Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΓΝΩΣΗ

Ενότητα 2: Στατιστική και πιθανοτική ανάλυση ακραίων υδρολογικών τιμών

2.1. Πιθανοτική Ανάλυση Ακραίων Τιμών

Καθ. Αθανάσιος Λουκάς

Εργαστήριο Υδρολογίας και Ανάλυσης Υδατικών Συστημάτων

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πολυτεχνική Σχολή

Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ

Διαχείριση επικινδυνότητας ή διακινδύνευσης πλημμύρας

- **Ανάλυση Επικινδυνότητας**
- **Εκτίμηση Επικινδυνότητας**
- **Μείωση επικινδυνότητας**

Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ

Διαχείριση επικινδυνότητας ή διακινδύνευσης πλημμύρας

- **Ανάλυση Επικινδυνότητας**
  - Καθορισμός κινδύνου: Πιθανότητα και χαρακτηριστικά (π.χ. βάθος νερού, ταχύτητα ροής, διάρκεια γεγονότος πλημμύρας) ενός γεγονότος πλημμύρας
  - Καθορισμός τρωτότητας: Πιθανές κοινωνικές, οικονομικές και οικολογικές καταστροφές που εξαρτώνται από την τιμή και την ευπάθεια σε ένα συγκεκριμένο τύπο κινδύνου
  - Προσδιορισμός διακινδύνευσης: Πιθανότητα ορισμένης κοινωνικής, οικονομικής και οικολογικής καταστροφής από έναν καθορισμένο κίνδυνο
- **Εκτίμηση Επικινδυνότητας**
- **Μείωση επικινδυνότητας**

Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ

Διαχείριση επικινδυνότητας ή διακινδύνευσης πλημμύρας

- **Ανάλυση Επικινδυνότητας**
- **Εκτίμηση Επικινδυνότητας**
  - Αντίληψη διακινδύνευσης: Καθολική αντίληψη της διακινδύνευσης ενός ατόμου ή μιας ομάδας ατόμων, που εξαρτάται από το πολιτισμικό επίπεδο και τις προσωπικές αξίες, εμπειρίες και αισθήματα του καθενός
  - Στάθμιση διακινδύνευσης: Καθορισμός της ανεκτικότητας στη διακινδύνευση, σταθμίζοντας το κόστος και τις ωφέλειες, που εξαρτάται από την αντίληψη και τα ενδιαφέροντα του κάθε ατόμου και του συνόλου των ανθρώπων
- **Μείωση επικινδυνότητας**

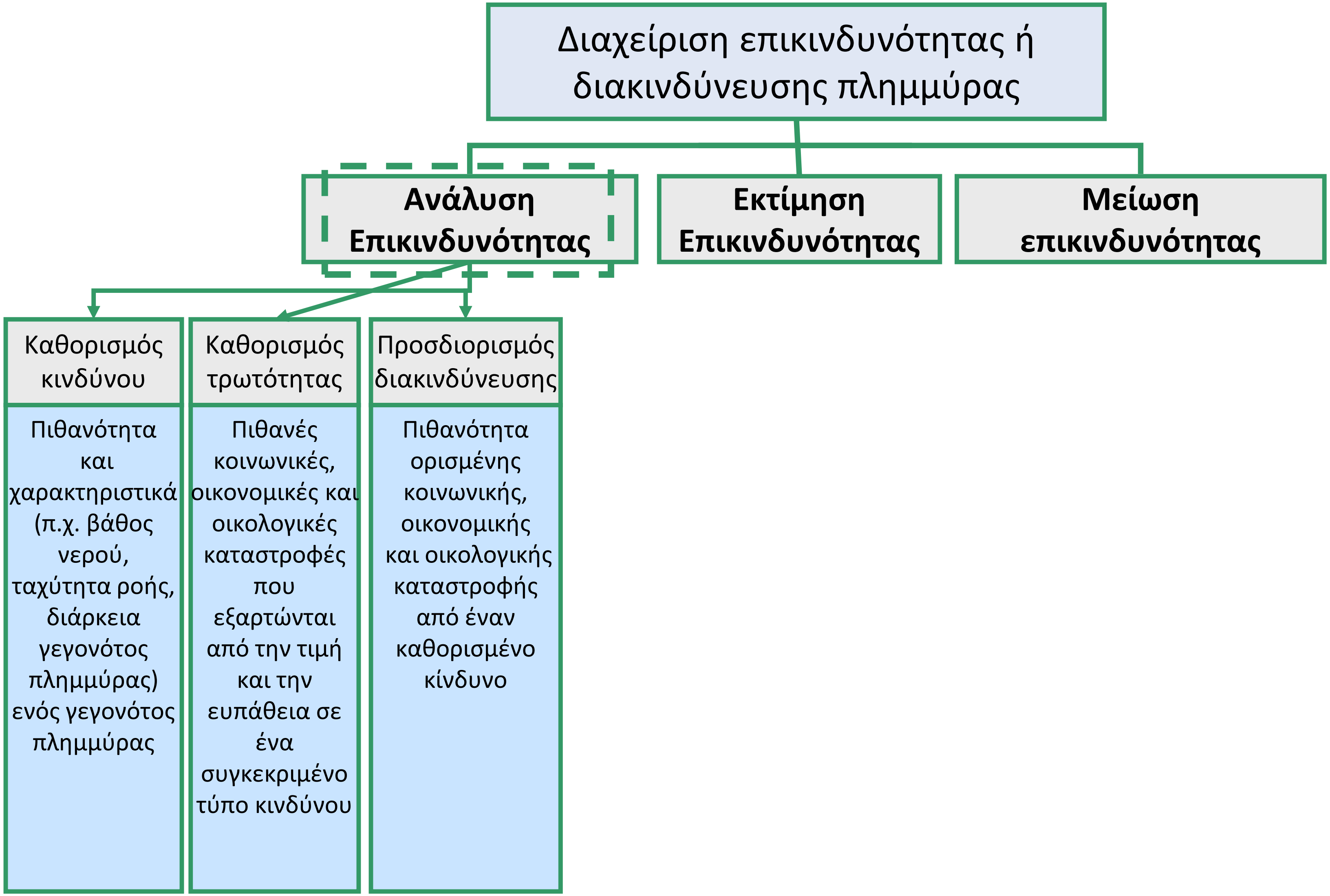
Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ

Διαχείριση επικινδυνότητας ή διακινδύνευσης πλημμύρας

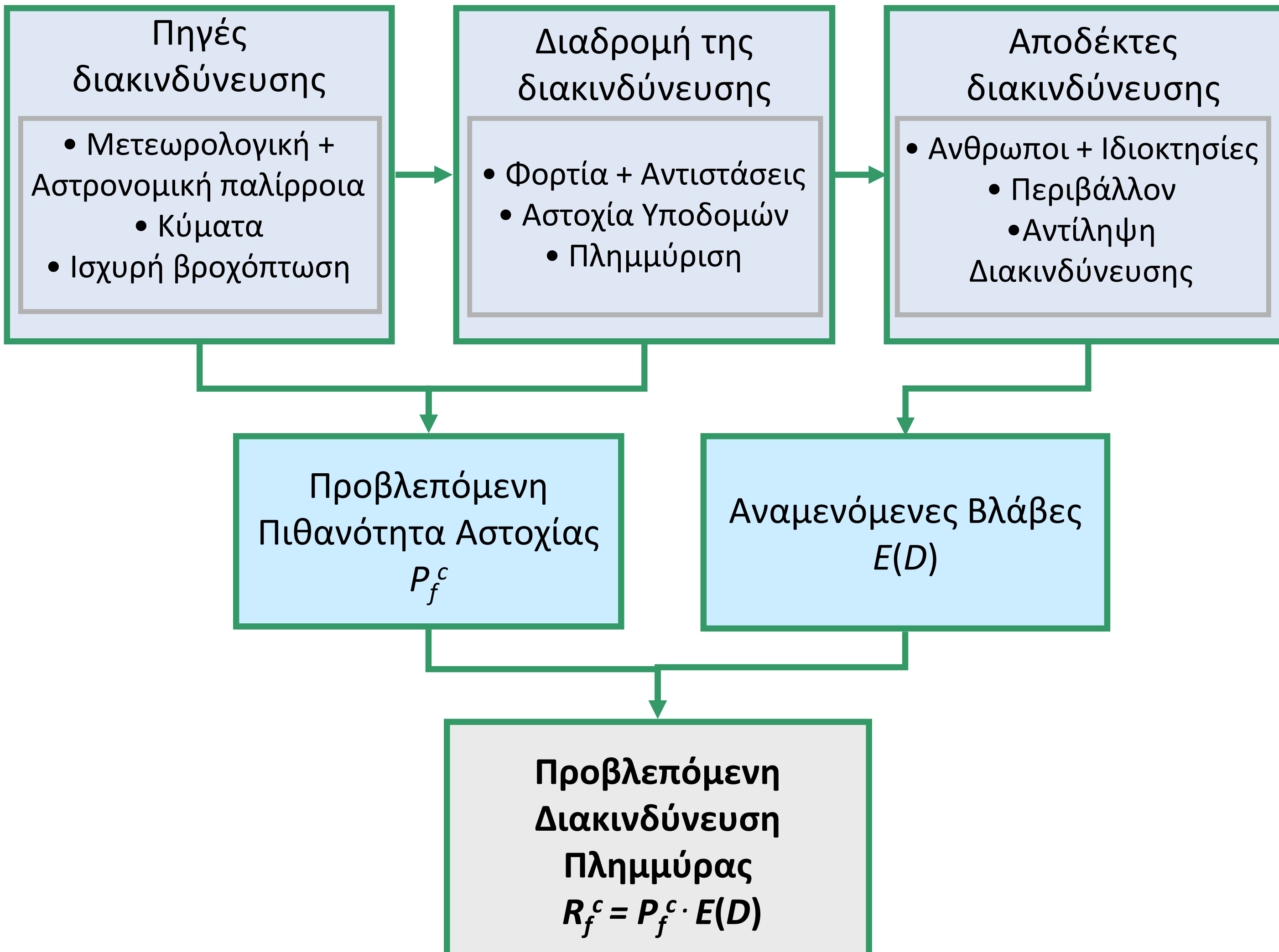
- **Ανάλυση Επικινδυνότητας**
- **Εκτίμηση Επικινδυνότητας**
- **Μείωση επικινδυνότητας**

Μείωση της διακινδύνευσης πριν την πλημμύρα	Μείωση της διακινδύνευσης κατά τη διάρκεια της πλημμύρας	Μείωση της διακινδύνευσης μετά την πλημμύρα
Φυσικά μέτρα, ρυθμιστικά, επικοινωνιακά και οικονομικά μέσα για τη μείωση της διακινδύνευσης, μέσω της παρεμπόδισης ενός γεγονότος πλημμύρας και μέσω της ετοιμότητας να αντιμετωπιστεί	Φυσικά μέτρα, ρυθμιστικά, επικοινωνιακά και οικονομικά μέσα για τη μείωση της διακινδύνευσης ενός εξελισσόμενου γεγονότος πλημμύρας	Φυσικά μέτρα, ρυθμιστικά, επικοινωνιακά και οικονομικά μέσα για να αντιμετωπιστούν οι υπάρχουσες ζημιές από το γεγονός πλημμύρας

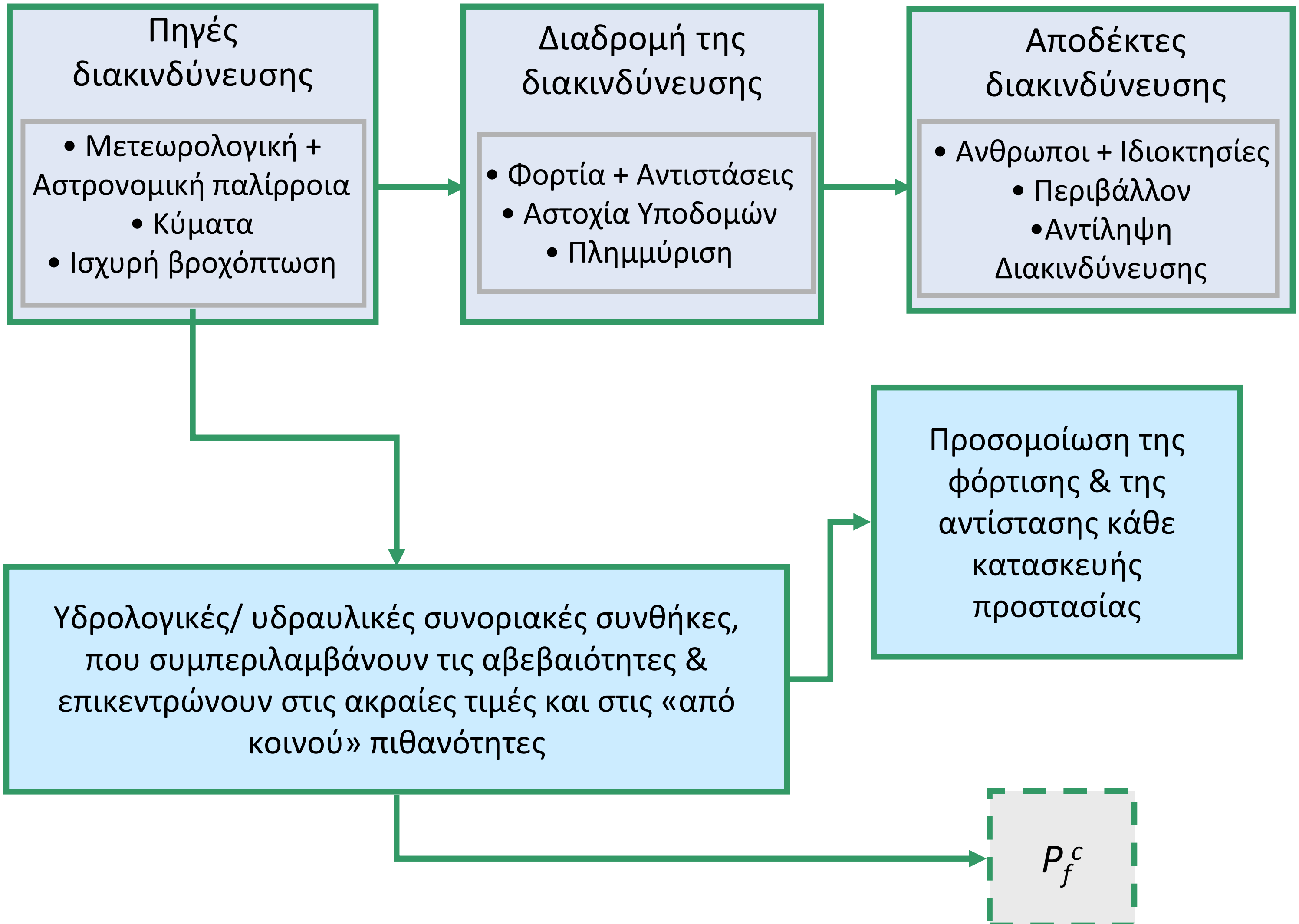
Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ



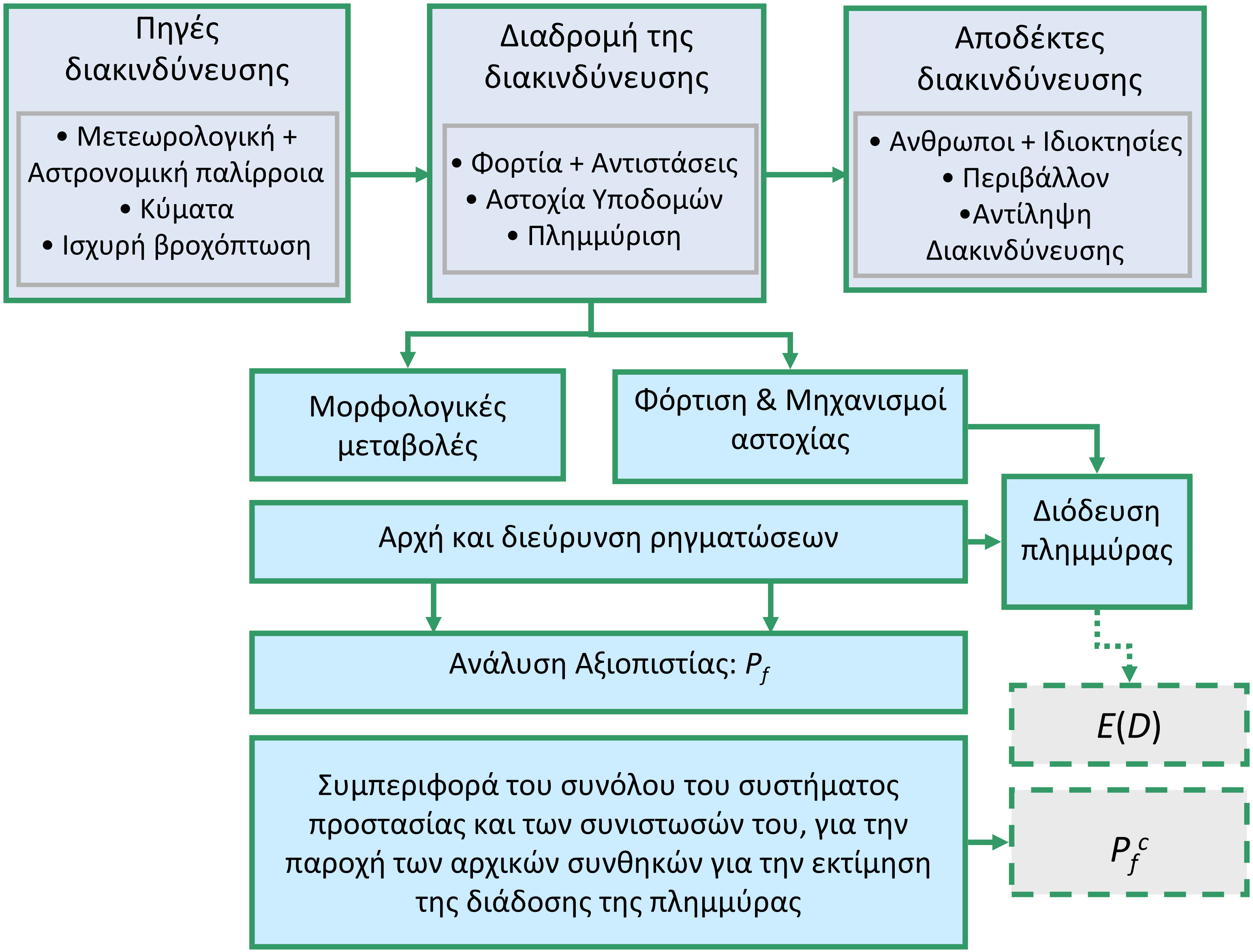
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ



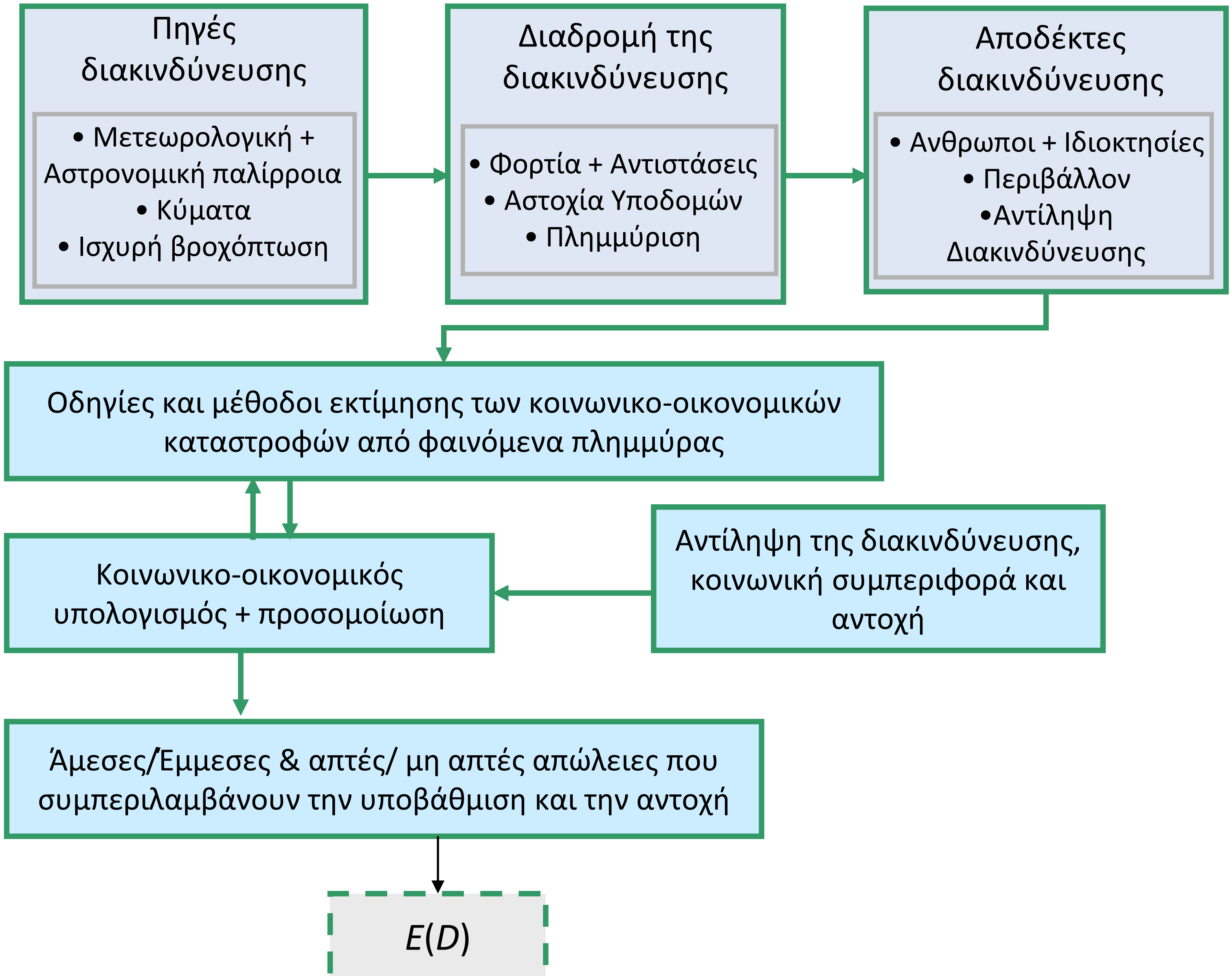
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ



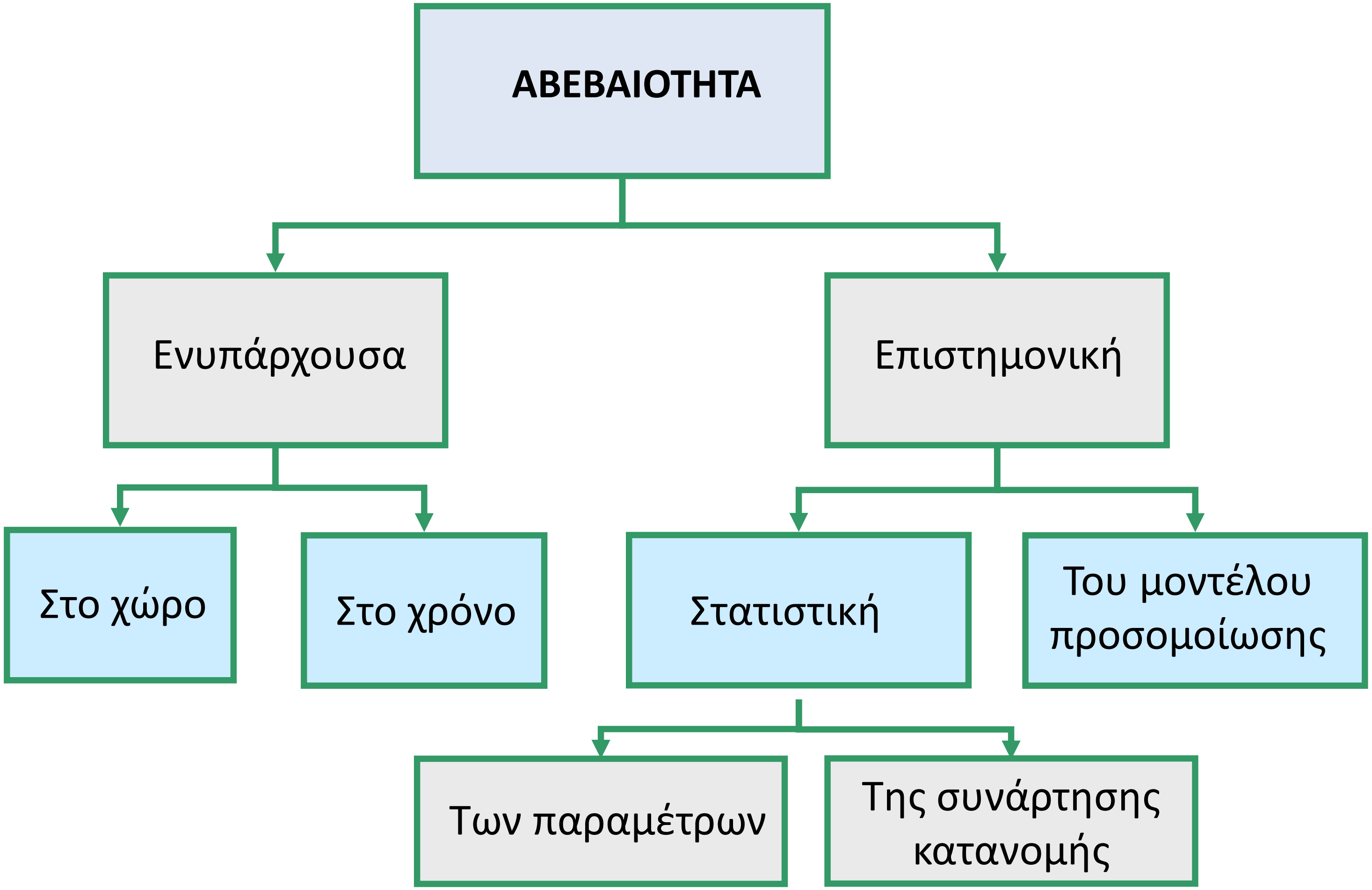
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ



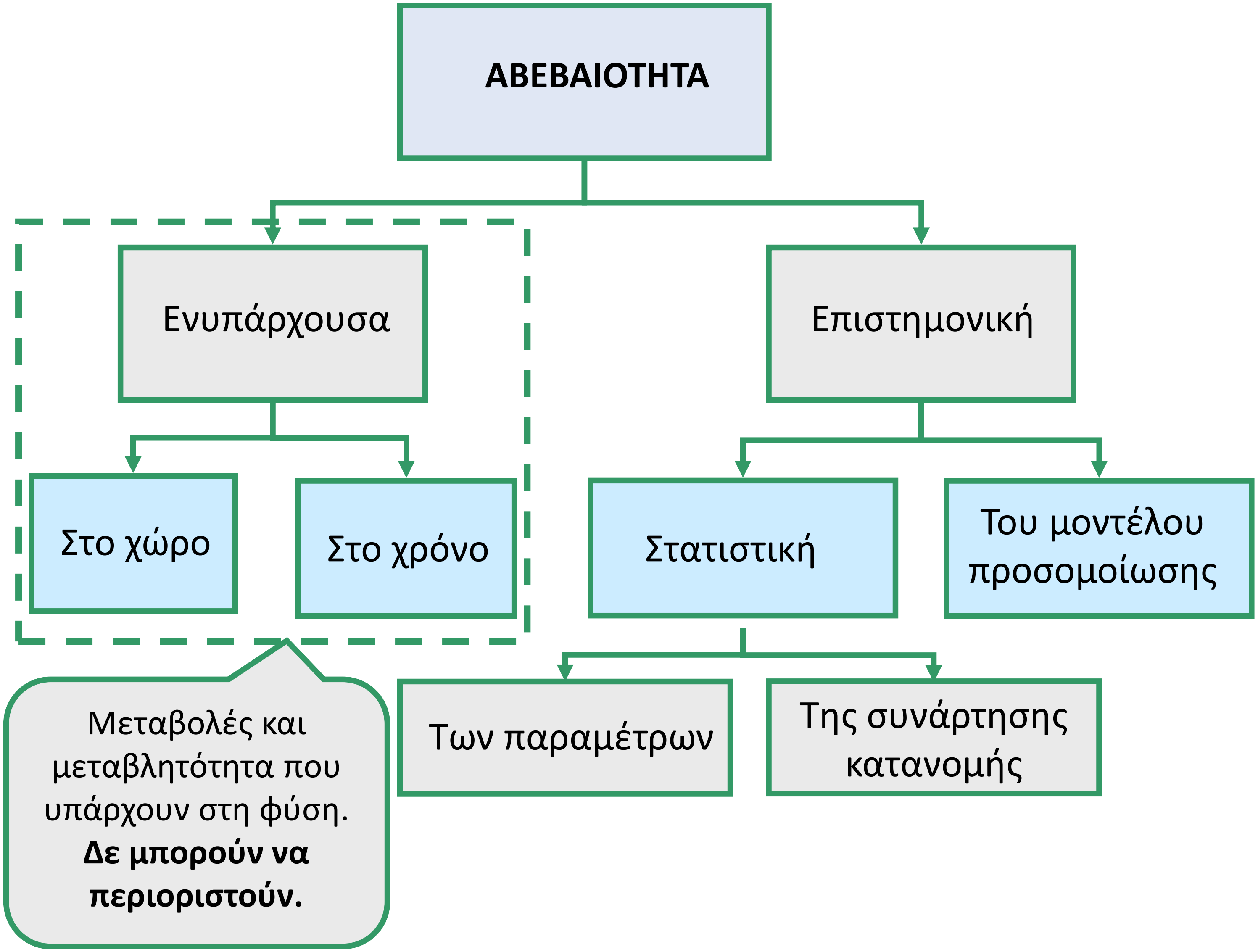
ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ ΠΛΗΜΜΥΡΑΣ



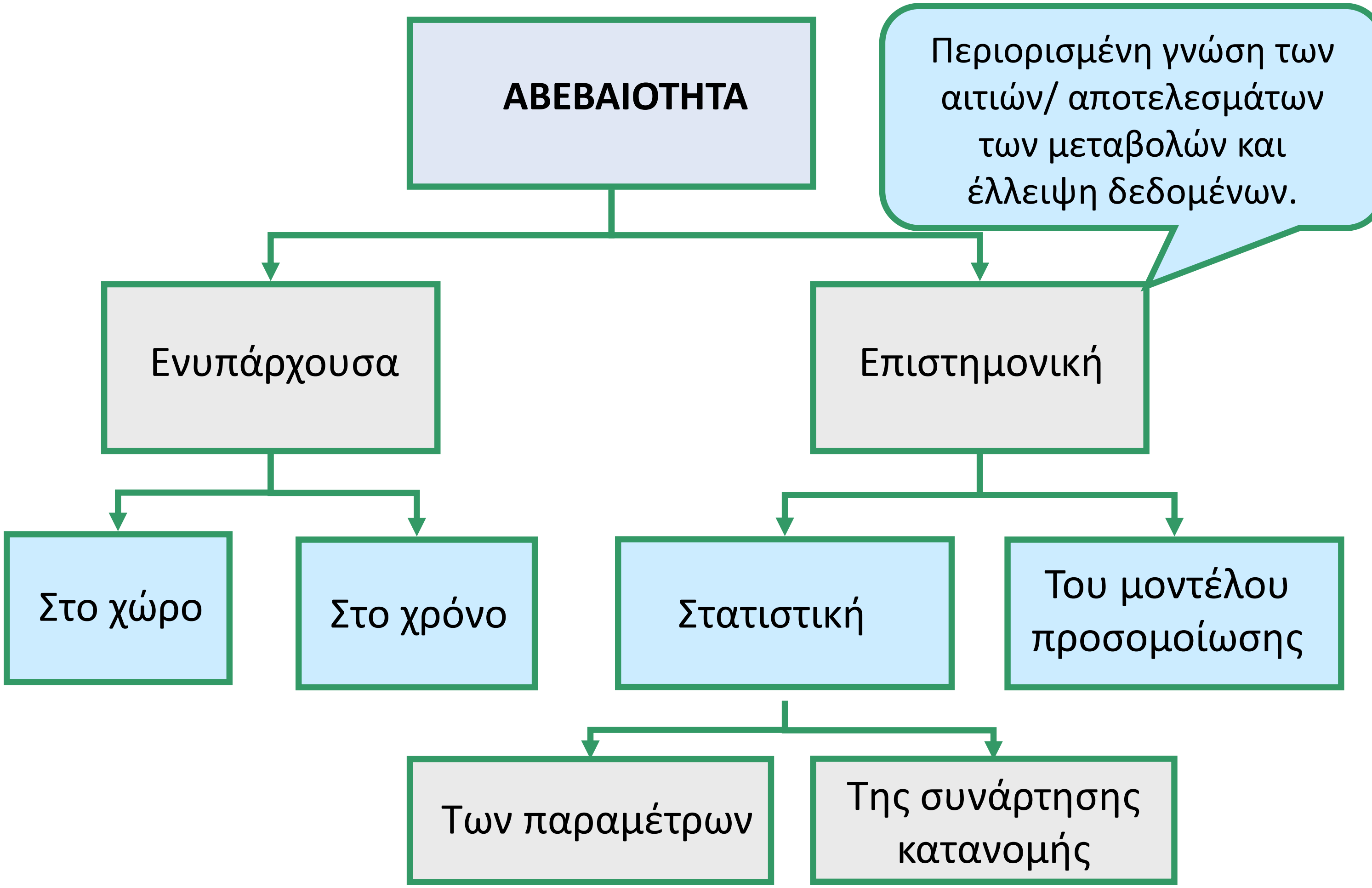
Η ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ



Η ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ



Η ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ



Η ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ

- **ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ**
  - Ενυπάρχουσα
    - Στο χώρο
    - Στο χρόνο
  - Επιστημονική
    - Περιορισμένη γνώση των αιτιών/ αποτελεσμάτων των μεταβολών και έλλειψη δεδομένων.
    - Στατιστική
      - Των παραμέτρων
        - Προσομοίωση με τη μέθοδο “**bootstrap**”, αλλά και με τη μέθοδο εκτίμησης **Bayes**
      - Της συνάρτησης κατανομής
        - Μια προσέγγιση υπολογισμού κατά **Bayes** μπορεί να μειώσει αυτή την αβεβαιότητα
    - Του μοντέλου προσομοίωσης

Η ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗΣ

ΣΧΕΣΗ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Οι περισσότερες μέθοδοι της τεχνικής υδρολογίας βασίζονται στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική δεδομένου ότι:

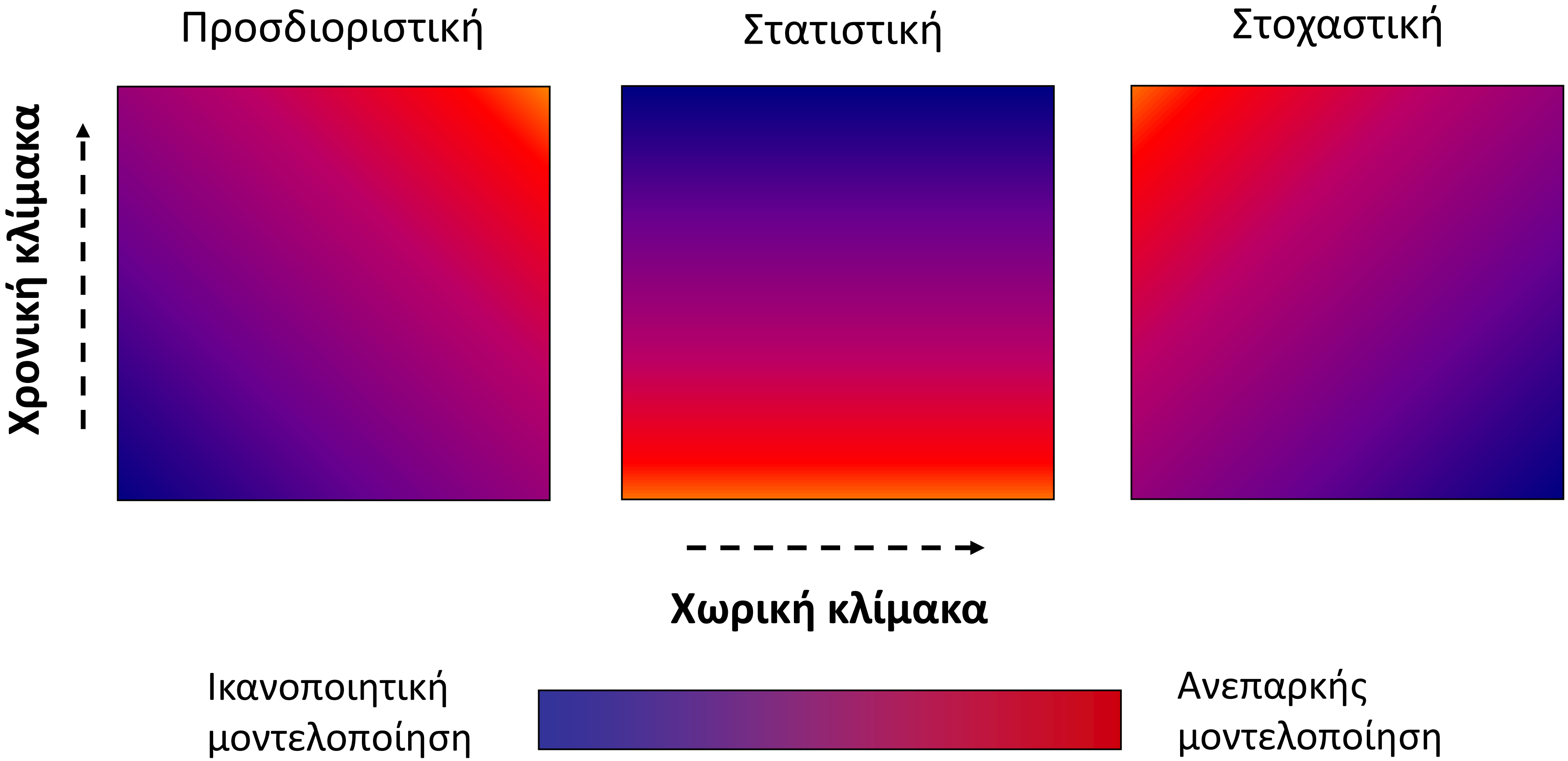
- Η **τύχη** είναι άμεσα συνδεδεμένη με τα υδρολογικά φαινόμενα (πλημμύρες, ξηρασίες) με αποτέλεσμα να περιγράφονται σε μικρό ή μεγάλο βαθμό από τη θεωρία των πιθανοτήτων
- Η τεχνική υδρολογία στηρίζεται σε **μετρήσεις φυσικών μεταβλητών** που η επεξεργασία τους προϋποθέτει τη χρήση στατιστικών μεθόδων (έλεγχος των σφαλμάτων των μετρήσεων, συμπλήρωση ελλείψεων ιστορικών δειγμάτων και κυρίως επέκταση χρονοσειρών)
- Η λήψη αποφάσεων για το **σχεδιασμό** και τη **βέλτιστη λειτουργία** των υδραυλικών έργων και των υδατικών συστημάτων γενικότερα, γίνεται πάντοτε υπό καθεστώς αβεβαιότητας, η οποία μπορεί να ποσοτικοποιηθεί με την θεωρία των πιθανοτήτων

Σημειώνεται ότι η χρήση των πιθανοτήτων δεν μπορεί να υποκαταστήσει την έλλειψη μετρήσεων των υδρολογικών μεταβλητών ή την έλλειψη αξιοπιστίας σε αυτές, χωρίς τις οποίες είναι αδύνατη η εφαρμογή οποιασδήποτε προσέγγισης.

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Προσδιοριστική - Στατιστική - Στοχαστική προσέγγιση

Προσέγγιση της απορροής



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Σχήμα στατιστικών επεξεργασιών

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ
N_{Π}

↓ Δειγματοληψία

ΔΕΙΓΜΑ
($N_{\Delta} < N_{\Pi}$)

↓ Συμπύκνωση πληροφορίας

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ
- Μέση τιμή
- Τυπική απόκλιση
- Συντελεστής διασποράς
- Συντελεστής ασυμμετρίας

→ Μοντελοποίηση

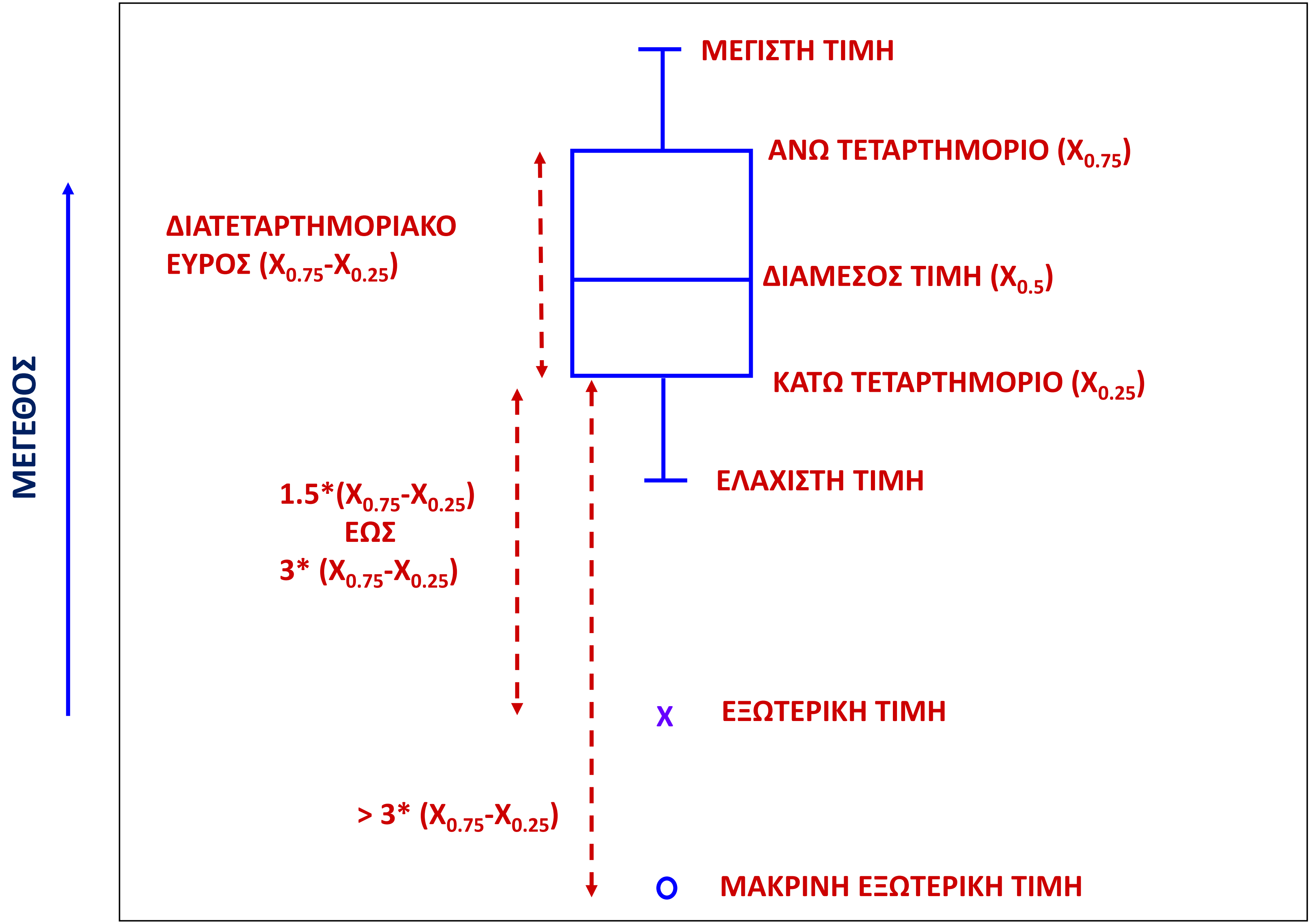
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ
Συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας

- Επιλογή θεωρητικής κατανομής
- Στατιστικές δοκιμές καταλληλότητας

↑ Εκτίμηση πιθανοτικών μεγεθών

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΕΡΩΤΗΜΑΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΠΛΗΘΥΣΜΟ
- Τι πιθανότητα έχει να εμφανιστεί μια τιμή σε συγκεκριμένο διάστημα
- Σε τι τιμή αντιστοιχεί κάποια πιθανότητα

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ



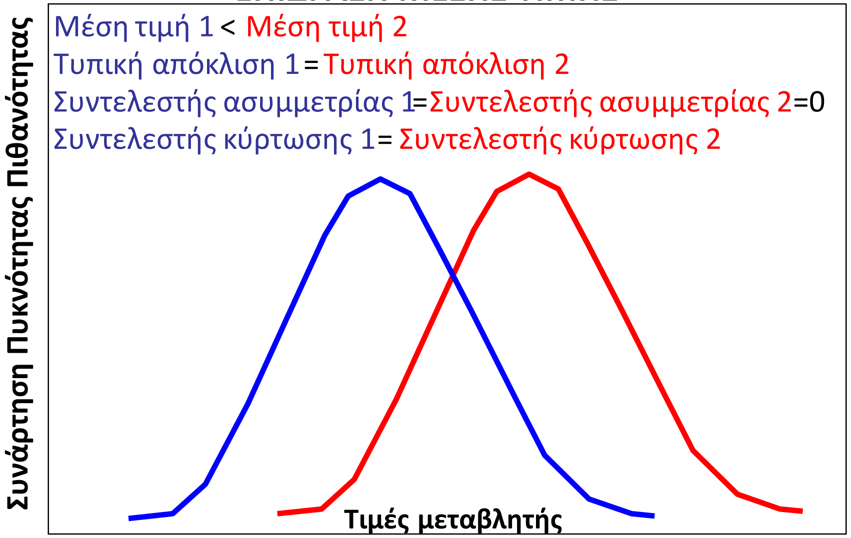
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	*ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ - ΣΧΕΣΗ*
Μέση τιμή **(ροπή τάξης 1)**	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
Τυπική απόκλιση	$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2}{n-1}}$
Διασπορά **(κεντρική ροπή τάξης 2)**	s_x^2
Συντελεστής διασποράς	$s_x / \overline{x}$
Τρίτη ροπή	$\mu_x^{(3)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^3}{n}$
Τέταρτη ροπή	$\mu_x^{(4)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^4}{n}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_x} = \frac{\mu_x^{(3)} * n^2}{(\mu_x^{(2)})^{3/2} * (n-1) * (n-2)}$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_x} = \frac{n^3 * \mu_x^{(4)}}{(n-1) * (n-2) * (n-3) * \mu_x^{(2)}}$
Μέγιστη τιμή	$M.T. = \max_{i=1}^{n}\{X_1, X_2, ..., X_n\}$
Ελάχιστη τιμή	$E.T. = \min_{i=1}^{n}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

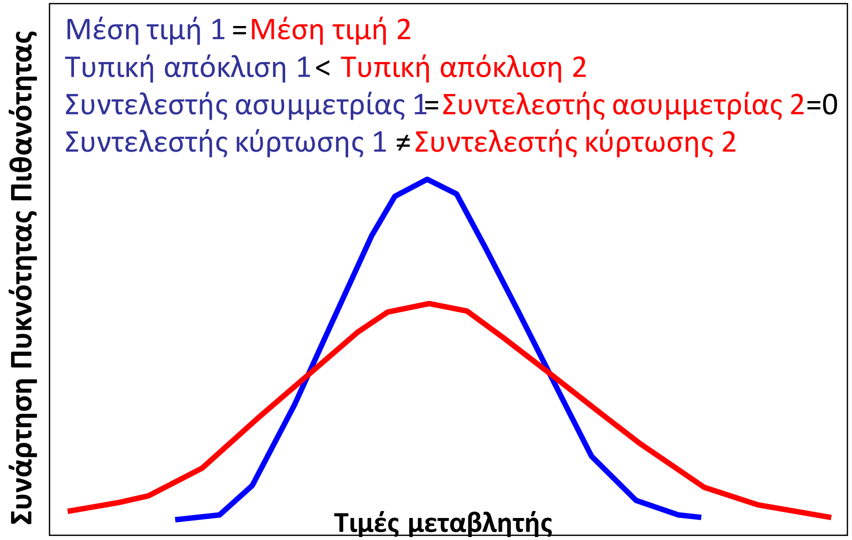
$X_1...X_n$: Οι τιμές της μεταβλητής ***n*** : Αριθμός δεδομένων δείγματος

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

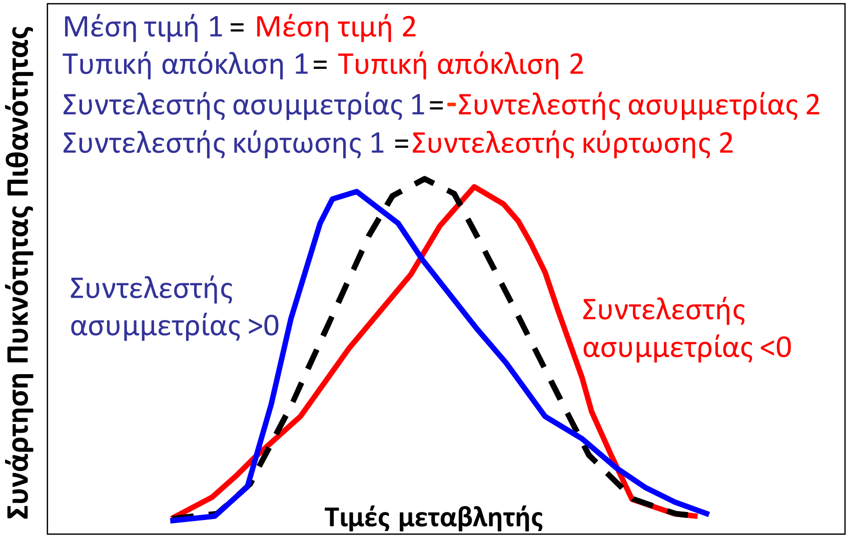
ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ



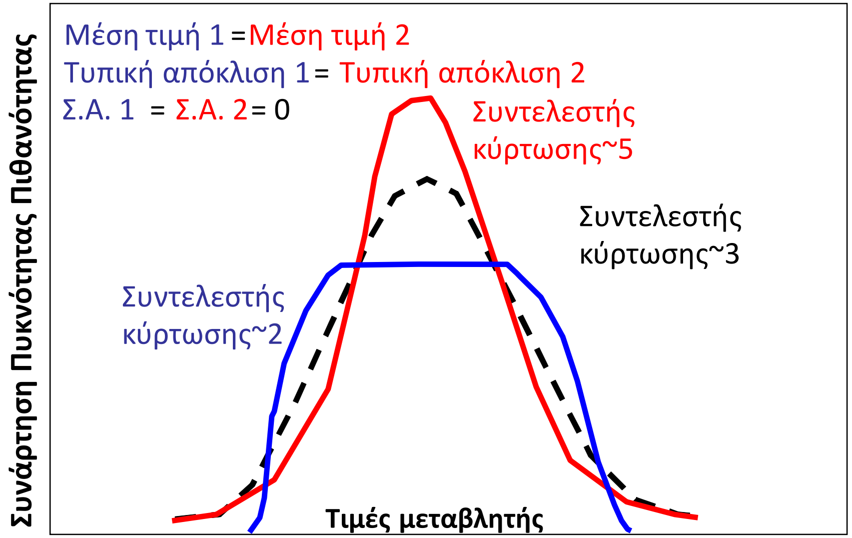
ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ



ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ



ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΚΥΡΤΩΣΗΣ



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

X τυχαία μεταβλητή

Συνάρτηση κατανομής (πιθανότητα μη υπέρβασης)
Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να είναι μικρότερη ή ίση της δεδομένης τιμής x

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

$$0 = F_X(-\infty) \le F_X(x) \le F_X(+\infty) = 1$$

Πιθανότητα υπέρβασης
Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να είναι μεγαλύτερη της δεδομένης τιμής x

$$F_{1X} = P(X \ge x) = 1 - F_X(x)$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(X) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

$$T = \frac{1}{P(X > x)} = \frac{1}{F_{1_x}(x)} = \frac{1}{1 - F_X(x)}$$

Η περίοδος επαναφοράς είναι το αντίστροφο της πιθανότητας υπέρβασης. Προϋποθέσεις για να ισχύει η παραπάνω σχέση είναι (α) να είναι συνεχής η τυχαία μεταβλητή και (β) να ισχύει η παραδοχή ανεξαρτησίας της προηγούμενης ενότητας, δηλαδή κάθε εμφάνιση να είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από τις προηγούμενες και επόμενές της.

Βασική σχέση, η οποία συνδέει τα τρία βασικά μεγέθη υδρολογικού σχεδιασμού ενός έργου, δηλαδή την περίοδο επαναφοράς, τη διάρκεια ζωής και τη διακινδύνευση:

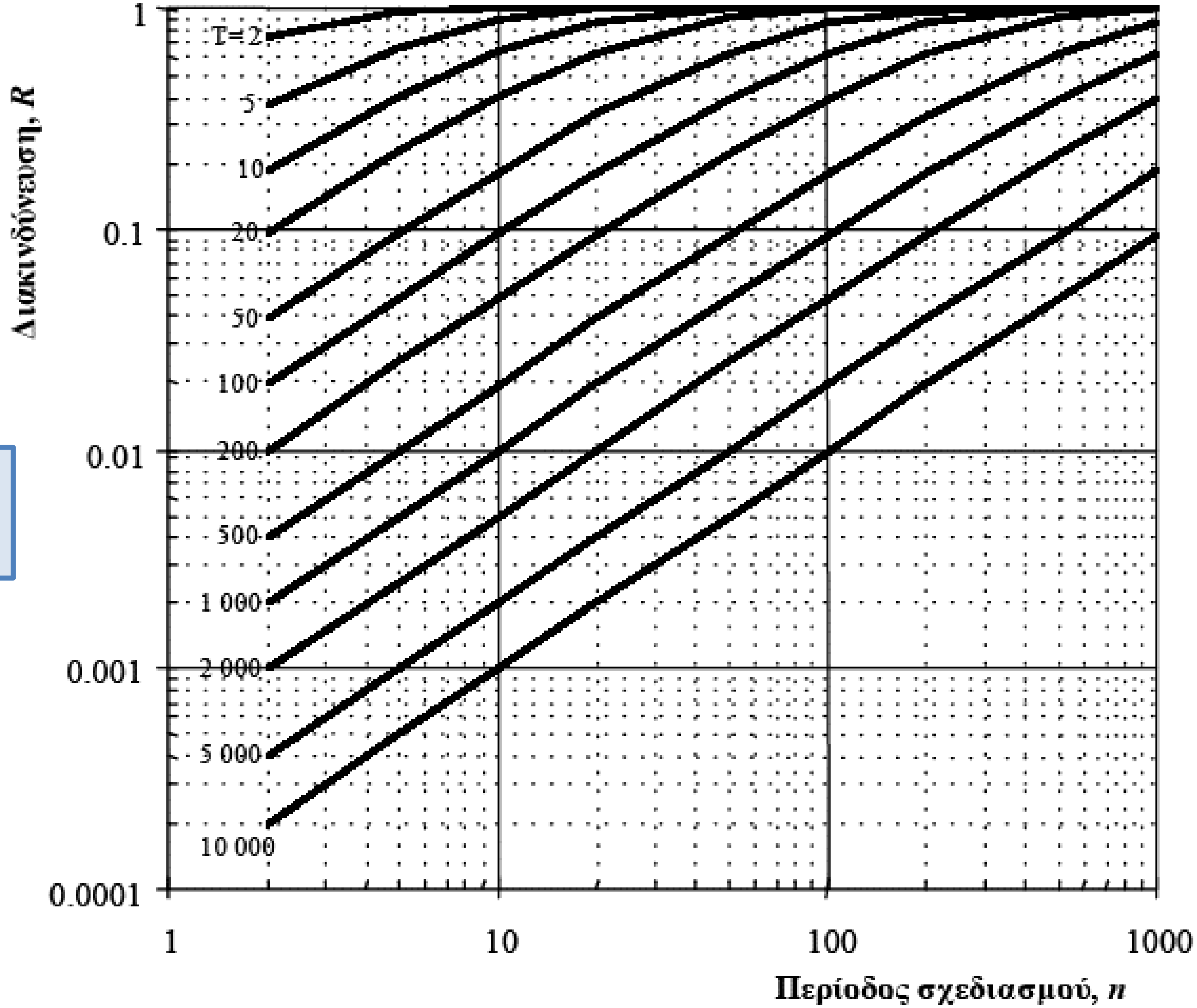
$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \qquad T = \frac{1}{1 - (1 - R)^{\frac{1}{n}}}$$

Τέλος, δεδομένου ότι $\ln(1-x)^n = n\ln(1-x) = n\left(-x - \frac{x^2}{2} - \cdots\right) \approx -nx$, παίρνουμε και την ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση του *R*:

$R = 1 - e^{-n/T}$ η οποία ισχύει με σφάλμα <1% για T ≥ 50 έτη.

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n$$



Γραφική απεικόνιση της σχέσης των χαρακτηριστικών μεγεθών υδρολογικού σχεδιασμού (Πηγή: Κουτσογιάννης και Ξανθόπουλος, 1999)

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

Παράδειγμα*: α) Διώρυγα εκτροπής σχεδιάζεται να λειτουργήσει κατά την περίοδο κατασκευής φράγματος, η οποία εκτιμάται σε 5 χρόνια. Ποια πρέπει να είναι η περίοδος επαναφοράς της πλημμύρας σχεδιασμού, ώστε η διακινδύνευση να μην υπερβαίνει το 10%; β) Πόση είναι η διακινδύνευση αν ένα έργο σχεδιαστεί με περίοδο επαναφοράς ίση με τη διάρκεια ζωής του;*

Λύση

α) $R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \rightarrow T = \frac{1}{1-(1-R)^{1/n}} \rightarrow T = \frac{1}{1-(1-0.10)^{\frac{1}{5}}} \rightarrow T = 47.9 \cong 48$ έτη

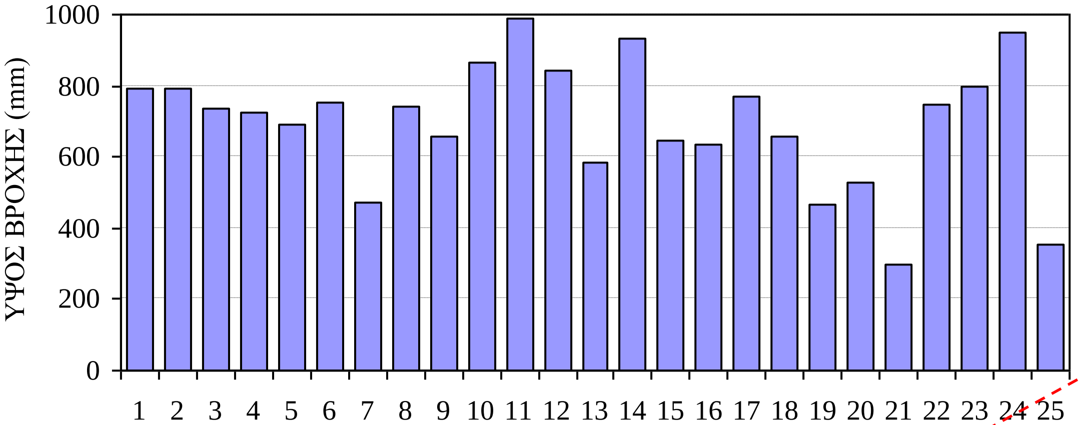
Στρογγυλεύουμε για περιόδο επαναφοράς T = 50 έτη.

β) Αν δεχτούμε ότι η διάρκεια ζωής του έργου είναι αρκετά μεγάλη (≥ 50 χρόνια), τότε από την προσεγγιστική σχέση παίρνουμε $R = 1 - e^{-1} = 0.632$ = 63.2%. Διαφορετικά η διακινδύνευση υπολογίζεται από την κανονική εξίσωση

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

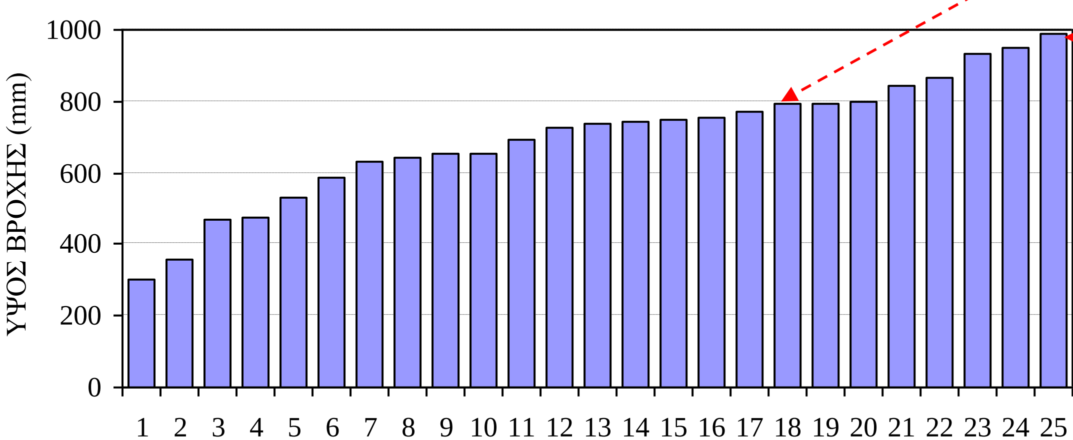
$$F_X(x) = \frac{n_x}{N}$$

N: το σύνολο των στοιχείων του δείγματος
n_x: ο αριθμός των τιμών του δείγματος που δεν υπερβαίνουν την τιμή χ



$F_x(800)=18/25=0.72=72\%$
$F_1(800)=7/25=0.28=28\%$

Όμως:



$F_x(1000)=25/25=1=100\%$
$F_1(1000)=0/25=0=0\%$

Για αυτό:

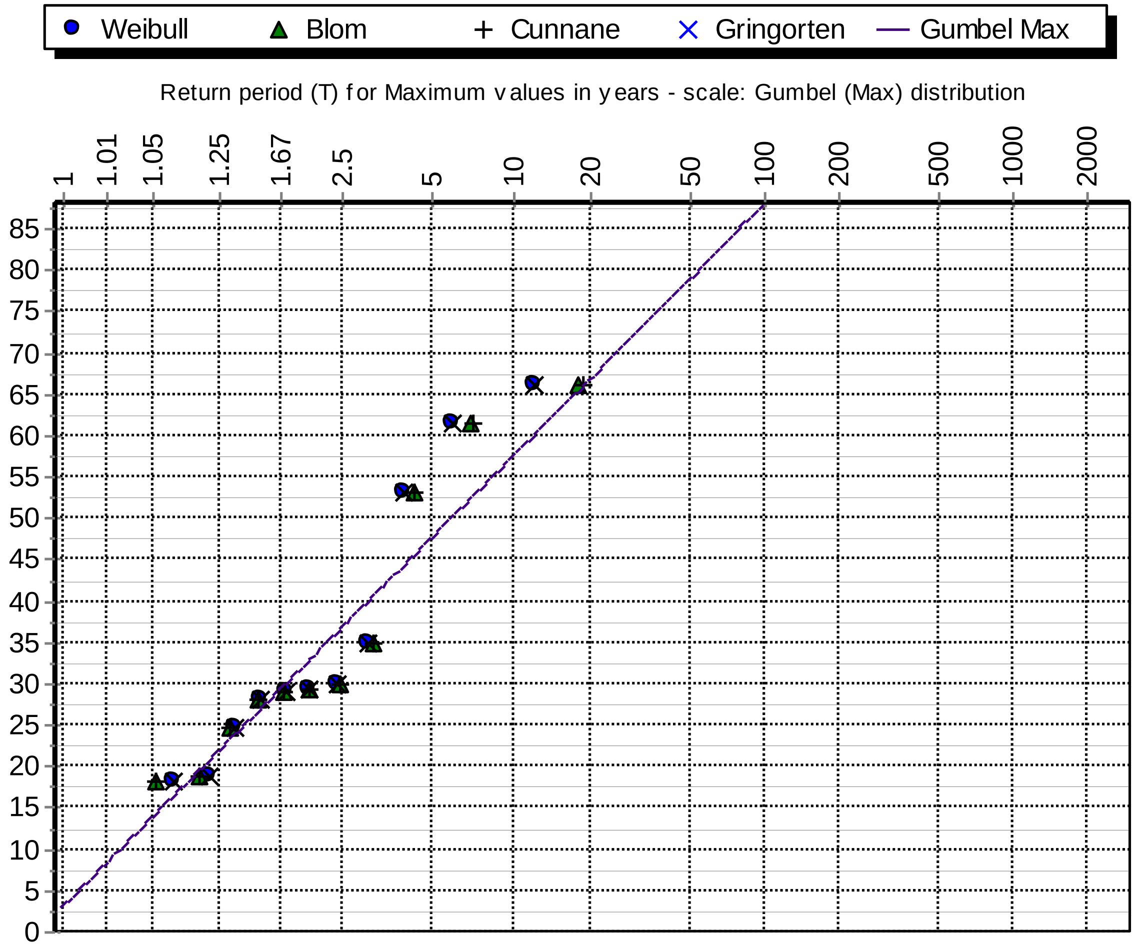
$$F_X(x) = \frac{n_x}{N+1}$$

Οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής (πιθανότητες μη-υπέρβασης ταξινομημένου δείγματος σε αύξουσα σειρά)

Όνομα κατανομής	Σχέση q_i=
Weibull	$\frac{i}{n+1}$
Blom	$1-\frac{(n-i+1)-0.375}{n+0.25}$
Cunnane	$1-\frac{(n-i+1)-0.4}{n+0.2}$
Gringorten	$1-\frac{(n-i+1)-0.44}{n+0.12}$
Hazen	$\frac{2i-1}{2n}$

Εμπειρικές κατανομές Weibull, Blom, Cunnane, Gringorten

Ετήσια μέγιστα έντασης ωριαίων βροχοπτώσεων



ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

Περίοδος επαναφοράς,Τ μιας δεδομένης τιμής x της τυχαίας μεταβλητής X είναι ο μέσος αριθμός χρονικών διαστημάτων (εν προκειμένω υδρολογικών ετών) που μεσολαβεί μεταξύ 2 διαδοχικών εμφανίσεων της τυχαίας μεταβλητής με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο της δεδομένης τιμής x.

Πιθανότητα υπέρβασης σε ένα έτος: $F_1=1/T$

Πιθανότητα μη υπέρβασης σε ένα έτος: $F=1-F_1=(1-1/T)$

Πιθανότητα μη υπέρβασης σε *n* έτη: $(1-1/T)^n$

Διακινδύνευση είναι η πιθανότητα ***R*** να πραγματοποιηθεί μέσα σε ***n*** έτη τιμή που αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς ***T***.

Πιθανότητα υπέρβασης σε *n* έτη
(Διακινδύνευση): $R=1-(1-1/T)^n$

Παράδειγμα **T=50 έτη, n=10 έτη**

$$R=1-(1-1/50)^{10}=0.18=18\%$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

- **Λογαριθμοκανονική Κατανομή**
- **Κατανομές Ακραίων Τιμών (Extreme Value distributions)**
  - **Ακραίων τιμών τύπου I (EVI, Gumbel)**
  - **Ακραίων τιμών τύπου II**
  - **Ακραίων τιμών τύπου III (Weibull)**
- **Κατανομή Pearson III**
- **Κατανομή Log-Pearson III**

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Συνεχής και ορισμένη για όλες τις θετικές τιμές

2. Άνω κλάδος χωρίς όριο (unbounded)

3. Κάτω κλάδος με όριο μηδέν ή μια θετική τιμή

4. Ασυμπτωτική στον άξονα για μεγάλες θετικές τιμές της μεταβλητής

5. Μέγιστος αριθμός παραμέτρων = τρείς (3)

(μέση τιμή, διασπορά ή τυπική απόκλιση, συντελεστής ασυμμετρίας)

ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΒΑΣΗΣ (ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ)

1. Επιλογή τιμών
2. Διάταξη κατά φθίνουσα σειρά μεγέθους (για μέγιστα) και κατά αύξουσα σειρά μεγέθους (για ελάχιστα)
3. Υπολογισμός της πιθανότητας υπέρβασης και της περιόδου επαναφοράς
4. Προσαρμογή μιας θεωρητικής κατανομής με εκτίμηση των παραμέτρων της
5. Εκτίμηση μεγέθους γεγονότος για μια δεδομένη περίοδο επαναφοράς

   ή

6. Εκτίμηση περιόδου επαναφοράς ενός δεδομένου μεγέθους

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΜΙΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

1. Η μέθοδος των **Ροπών** (method of moments)
2. Η μέθοδος της **μέγιστης πιθανοφάνειας** (method of maximum likelihood)
3. Η μέθοδος των L-ροπών (πιθανοτικά σταθμισμένων ροπών) (method of L-moments)
4. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (method of least squares)
5. Η μέθοδος του ελαχίστου x2 (minimum x2 method)
6. Η μέθοδος των έξι διαιρέσεων (method of sextiles)
7. Η μέθοδος επιλογής ειδικών σημείων (method of matching selected points)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

- **Υπολογισμός των ροπών**
  - Μέσος

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

  - Διακύμανση ή τυπική απόκλιση

$$\hat{\sigma} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1} \right]^{1/2}$$

  - Συντελεστής ασυμμετρίας

$$\hat{g} = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)^3}{\hat{\sigma}^{3/2}}$$

Δειγματικές ροπές ως στατιστικοί δείκτες

Απλές (μεροληπτικές) εκτιμήτριες των δειγματικών ροπών

Στατιστικός δείκτης	Εκτιμήτρια
Μέση τιμή	$\mu_x = \frac{\sum x_i}{n}$
Τυπική απόκλιση	$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu_x)^2}{n}}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_x^{(3)} = \frac{1}{n}\sum x_i^3 - 3\mu_x \sigma_x^2 - \mu_x^3$ ή $\mu_x^{(3)} = \frac{1}{n}\sum (x_i - \mu_x)^3$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{sx} = \frac{\mu_x^{(3)}}{\sigma_x^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή *m*$_4$, συντελεστής κύρτωσης δείγματος *g*$_2$ (μεροληπτικός)	$m_4 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \mu_x)^4$, $g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$ όπου m_2 η δειγματική μεταβλητότητα = σ_x^2

Για την περίπτωση της εκτίμησης παραμέτρων κατανομών με την έμμεση μέθοδο των ροπών (περίπτωση κατανομής Log-Pearson III) θα χρησιμοποιείται η μετασχηματισμένη μεταβλητή: y_i=lnx_i στην θέση της x_i

Δειγματικές ροπές ως στατιστικοί δείκτες

Συντελεστές διόρθωσης μεροληψίας - αμερόληπτες εκτιμήσεις των ροπών του πληθυσμού

Στατιστικός δείκτης	Συντελεστής διόρθωσης μεροληψίας
Μέση τιμή	-
Τυπική απόκλιση	$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2}$
Αμερόληπτη εκτιμήτρια της κύρτωσης του πληθυσμού.	$\frac{(n+1)n}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{k_2^{\,2}}-3\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$ Όπου x η μέση τιμή του δείγματος και k_2 η αμερόληπτη εκτιμήτρια για την μεταβλητότητα του πληθυσμού.

Για την περίπτωση της εκτίμησης παραμέτρων κατανομών με την έμμεση μέθοδο των ροπών (περίπτωση κατανομής Log-Pearson III) θα χρησιμοποιείται η μετασχηματισμένη μεταβλητή: *y*i=ln*xi* στην θέση της *xi*.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ) ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- **Για πολλές κατανομές πιθανότητας μπορεί να γραφεί η ακόλουθη σχέση**

$$x_T = \bar{x} + \hat{\sigma} \cdot K_T$$

όπου K_T είναι ο παράγοντας συχνότητας που εξαρτάται από την περίοδο επαναφοράς T και τα χαρακτηριστικά της κατανομής

Βήματα ελέγχου x^2

1. Υπολογίζονται οι παράμετροι της κατανομής που πρόκειται να προσαρμοστεί (για την κανονική κατανομή r=2, μ και σ).
2. Χωρίζεται το δείγμα των στοιχείων σε k ισοπίθανες κλάσεις (κριτήριο συνήθως να έχω τουλάχιστον 5 στοιχεία σε κάθε κλάση ή $k \geq r+2$ ή και $k \leq N/5$).
3. Υπολογίζεται ο βαθμός ελευθερίας της κατανομής $v= k-r-1$.
4. Υπολογίζεται η Αθροιστική Πιθανότητα οι τιμές να βρίσκονται στην τρέχουσα και τις προηγούμενες κλάσεις.
5. Προσδιορίζεται το *X* που αντιστοιχεί στην αθροιστική πιθανότητα *Z* κάθε κλάσης και τα όρια των κλάσεων.
6. Υπολογίζεται η πιθανότητα (p_i) μίας τυχαίας τιμής της κατανομής x^2 να ανήκει σε κάθε κλάση (γι’ αυτό χρειάζεται τουλάχιστον μία παρατήρηση σε κάθε κλάση).
7. Υπολογίζεται ο αναμενόμενος (θεωρητικός) αριθμός παρατηρήσεων για κάθε κλάση με τη συγκεκριμένη κατανομή, $E_i= n*p_i$ (πολλαπλασιάζεται το p_i με το μέγεθος του δείγματος n).

Βήματα ελέγχου x^2

8. Γίνεται καταμέτρηση των πραγματικών παρατηρήσεων N_i από το δείγμα που πέφτουν μέσα σε κάθε κλάση.

9. Υπολογίζεται η στατιστική παράμετρος, D (όταν η τιμή είναι πολύ μεγάλη, αναμένεται ότι η κατανομή δεν προσαρμόζεται καλά στη x^2).

$$D = \Sigma[(N_i - E_i)^2 / E_i]$$

10. Συγκρίνεται η τιμή της παραμέτρου D με την τιμή που προκύπτει από τους πίνακες x^2 για το συγκεκριμένο ν και συγκεκριμένες πιθανότητες - επίπεδα σημαντικότητας α x^2_α.

11. Η μηδενική υπόθεση (ότι το δείγμα ακολουθεί τη θεωρητική κατανομή στην οποία προσαρμόστηκε (π.χ. την κανονική)) γίνεται δεκτή σε κάποιο επίπεδο σημαντικότητας α, αν $D < x^2_\alpha$. Συνήθη επίπεδα σημαντικότητας είναι τα 1%, 5% και 10%.

ΕΛΕΓΧΟΣ x^2 για κανονική κατανομή

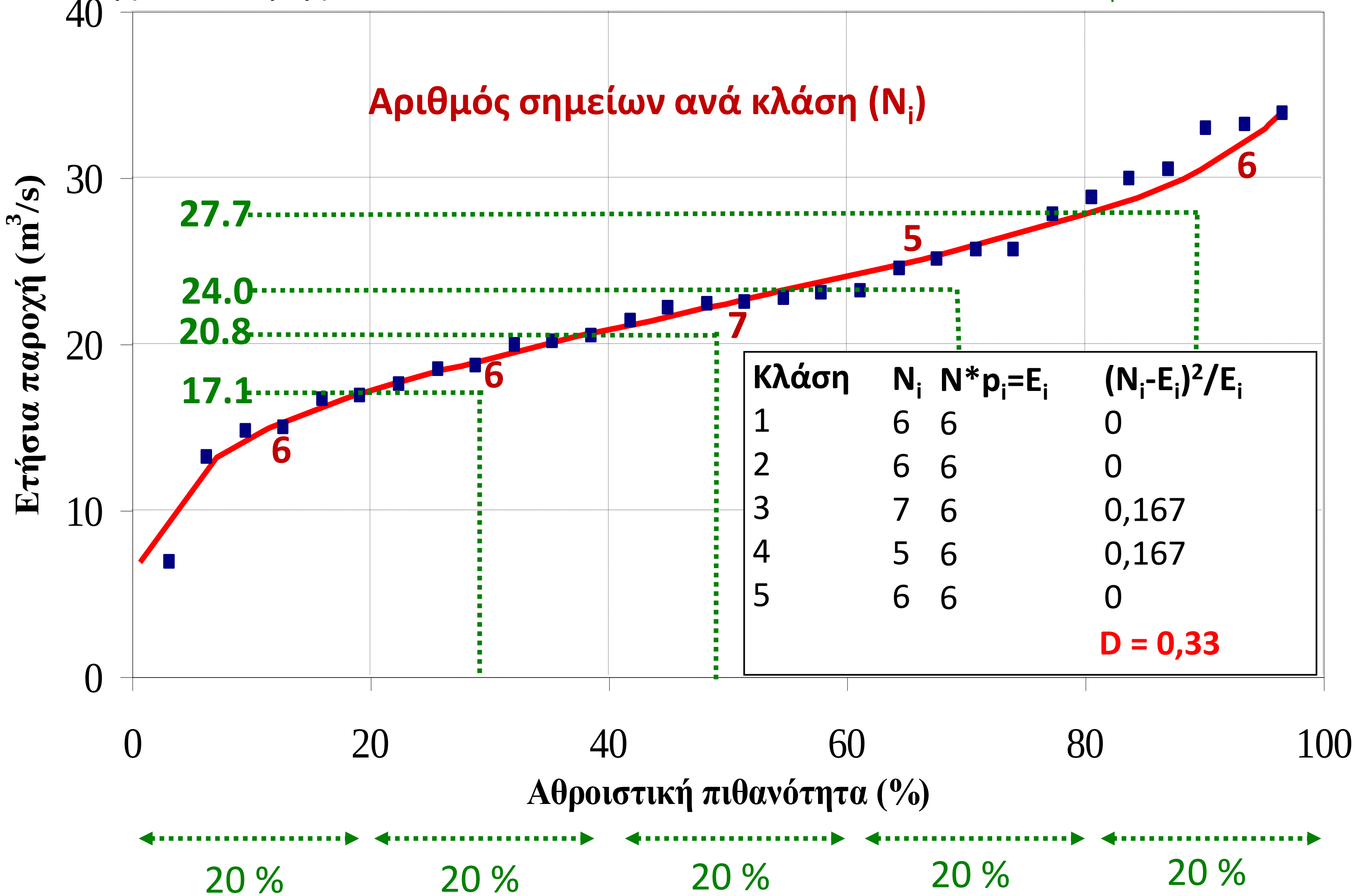
Αριθμός κλάσεων (k): **5**

Αριθμός παραμέτρων κανονικής κατανομής: **2**

Βαθμοί ελευθερίας κατανομής χ^2: **5-2-1**

Πιθανότητα κλάσης (p_i): 1/5=**20%**

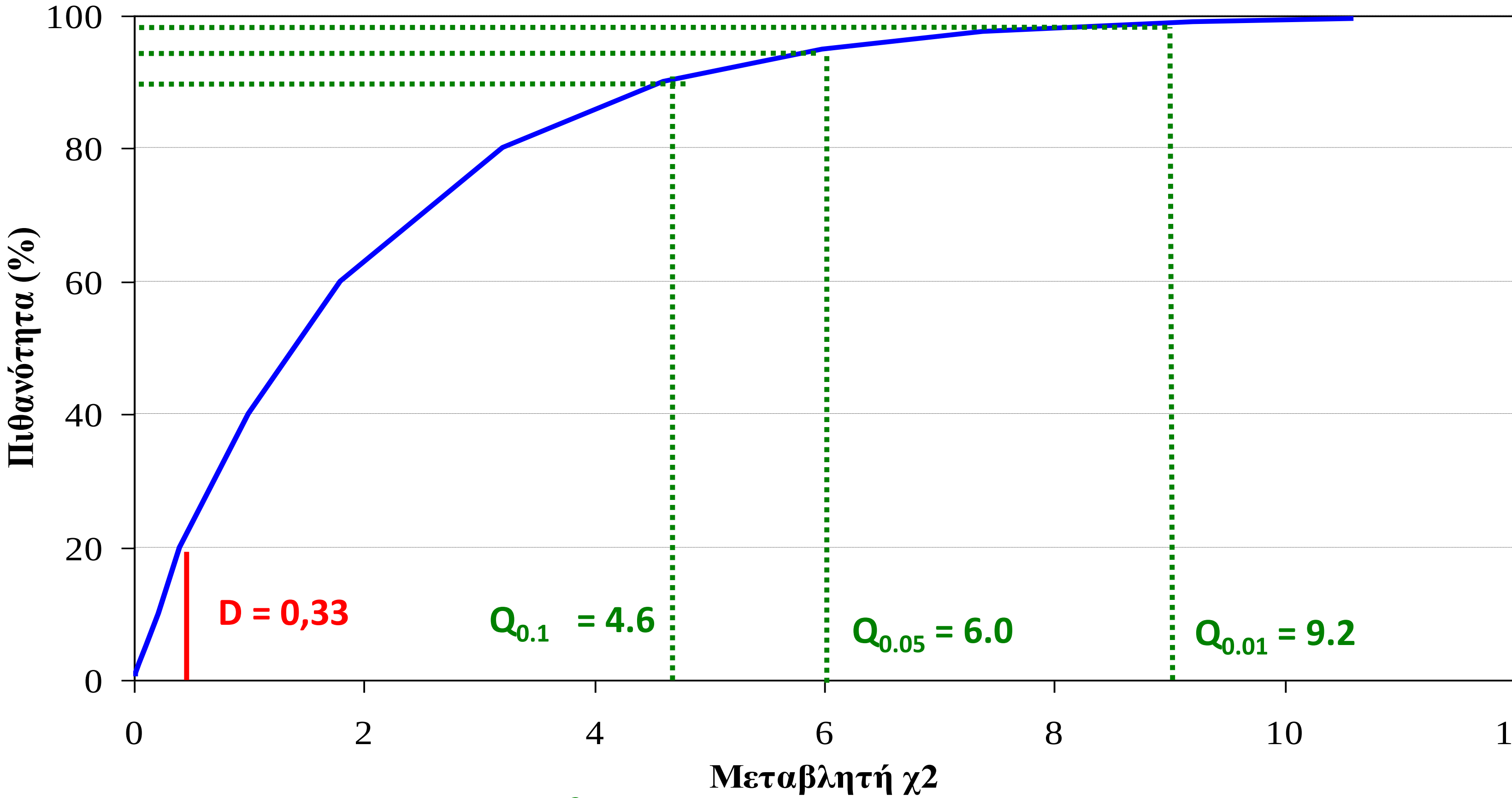
Θεωρητικός αριθμός σημείων κλάσης (N^*p_i): **30*0.2=6**



Κλάση	N_i	$N^*p_i=E_i$	$(N_i-E_i)^2/E_i$
1	6	6	0
2	6	6	0
3	7	6	0,167
4	5	6	0,167
5	6	6	0
			D = 0,33

ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

1. Η μεταβλητή $\boldsymbol{\chi^2}$ ακολουθεί την κατανομή χ^2 με 2 βαθμούς ελευθερίας
2. Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζεται η στατιστική παράμετρος ***D***
3. Η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ‘**το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή**’ γίνεται δεκτή σε κάποιο επίπεδο σημαντικότητας ***α*** αν $D<\chi^2_\alpha$

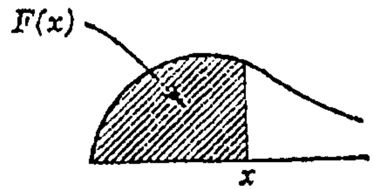


Το ***D (0.33)*** είναι μικρότερο από το $\boldsymbol{\chi^2_\alpha}$ για τα συνήθη επίπεδα σημαντικότητας **1%** (***9.2***), **5%** (***6.0***), **10%** (***4.6***). Άρα η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ‘**το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή**’ γίνεται δεκτή στα συνήθη επίπεδα σημαντικότητας.

ΠΙΝΑΚΑΣ

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2, $F(x) \equiv F(\chi^2|\nu)$

(τιμές του χ^2 για δοθείσες τιμές των $F(x)$ και ν)



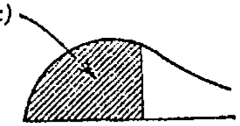
Παράδειγμα: Για 5 βαθμούς ελευθερίας και $F(x) = 0.95 \longrightarrow \chi^2 = 11.07$

F(x)	**Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0.001	0.00	0.00	0.02	0.09	0.21	0.38	0.60	0.86	1.15	1.48
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.010	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.050	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.100	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87
0.250	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74
0.500	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34
0.750	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55
0.900	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99
0.950	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.990	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19
0.999	10.83	13.82	16.27	18.47	20.52	22.46	24.32	26.13	27.88	29.59

ΠΙΝΑΚΑΣ

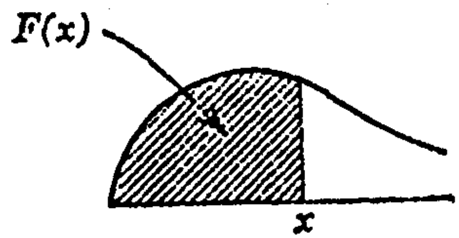
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2, $F(x) \equiv F(\chi^2|\nu)$

(τιμές του χ^2 για δοθείσες τιμές των $F(x)$ και ν)



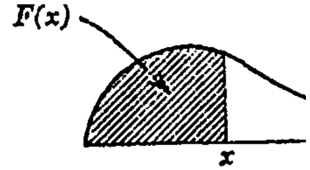
F(x)	Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.001	1.83	2.21	2.62	3.04	3.48	3.94	4.42	4.90	5.41	5.92
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.010	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.050	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.100	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44
0.250	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45
0.500	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34
0.750	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83
0.900	17.28	18.55	19.81	21.06	22.31	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41
0.950	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.990	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00
0.999	31.26	32.91	34.53	36.12	37.70	39.25	40.79	42.31	43.82	45.32

ΠΙΝΑΚΑΣ (συνέχεια)



F(x)	Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.001	6.4	7.0	7.5	8.1	8.7	9.2	9.8	10.4	11.0	11.6
0.005	8.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.2	11.8	12.5	13.1	13.8
0.010	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5	12.2	12.9	13.6	14.3	15.0
0.025	10.3	11.0	11.7	12.4	13.1	13.8	14.6	15.3	16.0	16.8
0.050	11.6	12.3	13.1	13.8	14.6	15.4	16.2	16.9	17.7	18.5
0.100	13.2	14.0	14.8	15.7	16.5	17.3	18.1	18.9	19.8	20.6
0.250	16.3	17.2	18.1	19.0	19.9	20.8	21.7	22.7	23.6	24.5
0.500	20.3	21.3	22.3	23.3	24.3	25.3	26.3	27.3	28.3	29.3
0.750	24.9	26.0	27.1	28.2	29.3	30.4	31.5	32.6	33.7	34.8
0.900	29.6	30.8	32.0	33.2	34.4	35.6	36.7	37.9	39.1	40.3
0.950	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.975	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.990	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9
0.995	41.4	42.8	44.2	45.6	46.9	48.3	49.6	51.0	52.3	53.7
0.999	46.8	48.3	49.7	51.2	52.6	54.1	55.5	56.9	58.3	59.7

ΠΙΝΑΚΑΣ (συνέχεια)



F(x)	Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν							
	40	50	60	70	80	90	100	> 100 (προσέγγιση)
0.001	17.9	24.7	31.7	39.0	46.5	54.2	61.9	$(h-3.09)^2\ /\ 2$
0.005	20.7	28.0	35.5	43.3	51.2	59.2	67.3	$(h-2.58)^2\ /\ 2$
0.010	22.2	29.7	37.5	45.4	53.5	61.8	70.1	$(h-2.33)^2\ /\ 2$
0.025	24.4	32.4	40.5	48.8	57.2	65.6	74.2	$(h-1.96)^2\ /\ 2$
0.050	26.5	34.8	43.2	51.7	60.4	69.1	77.9	$(h-1.64)^2\ /\ 2$
0.100	29.1	37.7	46.5	55.3	64.3	73.3	82.4	$(h-1.28)^2\ /\ 2$
0.250	33.7	42.9	52.3	61.7	71.1	80.6	90.1	$(h-0.67)^2\ /\ 2$
0.500	39.3	49.3	59.3	69.3	79.3	89.3	99.3	$h^2\ /\ 2$
0.750	45.6	56.3	67.0	77.6	88.1	98.6	109.1	$(h+0.67)^2\ /\ 2$
0.900	51.8	63.2	74.4	85.5	96.6	107.6	118.5	$(h+1.28)^2\ /\ 2$
0.950	55.8	67.5	79.1	90.5	101.9	113.1	124.3	$(h+1.64)^2\ /\ 2$
0.975	59.3	71.4	83.3	95.0	106.6	118.1	129.6	$(h+1.96)^2\ /\ 2$
0.990	63.7	76.2	88.4	100.4	112.3	124.1	135.8	$(h+2.33)^2\ /\ 2$
0.995	66.8	79.5	92.0	104.2	116.3	128.3	140.2	$(h+2.58)^2\ /\ 2$
0.999	73.4	86.7	99.6	112.3	124.8	137.2	149.4	$(h+3.09)^2\ /\ 2$

Στην τελευταία στήλη $h = \sqrt{2\,m-1}$, όπου m είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας.

ΕΛΕΓΧΟΣ Kolmogorov-Smirnov

Βασίζεται στη διαφορά μεταξύ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F_x(x)$ και του παρατηρημένου αθροιστικού ιστογράμματος $F^*(x)$

$F^*(X^{(i)})=i/n$ όπου είναι η ***i*** μεγαλύτερη παρατηρημένη τιμή σε δείγμα με μέγεθος ***n***

Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζεται η στατιστική παράμετρος ***D***

$$D=\max_{i=1}^{n}\left[\left|F^*(X^{(i)})-Fx(X^{(i)})\right|\right]=\max_{i=1}^{n}\left[\left|\frac{i}{n}-Fx(X^{(i)})\right|\right]$$

Η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ‘**το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή**’ γίνεται δεκτή σε κάποιο επίπεδο σημαντικότητας $\boldsymbol{\alpha}$ αν $\boldsymbol{D<D_c}$

ΤΙΜΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ D_c

Μέγεθος δείγματος	**α=0.10**	**α=0.05**	**α=0.01**
5	0.51	0.56	0.67
10	0.37	0.41	0.49
15	0.30	0.34	0.40
20	0.26	0.29	0.35
25	0.24	0.26	0.32
30	0.22	0.24	0.29
40	0.19	0.21	0.25
>40	$1.22/n^{1/2}$	$1.36/n^{1/2}$	$1.63/n^{1/2}$

ΠΙΝΑΚΑΣ

ΕΛΕΓΧΟΣ KOLMOGOROV – SMIRNOV

[Τιμές της παραμέτρου

: P(D ≤ c) 1 - α]*

Μέγεθος δείγματος n	Επίπεδο σημαντικότητας α				
	0.20	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.01**
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.829
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.734
5	0.446	0.474	0.510	0.563	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.332	0.342	0.368	0.409	0.486
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.391
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.380
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.370
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.361
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.352
25	0.210	0.220	0.240	0.264	0.320
30	0.190	0.200	0.220	0.242	0.290
35	0.180	0.190	0.210	0.230	0.270
40				0.210	0.250
50				0.190	0.230
60				0.170	0.210
70				0.160	0.190
80				0.150	0.180
90				0.140	
100				0.140	
Ασυμπτωτικός τύπος για μεγάλο n	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

(*) Birnbaum, Z. W. (1952). Journal of the American Statistical Association, 47: 425-441.

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ *α%*

$$x(\mathrm{T})_{\max} = x(\mathrm{T}) + z_{(1+\alpha)/2} S_T$$
$$x(\mathrm{T})_{\min} = x(\mathrm{T}) - z_{(1+\alpha)/2} S_T$$

$Z_{(1+\alpha)/2}$ η μεταβλητή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής όταν το επίπεδο είναι ***α%***

S_T η τυπική απόκλιση του x_T

$$S_T = \delta \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\mathrm{N}}}$$

$\hat{\sigma}$ Η τυπική απόκλιση του δείγματος

N Ο αριθμός των N παρατηρήσεων του δείγματος

Κανονική κατανομή

$$\delta = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{K}(T)^2}{2}}$$

$$K(T) = Z_{(1-1/T)}$$

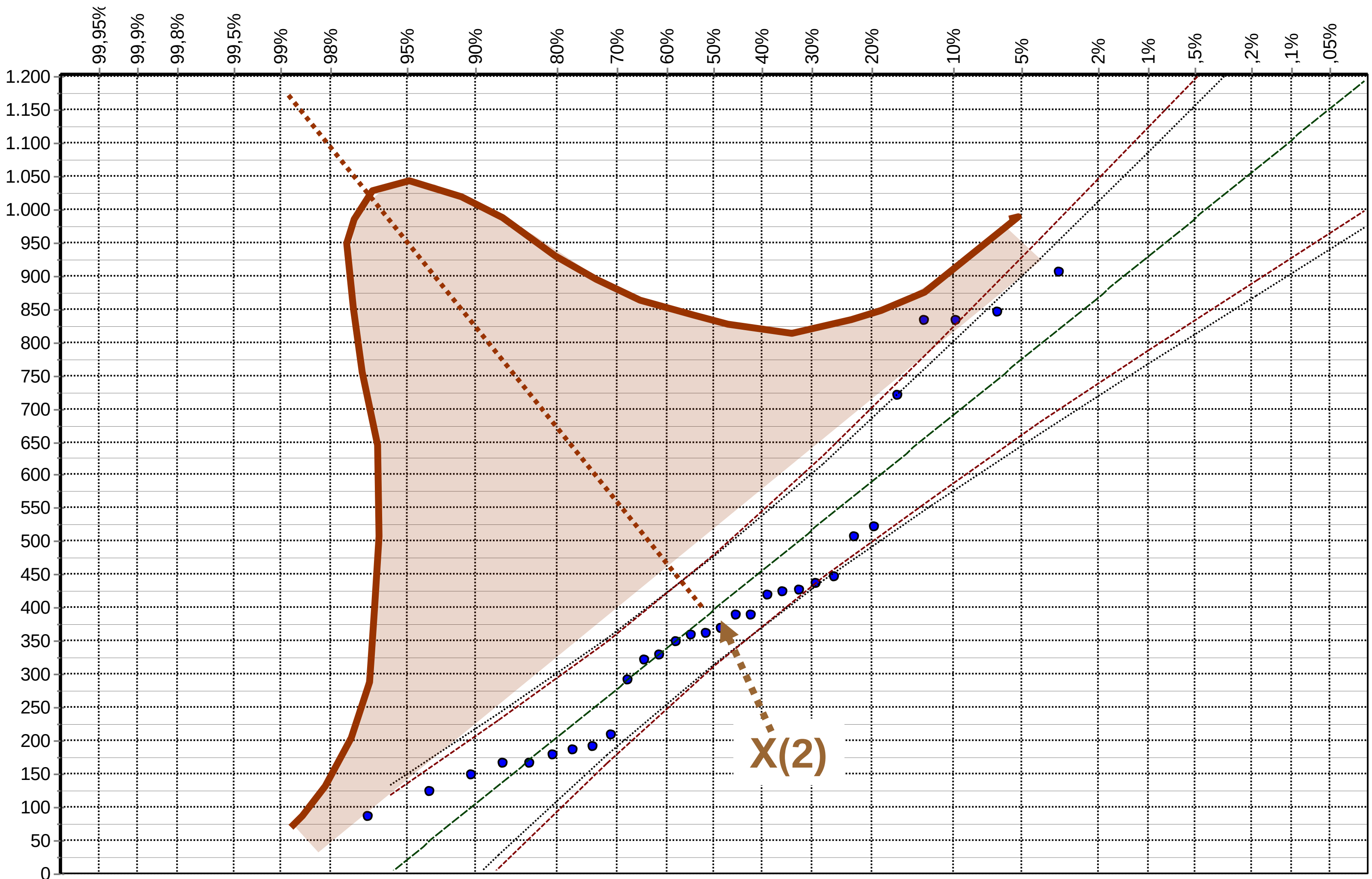
Κατανομή Gumbel μεγίστων

$$\delta = \sqrt{1 + 1.1396\,\mathrm{K}(T) + 1.1\,\mathrm{K}(T)^2}$$

$$k(T) = -0.45 - 0.7797 * \ln(-\ln(1 - 1/T))$$

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Κανονική κατανομή

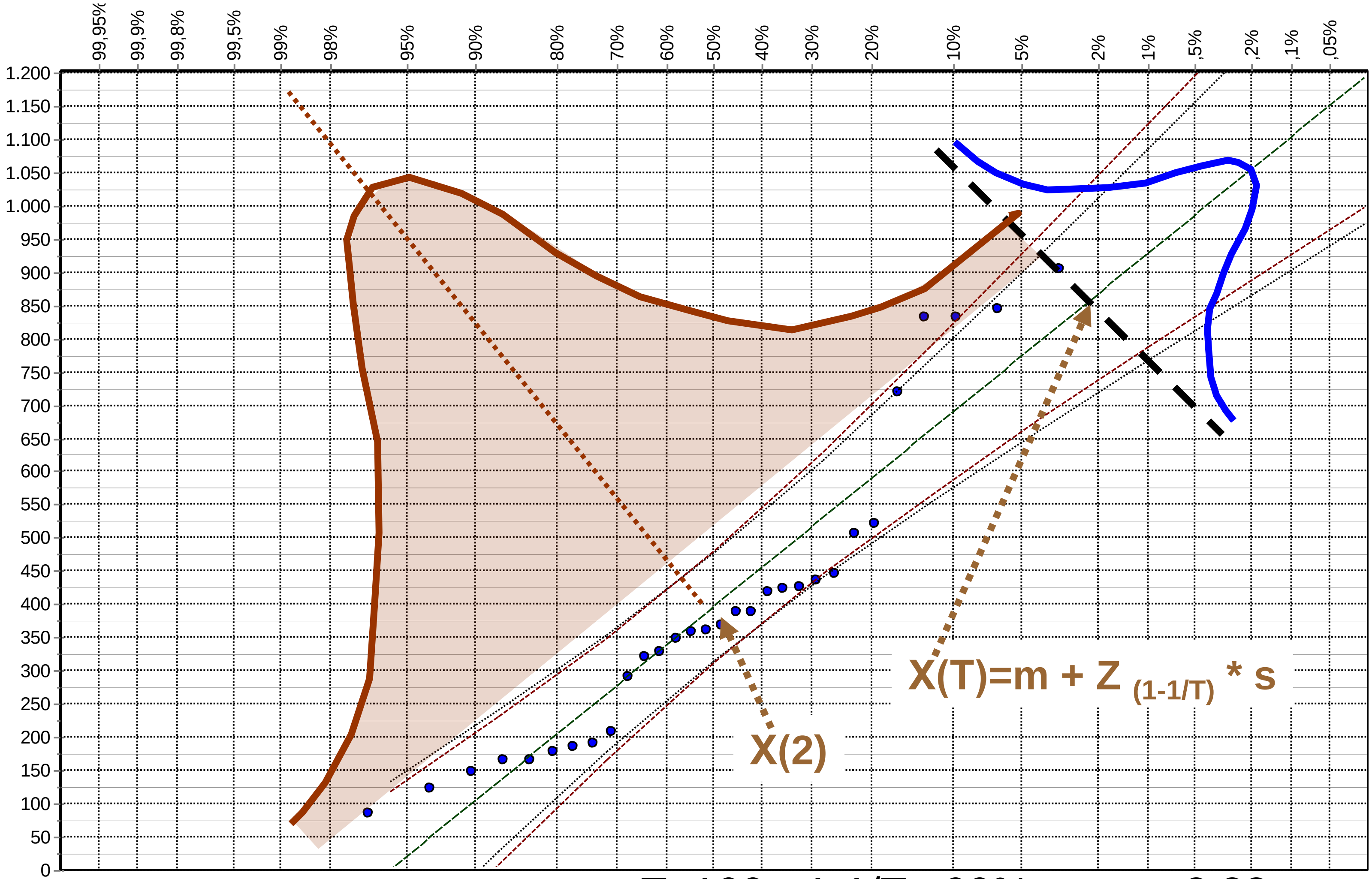


T=100, 1-1/T =99%, $z_{99\%}$ =2.33

a=95% (1+a)/2=97.5% $z_{97.5\%}$ =1.96

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Κανονική κατανομή

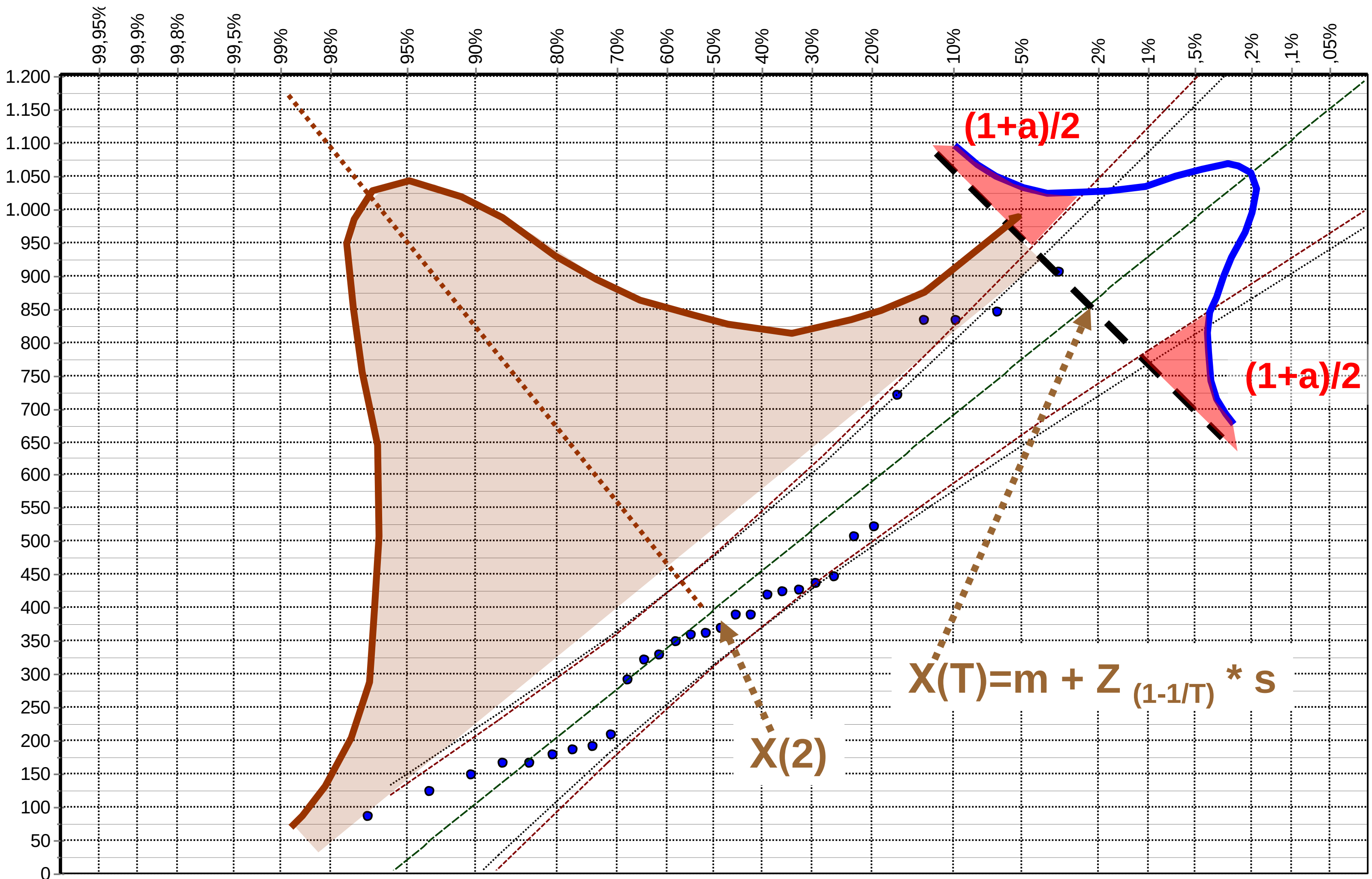


T=100, 1-1/T =99%, $z_{99\%}$ =2.33

a=95% (1+a)/2=97.5% $z_{97.5\%}$ =1.96

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Κανονική κατανομή

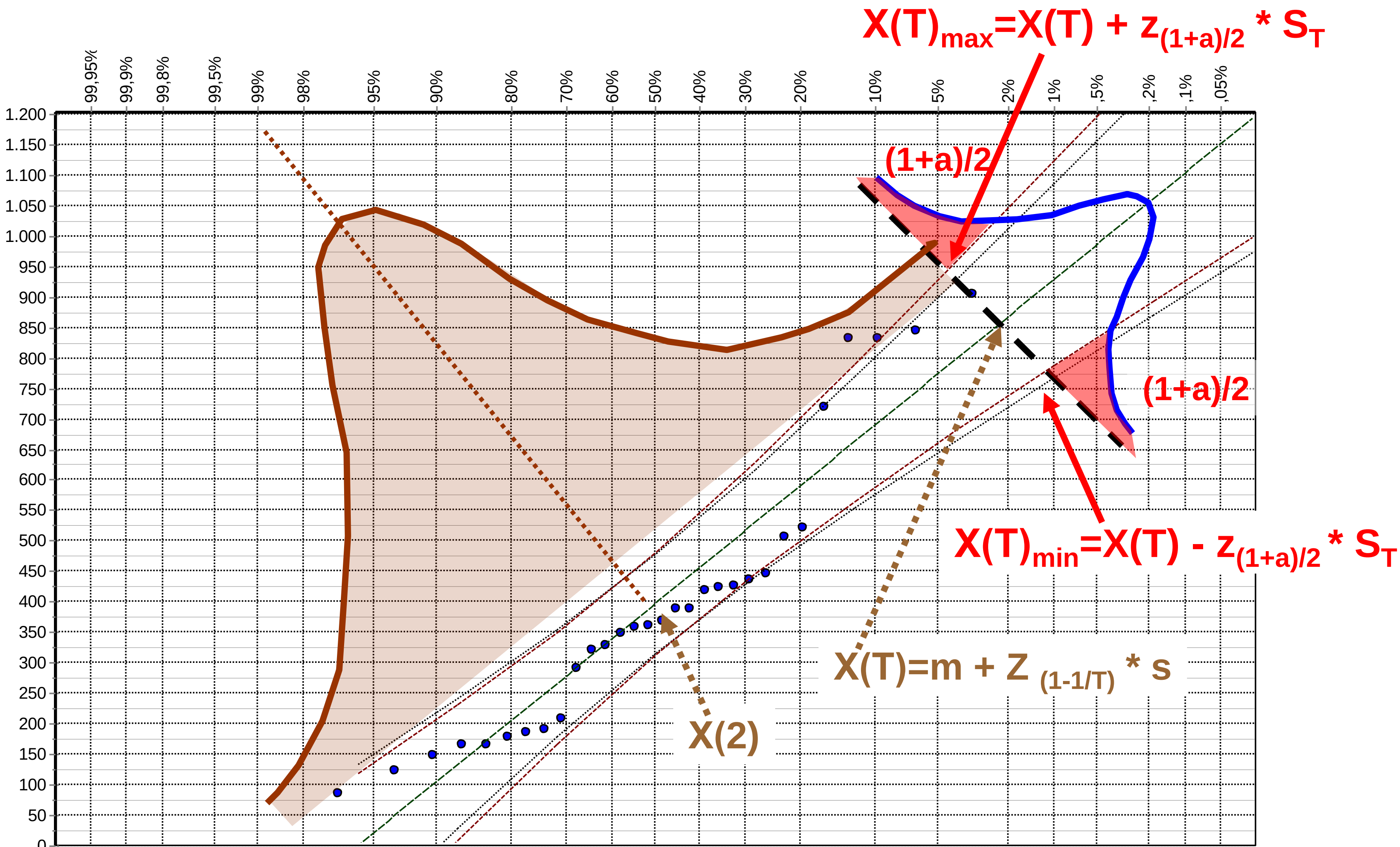


T=100, 1-1/T =99%, $z_{99\%}$ =2.33

a=95% (1+a)/2=97.5% $z_{97.5\%}$ =1.96

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Κανονική κατανομή



T=100, 1-1/T =99%, $z_{99\%}$ =2.33

a=95% (1+a)/2=97.5% $z_{97.5\%}$ =1.96

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi S_y}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m_y}{S_y}\right)^2}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{s\sqrt{2\pi S_y}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - m_y}{S_y}\right)^2}$$

Εκτίμηση παραμέτρων (μέθοδος ροπών)

$$S_{y'} = \sqrt{\ln(1 + S_x^2 / m_x^{\ 2})}$$

$$m_{y'} = \ln m_x - S_y^2 / 2$$

Χειρισμός της κατανομής βάσει της μεθόδου max πιθανοφάνειας

$$z = \frac{\ln x - m_y}{S_y}$$

$$\ln x = Z * S_y + m_y$$

$$x = e^{Z * S_y + m_y}$$

Z η μεταβλητή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

Βήματα Προσαρμογής Λογαριθμοκανονικής Κατανομής

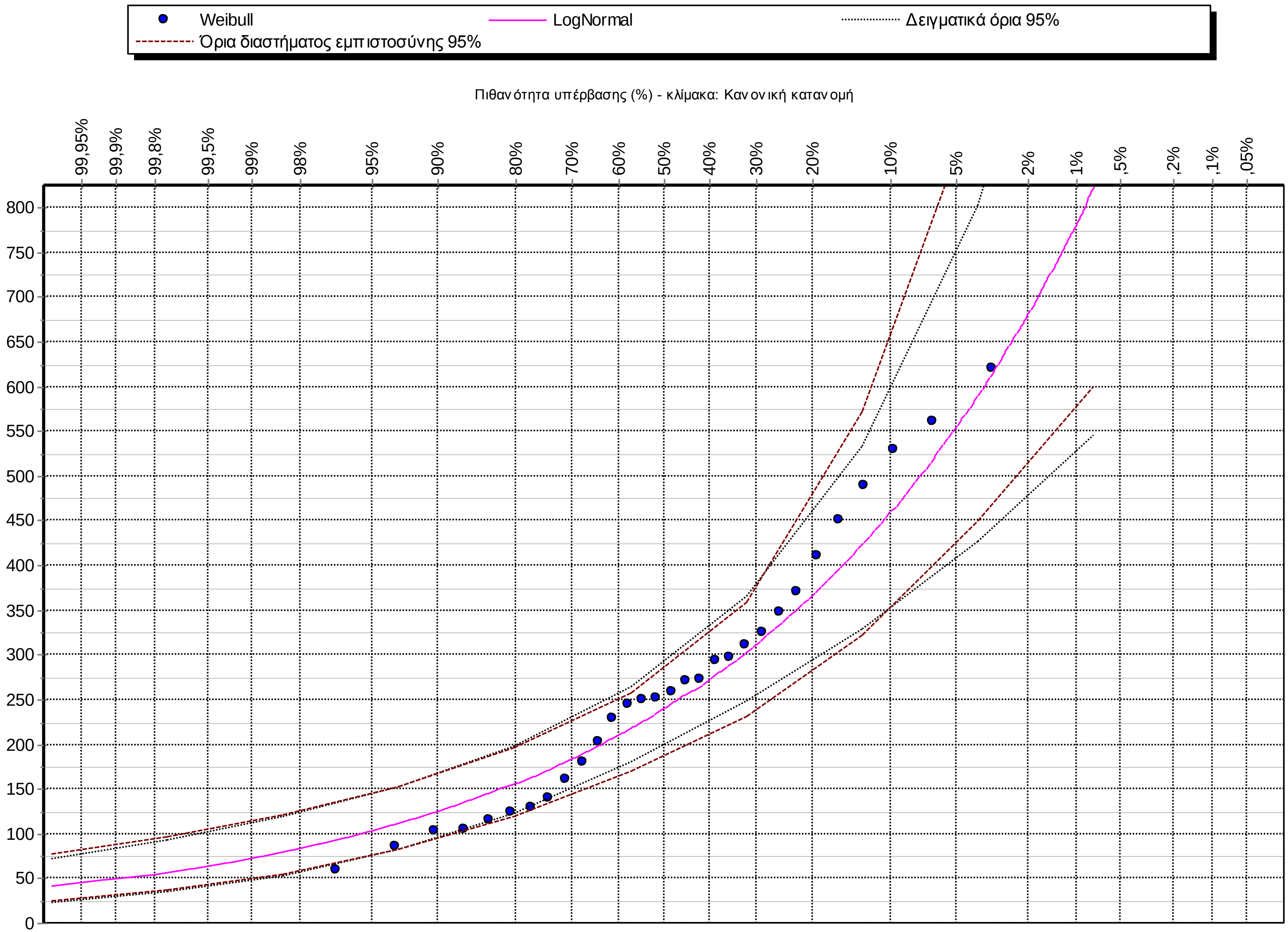
1. Εύρεση στατιστικών χαρακτηριστικών λογαρίθμων δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλιση).
2. Κατάταξη λογαρίθμων δείγματος σε φθίνουσα σειρά και αρίθμηση των παρατηρήσεων.
3. Προσδιορισμός Περιόδου Επαναφοράς από τον τύπο του Weibull T=(N+1)/m.
4. Υπολογισμός πιθανότητας μη υπέρβασης F = 1-1/T (εμπειρική).
5. Εύρεση τυποποιημένης μεταβλητής Z από πίνακα για κάθε F.
6. Εκτίμηση τιμών από τα Z.

$$x = e^{Z * S_y + m_y}$$

7. Σχεδίαση θεωρητικής κατανομής και δείγματος με τα Z στον οριζόντιο άξονα.
8. Έλεγχος x^2 ή/και K-S για την καταλληλότητα της κατανομής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή λογαριθμοκανονικής κατανομής



ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ (EXTREME VALUE DISTRIBUTIONS, EV)

- **ΤΥΠΟΣ Ι: Αρχική κατανομή χωρίς όριο προς την κατεύθυνση της ακραίας τιμής**
  - **(EV I ή Gumbel, για μέγιστα και ελάχιστα)**
- **ΤΥΠΟΣ ΙΙ: Αρχική κατανομή χωρίς όριο προς τις δύο κατευθύνσεις**
  - **(EV II ή Cauchy δεν εφαρμόζεται στην υδρολογία)**
- **ΤΥΠΟΣ ΙΙΙ: Αρχική κατανομή με όριο προς την κατεύθυνση της ακραίας τιμής**
  - **(EV III ή κατανομές Pearson)**

ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Παράμετροι (μέθοδος ροπών)

$c = \bar{x} - 0{,}45 S_x$ παράμετρος θέσης

$a = 1{,}282 / S_x$ παράμετρος κλίμακας

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = a e^{-a(x-c) - e^{-a(x-c)}}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = e^{-e^{-a(x-c)}}$$

$$x(T) = c - \frac{\ln(-\ln F_x)}{a} = c - \frac{\ln(-\ln(1-1/T))}{a}$$

$$x(T) = \bar{x} - S_x\{0{,}45 + 0{,}7797 \ln[\ln(T) - \ln(T-1)]\}$$

Όρια εμπιστοσύνης

$$x(T) = \bar{x} + k(T) * S_x$$

$$k(T) = -0.45 - 0.7797 * \ln(-\ln(1-1/T))$$

$$x(T)_{\max,\min} = x(T) \pm Z_{(1+a)/2} * \underbrace{\frac{S_x}{\sqrt{n}} \underbrace{\sqrt{1 + 1.1396 * k(T) + 1.1 * k(T)^2}}_{\delta}}_{S_T}$$

Βήματα Προσαρμογής Κατανομής EVI (Gumbel) (μέθοδος ροπών)

1. Εύρεση στατιστικών χαρακτηριστικών δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλιση).
2. Υπολογισμός παραμέτρων α και c. $a = 1{,}282 / S_x$ $c = \bar{x} - 0{,}45 S_x$
3. Κατάταξη δείγματος σε φθίνουσα σειρά και αρίθμηση των παρατηρήσεων.
4. Προσδιορισμός Περιόδου Επαναφοράς από τον τύπο του Weibull T=(N+1)/m.
5. Υπολογισμός πιθανότητας μη υπέρβασης F = 1-1/T (εμπειρική).
6. Εύρεση για κάθε F=1-1/T της τιμής του x απευθείας από τον τύπο της θεωρητικής κατανομής Gumbel.

$$x = \bar{x} - S_x \{0{,}45 + 0{,}7797 \ln[\ln(T) - \ln(T-1)]\}$$

7. Σχεδίαση θεωρητικής κατανομής και δείγματος με την ποσότητα –ln(lnT-ln(T-1)).
8. Έλεγχος x^2 ή/και K-S για την καταλληλότητα της κατανομής.

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ EVI (Gumbel) (μέθοδος ροπών)

1. Επιλέγεται το επίπεδο σημαντικότητας (significance level, α) (συνήθως α=5%)
2. Βρίσκονται η μεταβλητή $Z_{1\text{-}\alpha/2}$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής για αθροιστική πιθανότητα μεταξύ των ορίων 1-α.
3. Υπολογίζεται η τυπική απόκλιση των τιμών της κατανομής EVI (Gumbel) από τον τύπο:

$$S_T = \delta \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

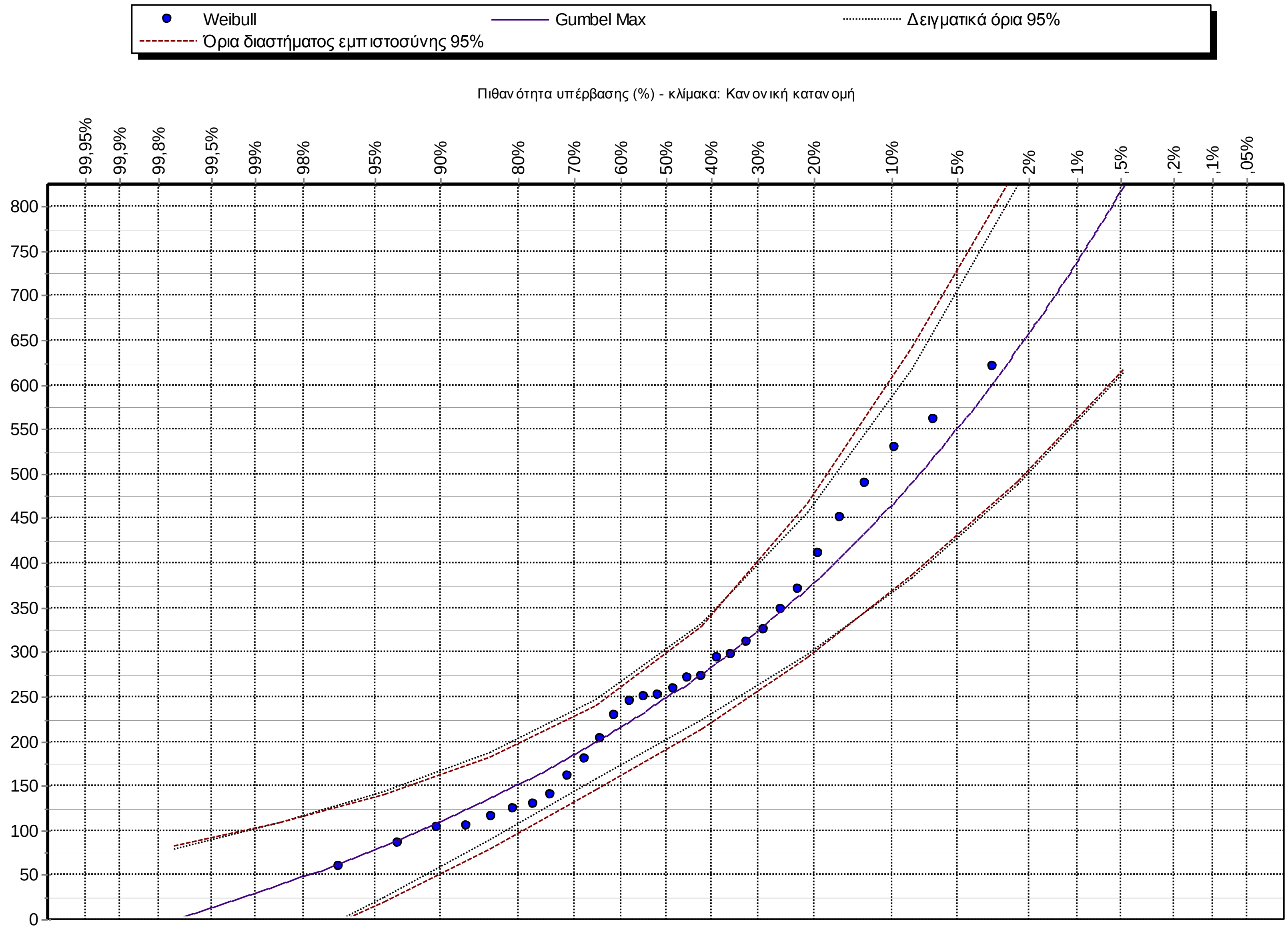
όπου: $\hat{\sigma}$ είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος μεγέθους N παρατηρήσεων και

$$\delta = \sqrt{1 + 1.3 \cdot K_T + 1.1 \cdot K_T{}^2}$$

4. Υπολογίζονται τα όρια εμπιστοσύνης (Confidence Limits) της Θεωρητικής κατανομής Gumbel
   - Άνω Όριο : $$X_{T,\max} = X_T + Z_{1-\alpha/2} \cdot S_T$$
   - Κάτω Όριο: $$X_{T,\min} = X_T - Z_{1-\alpha/2} \cdot S_T$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής EVI ή Gumbel μεγίστων



ΕΛΕΓΧΟΣ x^2 για κατανομή EVI (Gumbel)

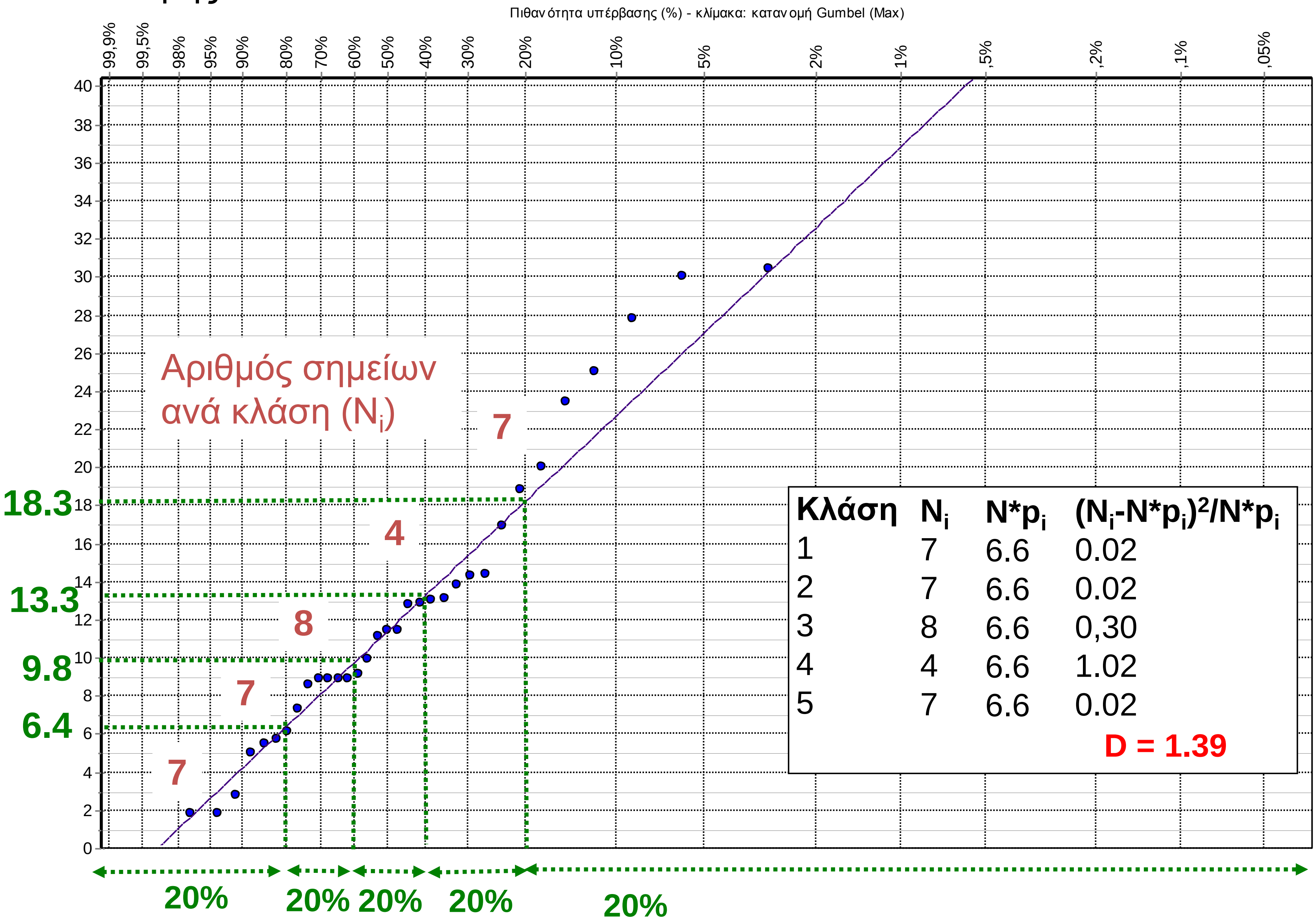
Αριθμός κλάσεων (k): **5**

Αριθμός παραμέτρων κατανομής Gumbel: **2**

Βαθμοί ελευθερίας κατανομής χ^2: **5-2-1**

Πιθανότητα κλάσης (p_i): 1/5=**20%**

Θεωρητικός αριθμός σημείων κλάσης ($N*p_i$): **33*0.2=6.6**

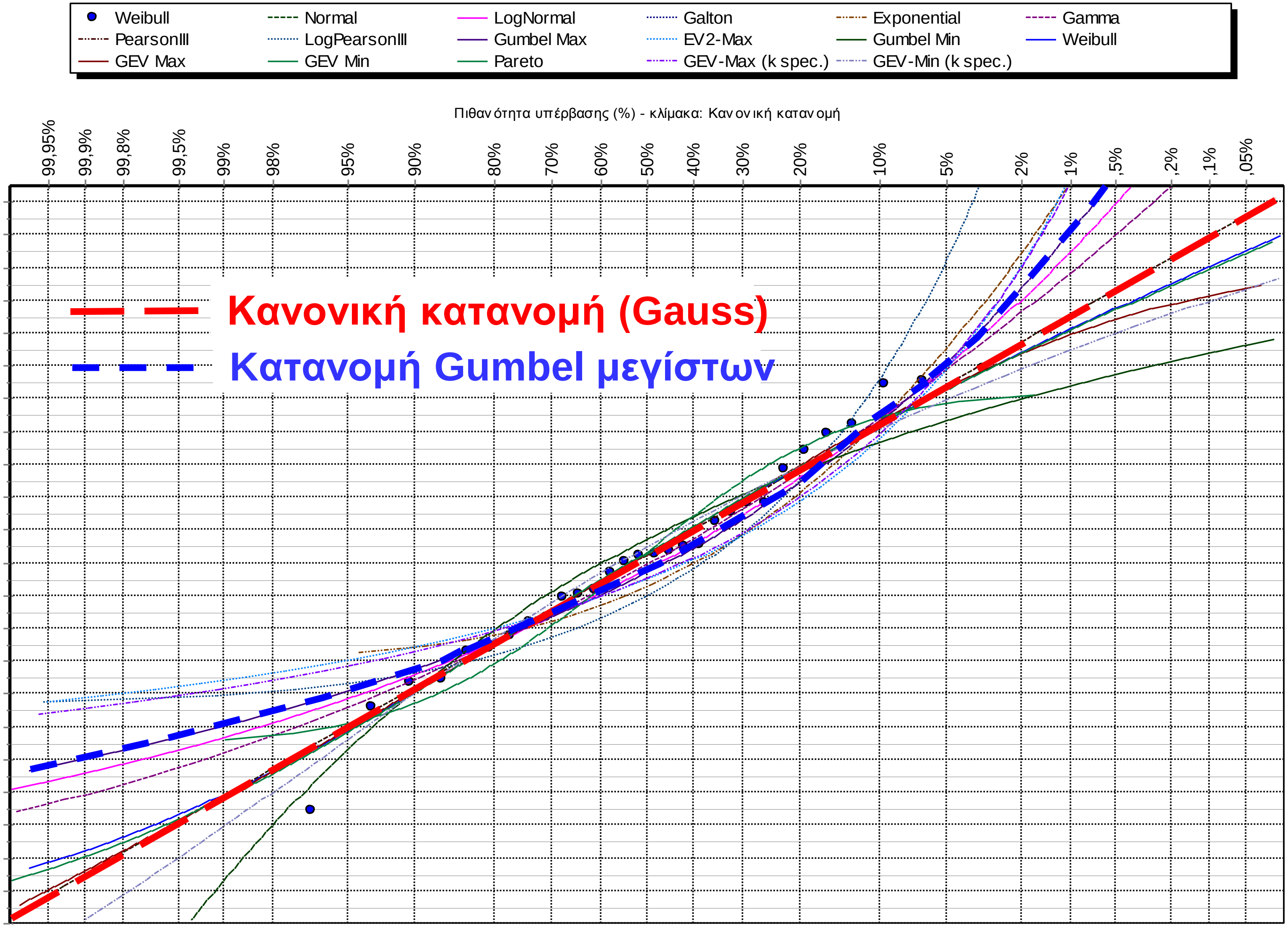


Κλάση	N_i	$N*p_i$	$(N_i-N*p_i)^2/N*p_i$
1	7	6.6	0.02
2	7	6.6	0.02
3	8	6.6	0,30
4	4	6.6	1.02
5	7	6.6	0.02

D = 1.39

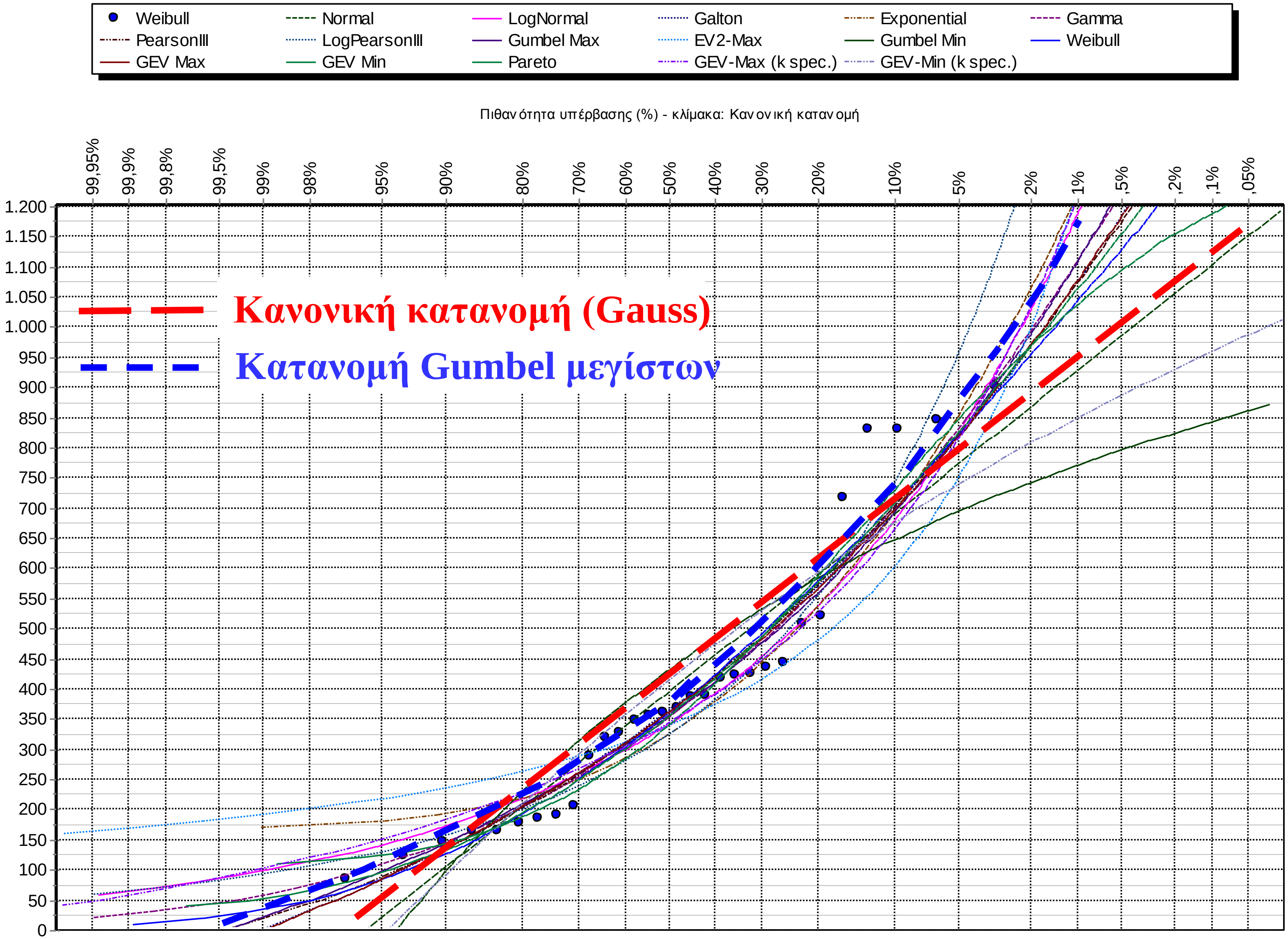
ΜΕΣΕΣ ΕΤΗΣΙΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ

Προσαρμογή 16 θεωρητικών κατανομών



ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ

Προσαρμογή 16 θεωρητικών κατανομών



ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΜΕΓΙΣΤΩΝ

$$x_u = c - \frac{\ln(-\ln u)}{\lambda}$$

Εκτίμηση Παραμέτρων

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{6}\, s_X} = \frac{1}{0.78\, s_X}$$

$$c = \bar{x} - \frac{\gamma}{\lambda} = \bar{x} - \frac{0.577}{\lambda} = \bar{x} - 0.45\, s_X$$

$$\lambda = \frac{\dfrac{1}{0.78} - \dfrac{1.57}{(n+1)^{0.65}}}{s_X}$$

$$c = \bar{x} - \frac{0.577 - \dfrac{0.53}{(n+2.5)^{0.74}}}{\lambda}$$

Τυπολόγιο της κατανομής Gumbel μεγίστων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda(x-c) - \mathrm{e}^{-\lambda(x-c)}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda(x-c)}}$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	c: παράμετρος θέσης $\lambda > 0$: παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$\mu_X = c + \frac{\gamma}{\lambda} = c + \frac{0.5772}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6\lambda^2} = \frac{1.645}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = \frac{2.404}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{14.6}{\lambda^4}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = 1.1396$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 5.4$
Πιθανότερη τιμή	$x_\mathrm{p} = c$
Διάμεσος τιμή	$x_{0.5} = c - \frac{\ln(-\ln 0.5)}{\lambda} = c + \frac{0.3665}{\lambda}$

(Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Συντελεστής συχνότητας

$$K_T = -0{,}7797\left[0{,}5772 + \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]$$

ή

$$K_T = 0{,}7797\,y - 0{,}45$$

$$F(y) = \exp(-\exp(-y))$$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

Παράμετροι (μέθοδος ροπών)

$$c = \bar{x} + 0{,}45 S_x$$

$$a = 1{,}282 / S_x$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = a e^{a(x-c) - e^{a(x-c)}}$$

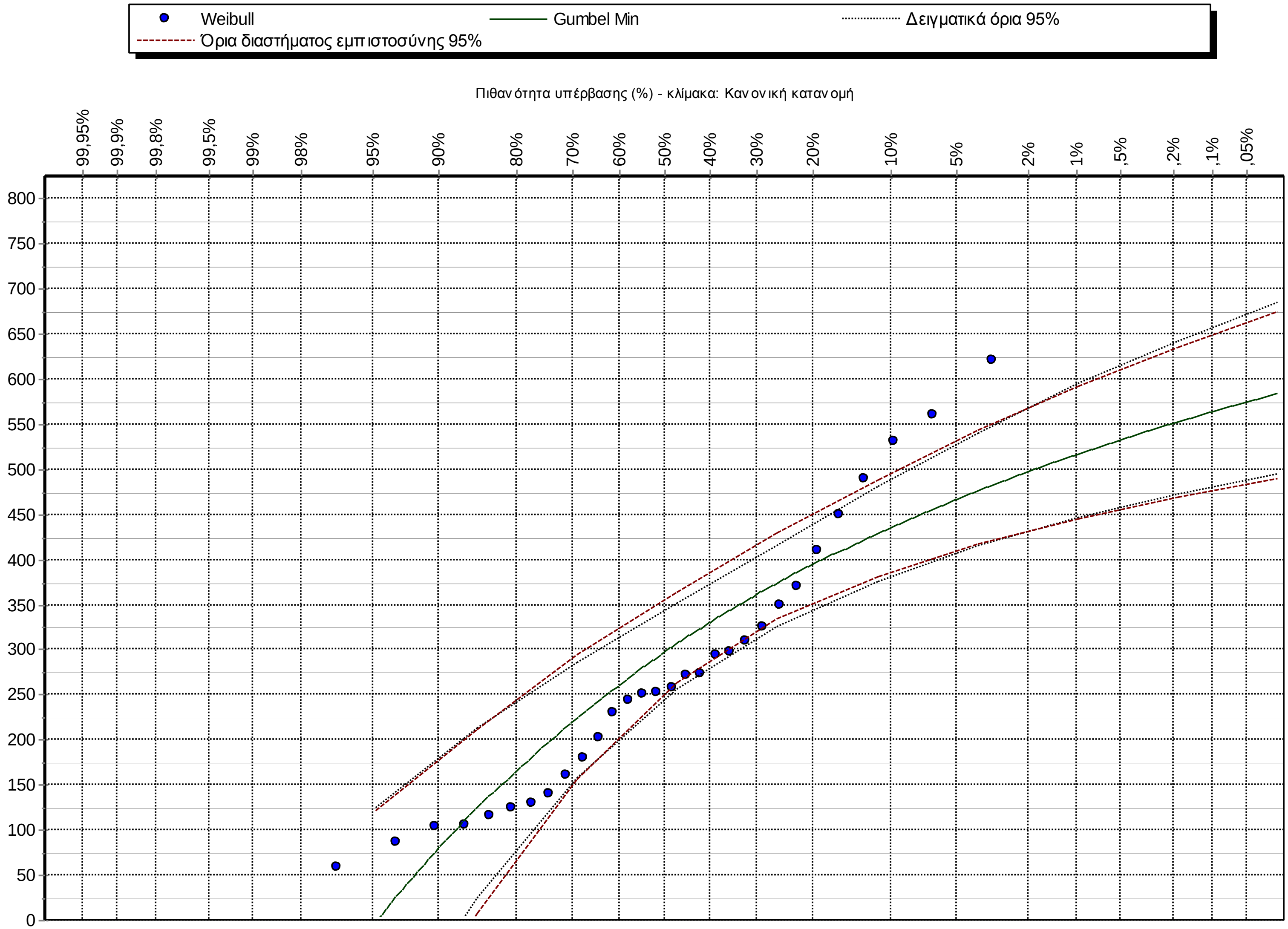
Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = 1 - e^{-e^{a(x-c)}}$$

$$x(T) = c + \frac{\ln(-\ln(1 - F_x))}{a} = c + \frac{\ln(-\ln(1/T))}{a}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής EVI (Gumbel) ελαχίστων



ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

$$x_u = c + \frac{\ln[-\ln(1-u)]}{\lambda}$$

Εκτίμηση Παραμέτρων

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{6}\, s_X} = \frac{1}{0.78\, s_X}$$

$$c = \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda} = \bar{x} + \frac{0.577}{\lambda} = \bar{x} + 0.45 s_X$$

(Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

Τυπολόγιο της κατανομής Gumbel ελαχίστων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \lambda\, e^{\lambda(x-c)-e^{\lambda(x-c)}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - e^{-e^{\lambda(x-c)}}$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	c: παράμετρος θέσης $\lambda > 0$: παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$\mu_X = c - \frac{\gamma}{\lambda} = c - \frac{0.5772}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6\lambda^2} = \frac{1.645}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = -\frac{2.404}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{14.6}{\lambda^4}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = -1.1396$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 5.4$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c$
Διάμεσος τιμή	$x_{0.5} = c + \frac{\ln(-\ln 0.5)}{\lambda} = c - \frac{0.3665}{\lambda}$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ WEIBULL

Παράμετροι (μέθοδος ροπών)

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2}+1=\frac{\Gamma(1+\frac{2}{k})}{\left[\Gamma(1+\frac{1}{k})\right]^2}$$

$$c=\frac{\mu}{\Gamma(1+\frac{1}{k})}$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x)=\frac{k}{c}*(\frac{x}{c})^{k-1}e^{(x/c)^k}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x)=1-e^{-(x/c)^k}$$

$$x(T)=c*\left[-\ln(1-F_x)\right]^{1/k}=c*\left[-\ln(1/T)\right]^{1/k}$$

μ, σ μέση τιμή και τυπική απόκλιση του δείγματος
c, κ παράμετροι της κατανομής Weibull
Γ(*x*) συνάρτηση Γάμμα

ΚΑΤΑΝΟΜΗ WEIBULL

Τυπολόγιο της κατανομής Weibull (δύο παραμέτρων).

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \frac{\kappa}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\kappa-1} \mathrm{e}^{-(x/\alpha)^{\kappa}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^{\kappa}}$
Τιμές μεταβλητής	$0 < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$\alpha > 0$: παράμετρος κλίμακας $\kappa > 0$: παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X = \alpha\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \alpha^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\kappa}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2\right\}$
Τρίτη ροπή περί την αρχή	$m_X^{(3)} = \alpha^3\,\Gamma\left(1+\frac{3}{\kappa}\right)$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_{v_X} = \Gamma\left(1+\frac{2}{\kappa}\right) / \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2 - 1$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = \alpha(1 - 1/\kappa)^{1/\kappa}$ (για $\kappa > 1$)
Διάμεσος	$x_{0.5} = \alpha(\ln 2)^{1/\kappa}$

$$x_u = \alpha\left[-\ln(1-u)\right]^{1/\kappa}$$

Εκτίμηση Παραμέτρων

$$\frac{\Gamma(1+2/\kappa)}{\Gamma^2(1+1/\kappa)} = \frac{s_X^2}{\bar{x}^2} + 1$$

$$\alpha = \frac{\bar{x}}{\Gamma(1+1/\kappa)}$$

Θέτω Y = lnX

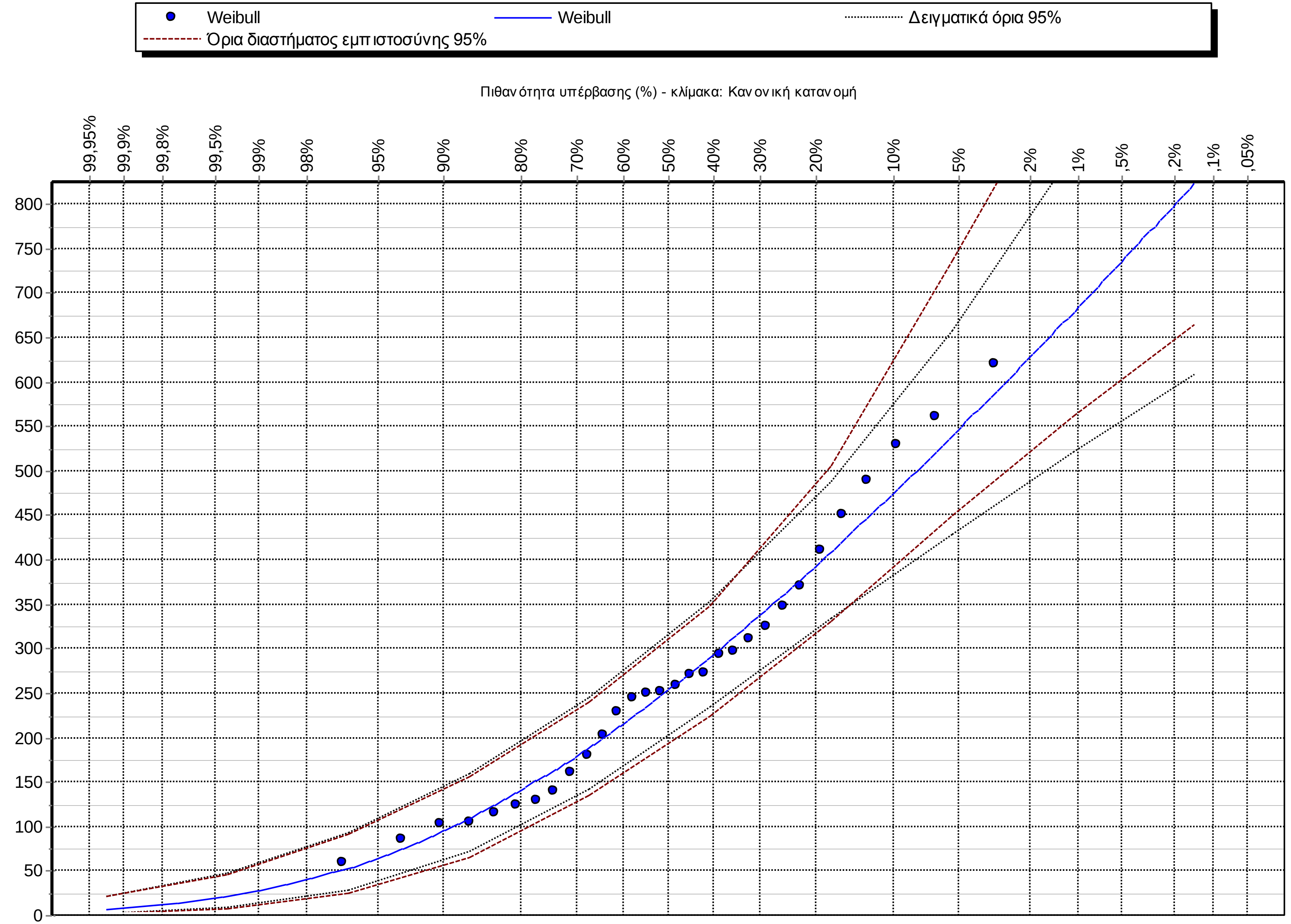
$$F_Y(y) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\kappa(y - \ln\alpha)}}$$

Συνάρτηση κατανομής ελαχίστων τύπου Ι με παράμετρο θέσης ln*α* και παράμετρο κλίμακας *κ*

(Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής Weibull



ΚΑΤΑΝΟΜΗ LOG PEARSON III

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{\lambda^{\kappa}}{x\Gamma(\kappa)} * \ln(x-c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(\ln x - c)}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = \int_{e^c}^{x} \frac{\lambda^{\kappa}}{x\Gamma(\kappa)} * (\ln s - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(\ln s - c)} ds$$

Παράμετροι

c: παράμετρος κλίμακας

λ>0 παράμετρος σχήματος

κ>0 παράμετρος σχήματος

Χειρισμός της κατανομής

$$z = \frac{\ln x - \bar{x}_{\ln x}}{S_{\ln x}}$$

$$\ln x = zS_{\ln x} + \bar{x}_{\ln x}$$

$$x = e^{zS_{\ln x} + \bar{x}_{\ln x}}$$

Το *Z* υπολογίζεται από πίνακες με βάση την πιθανότητα εμφάνισης και το συντελεστή ασυμμετρίας της *lnx*

Βήματα Προσαρμογής Λογαριθμικής Pearson III Κατανομής

1. Εύρεση στατιστικών χαρακτηριστικών λογαρίθμων δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλιση, συντελεστής ασυμμετρίας).

2. Κατάταξη λογαρίθμων δείγματος σε φθίνουσα σειρά και αρίθμηση των παρατηρήσεων.

3. Προσδιορισμός Περιόδου Επαναφοράς από τον τύπο του Weibull T=(N+1)/m.

4. Εύρεση από Πίνακα Log Pearson των συντελεστών συχνότητας K(T) με βάση το g του δείγματος και τα διάφορα T.

5. Εκτίμηση νέων θεωρητικών τιμών από τις σχέσεις(*):

$$y(T) = \overline{x}_{\ln x} + K(T) * S_{\ln x}, \kappa\alpha\iota, x(T) = e^{y(T)}$$

6. Γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ λογαρίθμων δείγματος y(T) και K(T) με σκοπό την καλύτερη προσαρμογή των σημείων y(T), K(T), έτσι ώστε η ευθεία να y(T)=m+K(T)*C να προσεγγίζει κατά το δυνατόν την ευθεία.

7. Εύρεση διορθωμένου y΄(T) από τη σχέση y΄(T) = m + K(T)*C,

8. $x'(T) = e^{y'(T)}$.

9. Χάραξη θεωρητικής κατανομής και δείγματος με τα K(T) στον οριζόντιο άξονα.

10. Έλεγχος x^2 ή/και K-S για την καταλληλότητα της κατανομής.

* Μ.Α. Μιμίκου, 2006. Τεχνολογία υδατικών πόρων, Εκδόσεις Παπασωτηρίου

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ PEARSON III

Πίνακας 7.7: Δείκτης συχνότητας K(T) της Pearson III

Φ	0.0010	0.0050	0.0100	0.0200	0.0250	0.0400	0.0500	0.1000	0.2000	0.3000	0.4…
g\T	1.0010	1.0050	1.0101	1.0204	1.0256	1.0417	1.0526	1.1111	1.2500	1.4286	[illegible]
−3.5	−7.7202	−5.2529	−4.2247	−3.2264	−2.9130	−2.2686	−1.9715	−1.0955	−0.3217	0.0573	0.2…
−3.4	−7.6095	−5.1989	−4.1926	−3.2137	−2.9060	−2.2723	−1.9795	−1.1134	−0.3413	0.0421	0.2…
−3.3	−7.4974	−5.1436	−4.1592	−3.2000	−2.8979	−2.2751	−1.9867	−1.1308	−0.3610	0.0265	0.25…
−3.2	−7.3838	−5.0870	−4.1245	−3.1851	−2.8888	−2.2769	−1.9931	−1.1477	−0.3808	0.0105	0.24…
−3.1	−7.2688	−5.0290	−4.0886	−3.1691	−2.8786	−2.2778	−1.9987	−1.1642	−0.4006	−0.0060	0.23…
−3.0	−7.1523	−4.9696	−4.0514	−3.1519	−2.8673	−2.2778	−2.0033	−1.1801	−0.4204	−0.0228	0.22…
−2.9	−7.0344	−4.9088	−4.0129	−3.1336	−2.8549	−2.2768	−2.0071	−1.1954	−0.4401	−0.0400	0.21…
−2.8	−6.9150	−4.8467	−3.9730	−3.1140	−2.8413	−2.2747	−2.0099	−1.2101	−0.4598	−0.0575	0.20…
−2.7	−6.7942	−4.7831	−3.9318	−3.0932	−2.8266	−2.2716	−2.0118	−1.2242	−0.4793	−0.0752	0.19…
−2.6	−6.6719	−4.7181	−3.8893	−3.0712	−2.8106	−2.2674	−2.0126	−1.2377	−0.4987	−0.0932	0.17…
−2.5	−6.5481	−4.6518	−3.8454	−3.0479	−2.7934	−2.2622	−2.0125	−1.2504	−0.5179	−0.1114	0.16…
−2.4	−6.4228	−4.5839	−3.8001	−3.0233	−2.7751	−2.2558	−2.0113	−1.2624	−0.5368	−0.1298	0.14…
−2.3	−6.2963	−4.5147	−3.7535	−2.9974	−2.7554	−2.2483	−2.0090	−1.2736	−0.5555	−0.1483	0.13…
−2.2	−6.1632	−4.4440	−3.7054	−2.9703	−2.7345	−2.2397	−2.0057	−1.2841	−0.5738	−0.1668	0.11…
−2.1	−6.0386	−4.3719	−3.6560	−2.9418	−2.7123	−2.2299	−2.0013	−1.2938	−0.5918	−0.1854	0.10…
−2.0	−5.9078	−4.2983	−3.6052	−2.9120	−2.6889	−2.2189	−1.9957	−1.3026	−0.6094	−0.2040	0.08…
−1.9	−5.7755	−4.2234	−3.5529	−2.8809	−2.6641	−2.2067	−1.9891	−1.3105	−0.6266	−0.2225	0.06…
−1.8	−5.6419	−4.1470	−3.4993	−2.8485	−2.6381	−2.1933	−1.9812	−1.3176	−0.6433	−0.2409	0.05…
−1.7	−5.5070	−4.0693	−3.4444	−2.8147	−2.6108	−2.1787	−1.9723	−1.3238	−0.6596	−0.2592	0.03…
−1.6	−5.3709	−3.9902	−3.3880	−2.7796	−2.5821	−2.1629	−1.9621	−1.3290	−0.6753	−0.2774	0.01…
−1.5	−5.2335	−3.9097	−3.3303	−2.7432	−2.5522	−2.1459	−1.9508	−1.3333	−0.6905	−0.2953	−0.00…
−1.4	−5.0950	−3.8280	−3.2713	−2.7056	−2.5210	−2.1277	−1.9384	−1.3366	−0.7051	−0.3131	−0.01…
−1.3	−4.9555	−3.7450	−3.2110	−2.6666	−2.4885	−2.1082	−1.9247	−1.3390	−0.7191	−0.3305	−0.03…
−1.2	−4.8149	−3.6607	−3.1494	−2.6263	−2.4548	−2.0876	−1.9099	−1.3405	−0.7326	−0.3477	−0.05…
−1.1	−4.6734	−3.5753	−3.0866	−2.5848	−2.4198	−2.0657	−1.8939	−1.3409	−0.7454	−0.3646	−0.07…
−1.0	−4.5311	−3.4887	−3.0226	−2.5421	−2.3836	−2.0427	−1.8768	−1.3404	−0.7575	−0.3811	−0.08…
−0.9	−4.3881	−3.4011	−2.9573	−2.4981	−2.3462	−2.0185	−1.8586	−1.3389	−0.7690	−0.3973	−0.10…
−0.8	−4.2444	−3.3124	−2.8910	−2.4530	−2.3076	−1.9931	−1.8392	−1.3364	−0.7799	−0.4131	−0.12…
−0.7	−4.1002	−3.2228	−2.8236	−2.4067	−2.2679	−1.9666	−1.8186	−1.3329	−0.7900	−0.4285	−0.13…
−0.6	−3.9557	−3.1323	−2.7551	−2.3593	−2.2270	−1.9390	−1.7970	−1.3285	−0.7995	−0.4435	−0.15…
−0.5	−3.8109	−3.0410	−2.6857	−2.3108	−2.1850	−1.9102	−1.7743	−1.3231	−0.8083	−0.4581	−0.17…
−0.4	−3.6661	−2.9490	−2.6154	−2.2613	−2.1420	−1.8804	−1.7505	−1.3167	−0.8164	−0.4723	−0.18…
−0.3	−3.5214	−2.8564	−2.5442	−2.2108	−2.0979	−1.8495	−1.7256	−1.3094	−0.8238	−0.4860	−0.20…
−0.2	−3.3770	−2.7632	−2.4723	−2.1593	−2.0529	−1.8176	−1.6997	−1.3010	−0.8304	−0.4993	−0.22…
−0.1	−3.2332	−2.6696	−2.3996	−2.1070	−2.0069	−1.7846	−1.6728	−1.2918	−0.8364	−0.5121	−0.23…

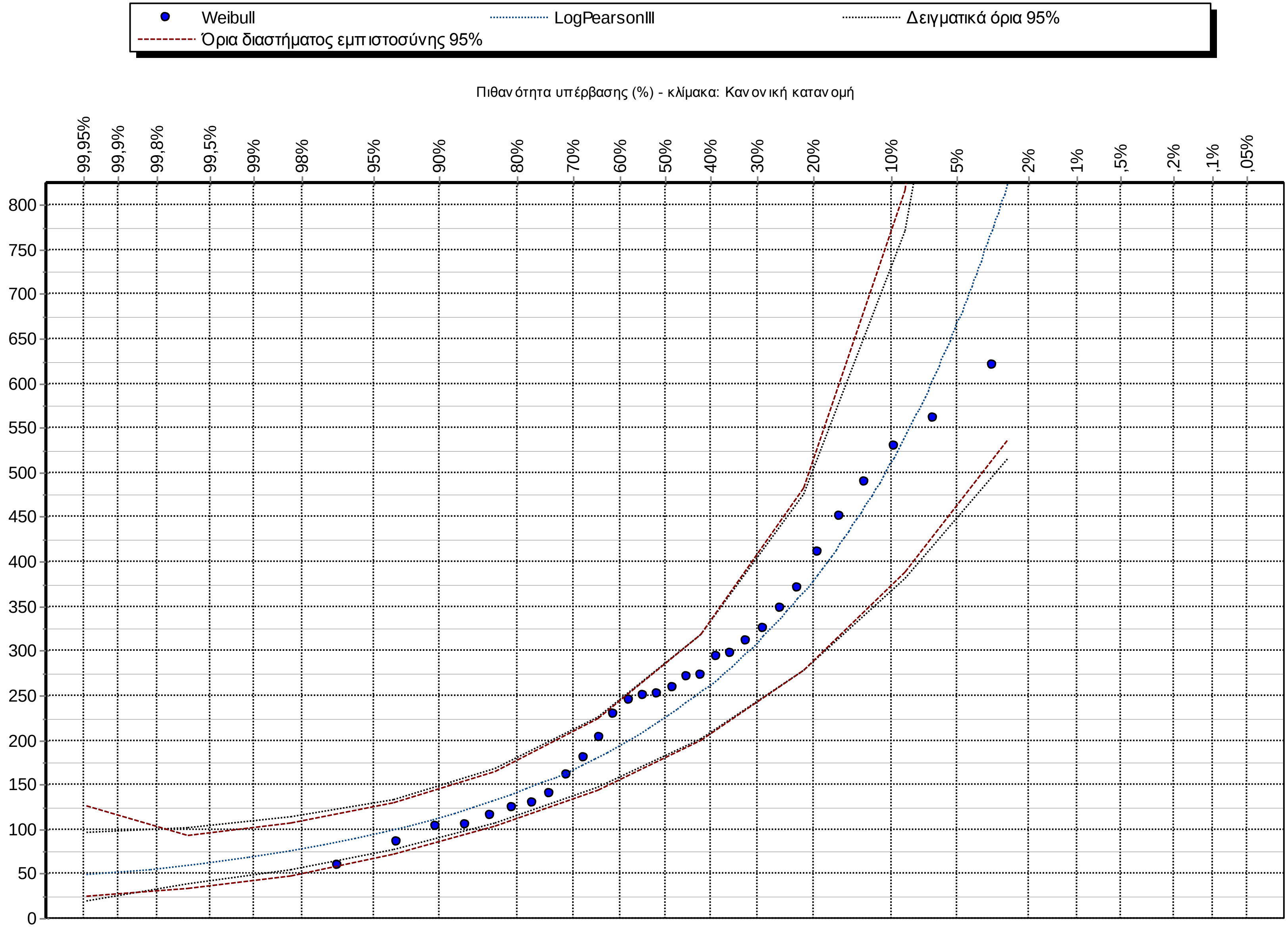
Πίνακας 7.7: (Συνέχεια)

0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	0.9500	0.9600	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9990
2.0000	2.5000	3.3333	5.0000	10.000	20.000	25.000	40.000	50.000	100.00	200.00	1000.0
0.4125	0.4939	0.5399	0.5624	0.5703	0.5713	0.5714	0.5714	0.5714	0.5714	0.5714	0.5714
0.4106	0.4984	0.5500	0.5765	0.5867	0.5880	0.5881	0.5882	0.5882	0.5882	0.5882	0.5882
0.4079	0.5024	0.5599	0.5910	0.6038	0.6057	0.6059	0.6060	0.6060	0.6061	0.6061	0.6061
0.4045	0.5058	0.5695	0.6057	0.6217	0.6244	0.6247	0.6249	0.6249	0.6250	0.6250	0.6250
0.4004	0.5086	0.5789	0.6206	0.6406	0.6443	0.6446	0.6450	0.6451	0.6451	0.6452	0.6452
0.3955	0.5107	0.5878	0.6357	0.6602	0.6653	0.6658	0.6664	0.6665	0.6666	0.6667	0.6667
0.3899	0.5121	0.5963	0.6509	0.6807	0.6876	0.6834	0.6892	0.6893	0.6896	0.6896	0.6896
0.3835	0.5128	0.6043	0.6660	0.7021	0.7112	0.7123	0.7135	0.7138	0.7141	0.7142	0.7143
0.3764	0.5126	0.6118	0.6811	0.7242	0.7361	0.7376	0.7394	0.7399	0.7405	0.7407	0.7407
0.3685	0.5117	0.6185	0.6960	0.7471	0.7624	0.7646	0.7671	0.7678	0.7688	0.7691	0.7692
0.3599	0.5100	0.6246	0.7107	0.7706	0.7901	0.7931	0.7967	0.7976	0.7992	0.7997	0.8000
0.3506	0.5074	0.6300	0.7249	0.7947	0.8193	0.8231	0.8282	0.8296	0.8320	0.8328	0.8333
0.3406	0.5041	0.6346	0.7388	0.8193	0.8498	0.8549	0.8617	0.8637	0.8672	0.8686	0.8694
0.3300	0.4999	0.6383	0.7521	0.8442	0.8816	0.8881	0.8973	0.9001	0.9052	0.9074	0.9085
0.3187	0.4949	0.6412	0.7648	0.8694	0.9146	0.9229	0.9349	0.9388	0.9461	0.9494	0.9519
0.3068	0.4892	0.6433	0.7769	0.8946	0.9487	0.9592	0.9747	0.9798	0.9899	0.9950	0.9990
0.2944	0.4826	0.6445	0.7882	0.9199	0.9838	0.9967	1.0164	1.0231	1.0369	1.0443	1.0507
0.2815	0.4754	0.6449	0.7987	0.9450	1.0197	1.0354	1.0600	1.0686	1.0871	1.0975	1.1074
0.2681	0.4674	0.6444	0.8084	0.9698	1.0563	1.0751	1.1054	1.1163	1.1404	1.1548	1.1697
0.2542	0.4587	0.6430	0.8172	0.9942	1.0934	1.1157	1.1523	1.1658	1.1968	1.2162	1.2380
0.2400	0.4494	0.6408	0.8252	1.0181	1.1307	1.1568	1.2006	1.2172	1.2561	1.2817	1.3127
0.2253	0.4395	0.6378	0.8322	1.0414	1.1683	1.1984	1.2500	1.2700	1.3181	1.3511	1.3941
0.2104	0.4290	0.6340	0.8384	1.0641	1.2058	1.2403	1.3004	1.3241	1.3827	1.4244	1.4822
0.1952	0.4179	0.6294	0.8437	1.0861	1.2431	1.2822	1.3515	1.3793	1.4494	1.5011	1.5769
0.1797	0.4064	0.6241	0.8481	1.1073	1.2802	1.3241	1.4031	1.4353	1.5181	1.5811	1.6782
0.1640	0.3943	0.6181	0.8516	1.1276	1.3168	1.3658	1.4551	1.4919	1.5884	1.6639	1.7857
0.1481	0.3819	0.6115	0.8543	1.1471	1.3530	1.4072	1.5071	1.5489	1.6600	1.7492	1.8989
0.1320	0.3689	0.6041	0.8561	1.1657	1.3885	1.4481	1.5591	1.6060	1.7327	1.8366	2.0174
0.1158	0.3556	0.5961	0.8570	1.1835	1.4234	1.4885	1.6110	1.6632	1.8062	1.9258	2.1405
0.0994	0.3420	0.5876	0.8572	1.2003	1.4576	1.5283	1.6625	1.7203	1.8803	2.0164	2.2678
0.0830	0.3280	0.5784	0.8565	1.2162	1.4910	1.5674	1.7137	1.7772	1.9547	2.1082	2.3987
0.0665	0.3136	0.5687	0.8551	1.2311	1.5236	1.6057	1.7643	1.8336	2.0293	2.2009	2.5326
0.0499	0.2990	0.5584	0.8528	1.2452	1.5553	1.6433	1.8143	1.8896	2.1039	2.2942	2.6691
0.0332	0.2840	0.5476	0.8499	1.2582	1.5861	1.6800	1.8636	1.9450	2.1784	2.3879	2.8079

(Πηγή: Μιμίκου, 2006)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής Log-Pearson III



ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

(1) Η γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών (**GEV**) :

$$G(z) = \exp\{-[1+\xi(\frac{z-\mu}{\sigma})]^{-1/\xi}\}$$

$\{z: 1+\xi(z-\mu)/\sigma > 0\}$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \xi < \infty$

$\xi \to 0$

$$G(z) = \exp[-\exp\{-(\frac{z-\mu}{\sigma})\}]$$

Κατανομή Gumbel

$\xi > 0$

Κατανομή Fréchet

$\xi < 0$

Κατανομή Weibull

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

(1) Η γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών (**GEV**) :

$$G(z) = \exp\{-[1+\xi(\frac{z-\mu}{\sigma})]^{-1/\xi}\}$$

{z: 1+ξ(z-μ)/σ >0}, -∞< μ <∞, σ >0, -∞< ξ <∞

$\xi \rightarrow 0$

$$G(z) = \exp[-\exp\{-(\frac{z-\mu}{\sigma})\}]$$

Κατανομή Gumbel

$\xi > 0$

Κατανομή Fréchet

$\xi < 0$

Κατανομή Weibull

Το άνω όριο δεν είναι πεπερασμένο

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

(1) Η γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών (**GEV**) :

$$G(z) = \exp\{-[1+\xi(\frac{z-\mu}{\sigma})]^{-1/\xi}\}$$

$\{z: 1+\xi(z-\mu)/\sigma > 0\}$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \xi < \infty$

$\xi \to 0$

$$G(z) = \exp[-\exp\{-(\frac{z-\mu}{\sigma})\}]$$

Κατανομή Gumbel

$\xi > 0$

Κατανομή Fréchet

$\xi < 0$

Κατανομή Weibull

Το άνω όριο είναι πεπερασμένο

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

(1) Η γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών (**GEV**) :

$$G(z) = \exp\{-[1+\xi(\frac{z-\mu}{\sigma})]^{-1/\xi}\}$$

{z: 1+ξ(z-μ)/σ >0}, -∞< μ <∞, σ >0, -∞< ξ <∞

$\xi \rightarrow 0$

$$G(z) = \exp[-\exp\{-(\frac{z-\mu}{\sigma})\}]$$

Κατανομή Gumbel

$\xi > 0$

Κατανομή Fréchet

$\xi < 0$

Κατανομή Weibull

Βασικός Στόχος

Η περίοδος επαναφοράς καθορίζει τη συχνότητα, με την οποία η τιμή ενός μεγέθους μπορεί κατά μέσο όρο να εξισωθεί ή να υπερβληθεί.

$$u(T) = F^{-1}(1-1/T)$$

Επίπεδο επαναφοράς *T* ετών

Το επίπεδο που υπερβαίνεται κατά μέσο όρο μια φορά σε *T* χρόνια.

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

(2) Η γενικευμένη κατανομή Pareto (**GPD**) :

Υπερβάσεις (X-u), $X > u$

$$H(y) = \Pr(X - u \leq x / X > u) = 1 - (1 + \frac{\xi y}{\sigma'})^{-1/\xi}$$

{y : $y > 0$ και $(1+\xi y/) > 0$}

$\sigma' = \sigma + \xi(u - \mu)$

$\xi \to 0$

$\xi > 0$

Η κατανομή των υπερβάσεων δεν είναι άνω φραγμένη

$\xi < 0$

Η κατανομή των υπερβάσεων παρουσιάζει ένα ανώτερο όριο στην τιμή $u - \sigma'/\xi$

(3) Το μοντέλο POT (**Peaks Over Threshold**)

❖ Προσδιορίζει μια διδιάστατη χωρο-χρονική ανέλιξη (Y_n, N_u) στο χώρο $X_n \geq u$ για $n=1,\ldots,N_u$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_n \sim GPD(\sigma', \xi) \\ N_u \sim Poisson(\lambda) \end{array} \right\}$$

Οι υπερβάσεις του u προσεγγίζονται από μια μη-ομοιογενή ανέλιξη Poisson με μέτρο έντασης:

$$\lambda_\theta(x) = \frac{1}{\sigma}\{1 + \xi(\frac{x - \mu}{\sigma})\}^{-(\xi+1)/\xi}$$

❖ Η μέθοδος POT πλεονεκτεί, σε σχέση με την κατανομή GPD

1) Ενοποιεί τα ασυμπτωτικά μοντέλα
2) Ενσωματώνει καλύτερα τα φαινόμενα μη-στασιμότητας

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η Θεωρία των Ακραίων Τιμών προϋποθέτει την ανεξαρτησία των διαδοχικών ακραίων παρατηρήσεων

- Τεχνική της απο-ομαδοποίησης (declustering) → Στάθμες Παρατηρήσεων
- Υπολογισμός του βαθμού ομαδοποίησης → εκτίμηση του δείκτη ακραίων τιμών → Βροχόπτωση
- Μοντελοποίηση της δομής συσχέτισης των δεδομένων → Υπολογιστική πολυπλοκότητα

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η Θεωρία των Ακραίων Τιμών προϋποθέτει την ανεξαρτησία των διαδοχικών ακραίων παρατηρήσεων

Τεχνική της απο-ομαδοποίησης (declustering)

Στάθμες Παρατηρήσεων

Το διάστημα των *n* ετών διαιρείται σε ομάδες μήκους **μιας ημέρας** και επιλέγεται η μέγιστη τιμή κάθε ομάδας

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η Θεωρία των Ακραίων Τιμών προϋποθέτει την ανεξαρτησία των διαδοχικών ακραίων παρατηρήσεων

Τεχνική της απο-ομαδοποίησης (declustering)

Στάθμες Παρατηρήσεων

Το διάστημα των *n* ετών διαιρείται σε ομάδες μήκους **μιας ημέρας** και επιλέγεται η μέγιστη τιμή κάθε ομάδας

Ελάχιστη διάρκεια γεγονότων «καταιγίδας»

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η Θεωρία των Ακραίων Τιμών προϋποθέτει την ανεξαρτησία των διαδοχικών ακραίων παρατηρήσεων

Τεχνική της απο-ομαδοποίησης (declustering)

Στάθμες Παρατηρήσεων

Το διάστημα των *n* ετών διαιρείται σε ομάδες μήκους **μιας ημέρας** και επιλέγεται η μέγιστη τιμή κάθε ομάδας

Ελάχιστη διάρκεια γεγονότων «καταιγίδας»

Έλεγχο της σειριακής αυτοσυσχέτισης των μέγιστων τιμών των διαστημάτων

Αρχή της οικονομίας των παρατηρήσεων

Έλεγχος της συσχέτισης πρώτου βαθμού των παρατηρήσεων που υπερβαίνουν κατάλληλα προσδιορισμένα όρια

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η Θεωρία των Ακραίων Τιμών προϋποθέτει την ανεξαρτησία των διαδοχικών ακραίων παρατηρήσεων

Τεχνική της απο-ομαδοποίησης (declustering)

Στάθμες Παρατηρήσεων

Το διάστημα των *n* ετών διαιρείται σε ομάδες μήκους **μιας ημέρας** και επιλέγεται η μέγιστη τιμή κάθε ομάδας

Έλεγχο της σειριακής αυτοσυσχέτισης των μέγιστων τιμών των διαστημάτων

Αρχή της οικονομίας των παρατηρήσεων

Έλεγχος της συσχέτισης πρώτου βαθμού των παρατηρήσεων που υπερβαίνουν κατάλληλα προσδιορισμένα όρια

Ελάχιστη διάρκεια γεγονότων «καταιγίδας»

Το διάστημα των **24 ωρών** είναι ικανοποιητικό για την επιλογή ανεξάρτητων ακραίων παρατηρήσεων

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η Θεωρία των Ακραίων Τιμών προϋποθέτει την ανεξαρτησία των διαδοχικών ακραίων παρατηρήσεων

- Τεχνική της απο-ομαδοποίησης (declustering) → Στάθμες Παρατηρήσεων
- Υπολογισμός του βαθμού ομαδοποίησης → εκτίμηση του δείκτη ακραίων τιμών → Βροχόπτωση

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΚΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η Θεωρία των Ακραίων Τιμών προϋποθέτει την ανεξαρτησία των διαδοχικών ακραίων παρατηρήσεων

Τεχνική της απο-ομαδοποίησης (declustering) → Στάθμες Παρατηρήσεων

Υπολογισμός του βαθμού ομαδοποίησης → εκτίμηση του δείκτη ακραίων τιμών → Βροχόπτωση

Προσδιορισμός του δείκτη ακραίων τιμών, ϑ

ϑ=(οριακό μέσο μέγεθος ομάδας)$^{-1}$

$$\vartheta = n_c/n_u$$

n_c: ο αριθμός των ομάδων

n_u : ο αριθμός των υπερβάσεων του ορίου u

Για μια σειρά ανεξάρτητων μεταξύ τους μεταβλητών, ο ακραίος δείκτης είναι ϑ=1

$$\left.\begin{array}{l}\text{Θεσ/νικη } \vartheta=0.91 \\ \text{Αλεξ/πολη } \vartheta=0.93\end{array}\right\} \approx 1$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΟΡΙΟΥ ΥΠΕΡΒΑΣΕΩΝ

Επιλογή ορίου, *u* (threshold)

Εξισορρόπηση μεταξύ της αμεροληψίας και της διασποράς των υπερβάσεων

Το διάγραμμα της μέσης τιμής των υπερβάσεων *E*(*X*-*u*/*X*>*u*) με το *u*

$$E(X-u/X>u)=\frac{\sigma_u}{1-\xi}=\frac{\sigma_{u_o}+\xi u}{1-\xi}$$

Η εκτίμηση των παραμέτρων σ' και ξ του μοντέλου για ένα φάσμα πιθανών τιμών ορίων

Σύντομη ανάλυση ευαισθησίας

Επιλέγεται η μικρότερη τιμή ορίου που προσφέρει μια σχετική σταθερότητα των αποτελεσμάτων

- Παράμετροι κατανομής
- Επίπεδα επαναφοράς

Βροχόπτωση

Θεσ/νικη : *u*=18mm

Αλεξ/πολη: *u*=22mm

98% ποσοστιαίο σημείο

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (MLE)

$L(\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Pi} f(x\mathrm{i},\boldsymbol{\vartheta})$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας εκφράζει τη σχετική πιθανοφάνεια των παρατηρήσεων ως συνάρτηση των παραμέτρων ***ϑ***

$$l(\theta)=\log L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i,\theta)$$

Ο εκτιμητής ορίζεται ως η τιμή του ***ϑ*** που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας

$$l(\theta,x)=n_y\Lambda_\theta(u,z_+)+\sum_{1}^{n_u}\log\{\lambda_\theta(x_{(i)})\}$$

Συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας μοντέλου POT

Εκτιμητής:

- **Αμερόληπτος**
- Πλήρως **ικανός**
- **Κανονικά κατανεμημένος** υπό την ασυμπτωτική έννοια.

***Δεν** είναι εφαρμόσιμος όταν:*

- Δεν υπάρχουν εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας
- Δεν είναι μοναδικοί
- Παρουσιάζουν μεροληπτικό σφάλμα

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (MLE)

$L(\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{x})=\Pi f(x_i,\boldsymbol{\vartheta})$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας εκφράζει τη σχετική πιθανοφάνεια των παρατηρήσεων ως συνάρτηση των παραμέτρων ***ϑ***

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i, \theta)$$

Ο εκτιμητής ορίζεται ως η τιμή του ***ϑ*** που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας

$$l(\theta, x) = n_y \Lambda_\theta(u, z_+) + \sum_{1}^{n_u} \log\{\lambda_\theta(x_{(i)})\}$$

Συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας μοντέλου POT

Εκτιμητής:

- **Αμερόληπτος**
- Πλήρως **ικανός**
- **Κανονικά κατανεμημένος** υπό την ασυμπτωτική έννοια.

μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

Δεν *είναι εφαρμόσιμος όταν:*

- Δεν υπάρχουν εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας
- Δεν είναι μοναδικοί
- Παρουσιάζουν μεροληπτικό σφάλμα

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος εκτίμησης κατά Bayes

Είναι δυνατό χωρίς αναφορά στα δεδομένα να σχηματιστούν εικασίες σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής, που μπορούν να εκφραστούν σαν πιθανοτικές κατανομές.

«εκ των προτέρων» κατανομές

- Ο καθορισμός τους επιτρέπει την τροφοδότηση των δεδομένων του προβλήματος με άλλες πηγές σχετικών πληροφοριών
- Η χρήση διαφορετικών «εκ των προτέρων» πληροφοριών οδηγεί σε υποκειμενικά συμπεράσματα
- Η τριμεταβλητή Κανονική κατανομή επιτρέπει τον προσδιορισμό ανεξάρτητων παραμέτρων
- Μπορούν να εκφραστούν για τις διαφορές ποσοστιαίων σημείων

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος εκτίμησης κατά Bayes

Είναι δυνατό χωρίς αναφορά στα δεδομένα να σχηματιστούν εικασίες σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής, που μπορούν να εκφραστούν σαν πιθανοτικές κατανομές.

Οι παράμετροι είναι τυχαίες μεταβλητές

«εκ των προτέρων» κατανομές

- Ο καθορισμός τους επιτρέπει την τροφοδότηση των δεδομένων του προβλήματος με άλλες πηγές σχετικών πληροφοριών
- Η χρήση διαφορετικών «εκ των προτέρων» πληροφοριών οδηγεί σε υποκειμενικά συμπεράσματα
- Η τριμεταβλητή Κανονική κατανομή επιτρέπει τον προσδιορισμό ανεξάρτητων παραμέτρων
- Μπορούν να εκφραστούν για τις διαφορές ποσοστιαίων σημείων

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος εκτίμησης κατά Bayes

Είναι δυνατό χωρίς αναφορά στα δεδομένα να σχηματιστούν εικασίες σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής, που μπορούν να εκφραστούν σαν πιθανοτικές κατανομές.

Οι παράμετροι είναι τυχαίες μεταβλητές

«εκ των προτέρων» κατανομές

Ο καθορισμός τους επιτρέπει την τροφοδότηση των δεδομένων του προβλήματος με άλλες πηγές σχετικών πληροφοριών

Η χρήση διαφορετικών «εκ των προτέρων» πληροφοριών οδηγεί σε υποκειμενικά συμπεράσματα

Η τριμεταβλητή Κανονική κατανομή επιτρέπει τον προσδιορισμό ανεξάρτητων παραμέτρων

Μπορούν να εκφραστούν για τις διαφορές ποσοστιαίων σημείων

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος εκτίμησης κατά Bayes

Είναι δυνατό χωρίς αναφορά στα δεδομένα να σχηματιστούν εικασίες σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής, που μπορούν να εκφραστούν σαν πιθανοτικές κατανομές.

Οι παράμετροι είναι τυχαίες μεταβλητές

Έλλειψη επιπρόσθετων πληροφοριών

«εκ των προτέρων» κατανομές

- Ο καθορισμός τους επιτρέπει την τροφοδότηση των δεδομένων του προβλήματος με άλλες πηγές σχετικών πληροφοριών
- Η χρήση διαφορετικών «εκ των προτέρων» πληροφοριών οδηγεί σε υποκειμενικά συμπεράσματα
- Η τριμεταβλητή Κανονική κατανομή επιτρέπει τον προσδιορισμό ανεξάρτητων παραμέτρων
- Μπορούν να εκφραστούν για τις διαφορές ποσοστιαίων σημείων

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος εκτίμησης κατά Bayes

Είναι δυνατό χωρίς αναφορά στα δεδομένα να σχηματιστούν εικασίες σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής, που μπορούν να εκφραστούν σαν πιθανοτικές κατανομές.

Οι παράμετροι είναι τυχαίες μεταβλητές

«εκ των προτέρων» κατανομές

Ο καθορισμός τους επιτρέπει την τροφοδότηση των δεδομένων του προβλήματος με άλλες πηγές σχετικών πληροφοριών

Η χρήση διαφορετικών «εκ των προτέρων» πληροφοριών οδηγεί σε υποκειμενικά συμπεράσματα

Έλλειψη επιπρόσθετων πληροφοριών → Η τριμεταβλητή Κανονική κατανομή επιτρέπει τον προσδιορισμό ανεξάρτητων παραμέτρων

Ύπαρξη χρήσιμων και αξιόπιστων πληροφοριών → Μπορούν να εκφραστούν για τις διαφορές ποσοστιαίων σημείων

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος εκτίμησης κατά Bayes

Είναι δυνατό χωρίς αναφορά στα δεδομένα να σχηματιστούν εικασίες σχετικά με τις παραμέτρους της κατανομής, που μπορούν να εκφραστούν σαν πιθανοτικές κατανομές.

Η «εκ των υστέρων» κατανομή δίνεται:

«εκ των προτέρων» συνάρτηση πιθανότητας

πιθανοφάνεια

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|x) = \frac{\pi(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta};x)}{\int_{\boldsymbol{\Theta}} \pi(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta};x)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}} \propto \pi(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta};x)$$

Υπολογισμός με τεχνικές που χρησιμοποιούν στοχαστικούς αλγόριθμους, όπως η τεχνική **MCMC**

«εκ των προτέρων» κατανομές

Ο καθορισμός τους επιτρέπει την τροφοδότηση των δεδομένων του προβλήματος με άλλες πηγές σχετικών πληροφοριών

Η χρήση διαφορετικών «εκ των προτέρων» πληροφοριών οδηγεί σε υποκειμενικά συμπεράσματα

Η τριμεταβλητή Κανονική κατανομή επιτρέπει τον προσδιορισμό ανεξάρτητων παραμέτρων

Μπορούν να εκφραστούν για τις διαφορές ποσοστιαίων σημείων

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η Μέθοδος εκτίμησης των *L*-Ροπών

Παρέχουν μέτρα της θέσης, της διασποράς, της ασυμμετρίας, της κύρτωσης και άλλων όψεων του σχήματος των κατανομών πιθανότητας ή των δειγμάτων

Υπολογίζονται από γραμμικούς συνδυασμούς των ταξινομημένων τιμών των δεδομένων

Χρησιμοποιώντας *L*-Ροπές τρίτης τάξης, οι παράμετροι κλίμακας και σχήματος της κατανομής GPD εκτιμώνται :

$$\xi = \frac{(3\tau_3 - 1)}{(\tau_3 + 1)} \qquad \sigma' = (1-\xi)(2-\xi)\lambda_2$$

$\tau_r = \lambda_3 / \lambda_2$

Πλεονεκτήματα

- ❖ Επηρεάζονται λιγότερο από έκτοπες ή εξωκείμενες τιμές
- ❖ Οι απαιτούμενοι υπολογισμοί είναι σημαντικά λιγότεροι
- ❖ Η μεροληψία των εκτιμητών μικρών δειγμάτων παραμένει μικρή

Αξιόπιστες εκτιμήσεις των δεικτών «ουράς» μικρών δειγμάτων δεδομένων POT

L-ροπές (L-moments)

- Οι L-ροπές είναι μία σειρά παραμέτρων, ανάλογες με τις κλασσικές ροπές, που μπορούν να περιγράψουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος (θέση – μέση τιμή, μεταβλητότητα, ασυμμετρία, κύρτωση κλπ.).
- Εισήχθησαν από τον Hosking (1990).
- Παράγονται από γραμμικούς συνδυασμούς των τιμών ενός ταξινομημένου δείγματος (από αυτό το γεγονός προέρχεται και ο χαρακτηρισμός L, δηλαδή Linear - γραμμικές).

Hosking, J. R. M., *L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics,* Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 52, 105-124, 1990.

Η χρήση των L-ροπών
L-moments

- Οι L-ροπές συμβολίζονται με το ελληνικό γράμμα λ και έναν δείκτη 1, 2, 3, ... Η λ_1 σχετίζεται με την παράμετρο θέσης και ταυτίζεται με την κλασσική μέση τιμή (ροπή πρώτης τάξης). Η λ_2 σχετίζεται με την μεταβλητότητα, η λ_3 με την ασυμμετρία και η λ_4 με την κύρτωση. Εφόσον οι L-ροπές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των τιμών του δείγματος, η διάσταση τους είναι η ίδια με αυτή του φυσικού μεγέθους του οποίου αντιπροσωπεύουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά του.

- Ωστόσο μπορούμε να ορίσουμε τους εξής αδιάστατους συντελεστές:

➢ Συντελεστής μεταβλητότητας: $\tau_2 = \lambda_2/\lambda_1$

➢ Συντελεστής ασυμμετρίας (skewness): $\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2$

➢ Συντελεστής κύρτωσης (kurtosis): $\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2$

Η χρήση των L-ροπών
L-moments

- Οι L-ροπές υπολογίζονται εύκολα αν έχουν υπολογιστεί προηγουμένως οι πιθανοτικά σταθμισμένες ροπές – Π.Σ.Ρ. (Probability-Weighted Moment, PWM). Οι Π.Σ.Ρ. εισήχθησαν από τους Greenwood et al. (1979) και υπολογίζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των τιμών ενός ταξινομημένου δείγματος.
- Αν είναι γνωστές οι ΠΣΡ β_0, β_1, β_2, β_3, τότε οι L-ροπές μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις:
  - $\boldsymbol{\lambda_1 = \beta_0}$
  - $\boldsymbol{\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0}$
  - $\boldsymbol{\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0}$
  - $\boldsymbol{\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0}$
- L-ροπές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των Π.Σ.Ρ., συνεπώς διατηρούν την ιδιότητά τους να είναι και γραμμικοί συνδυασμοί των τιμών του δείγματος.

Greenwood, J.A., J.M. Landwehr, N.C. Matalas, and J.R. Wallis. (1979). Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressible in Inverse Form. *Water Resources Research* **15**(5), 1049–1054.

Η χρήση των L-ροπών
L-moments

- Εφόσον το δείγμα είναι ταξινομημένο σε αύξουσα σειρά τιμών έτσι ώστε *x*(*j*)≥*x*(*i*), ∀ *j*>*i* οι μεροληπτικές εκτιμήσεις είναι

$$\beta_{0\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \beta_{1\mu} = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{n-i-0.65}{n}\right)x_{n-i+1}$$

$$\beta_{2\mu} = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{n-i-0.65}{n}\right)^2 x_{n-i+1} \qquad \beta_{3\mu} = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{n-i-0.65}{n}\right)^3 x_{n-i+1}$$

- Για την αμερόληπτη εκτίμηση της *i* τάξης Π.Σ.Ρ. *β*i, απαιτούνται τουλάχιστον *i*+1 τιμές στο δείγμα. Οι αμερόληπτες εκτιμήσεις των Π.Σ.Ρ. είναι

$$\beta_0 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \beta_1 = \sum_{i=2}^{n}\frac{i-1}{n-1}x_{n-i+1}$$

$$\beta_2 = \sum_{i=3}^{n}\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}x_{n-i+1} \qquad \beta_3 = \sum_{i=3}^{n}\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}x_{n-i+1}$$

«Υδρογνώμων»
Θεωρητικές συναρτήσεις κατανομής

- **«Υδρογνώμων»** Λογισμικό επεξεργασίας και ανάλυσης υδρολογικών χρονοσειρών
  - **Ο Υδρογνώμων** είναι μία εφαρμογή ελεύθερου λογισμικού για την ανάλυση και την επεξεργασία υδρολογικών δεδομένων, κυρίως με τη μορφή χρονοσειρών
  - http://hydrognomon.org/index.html
- Στατιστική ανάλυση υδρολογικών χρονοσειρών
  - Η ΠΥΘΙΑ είναι επιπρόσθετο εργαλείο του λογισμικού ΥΔΡΟΓΝΩΜΩΝ, που επιτρέπει την ολοκληρωμένη στατιστική ανάλυση υδρολογικών χρονοσειρών. Η ανάλυση περιλαμβάνει εκτίμηση στατιστικών χαρακτηριστικών και παραμέτρων (τυπικών και εξειδικευμένων, όπως παραμέτρων υδρολογικής εμμονής), προσαρμογή συναρτήσεων κατανομής, εκτίμηση ορίων εμπιστοσύνης (με μεθόδους αναλυτικές ή Monte Carlo), στατιστικούς ελέγχους, φασματική ανάλυση και στατιστική πρόγνωση.
- Χρήση θεωρητικών συναρτήσεων κατανομών από δύο κύριες οικογένειες
  - οικογένεια κατανομών κανονικής κατανομής και
  - κατανομής γάμα

«Υδρογνώμων» Θεωρητικές συναρτήσεις κατανομής

- **«Υδρογνώμων»** και Στατιστική ανάλυση υδρολογικών χρονοσειρών
  - Όταν υπεισέρχονται παράμετροι **σχήματος**, **κλίμακας** και **θέσης**, χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί ***κ***, ***λ*** και ***ψ***. Εν γένει το πρόσημο του *κ* συσχετίζεται με το πρόσημο της ασυμμετρίας της κατανομής, το δε *λ* είναι θετικό. Επιπλέον όταν μπαίνει ως παράμετρος η τυπική απόκλιση *σ*, αυτή είναι θετική εξορισμού.
  - Κάποιες από τις κατανομές έχουν ως πεδίο ορισμού όλο το $\Re$, αρκετές κατανομές ωστόσο έχουν ως κάτω φράγμα της τυχαίας μεταβλητής το 0 ή κάποια άλλη τιμή που εξαρτάται από τις παραμέτρους της κατανομής. Οι δε κατανομές ΓΑΤ και Pareto μπορούν να παρουσιάσουν και άνω φράγμα ανάλογα τις τιμές της παραμέτρου σχήματος *κ*.

Οι συναρτήσεις κατανομής που περιλαμβάνονται στον «Υδρογνώμων» μαζί με τον αριθμό των παραμέτρων

α/α	Ονομασία Κατανομής	Ονομασία Κατανομής (Αγγλική)	Παράμετροι	Αριθμ. Ανεξάρτητων Παραμέτρων	Μέθοδος Ροπών	Μέθοδος L- Ροπών	Έμμεση μέθοδος Ροπών
	Οικογένεια κανονικής κατανομής						
1	Κανονική ή Gauss	Normal or Gauss	μ, σ	2	√	√	
2	Λογαριθμο-κανονική	Log-Normal	μ_y, σ_y	2	√		
3	Λογαριθμο-κανονική 3 παραμέτρων	Log-Normal 3p (Galton)	μ_y, σ_y, c	3	√		
	Οικογένεια κατανομής Γάμα						
4	Εκθετική 2 παραμέτρων	Exponential	λ, ψ	2	√	√	
5	Γάμα 2 παραμέτρων	Gamma 2p	κ, λ	2	√		
6	Γάμα 3 παραμέτρων	Gamma 3p (Pearson III)	κ, λ, ψ	3	√		
7	Λογαριθμική Γάμμα 3 παραμέτρων	Log-Pearson III	κ, λ, ψ	3			√
	Ασυμπτωτικές κατανομές ακροτάτων						
8	Μεγίστων, Ακραίων τιμών τύπου Ι (ΑΤ-1) ή Gumbel	Maximum, Extreme values type I (EV-1) or Gumbel	λ, ψ	2	√	√	
9	Μεγίστων, ΑΤ-2	Maximum, EV-2	κ, λ	2	√	√	
10	Μεγίστων, Γενική Ακραίων τιμών (ΓΑΤ)	Maximum, General Extreme values (GEV)	κ, λ, ψ	3 ή 2 (*)	√	√	
11	Ελαχίστων, ΑΤ-1 ή Gumbel	Minimum, EV-1 or Gumbel	λ, ψ	2	√	√	
12	Ελαχίστων, ΑΤ-3 ή Weibull	Minimum, EV-2 or Weibull	κ, λ	2	√	√	
13	Ελαχίστων, Γενική Ακραίων τιμών (ΓΑΤ)	Minimum, General Extreme values (GEV)	κ, λ, ψ	3 ή 2 (*)	√	√	
	Pareto						
14	Pareto 3 παραμέτρων	Pareto 3p	κ, λ, ψ	3	√	√	

(*) Οι κατανομές τύπου ΓΑΤ έχουν 3 παραμέτρους. Είτε προσδιορίζονται και οι τρεις με την μέθοδο των ροπών ή την μέθοδο των L-ροπών (περίπτωση 3 ανεξάρτητων παραμέτρων) είτε δίνεται σταθερή τιμή στην παράμετρο σχήματος (κ) και υπολογίζονται οι υπόλοιπες δύο παράμετροι κατά τα γνωστά (περίπτωση 2 ανεξάρτητων παραμέτρων).

Πεδίο ορισμού της τυχαίας μεταβλητής ανά κατανομή

α/α	Ονομασία Κατανομής	Παράμετροι	Κάτω όριο	Άνω όριο
1	Κανονική	μ, σ	$-\infty$	∞
2	Λογαριθμο-κανονική	μ_y, σ_y	0	∞
3	Λογαριθμο-κανονική 3 παραμέτρων	μ_y, σ_y, c	c	∞
4	Εκθετική 2 παραμέτρων	λ, ψ	ψ	∞
5	Γάμα 2 παραμέτρων	κ, λ	0	∞
6	Γάμα 3 παραμέτρων	κ, λ, ψ	ψ	∞
7	Λογαριθμική Γάμμα 3 παραμέτρων	κ, λ, ψ	e^{ψ}	∞
8	Μεγίστων ή Ελαχίστων, Ακραίων τιμών τύπου I (ΑΤ-1) ή Gumbel	λ, ψ	$-\infty$	∞
9	Μεγίστων, ΑΤ-2	κ, λ	0	∞
10	Μεγίστων ή Ελαχίστων, Γενική Ακραίων τιμών (ΓΑΤ)	κ, λ, ψ	$\lambda\left(\psi-\frac{1}{\kappa}\right)$ για $\kappa>0$, $-\infty$ για $\kappa\leq 0$	$\lambda\left(\psi-\frac{1}{\kappa}\right)$ για $\kappa<0$, ∞ για $\kappa\geq 0$
12	Ελαχίστων, ΑΤ-3 ή Weibull	κ, λ	0	∞
14	Pareto 3 παραμέτρων	κ, λ, ψ	$\lambda\psi$	$\lambda(\psi+\kappa)$ για $\kappa>0$, ∞ για $\kappa\leq 0$

«Υδρογνώμων»
Υπολογισμοί συναρτήσεων κατανομής

- Οι υπολογισμοί των συναρτήσεων κατανομής (πιθανότητα μη-υπέρβασης $F(x)$ συναρτήσει της τυχαίας μεταβλητής x) καθώς και των αντιστρόφων συναρτήσεων κατανομής (τυχαία μεταβλητή x ως συνάρτηση του ποσοστημορίου $u=F(x)$, $x(u)=F^{-1}(u)$) διακρίνονται σε:
  - Υπολογισμούς με μαθηματικές σχέσεις που έχουν κλειστή μορφή και
  - Υπολογισμούς με προσεγγίσεις της αριθμητικής ανάλυσης.
- Οι υπολογισμοί των συναρτήσεων κατανομής της οικογένειας της κανονικής κατανομής καθώς και της κατανομής Γάμα βασίζονται σε αριθμητικές προσεγγίσεις
- οι υπολογισμοί στις υπόλοιπες κατανομές (Ακραίων τιμών, εκθετική κατανομή και κατανομή Pareto) γίνονται με σχέσεις κλειστής μορφής.

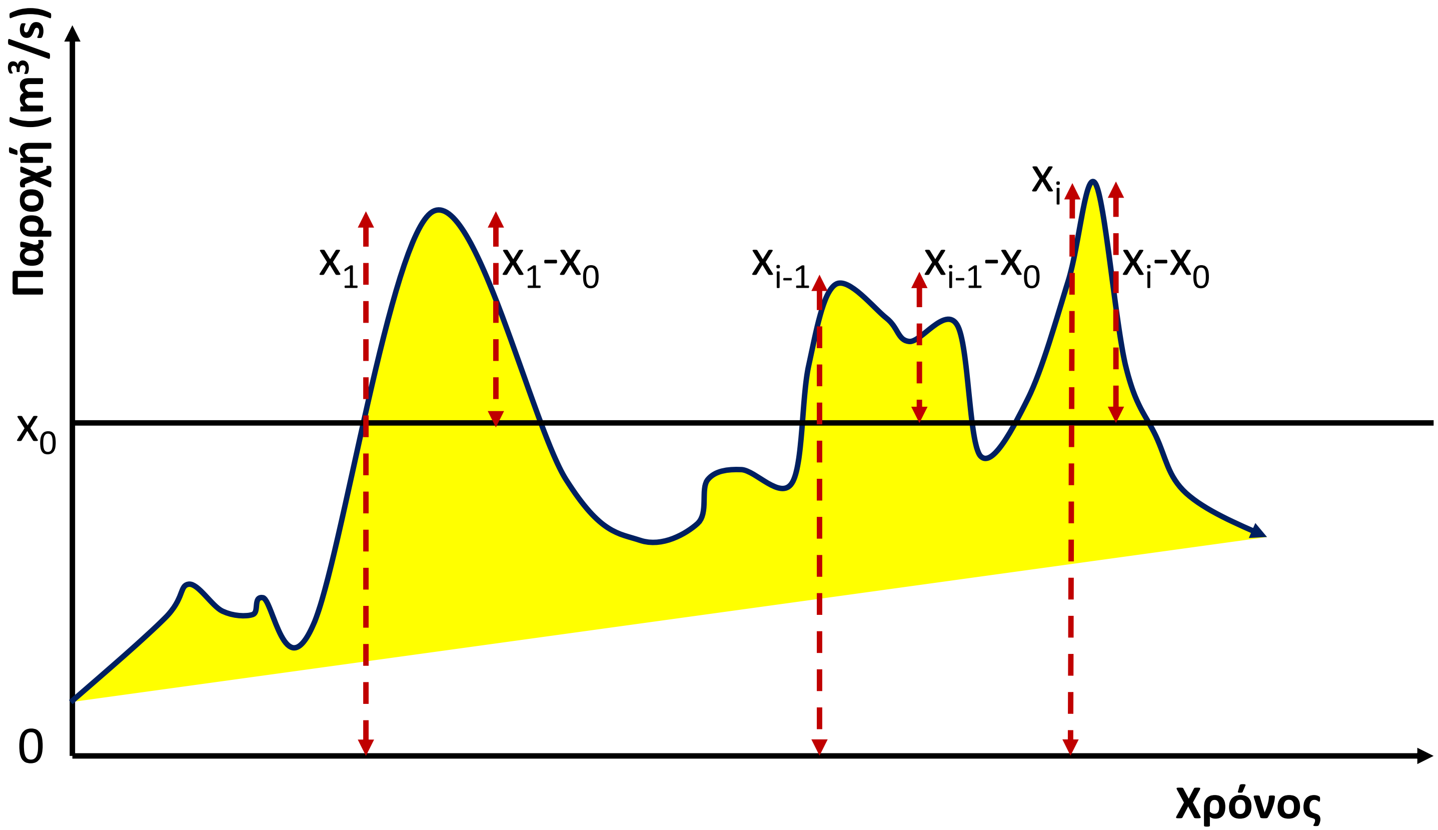
«Υδρογνώμων»
Υπολογισμοί συναρτήσεων κατανομής

Κατανομές που υπολογίζονται με προσεγγιστική λύση	
Κατανομές	***Βασισμένες στον***
Κανονική κατανομή, Λογαριθμοκανονική κατανομή, κατανομή Galton	Υπολογισμό της συνάρτησης σφάλματος (Error function) με αριθμητική μέθοδο
Κατανομή Γάμα 2 παραμέτρων, κατανομή Γάμα 3 παραμέτρων (Person III), Log-Pearson III	Υπολογισμό της κατανομής Γάμα με αριθμητική μέθοδο
Κατανομές που υπολογίζονται με λύση κλειστής μορφής	
Εκθετική κατανομή Κατανομές ΑΤ1, ΑΤ2 μεγίστων και ΑΤ1, ΑΤ3 ελαχίστων Κατανομές ΓΑΤ ελαχίστων και μεγίστων Κατανομή Pareto τριών παραμέτρων	

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΗΜΜΥΡΙΚΩΝ ΑΙΧΜΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

- **Πλημμυρικές αιχμές πάνω από ένα κατώφλι**

  POT (Peaks over threshold) ή PDS (partial duration series)



ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΗΜΜΥΡΙΚΩΝ ΑΙΧΜΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

- **POT προσέγγιση**

  - Επιλογή ενός κατωφλιού x_0
  - Επιλογή των πλημμυρικών αιχμών > x_0 (διατήρηση της ανεξαρτησίας)
  - Ο αριθμός των υπερβάσεων (*M*) σε επιλεγμένο χρονικό βήμα (π.χ. ετήσιο = *N*) θεωρείται ότι ακολουθεί Poisson κατανομή και η παράμετρος *k* ισούται με:

    $$\boldsymbol{k = M / N}$$

  - Σε πολλές περιπτώσεις οι υπερβάσεις ανήκουν στην οικογένεια των εκθετικών κατανομών

    $$F(x) = 1 - exp[-\beta(x - x_0)], x > x_0$$

    Η παράμετρος *β* υπολογίζεται $\beta = M/\sum_{i=1}^{M}(x_i - x_0)$

    Το ποσοστημόριο x_T ισούται με:

    $$\boldsymbol{x_T = x_0 + (\ln T + \ln k)/\beta}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΗΜΜΥΡΙΚΩΝ ΑΙΧΜΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

- **POT προσέγγιση**

  - Το ασυμπτωτικό τυπικό σφάλμα του x_T:

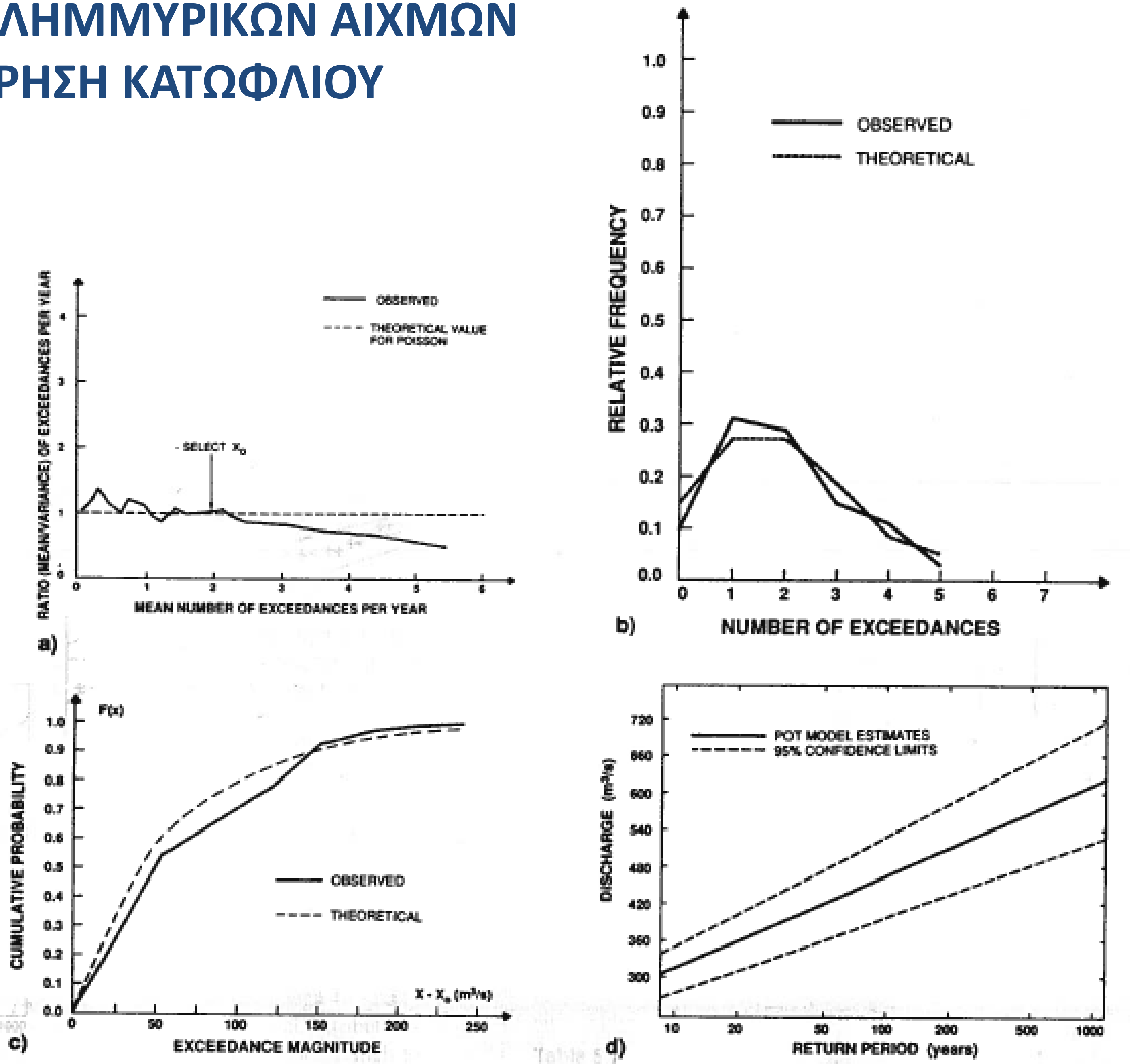
    $$se(x_T) = \{[1 + (\ln k + \ln T)^2]/(\beta^2 kN)\}^{1/2}$$

  - Στατιστικός έλεγχος
    - Εκθετική κατανομή με K-S test
    - Poisson κατανομή με X^2 test

  - Επιλογή μεθόδου POT ή AMS (annual maximum series)
    - $M \geq 1.65\ N$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΗΜΜΥΡΙΚΩΝ ΑΙΧΜΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

- **POT method**



ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

- Κανονική κατανομή μπορούμε να εφαρμόζουμε σε μεγέθη που προέρχονται από συνάθροιση (ή μέσες τιμές) πάνω σε ένα χρονικό διάστημα, για παράδειγμα ετήσιες βροχοπτώσεις
  - Ειδικά για την κανονική κατανομή ένα κριτήριο για να ικανοποιείται η απαίτηση της κυριαρχίας των θετικών τιμών είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας ($C_{vx}=\sigma_x/\mu_x$) να είναι $C_{vx}<0.25$. Αν όμως $C_{vx}>0.5$ θα πρέπει να αποκλείεται η κανονική κατανομή
- Κατανομή γάμα (ή Pearson III ή και λογαριθμοκανονική 2-3 παραμέτρων) εφαρμόζουμε σε μεγέθη που παρουσιάζουν (θετική) ασυμμετρία.
  - π.χ. τα δείγματα που έχουν εποχικότητα (π.χ. χρονοσειρά βροχοπτώσεων συγκεκριμένου μήνα ετήσιου χρονικού βήματος)
- Εκθετική κατανομή για την περιγραφή υδρολογικών μεταβλητών σε μικρή χρονική κλίμακα
- Κατανομές ακραίων τιμών (ΑΤ) ή Log-Pearson III για την περιγραφή ακραίων τιμών σε ένα χρονικό διάστημα (όπως χρονοσειρές ετησίων μεγίστων βροχόπτωσης ή παροχής)
- ΑΤ-3 ελαχίστων (Weibull) για την περιγραφή παροχών ξηρασία
- Pareto για την περιγραφή μεταβλητών που ξεπερνούν ένα δεδομένο κατώφλι.

Βιβλιογραφία

Κουτσογιάννης, Δ., και Θ. Ξανθόπουλος. «Τεχνική Υδρολογία», Έκδοση 3, 418 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999.

Κουτσογιάννης, Δ. «Στατιστική Υδρολογία», Έκδοση 4, 312 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1997.

Μιμίκου, Μ.Α. «Τεχνολογία Υδατικών Πόρων», Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 3η Έκδοση, 2006.

Μιμίκου, Μ.Α. και Ε.Α. Μπαλτάς. «Τεχνική Υδρολογία», Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 5η Έκδοση, 2012.

Παπαμιχαήλ, Δ.Μ. «Τεχνική Υδρολογία Επιφανειακών Υδάτων», Εκδόσεις Γιαχούδη-Γιαπούδη, 2001.

Τσακίρης, Γ. «Υδατικοί Πόροι Ι. Τεχνική Υδρολογία», Εκδόσεις Συμμετρία, 1995.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης