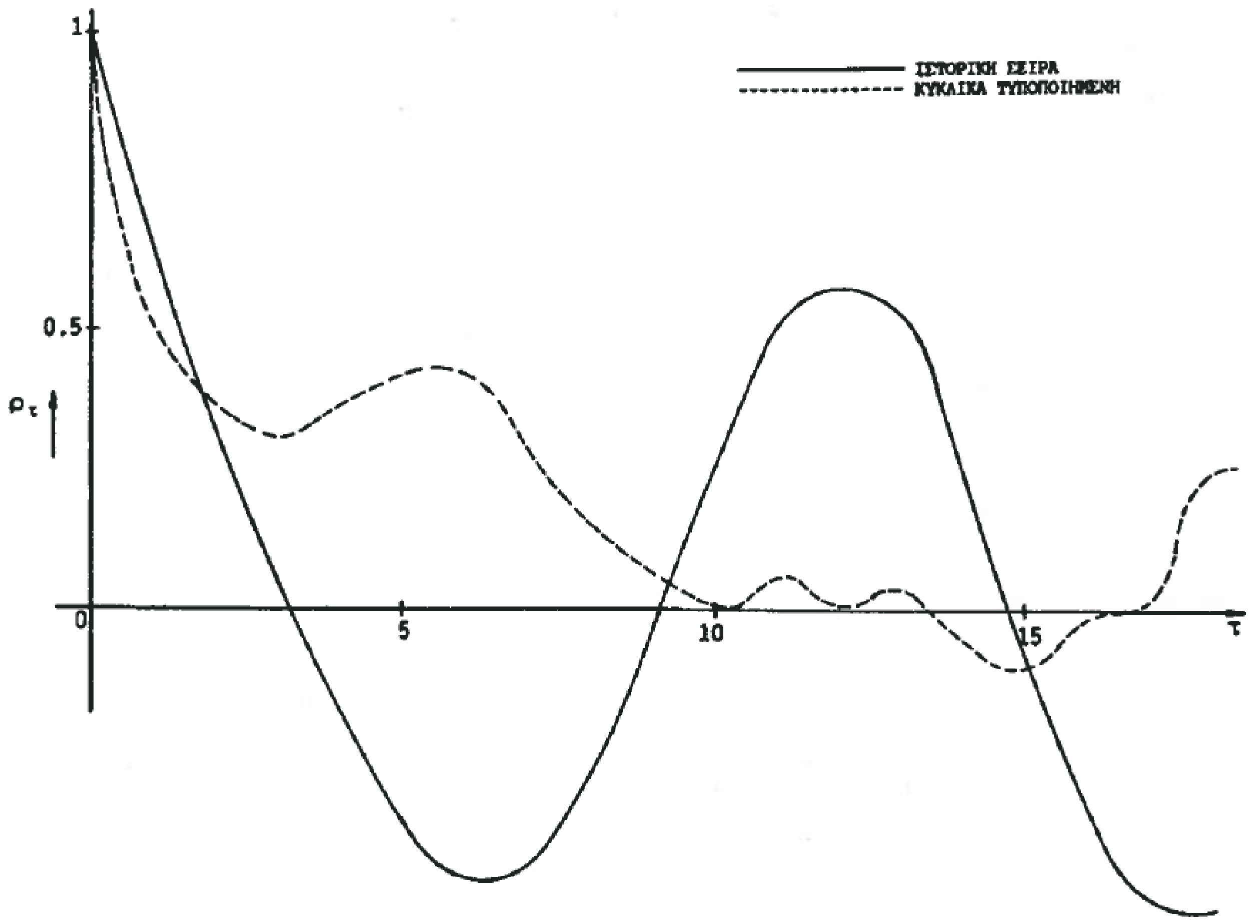
Ετη	ΟΚΤ	ΝΟΕΜ	ΔΕΚ	ΙΑΝ	ΦΕΒΡ	ΜΑΡΤ	ΑΠΡ	ΜΑΙΟΣ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠΤ
1	11.19	74.95	79.07	106.00	171.70	89.97	70.50	57.50	37.30	14.20	5.16	4.91
2	9.92	12.10	42.96	12.12	20.68	43.30	21.17	18.97	17.00	7.08	3.34	3.31
3	4.53	32.26	58.42	32.55	27.66	60.98	72.29	35.67	15.18	5.49	2.92	3.02
4	3.13	5.26	12.39	30.42	39.29	41.23	25.96	22.56	14.70	4.01	2.62	4.10
5	6.32	35.40	74.11	47.33	32.71	33.34	32.84	50.15	17.99	13.50	4.88	5.98
6	4.30	5.72	30.43	35.52	59.27	42.77	28.55	22.08	26.44	4.27	3.43	4.52
7	3.72	6.25	26.52	56.23	65.54	104.20	57.11	35.95	11.24	4.81	3.93	5.10
8	3.30	5.10	95.19	55.75	45.80	71.91	42.26	26.21	15.03	7.96	3.04	3.38
9	6.05	5.13	9.11	40.95	21.95	65.68	53.86	21.90	7.45	4.15	2.68	5.67
10	4.39	6.73	14.40	30.55	54.89	75.77	69.19	46.06	11.44	5.39	4.22	5.24
11	24.77	13.66	9.38	13.43	40.73	64.78	62.19	31.62	9.52	5.36	3.34	6.19
12	6.52	7.20	44.88	50.29	80.79	63.22	64.16	42.05	17.95	5.65	3.30	3.84
13	8.64	19.78	12.12	13.74	12.80	38.58	27.54	24.59	9.45	4.22	3.30	2.49
14	5.52	7.87	12.55	5.73	16.17	18.00	26.77	18.35	9.86	5.57	3.27	2.80
15	3.88	12.04	22.58	17.46	27.35	14.13	11.31	9.57	4.35	1.61	2.16	2.52

Οι δύο πρώτοι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι οι εξής:

$$\rho_1 = 0.74344$$

$$\rho_2 = 0.46471$$

Το αυτοσυσχετόγραμμα της σειράς φαίνεται στο Σχήμα



Στη χρονοσειρά του Πίνακα 1 θα εφαρμοσθούν τα ομοιώματα $ARMA(p,q)$ για ($p = 1$, $q = 0$), ($p = 2$, $q = 0$) και ($p = 1$, $q = 1$).

Τα ομοιώματα και οι (σύμφωνα με τις εξισώσεις Yule-Walker) παράμετροι τους είναι:

$ARMA(2,0)$ ή $AR(2)$: $Y_{p,t} = \Phi_{21} Y_{p,t-1} + \Phi_{22} Y_{p,t-2} + a_i$

$ARMA(1,0)$ ή $AR(1)$: $Y_{p,t} = \rho_1 Y_{p,t-1} + a_i$

όπου $\Phi_{21} = \dfrac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} = 0.88969$

και $\Phi_{22} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -0.19672$

$ARMA(1,1)$: $Y_{p,t} = \Phi_1 Y_{p,t-1} - \theta_1 a_{i-1} + a_i$

όπου $\phi_1 = \rho_2 / \rho_1$

$$\rho_1 = \frac{(1-\Phi_1\theta_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\Phi_1\theta_1}$$

και για το θ_1

$$\theta_1 = \frac{-(1+\Phi_1{}^2 - 2\rho_1\Phi_1) \pm \left\{(1+\Phi_1^2 - 2\rho_1\Phi_1)^2 - 4(\rho_1 - \Phi_1)\right\}^{1/2}}{2(\rho_1 - \Phi_1)}$$

Από τις 2 ρίζες κρατάμε την απόλυτα μικρότερη της μονάδας και είναι $\theta_1 = -0.27614$.

Λύνοντας ως προς το τυχαίο υπόλοιπο a_i, οι εξισώσεις των ομοιωμάτων γίνονται:

$$AR(1): \quad a_i = Y_{p,t} - \rho_1 Y_{p,t-1}$$

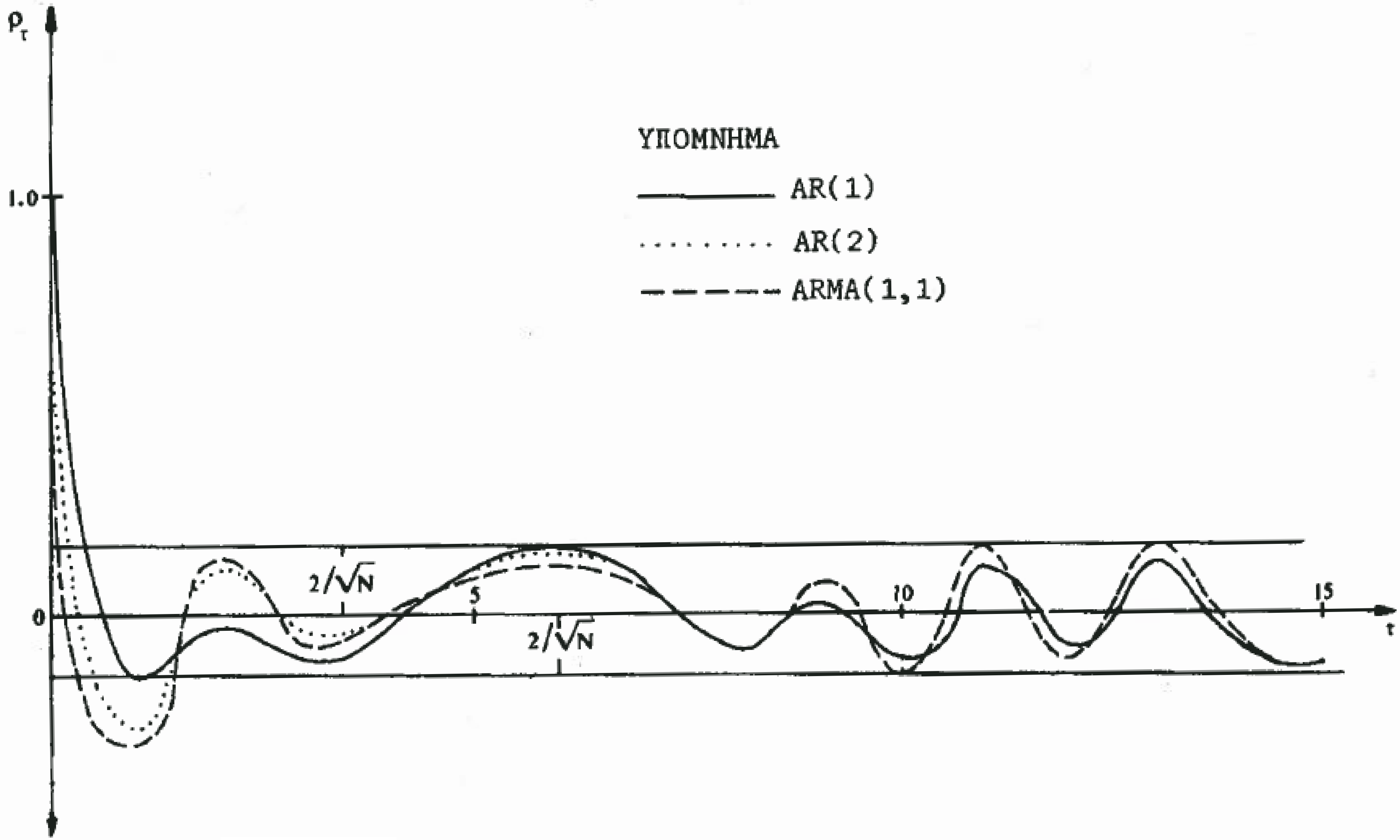
$$AR(2): \quad a_i = Y_{p,t} - \Phi_{21} Y_{p,t-1} - \Phi_{22} Y_{p,t-2}$$

$$ARMA(1,1): \quad a_i = Y_{p,t} - \Phi_1 Y_{p,t-1} + \theta_1 a_{i-1}$$

μόνο το $AR(1)$ ομοίωμα φαίνεται να περνάει το τεστ λευκότητας των υπολοίπων. Στη συνέχεια αποκτάται η συνθετική σειρά $\hat{Q}_{p,t}$ με το ομοίωμα:

$$\hat{Q}_{p,t} = Q_t + S_t \left\{ \rho_1 Y_{p,t-1} + t_i S_y (1 - \rho_1^2)^{1/2} \right\}$$

όπου Q_t, S_t γνωστοί μηνιαίοι μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις της ιστορικής σειράς, S_y η τυπική απόκλιση της σειράς $Y_{p,t}$ (πρακτικά σχεδόν ίση με 1) και t_i τυπικοί κανονικοί αριθμοί $N(0,1)$. Ξεκινώντας από μία τυχαία αρχική τιμή του πίνακα $Y_{1,0}$ (μπορεί να είναι και μηδενική) υπολογίζεται η πρώτη τιμή του πίνακα $Y_{1,1}$ και $\hat{Q}_{1,1}$, κ.ο.κ. Συνήθως στην προσομοίωση του $Y_{p,t}$ ακυρώνονται οι πρώτες εκτιμήσεις για να ελλατωθεί η επίδραση της αυθαίρετης έναρξης $Y_{1,0}$.



Αυτοσυσχετόγραμμα υπολοίπων από AR(1), AR(2) και ARMA(1,1).

ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

- ***Πρόγνωση (forecasting)*** σημαίνει εκτίμηση συνθηκών σε καθορισμένο σημείο του χρόνου στο μέλλον ή σε καθορισμένο χρονικό διάστημα.
  - Καθώς ο **χρόνος πρόγνωσης (forecasting lead time)** αυξάνει, συνήθως η ακρίβεια της πρόγνωσης μειώνεται
  - Χρήσεις Πρόγνωσης
    - Η πρόγνωση χρησιμοποιείται για αναγγελίες ακραίων γεγονότων (πλημμύρες και ξηρασίες) για λειτουργία υδροτεχνικών έργων όπως ταμιευτήρες-φράγματα για σχεδιασμό προγραμματισμό άρδευσης κλπ.
- **Ταξινόμηση Υδρολογικής Πρόγνωσης:**
  - **Βραχυπρόθεσμη (short-term forecasting)**
    - Πρόγνωση με χρόνους πρόγνωσης (lead times) μικρότερους των επτά (7) ημερών
  - **Μεσοπρόθεσμη (medium-term forecasting)**
    - Πρόγνωση με χρόνους πρόγνωσης (lead times) ως και μερικούς μήνες
  - **Μακροπρόθεσμη (long-term forecasting)**
    - Πρόγνωση με χρόνους πρόγνωσης (lead times) μεγαλύτερους από μήνες (Διαχείριση υδατικών πόρων όπως καθορισμός αναγκών σε νερό για άρδευση, σε περιόδους ξηρασίας για τη διατήρηση του νερού)

ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

- **Ακρίβεια Υδρολογικής Πρόγνωσης**
  - **Ακρίβεια Υδρολογικής Πρόγνωσης = Σφάλμα Πρόγνωσης**
    - Διαφορά μεταξύ της παρατηρημένης τιμής της υδρολογικής μεταβλητής που πραγματικά συμβαίνει (y_i) και της πρόγνωσής της (f_i).
      - $e_i = y_i - f_i$
  - **Σφάλματα πρόγνωσης**
    - **Συστηματικά** (επαναλαμβανόμενα)
    - **Τυχαία** (λόγω ιδιαίτερων συνθηκών όπως σφάλματα στις μετεωρολογικές προβλέψεις στις οποίες βασίζεται η υδρολογική πρόβλεψη) Πρόγνωση με χρόνους πρόγνωσης (lead times) ως και μερικούς μήνες
  - **Αξία πρόγνωσης**
    - Είναι η οικονομική ή άλλη αξία που προκύπτει από την πρόγνωση
    - Διαφορά μεταξύ της πρόγνωσης και χωρίς να γίνει πρόγνωση
    - Ωφέλειες από πρόγνωση: μείωση των καταστροφών (θετική αξία πρόγνωσης)

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

- **Μέσο Απόλυτο Σφάλμα** (Mean Absolute Error, MAE)

MAE = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f_i - y_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|e_i|$

n : το πλήθος των παραδειγμάτων στο σύνολο L

- **Μέσο Απόλυτο Εκατοστιαίο Σφάλμα** (Mean Absolute Percentage Error, MAPE)

MAPE = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f_i - y_i}{y_i}\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|pe_i|$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

- **Μέσο Τετραγωνισμένο Σφάλμα** (Mean Squared Error, MSE)

MSE = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|e_i^2\right|$

n : το πλήθος των παραδειγμάτων στο σύνολο L

- **Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα** (Root Mean Squared Error, RMSE)

RMSE = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|e_i^2\right|}{n}}$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

- **Βαθμός Απόδοσης ή Αποτελεσματικότητας (Model Efficiency, Eff)**

$$Eff = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}$$

- **Δείκτης Συμφωνίας (Index of Agreement, IA)**

$$\mathrm{IA} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\left| f_i - \overline{y} \right| + \left| f_i - \overline{y} \right| \right)^2}$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

- **Δείκτης Εμμονής (Persistence Index, PI)**

$$\mathrm{PI} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1})^2}$$

- Οι ***Eff*** και ***PI*** κυμαίνονται από - ∞ έως ένα (1), ενώ ο ***IA*** από 0.0 (μη αποδεκτό μοντέλο) έως 1.0 (τέλειο μοντέλο).
- Είναι αδιάστατοι συντελεστές που κρίνουν την συνολική απόδοση της μεθόδου και αποτελούν βελτιώσεις του συντελεστή προσδιορισμού, R^2, για την αξιολόγηση των προσομοιώσεων και των προγνώσεων αφού είναι ευαίσθητα στις αλλαγές των παρατηρούμενων και προσομοιωμένων μέσων τιμών και διακυμάνσεων [Legates and McCabe, 1999; Dawson et al., 2007].

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

- **Συντελεστής Ανισότητας του Theil (Theil's Inequality Coefficient)**

$$U = \frac{RMSE}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(yi)^2}{n}}}$$

Αν U = 0 οι προβλεπόμενες τιμές συμπίπτουν απολύτως με τις πραγματικές.

Αν U > 1 οι προβλέψεις είναι πολύ κακές.

Αν U = 1 οι προβλέψεις είναι μηδέν.

❖ Ο **συντελεστής ανισότητας U** είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και για το λόγο αυτό είναι **περισσότερο κατάλληλος για σύγκριση της προβλεπτικής ικανότητας διαφόρων υποδειγμάτων.**

ΠΟΙΟΤΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΗΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

Για τη δημιουργία των ποιοτικών κριτηρίων απαιτείται ένας **πίνακας αξιολόγησης των αποτελεσμάτων (contingency table)** που δείχνει τη συχνότητα των σωστών και λανθασμένων προγνώσεων και των πραγματικών συμβάντων. Ο πίνακας αυτός είναι πολύ χρήσιμος για τη διαπίστωση των σφαλμάτων που δημιουργούν τα προγνωστικά μοντέλα. Ένα τέλειο προγνωστικό μοντέλο θα παράγει μόνο επιτυχίες και σωστά μη-επεισόδια χωρίς αστοχίες ή λανθασμένους συναγερμούς [Jolliffe and Stephenson, 2003].

		Παρατηρούμενα συμβάντα (observed)		
		ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΣΥΝΟΛΙΚΑ
Πρόγνωση συμβάντων (forecast)	ΝΑΙ	*Επιτυχίες = A (hits)*	*Λανθασμένοι συναγερμοί = C (false alarms)*	*forecast ΝΑΙ = (A+C)*
	ΟΧΙ	*Αστοχίες = B (misses)*	*Σωστά μη-επεισόδια ξηρασίας = D (correct negatives)*	*forecast ΟΧΙ = (B+D)*
	ΣΥΝΟΛΙΚΑ	*Παρατηρούμενα επεισόδια ξηρασίας = (A+B) (observed ΝΑΙ)*	*Μη παρατηρούμενα επεισόδια ξηρασίας = (C+D) (observed ΟΧΙ)*	*ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ, N = (A+B+C+D)*

ΠΟΙΟΤΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΗΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

Παρατηρούμενα συμβάντα (observed)

		ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΣΥΝΟΛΙΚΑ
Πρόγνωση συμβάντων (forecast)	ΝΑΙ	*Επιτυχίες = A (hits)*	*Λανθασμένοι συναγερμοί = C (false alarms)*	*forecast ΝΑΙ = (A+C)*
	ΟΧΙ	*Αστοχίες = B (misses)*	*Σωστά μη-επεισόδια ξηρασίας = D (correct negatives)*	*forecast ΟΧΙ = (B+D)*
	ΣΥΝΟΛΙΚΑ	*Παρατηρούμενα επεισόδια ξηρασίας = (A+B) (observed ΝΑΙ)*	*Μη παρατηρούμενα επεισόδια ξηρασίας = (C+D) (observed ΟΧΙ)*	*ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ, N = (A+B+C+D)*

Δείκτης Κρίσιμης Επιτυχίας** (**Critical Success Index** ή **Threat Score**), **CSI

$$CSI = \frac{A}{A + B + C}$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

- Οι αλγόριθμοι αναφοράς είναι απλοί στη μεθοδολογία και γρήγοροι στην εκτέλεση. Δεν μπορούν να προσαρμόσουν σωστές λύσεις σε δύσκολα προβλήματα, χρησιμοποιούνται όμως σαν δείκτες αναφοράς για τις λύσεις που προτείνουν οι άλλοι αλγόριθμοι. Στις περιπτώσεις που η απόδοση ενός αλγορίθμου A_i είναι μικρότερη από εκείνη ενός αλγόριθμου αναφοράς, τότε ο αλγόριθμος A_i απορρίπτεται σαν υποψήφιος για τη λύση του δεδομένου προβλήματος
  - **Μέση τιμή (ZeroR).** Ο αλγόριθμος αυτός του μηδενικού κανόνα προτείνει πάντα μία τιμή για την εξαρτημένη μεταβλητή y. Αυτή είναι ίση με την μέση τιμή της μεταβλητής στο σύνολο δεδομένων L όταν πρόκειται για συνεχή αριθμητική τιμή, ίση με την τιμή που εμφανίζεται με μεγαλύτερη συχνότητα, όταν πρόκειται για κατηγορική μεταβλητή. Ονομάζεται και πλειοψηφικός ταξινομητής (majority classifier).
  - **Μοντέλο εμμονής (Persistence model).** Ο αλγόριθμος του μοντέλου εμμονής (ή επίμονου προβλέπτη) είναι ένας αλγόριθμος αναφοράς για τις περιπτώσεις των χρονοσειρών, εκεί δηλαδή όπου οι περιπτώσεις στα σύνολα εκπαίδευσης και αξιολόγησης βρίσκονται σε χρονική αλληλουχία. Η εκτιμούμενη τιμή που προτείνεται από τον αλγόριθμο αυτό για την εξαρτημένη μεταβλητή y_n είναι η εξαρτημένη μεταβλητή του αμέσως προηγούμενου στη χρονοσειρά παραδείγματος, y_{n-1}. Το μοντέλο εμμονής αποδίδει στις περιπτώσεις όπου η εξαρτημένη μεταβλητή δείχνει αδράνεια στο χρόνο.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

- **Στατιστικό κριτήριο ικανότητας πρόγνωσης Skill Score (Skill Score, SS)**

Το στατιστικό κριτήριο ικανότητας πρόγνωσης Skill Score το οποίο συγκρίνει ένα στατιστικό κριτήριο (ποσοτικό ή ποιοτικό) με το αντίστοιχο κριτήριο για το μοντέλο αναφοράς (π.χ. του μοντέλου εμμονής=persistence ή του μέσου όρου=climatology) και δίνεται από τον τύπο:

$$SS = \frac{score_{forecast} - score_{reference}}{score_{perfectforecast} - score_{reference}}$$

- **Αν SS = 0 το μοντέλο πρόγνωσης δεν παρουσιάζει καμία βελτίωση σε σχέση με το μοντέλο αναφοράς**
- **Αν SS > 0 το μοντέλο πρόγνωσης παρουσιάζει βελτίωση σε σχέση με το μοντέλο αναφοράς**
- Όταν το στατιστικό κριτήριο που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του **Skill Score** είναι το **MSE** τότε λέγεται και **κριτήριο μείωσης της διασποράς (reduction of variance)**.

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

- Ο βασικός σκοπός της μελέτης των μοντέλων για χρονικές σειρές (όπως AR, MA, ARMA, ARIMA, SARIMA) είναι η **πρόβλεψη ή πρόγνωση** (*prediction, forecasting*). Η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μιας παρατηρούμενης χρονοσειράς είναι σημαντικό πρόβλημα για πολλές εφαρμογές
- Για να κάνουμε την πρόβλεψη χρησιμοποιούμε τις παρατηρήσεις μέχρι τη παρούσα χρονική στιγμή. Θεωρώντας την παρατηρούμενη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ από μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$, το πρόβλημα που μελετάμε είναι η πρόβλεψη της χρονοσειράς για *k* χρονικά βήματα μπροστά από τη χρονική στιγμή *n*, που συμβολίζεται $x_n(k)$, ενώ η πραγματική αλλά άγνωστη σε εμάς τιμή στη χρονική στιγμή n+k είναι x_{n+k}. Το σφάλμα πρόβλεψης (prediction error) είναι: $e_n(k) = x_{n+k} - x_n(k)$
- Με αναφορά στη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$, η πρόβλεψη $X_n(k)$ είναι η εκτίμηση του στοιχείου X_{n+k} της $\{X_n\}$ με βάση τα προηγούμενα στοιχεία της $\{X_n\}$, δηλαδή η βέλτιστη πρόβλεψη είναι $X_n(k)=\mathrm{E}(X_{n+k} \mid X_n, X_{n-1},\ldots)$. Επιθυμητές ιδιότητες καλής εκτίμησης, δηλαδή καλής πρόβλεψης εδώ, είναι:
  - η *αμεροληψία* (unbiasedness) $\mathrm{E}(X_n(k)) = X_{n+k}$,
  - η *αποτελεσματικότητα* (efficiency), δηλαδή η μικρή **διασπορά λάθους πρόβλεψης** $\mathrm{Var}(e_n(k)) = \mathrm{Var}(X_{n+k} - X_n(k))$.

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

- Πρώτα θα θεωρήσουμε ότι η χρονοσειρά για την οποία θέλουμε να κάνουμε προβλέψεις είναι στάσιμη, ή την έχουμε κάνει στάσιμη με κάποια από τις μεθόδους που μελετήσαμε στην Θ.Ε. 3.2: «Μοντέλα χρονοσειρών».
- Τα γραμμικά μοντέλα που στάσιμων χρονικών σειρών που μελετήσαμε είναι τα μοντέλα AR, MA και ARMA. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα μοντέλα για να κάνουμε προβλέψεις.
- Θεωρούμε επίσης πως η χρονοσειρά έχει μέση τιμή 0 (ώστε να αποφύγουμε την ύπαρξη σταθερού όρου στα μοντέλα πρόβλεψης). Πρακτικά αυτό γίνεται αφαιρώντας τη δειγματική μέση τιμή των παρατηρήσεων της χρονοσειράς από την κάθε παρατήρηση. Για να σχηματίσουμε την πραγματική πρόβλεψη που αφορά την παρατηρούμενη μεταβλητή, προσθέτουμε τη δειγματική μέση τιμή στην προβλεπόμενη τιμή από το μοντέλο.

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ AR(p)

AR(1) μοντέλο

- Ας αρχίσουμε με το πιο απλό γραμμικό αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο, το AR(1): $x_t = \varphi\, x_{t-1} + z_t$
- Για την πρόβλεψη της επόμενης χρονικής στιγμής όταν γνωρίζουμε τη χρονοσειρά ως τη χρονική στιγμή *n*, έχουμε από την υπόθεση του AR(1) μοντέλου: $x_{n+1} = \varphi\, x_n + z_{t+1}$
- Η βέλτιστη πρόβλεψη ενός χρονικού βήματος όταν δίνεται $\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ είναι $x_n(1) = \varphi\, x_n$ (γιατί;)
- Για δύο χρονικά βήματα εμπρός έχουμε $x_{n+2} = \varphi\, x_{n+1} + z_{t+2}$. Αντικαθιστώντας το x_{n+1} με την πρόβλεψη $x_n(1)$ και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε $x_n(2) = \varphi x_n(1) = \varphi^2 x_n$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία βρίσκουμε ότι η πρόβλεψη για *k* χρονικά βήματα είναι $x_n(k) = \varphi^k x_n$.
- Το σφάλμα πρόβλεψης για ένα χρονικό βήμα είναι $e_n(1) = z_{n+1}$, δηλαδή το $e_n(1)$ είναι λευκός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_z^2. Για *k* χρονικά βήματα η διασπορά του σφάλματος γίνεται $\operatorname{Var}\left(e_n(k)\right) = \sigma_z^2 \dfrac{1-\phi^{2k}}{1-\phi^2}$.

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ MA(1) μοντέλο

Το μοντέλο MA(1) για χρόνο $n+1$ είναι

$$x_{n+1} = z_{n+1} + \theta\, z_n\,.$$

Για να βρούμε την πρόβλεψη για ένα ή περισσότερα χρονικά βήματα χρησιμοποιούμε ότι η τυχαία μεταβλητή z_t είναι ανεξάρτητη του x για χρόνους μικρότερους του t και έτσι έχουμε

$$\mathrm{E}\left(z_{n+j} \mid x_n, x_{n-1}, \ldots\right) = \begin{cases} 0 & \text{αν } j > 0 \\ z_{n+j} & \text{αν } j \le 0 \end{cases}$$

και η πρόβλεψη είναι

$$x_n(k) = \begin{cases} \theta\, z_n & \text{για } k = 1 \\ 0 & \text{για } k > 1 \end{cases} \quad .$$ [Γιατί;]

Το σφάλμα πρόβλεψης είναι

$$e_n(k) = \begin{cases} z_{n+1} & \text{για } k = 1 \\ x_{n+k} & \text{για } k > 1 \end{cases} \quad .$$

Παρατηρούμε πως όλες οι προβλέψεις για χρόνους μεγαλύτερους του 1 είναι 0. Γενικά οι προβλέψεις για χρόνους μεγαλύτερους από την τάξη του MA μοντέλου είναι 0, όπως δίνεται παρακάτω.

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ARMA(p,q) μοντέλα

Θεωρώντας το ARMA(p,q) μοντέλο για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, η επόμενη παρατήρηση δίνεται ως

$$x_{n+1} = \phi_1 x_n + \cdots + \phi_p x_{n-p+1} + z_{n+1} + \theta_1 z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+1}.$$

Η βέλτιστη πρόβλεψη για ένα χρονικό βήμα όταν δίνονται τα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι

$$x_n(1) = \phi_1 x_n + \cdots + \phi_p x_{n-p+1} + \theta_1 z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+1}$$

και το σφάλμα της πρόβλεψης είναι $e_n(1) = z_{n+1}$.

Γενικά για k χρονικά βήματα η βέλτιστη πρόβλεψη είναι

$$x_n(k) = \begin{cases} \phi_1 x_n(k-1) + \cdots + \phi_p x_n(k-p) + \theta_k z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+k} & \text{αν } k \le q \\ \phi_1 x_n(k-1) + \cdots + \phi_p x_n(k-p) & \text{αν } k > q \end{cases}$$

Η πρόβλεψη με ARMA μοντέλο είναι η σύνθεση των προβλέψεων με το AR μέρος και το MA μέρος

Παράδειγμα Βραχυπρόθεσμης Πρόγνωσης με ARMA(p,q)

Το ομοίωμα πρόγνωσης των ετήσιων (μονιμοποιημένων) τιμών παροχής σε θέση ποταμού είναι το εξής:

$$X_{t+\ell} = 1 + 0.700(X_{t+\ell-1} - 1) - 0.100\,(X_{t+\ell-2} - 1) + 0.210(X_{t+\ell-3} - 1) + n_{t+\ell}$$

(με αφαίρεση μέσου όρου ίσου με μονάδα). Οι παρατηρημένες τιμές για μια τετραετή περίοδο ανηγμένες πάλι στο μοναδιαίο μέσο όρο, είναι οι εξής κατά χρονική σειρά: 1ο έτος = 0.890, 2ο έτος = 0.880, 3ο έτος =0.870, 4ο έτος = 0.875. Αρχίζοντας από το 3ο έτος υπολογίζονται οι επόμενες 5 ετήσιες τιμές παροχής από το ομοίωμα, ως εξής:

$\ell = 1$, 4ο έτος: $\hat{X}_{t+1} = 1 + 0.700\,(X_t - 1) - 0.100\,(X_{t-1} - 1) + 0.210(X_{t-2} - 1)$
$= 1 + 0.700\,(0.870 - 1) - 0.100(0.880 - 1) +$
$+ 0.210\,(0.890 - 1) = 0.944.$

$\ell = 2$, 5ο έτος: $\hat{X}_{t+2} = 1 + 0.700(\hat{X}_{t+1} - 1) - 0.100(X_{t+1} - 1) + 0.210(X_{t-1} - 1)$
$= 0.949.$

$\ell = 3$, 6ο έτος: $\hat{X}_{t+3} = 1 + 0.700(\hat{X}_{t+2} - 1) - 0.100(\hat{X}_{t+1} - 1) + 0.210(X_t - 1)$
$= 0.943.$

$\ell = 4$, 7ο έτος: $\hat{X}_{t+4} = 1 + 0.700(\hat{X}_{t+3} - 1) - 0.100\,(\hat{X}_{t+2} - 1) + 0.210(\hat{X}_{t+1} - 1)$
$= 0.953.$

$\ell = 5$, 8ο έτος: $\hat{X}_{t+5} = 1 + 0.700(\hat{X}_{t+4} - 1) - 0.100(\hat{X}_{t+3} - 1) + 0.210(\hat{X}_{t+2} - 1)$
$= 0.962.$

Παράδειγμα Πρόγνωσης με ARMA(p,q)

Από την εξ. (6.47) υπολογίζονται τα ψ_i :

$$\Psi_1 = 0.700$$

$$\Psi_2 = 0.700 \bullet 0.700 - 0.100 = 0.390$$

$$\Psi_3 = 0.700 \bullet 0.390 - 0.100 \bullet 0.700 + 0.210 = 0.413$$

$$\Psi_4 = 0.700 \bullet 0.413 - 0.100 \bullet 0.390 + 0.210 \bullet 0.700 = 0.397$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (6.50) τα όρια εμπιστοσύνης της πρόγνωσης για 95% επίπεδο (με σ_n^2 = 0.063 από την εξ. (4.75), χρησιμοποιώντας τη γνωστή σκέδαση και αυτοσυσχέτιση της σειράς παροχών) γίνονται:

εξ.(6.45) και (6.46) προκύπτουν ως εξής:

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^{k} \phi_{p,i} \Psi_{k-i} - \theta_{q,k}, \qquad i=1,2,3,\ldots \tag{6.47}$$

$$e_t(\ell) = X_{t+\ell} - \hat{X}_t(\ell) = n_{t+\ell} + \psi_1 n_{t+\ell-1} + \ldots + \psi_{\ell-1} n_{t+1} \tag{6.49}$$

Το σφάλμα πρόγνωσης $e_t(\ell)$ έχει μηδενικό μέσο όρο και σκέδαση $\sigma^2_{e_t(l)}$ που προκύπτει από την εξ.(6.49) (αν υψωθεί στο τετράγωνο και παρθούν οι αναμενόμενες τιμές) ίση με:

$$\sigma^2_{e_t(\ell)} = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \ldots \psi_{\ell-1}^2)\sigma_n^2 \tag{6.50}$$

Παράδειγμα Πρόγνωσης με ARMA(p,q)

$$4\text{ο έτος:}\quad 0.944 \pm \overbrace{1.96 \times 1.0 \times 0.063}^{(1+\psi_1^2+\ldots+\psi_{\lambda-1}^{2})^{1/2}\sigma_n} = \left\langle \begin{matrix} 1.067 \\ 0.821 \end{matrix} \right.$$

$$5\text{ο έτος:}\quad 0.949 \pm 1.96 \times (1.49)^{1/2} \times 0.063 = \left\langle \begin{matrix} 1.100 \\ 0.798 \end{matrix} \right.$$

$$6\text{ο έτος:}\quad 0.943 \pm 1.96 \times (1.642)^{1/2} \times 0.063 = \left\langle \begin{matrix} 1.101 \\ 0.785 \end{matrix} \right.$$

$$7\text{ο έτος:}\quad 0.953 \pm 1.96 \times (1.813)^{1/2} \times 0.063 = \left\langle \begin{matrix} 1.119 \\ 0.787 \end{matrix} \right.$$

$$8\text{ο έτος:}\quad 0.962 \pm 1.96 \times (1.970)^{1/2} \times 0.063 = \left\langle \begin{matrix} 1.135 \\ 0.789 \end{matrix} \right.$$

Παράδειγμα Πρόγνωσης με ARMA(p,q)

Αν χρησιμοποιήσει τώρα κανείς την εξ. (6.48) αρχίζοντας από νέα αρχή, π.χ. από το 4^{o} έτος με την πραγματική του τιμή (0.875 αντί για την πρόγνωση που είναι 0.944) μπορεί να κάνει αναπροσαρμογή (updating) των επόμενων τιμών πρόγνωσης.

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + [n_{t+\ell}] + \psi_1 [n_{t+\ell-1}] + \psi_2 [n_{t+\ell-2}] + \ldots + \psi_\ell [n_t] + \psi_{\ell+1} [n_{t-1}] + \ldots \tag{6.48}$$

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_Z^2 \left(1 - \rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2 - \ldots - \rho_p \Phi_p\right)$$

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΜΗ-ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

- Οι προβλέψεις στη χρονοσειρά που κάναμε στάσιμη από μια μη-στάσιμη χρονοσειρά θα πρέπει να μετασχηματιστούν κατάλληλα για να αναφέρονται στην αρχική χρονοσειρά.
- Όταν λοιπόν η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη για να εφαρμόσουμε την πρόβλεψη με τα μοντέλα της προηγούμενης παραγράφου πρέπει να κάνουμε τα εξής βήματα:
  - να μετασχηματίσουμε τη χρονοσειρά σε στάσιμη: μη-στάσιμη $\{x_t\} \rightarrow \{y_t\}$ στάσιμη
  - να κάνουμε την πρόβλεψη του y_{n+k} με κάποιο μοντέλο, π.χ. AR, έστω $y_n(k)$,
  - να μετασχηματίσουμε την πρόβλεψη $y_n(k)$ για την στάσιμη χρονοσειρά στην πρόβλεψη $x_n(k)$ για την αρχική μη-στάσιμη χρονοσειρά

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

Δύο βασικοί τύποι βραχυπρόθεσμης πρόγνωσης

- Μοντέλα χρονοσειρών και μαύρου κουτιού
  - π.χ. Γενικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο *ARIMA*(p,d,q)(P,D,Q)$_s$
- Μοντέλα διόδευσης ροής σε φυσικούς αγωγούς (channel routing)
  - Υδραυλικές και Υδρολογικές Μέθοδοι
- Μοντέλα βροχής-απορροής (rainfall-runoff modelling)
  - Διάφορα μοντέλα (βλ. Θ.Ε. 1)
    - Συνήθως απλά μοντέλα που βασίζονται στη θεωρία του ΜΥΓ (μοναδιαίου υδρογραφήματος) είναι εξίσου αποτελεσματικά

- **Η ταξινόμηση της βραχυπρόθεσμης πρόγνωσης εξαρτάται από δύο κριτήρια**
  - Η σχέση του απαιτούμενου χρόνου πρόγνωσης (leadtime) T_f και του χρόνου συγκέντρωσης, T_c, της λεκάνης που δείχνει τον υδρολογικό χρόνο απόκρισής της και του χρόνου διόδευσης στο σύστημα υδατορεύματος T_r (channel travel time)
  - Ο λόγος της χωρικής κλίμακας του μετεωρολογικού γεγονότος προς τη χωρική κλίμακα της λεκάνης απορροής, R_s (χωρική κλίμακα της πρόγνωσης, forecasting spatial scale)

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

1. **$T_f > T_c + T_r$ (1η περίπτωση)**
   – Χρειάζεται μετεωρολογική πρόγνωση της βροχόπτωσης
   – Δύο Στάδια
     - Μετεωρολογική πρόγνωση
     - Υδρολογική πρόγνωση

2. **$T_f < T_c + T_r$ και $T_c << T_r$ (2η περίπτωση)**
   – Βασίζεται από παρατηρήσεις ροών από ανάντι σταθμούς
     - Για συστήματα μεγάλων ποταμών

3. **$T_f < T_c + T_r$ και $T_r << T_c$ (3η περίπτωση)**
   – Η πρόγνωση βασίζεται στα δεδομένα παρατήρησης βρόχόπτωσης από δίκτυο βροχομετρικών σταθμών
     - Για μικρές λεκάνες και αστικές περιοχές

4. **$R_s \leq 0.7$ (4η περίπτωση)**
   – Μερική κάλυψη της λεκάνης απορροής από το μετεωρολογικό γεγονός.
     - Αν χρησιμοποιηθεί αδρομερές (lumped) υδρολογικό μοντέλο μικρή ακρίβεια πρόγνωσης
     - Χωρισμός λεκάνης σε υπολεκάνες και πρόγνωσης όπως και στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΔΙΟΔΕΥΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑΤΟΣ

- **Υδραυλικές μέθοδοι**
  - Χρησιμοποιούν την εξίσωση συνεχείας και τις δυναμικές εξισώσεις ροής, που απαιτούν καλή γνώση των υδραυλικών χαρακτηριστικών του υδατορρεύματος.

- **Υδρολογικές μέθοδοι**
  - Οι υδρολογικές μέθοδοι χρησιμοποιούν την εξίσωση συνεχείας και μια σχέση αποθηκευμένου όγκου-παροχής

Υδραυλικές μέθοδοι διόδευσης

- Στηρίζονται σε αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ασταθούς ροής σε ανοικτούς αγωγούς

  → ***Saint Venant Equations***

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = +q_l$$ **εξίσωση συνέχειας**

εξίσωση γραμμικής ορμής

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(V^2 A + g h_c A\right) = gA\left(S_0 - S_f\right) + q_l V_l$$

Όπου
A = εμβαδόν υγρής επιφάνειας διατομής

Q = παροχή νερού στη διατομή

ρ = πυκνότητα

V = *Q*/*A* = μέση ταχύτητα στη διατομή

q_l = πλευρική εισροή ανά μονάδα μήκους του αγωγού

h_c = απόσταση της επιφάνειας από το κέντρο βάρους της διατομής

V_l = η συνιστώσα της ταχύτητας πλευρικής εισροής κατά τον κύριο άξονα ροής

Παραδοχές υδραυλικών μεθόδων

- Το νερό είναι ασυμπίεστο και ομογενές.
- Η ταχύτητα σε κάθε σημείο μιας διατομής είναι ίση με την μέση ταχύτητα. Μέση ταχύτητα η ποσότητα Q/A
- Ισχύει υδροστατική κατανομή των πιέσεων (η κλίση του πυθμένα του αγωγού και καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας του νερού είναι αρκετά μικρές)
- Δεν υπάρχουν ασυνέχειες ή απότομες μεταβολές της ροής στο χώρο και στον χρόνο του πεδίου ροής.
- Η μόνη απώλεια ενέργειας κατά την κίνηση του νερού οφείλεται στις τριβές στον πυθμένα και στα τοιχώματα του αγωγού. Οι απώλειες υπολογίζονται από ημι-εμπειρικές σχέσεις τύπου Manning (συνθήκες ομοιόμορφης ροής) (Manning: $V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$; Chezy: $V = C\sqrt{RS}$)
- Δεν υπάρχουν απώλειες εξάτμισης και οι φυσικές μεταβολές από θερμοδυναμικής απόψεως θεωρούνται ισόθερμες

Υδραυλικές μέθοδοι διόδευσης

- Η δυναμική εξίσωση γραμμικής ορμής για πρισματικούς αγωγούς και χωρίς πλευρική εισροή γράφεται:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} = g\left(S_0 - S_f\right)$$

και μπορεί να γραφεί ως:

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

εάν $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ τότε η ροή είναι σταθερή (μόνιμη), διαφορετικά η ροή είναι ασταθής

Υδραυλικές μέθοδοι διόδευσης

- **Πλήρης δυναμική εξίσωση γραμμικής ορμής**:

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \longrightarrow$ **Δυνάμεις αδράνειας**

$\frac{\partial y}{\partial x} \longrightarrow$ **Δυνάμεις που προκύπτουν λόγω διαφοράς υδροστατικών πιέσεων**

Υδραυλικές μέθοδοι διόδευσης

- **Πλήρες δυναμικό κύμα (full dynamic wave)**

Δυναμική εξίσωση γραμμικής ορμής + Εξίσωση Συνέχειας

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} \qquad + \qquad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = +q_l$$

- **Κύμα Διαχύσεως (diffusive wave approximation)**

Εξίσωση γραμμικής ορμής με προσέγγιση διαχύσεως + Εξίσωση Συνέχειας

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} \qquad + \qquad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = +q_l$$

- **Κινηματικό Κύμα (kinematic wave approximation)**

Κινηματική προσέγγιση εξίσωσης γραμμικής ορμής + Εξίσωση Συνέχειας

$$S_f = S_0 \qquad + \qquad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = +q_l$$

Υδραυλικές μέθοδοι διόδευσης

- Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου από τις τρεις αυτές μεθόδους διοδεύσεως εξαρτάται από τον τύπο της ροής στο υδατόρρευμα

Μέθοδος	**Τύπος ροής**
Πλήρης δυναμική εξίσωση	**Μη μόνιμη ανομοιόμορφη**
Κύμα διαχύσεως	**Μόνιμη ανομοιόμορφη***
Κινηματικό κύμα	**Μόνιμη ομοιόμορφη***

Όταν η εξέλιξη είναι πολύ αργή τότε τα δυναμικά φαινόμενα θεωρούνται αμελητέα και η ροή θεωρείται κατά προσέγγιση ως μόνιμη

Η **επίλυση** των ανωτέρω εξισώσεων μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους:
α) Υπολογιστικές (βήμα-βήμα), β) Πεπερασμένες διαφορές,
γ) Πεπερασμένα στοιχεία δ) Μέθοδος των χαρακτηριστικών

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΔΙΟΔΕΥΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑΤΟΣ

- **Υδραυλικές μέθοδοι**
  - **Πλήρες δυναμικό κύμα (full dynamic wave)**
    - Έντονα μεταβαλλόμενη ροή
    - Μικρές κλίσεις, $S_0 \leq 0.0005$
    - Backwater effects – ανύψωση στάθμης
    - Διάδοση παλιρροιακών κυμάτων ανάντι
  - **Κύμα Διαχύσεως (diffusive wave approximation)**
    - $S_0 > 0.0005$
    - Δεν υπάρχουν backwater effects
  - **Κινηματικό Κύμα (kinematic wave approximation)**
    - $S_0 > 0.001$
    - Δεν υπάρχουν backwater effects

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΔΙΟΔΕΥΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑΤΟΣ

- **Υδρολογικές μέθοδοι**
  - **Μέθοδος Muskingum (Muskingum method)**
    - Εξίσωση συνέχειας $$O_{I+1} = C_0 I_{I+1} + C_1 I_I + C_2 O_I$$
  - **Παραλλαγές Μεθόδου Muskingum (π.χ. Muskingum-Cunge)**
  - **Μοντέλο γραμμικού ταμιευτήρα (Linear Reservoir model)**
  - **Μοντέλο σειράς γραμμικών ταμιευτήρων (Cascade Linear Reservoir model)**
  - **Μέθοδος Υστέρησης-Διόδευσης (Lag and Route model)**
    - Βασίζεται στο μοντέλο γραμμικού ταμιευτήρα αλλά υποτίθεται ότι η αποθήκευση σε κάθε χρονική στιγμή είναι ανάλογη της εκροής που συμβαίνει μετά από πέρασμα χρόνου t* → S(t) = K Q (t + t*)
  - **Μέθοδος Lagged Cascade of Linear Reservoir**
    - Το ίδιο με το προηγούμενο αλλά για σειρά γραμμικών ταμιευτήρων

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Ανάλυση δυναμικών συστημάτων x_t και y_t
  - Ομοίωμα συνάρτησης μεταφοράς θορύβου (transfer function-noise)
  - Ομοίωμα γραμμικού φίλτρου Kalman

Ομοίωμα γραμμικού φίλτρου Kalman

- **Εξίσωση**:

  $\boldsymbol{X_i = C_1 X_{i-1} + C_2 Z_i}$, $|C1|<1$ (1)

  όπου:

  X = στοχαστική έξοδος (π.χ. παροχή) στο χρόνο *i* και *i*-1

  Z_i = στοχαστική είσοδος (π.χ. βροχόπτωση) στο χρόνο i , και

  C_1, C_2 = σταθερές

- **Ισχύει γιατί**

  1. Βροχή – γεγονός με μεγάλη τυχαιότητα, μπορεί να προσομοιωθεί (μηνιαία και ημερήσια) με ένα μοντέλο ARMA παρόλο που υπάρχουν ξηρές και υγρές περίοδοι στο έτος
  2. Οι προσδιοριστικές συνιστώσες της απορροής θεωρούνται γνωστές (μέσος και τυπική απόκλιση). Η πρόγνωση της παροχής γίνεται με τη στοχαστική συνιστώσα της παροχής η οποία μπορεί να τυποποιηθεί (κανονικοποιηθεί) με $\frac{Q_i - \bar{Q}}{S} = x_i$

Ομοίωμα γραμμικού φίλτρου Kalman

- Τότε η **εξίσωση του Kalman filter** μπορεί να γραφεί:

  $$\boldsymbol{Q_i = \bar{Q} + S^*(C_1 Q_{i-1} + C_2 P_i\,,} \qquad (2)$$

- Οι συντελεστές C_1, C_2 υπολογίζονται από τις χρονοσειρές Q_i, P_i με πολλαπλή συσχέτιση
  - Έτσι με την (2) μπορεί να γίνει πρόγνωση της Q_i στο χρόνο *i* αν είναι γνωστά τα ντετερμινιστικά (προσδιοριστικά) μεγέθη $\bar{Q}, S$ της παροχής και η βροχόπτωση *P* στο χρόνο *i* και οι προηγούμενες παροχές.
- Σε πολλές περιπτώσεις η βροχόπτωση δεν προλαβαίνεται να μετρηθεί και για αυτό το λόγο κατασκευάζεται ομοίωμα για την πρόβλεψη της P_i
  - π.χ. AR(p): $P_i = \sum_{k=1}^{p} \varphi_\kappa P_{i-k}$. Τότε το **Kalman filter** γίνεται:

    $$\hat{Q} = \bar{Q} + S\left\{C_1 Q_{i-1} + C_2\left(\sum_{k=1}^{p} \varphi_\kappa P_{i-k}\right)\right\}$$

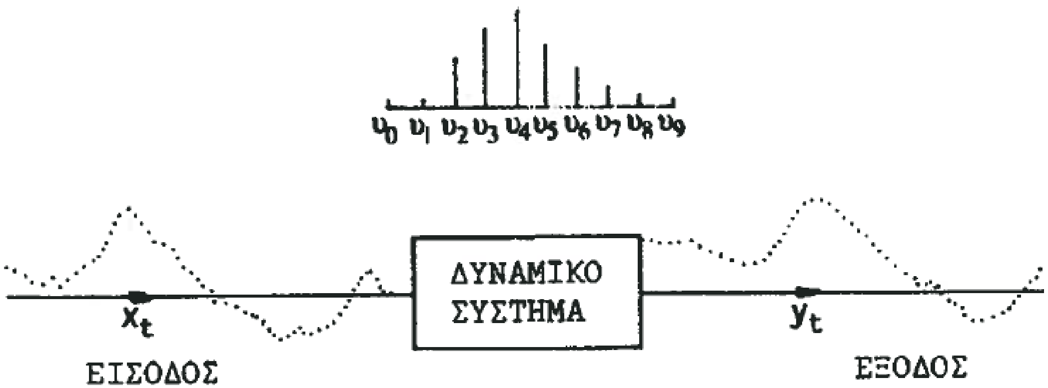
Ομοίωμα συνάρτησης μεταφοράς θορύβου (transfer function-noise)

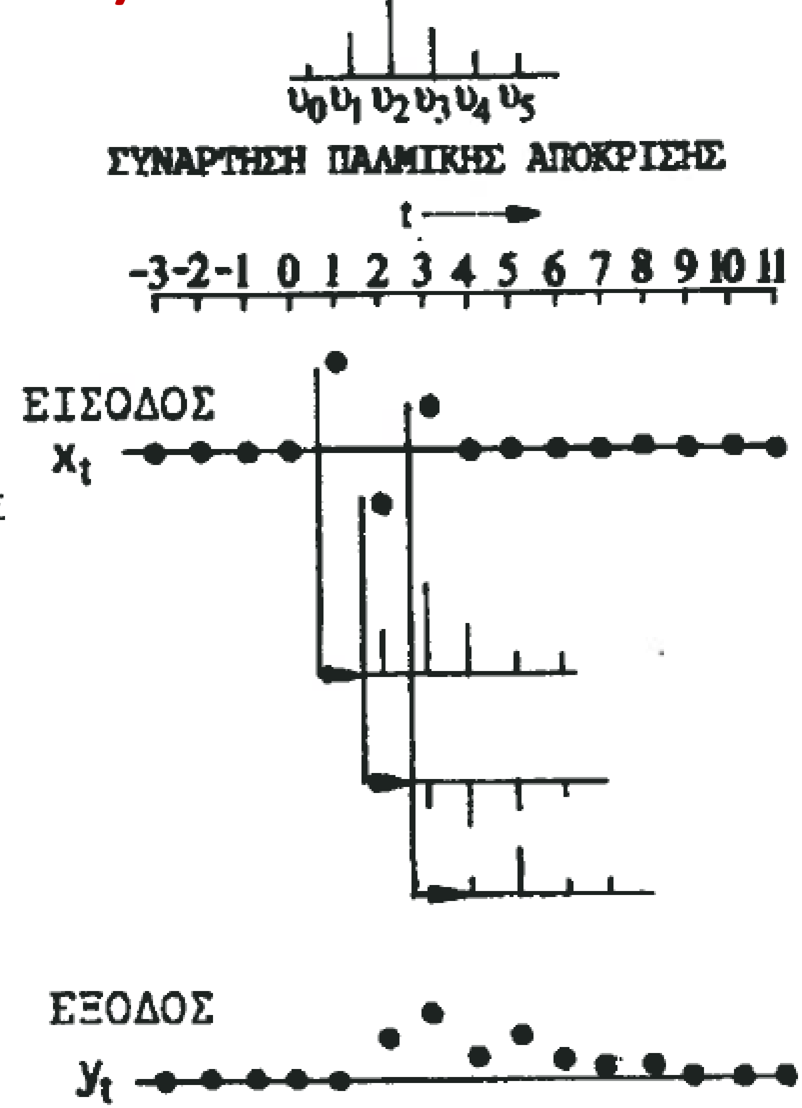
Για να προσομοιώσουμε τη λειτουργία αυτού του δυναμικού συστήματος, όπου τα x_t, και y_t, μεταβάλλονται συνεχώς, θα πρέπει να βρούμε μια αδρανειακή σχέση που να συνδέει τα δύο μεγέθη (Box και Jenkins, 1970). Σαν τέτοια χρησιμοποιείται μια γραμμική σχέση της μορφής:

$$y_t = U_0 x_t + U_1 x_{t-1} + \ldots = (U_0 + U_1 B + U_2 B^2 + \ldots) x_t = U(B) x_t \quad (4.116)$$

όπου η έξοδος σε κάποιο χρόνο t, δίνεται σαν γραμμική συνάθροιση των εισόδων στους χρόνους t, t-1,... . Ο τελεστής $U(B)$ καλείται συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου, ενώ $U_j B^j x_t = U_j x_{t-j}$.

Ομοίωμα συνάρτησης μεταφοράς θορύβου (transfer function-noise)





Ομοίωμα συνάρτησης μεταφοράς θορύβου (transfer function-noise)

Η εξ.(4.116) που συνδέει την είσοδο x_t και την έξοδο y_t του συστήματος παίρνει πιο γενική μορφή αν συνδέσουμε στην σχέση και προηγούμενες πραγματοποιήσεις των x_t, και y_t , με μορφή διαφορών ως εξής:

$$y_t - \delta_1 y_{t-1} - \delta_2 y_{t-2} - \ldots - \delta_r y_{t-r} = \omega_0 x_t - \omega_1 x_{t-1} - \ldots - \omega_s x_{t-s} \quad (4.117)$$

Η εξ.(4.117) ξαναγράφεται με τη μορφή του τελεστή B

$$(1 - \delta_1 B - \delta_r B^r) y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s) x_t \quad (4.118)$$

ή

$$\delta(B) y_t = \omega(B) x_t$$

στην περίπτωση που υπάρχει υστέρηση b χρονικών μονάδων μεταξύ εισόδου και εξόδου, τότε το ομοίωμα γίνεται

$$\delta(B) y_t = \omega(B) x_{t-b} = \omega(B) B^b x_t \quad (4.119)$$

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ - UPDATING

- Η **πρόγνωση** μπορεί να γίνει με **δύο μεθόδους**
  - Μετρήσεις βροχόπτωσης χρησιμοποιούνται στα μοντέλα για πρόγνωση ροής (unupdated forecasts)
  - Μετρήσεις βροχόπτωσης και απορροής χρησιμοποιούνται στα μοντέλα για πρόγνωση ροής (updated forecasts). Οι μετρήσεις απορροής χρησιμοποιούνται μόλις γίνουν γνωστές μετά το πέρασμα του χρόνου πρόγνωσης (leadtime)
- Το σφάλμα πρόγνωσης $e = Q_o – Q_f$

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ - UPDATING

Kalman filtering

- Το updating αυξάνει την πολυπλοκότητα της πρόγνωσης αλλά βελτιώνει την **πρόγνωση**
- Αναφέρεται και σαν **filtering** επειδή τα σφάλματα στις μετρήσεις και στα μοντέλα φιλτράρονται με διάφορους ειδικούς αλγόριθμους.
  - Ομοίωμα γραμμικού φίλτρου Kalman σε γραμμικά μοντέλα για διόρθωση σφαλμάτων των μετρήσεων και του μοντέλου (πιο συνήθης μέθοδος)
- Μία απαίτηση των μεθόδων αυτών filtering είναι η ροή για περίοδο t να γραφεί αναλυτικά ως συνάρτηση των ροών σε προηγούμενες χρονικές περιόδους και των βροχοπτώσεων
  - Η απαίτηση είναι δύσκολη να γίνει για πολύπλοκα παραμετρικά μοντέλα αλλά είναι ευκολότερη για γραμμικά απλά μοντέλα
- Το σφάλμα διορθώνεται και ελαχιστοποιείται με χρήση βαρών
  - Υπολογισμός συντελεστών του ομοιώματος γραμμικού φίλτρου Kalman
- Κέρδος από updating → Ελαχιστοποίηση σφάλματος πρόγνωσης

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ - UPDATING

Διόρθωση Σφάλματος Πρόγνωσης

- Το updating βραχυπρόθεσμης πρόγνωσης πιο **αποδοτική** όταν τα σφάλματα πρόγνωσης είναι υψηλά αυτοσυσχετισμένα
- Η εμμονή των σφαλμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη μιας διαδικασίας πρόγνωσης που αποτελείται από την αρχική πρόγνωση βασισμένη στα αποτελέσματα ενός υδρολογικού μοντέλου + μία διόρθωση που βασίζεται στο σφάλμα μεταξύ πρόγνωσης και μετρήσεων

$$Q_f(t) = \mathrm{M}(\mathrm{P}, \mathrm{C}, \mathrm{Q}) + e_f(t)$$

όπου: $Q_f(t)$ = η πρόγνωση απορροής για χρόνο t, M(P, C, Q) = το υδρολογικό μοντέλο που εξαρτάται από τη βροχόπτωση μέχρι το χρόνο πρόγνωσης P, τα χαρακτηριστικά της λεκάνης και τις παραμέτρους του μοντέλου C, και πιθανά προηγούμενες απορροές και $e_f(t)$ = το σφάλμα πρόγνωσης για χρόνο t που βασίζεται σε προηγούμενα σφάλματα πρόγνωσης

- Ένα στοχαστικό μοντέλο χρονοσειράς δομείται για την εκτίμηση του $e_f(t)$
- Για μια χ.σ. καταιγίδων ρυθμίζεται το μοντέλο και δημιουργείται μια χ.σ. των σφαλμάτων πρόγνωσης. Ένα στατιστικό μοντέλο αναπτύσσεται χρησιμοποιώντας τεχνικές εκτίμησης παραμέτρων χ.σ. που χρησιμοποιείται για τη διόρθωση της πρόγνωσης → Για AR(1) : $e_t(t) = \rho\, e_t(t-1)$

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ - UPDATING

Διαδικασία Διόρθωσης Σφάλματος Πρόγνωσης

1. Για επιχειρησιακή πρόγνωση για χρόνο t, η απορροή από τις προηγούμενες περιόδους έχει μετρηθεί και το σφάλμα πρόγνωσης υπολογίζεται
2. Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις (βροχόπτωσης ή και άλλες) μια αρχική εκτίμηση της πρόγνωσης της απορροής βασισμένη στο υδρολογικό μοντέλο γίνεται
3. Χρησιμοποιώντας τα υπολογισμένα σφάλματα για τις προηγούμενες περιόδους και γνωρίζοντας τη δομή της χ.σ. των σφαλμάτων γίνεται εκτίμηση του σφάλματος πρόγνωσης.
4. Η τελική πρόγνωση για το χρόνο t είναι το άθροισμα της βασισμένης στο μοντέλο πρόγνωσης και της εκτίμησης του σφάλματος πρόγνωσης

- Η μεθοδολογία ελέγχεται υπολογίζοντας τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σφάλματος πρόγνωσης. Αν τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα τότε η διαδικασία πρόγνωσης χρησιμοποιεί όσο το δυνατόν περισσότερη πληροφορία για βελτίωση της ακρίβειας
  - Δεν μπορεί να επιτευχθεί με το updating

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

Μοντέλα μακροπρόθεσμης πρόγνωσης

1. Index – Variable
2. Storage – accounting
3. Παραμετρική προσομοίωση (conceptual simulation)
4. Μοντέλα Χρονοσειρών

Μοντέλα Index – Variable

- Συσχετισμός της πρόγνωσης της απορροής με μία ή περισσότερους παραμέτρους – δείκτες που επηρεάζουν την απορροή

$$Q_f = \mathrm{f}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

  - π.χ. Συσσωρευμένη βροχόπτωση πριν το χρόνο πρόγνωσης και εδαφική υγρασία κατά το χρόνο πρόγνωσης $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
  - Απλή μέθοδος

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

Μοντέλα Storage – accounting

- Εκτίμηση του νερού που έχει αποθηκευτεί στη λεκάνη απορροής (στο έδαφος, υπέδαφος, χιόνι) και είναι διαθέσιμο για μελλοντική απορροή
- Η πρόγνωση της απορροής είναι μία συνάρτηση (συνήθως γραμμική) της εκτίμησης της αποθήκευσης και της βροχόπτωσης στην περίοδο πρόγνωσης
- Η αποθήκευση στη λεκάνη απορροής στο χρονικό βήμα έναρξης της πρόγνωσης είναι:

$$S_t = a + bP_t - R_t$$

όπου P_t συνολική βροχόπτωση μέχρι το χρόνο αρχής πρόγνωσης, R_t συνολική απορροή για την ίδια περίοδο, a και b συντελεστές

- Η πρόγνωση απορροής για την περίοδο T είναι γραμμική ως προς S_t :

$$Q_f(t,T) = a(t,T)S_t + b(t,T) = A(t,T)S_t + B(t,T)P_t - C(t,T)R_t$$

  – Οι Tangborn & Rasmussen (1976) εκτίμησαν τα A και B με παλινδρόμηση για διαφορετικούς χρόνους έναρξης (t) και πρόγνωσης (T) και έθεσαν $C(t,T)$ =1 για απορροές που δημιουργούνται από χιόνι (snow generated flows)

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

Παραμετρική προσομοίωση (conceptual simulation)

- Είναι **προσομοίωση βροχόπτωσης-απορροής** που χρησιμοποιούν τις μετρήσεις των μετεωρολογικών ποσοτήτων μέχρι το χρόνο πρόγνωσης και έπειτα τις εκτιμήσεις τους Εκτίμηση του νερού που έχει αποθηκευτεί στη λεκάνη απορροής (στο έδαφος, υπέδαφος, χιόνι) και είναι διαθέσιμο για μελλοντική απορροή
- **Extended Stream Flow Prediction**. Βασίζεται σε ένα αδρομερές μοντέλο που τρέχει με παρατηρημένα δεδομένα μέχρι την αρχή της πρόγνωσης
- Κατά τη διάρκεια της περιόδου πρόγνωσης τα μετεωρολογικά δεδομένα είναι:
  - Προγνώσεις
  - Ιστορικά δεδομένα για παρόμοιες συνθήκες με αυτής της πρόγνωσης
  - Όλες οι προηγούμενες παρατηρημένες σειρές μετεωρολογικών δεδομένων
  - Συνθετικές χ.σ. μετεωρολογικών δεδομένων
- **Πλεονεκτήματα**
  - Τρέξιμο εναλλακτικών σεναρίων
  - Παράγουν πρόγνωση χρονοσειράς και όχι μόνο μιας τιμής μετά από χρόνο *T*
- **Μειονέκτημα**
  - Βαθμονόμηση του μοντέλου για ελαχιστοποίηση σφάλματος πρόγνωσης

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

Μοντέλα Χρονοσειρών

- Διατηρούν τις στατιστικές παραμέτρους της χρονοσειράς και προσεγγίζουν το μέσο για μεγάλες περιόδους πρόγνωσης

Πηγές Σφαλμάτων μακροπρόθεσμης πρόγνωσης

- **Σφάλματα του μοντέλου** (όχι καλή προσομοίωση των διαδικασιών)
- **Σφάλματα δεδομένων**
- **Σφάλματα στη μετεωρολογική πρόγνωση**

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗ ΠΡΟΓΝΩΣΗ - UPDATING

- Απλές μεθοδολογίες όπως η τεχνική της διόρθωσης του σφάλματος της πρόγνωσης (forecast error correction)
- Γραμμική παλινδρόμηση για την εκτίμηση του σφάλματος
- $Q_f(t,T) = \mathrm{M}(\mathrm{P}, \mathrm{C}, \mathrm{Q}) + e_f(t,T) \rightarrow e_f(t,T) = Q_f(t,T) - \mathrm{M}(\mathrm{P}, \mathrm{C}, \mathrm{Q})$
- Χρησιμοποιώντας δεδομένα από προηγούμενες χρονιές δημιουργούνται χρονοσειρές σφαλμάτων που συνδέονται με ποσότητες παρατηρούμενες κατά τη διάρκεια της πρόγνωσης με γραμμική παλινδρόμηση

1. **Εκτίμηση της πρόγνωσης**
2. **Εκτίμηση σφάλματος πρόγνωσης**
3. **Υπολογισμός διορθωμένης πρόγνωσης**

Βιβλιογραφία

Μιμίκου, Μ.Α., 2006. «Τεχνολογία Υδατικών Πόρων», 3η Έκδοση, Α. Παπασωτηρίου & Σία ΟΕ.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης