Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ

Ενότητα 3: Στατιστική και πιθανοτική ανάλυση υδρομετεωρολογικών μεταβλητών

Καθ. Αθανάσιος Λουκάς
Εργαστήριο Υδρολογίας και Ανάλυσης Υδατικών Συστημάτων
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή

ΣΧΕΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Οι περισσότερες μέθοδοι της τεχνικής υδρολογίας βασίζονται στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική δεδομένου ότι:

- Η **τύχη** είναι άμεσα συνδεδεμένη με τα υδρολογικά φαινόμενα (πλημμύρες, ξηρασίες) με αποτέλεσμα να περιγράφονται σε μικρό ή μεγάλο βαθμό από τη θεωρία των πιθανοτήτων
- Η τεχνική υδρολογία στηρίζεται σε **μετρήσεις φυσικών μεταβλητών** που η επεξεργασία τους προϋποθέτει τη χρήση στατιστικών μεθόδων (έλεγχος των σφαλμάτων των μετρήσεων, συμπλήρωση ελλείψεων ιστορικών δειγμάτων και κυρίως επέκταση χρονοσειρών)
- Η λήψη αποφάσεων για το **σχεδιασμό** και τη **βέλτιστη λειτουργία** των υδραυλικών έργων και των υδατικών συστημάτων γενικότερα, γίνεται πάντοτε υπό καθεστώς αβεβαιότητας, η οποία μπορεί να ποσοτικοποιηθεί με την θεωρία των πιθανοτήτων

Σημειώνεται ότι η χρήση των πιθανοτήτων δεν μπορεί να υποκαταστήσει την έλλειψη μετρήσεων των υδρολογικών μεταβλητών ή την έλλειψη αξιοπιστίας σε αυτές, χωρίς τις οποίες είναι αδύνατη η εφαρμογή οποιασδήποτε προσέγγισης.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Σχήμα στατιστικών επεξεργασιών

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ
$N_Π$

Δειγματοληψία

ΔΕΙΓΜΑ
($N_Δ < N_Π$)

Συμπύκνωση πληροφορίας

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

- Μέση τιμή
- Τυπική απόκλιση
- Συντελεστής διασποράς
- Συντελεστής ασυμμετρίας

Μοντελοποίηση

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας

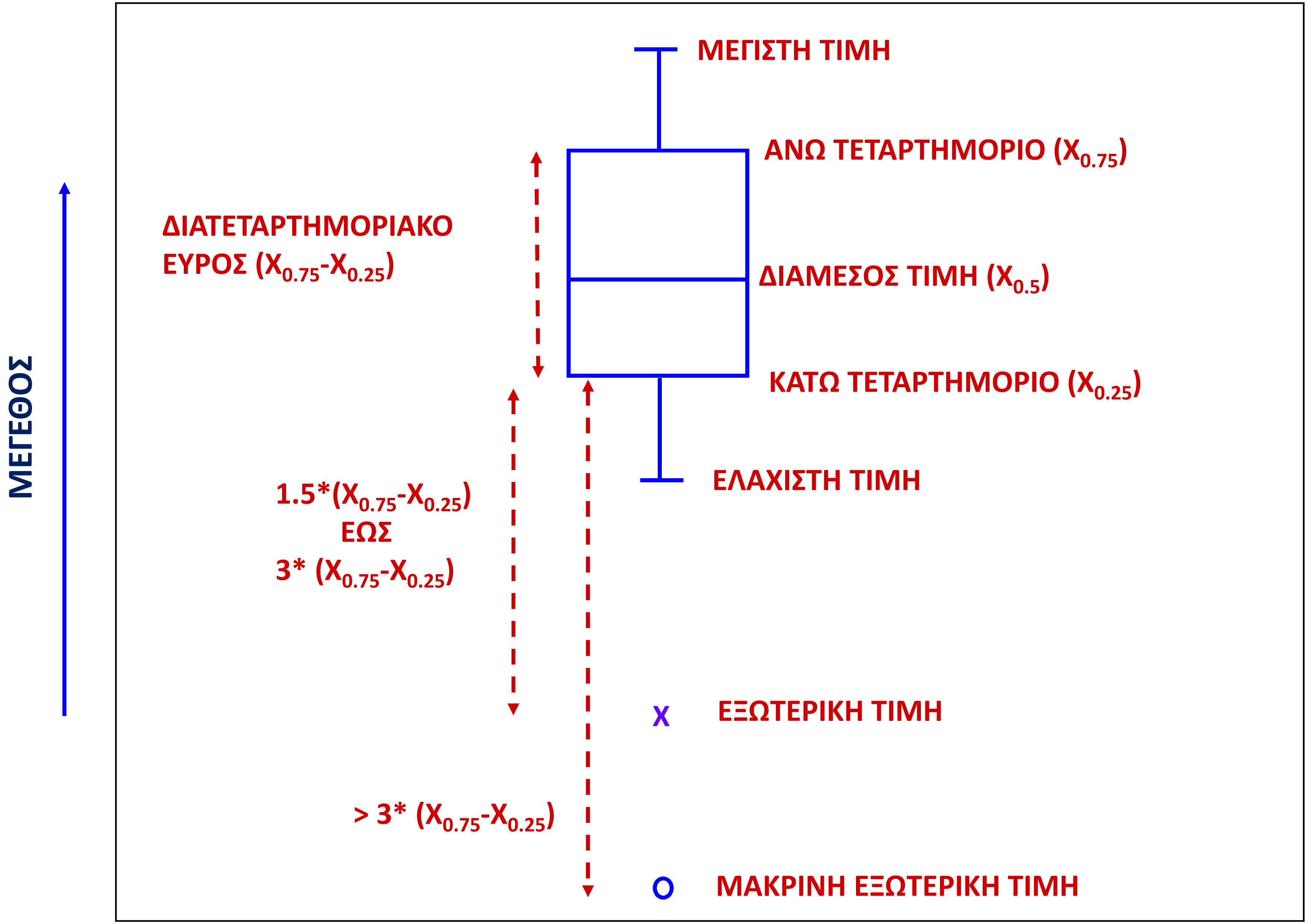
- Επιλογή θεωρητικής κατανομής
- Στατιστικές δοκιμές καταλληλότητας

Εκτίμηση πιθανοτικών μεγεθών

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΕΡΩΤΗΜΑΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΠΛΗΘΥΣΜΟ

- Τι πιθανότητα έχει να εμφανιστεί μια τιμή σε συγκεκριμένο διάστημα
- Σε τι τιμή αντιστοιχεί κάποια πιθανότητα

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ



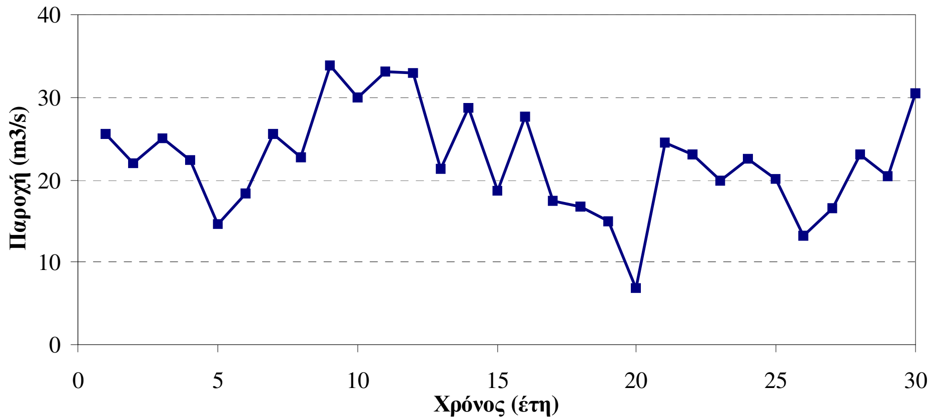
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	*ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ - ΣΧΕΣΗ*
Μέση τιμή **(ροπή τάξης 1)**	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
Τυπική απόκλιση	$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{x})^2}{n-1}}$
Διασπορά **(κεντρική ροπή τάξης 2)**	s_x^2
Συντελεστής διασποράς	$s_x / \overline{x}$
Τρίτη ροπή	$\mu_x^{(3)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{x})^3}{n}$
Τέταρτη ροπή	$\mu_x^{(4)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{x})^4}{n}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_x} = \frac{\mu_x^{(3)} * n^2}{(\mu_x^{(2)})^{3/2} * (n-1) * (n-2)}$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_x} = \frac{n^3 * \mu_x^{(4)}}{(n-1) * (n-2) * (n-3) * \mu_x^{(2)}}$
Μέγιστη τιμή	$M.T. = \max_{i=1}^{n}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
Ελάχιστη τιμή	$E.T. = \min_{i=1}^{n}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

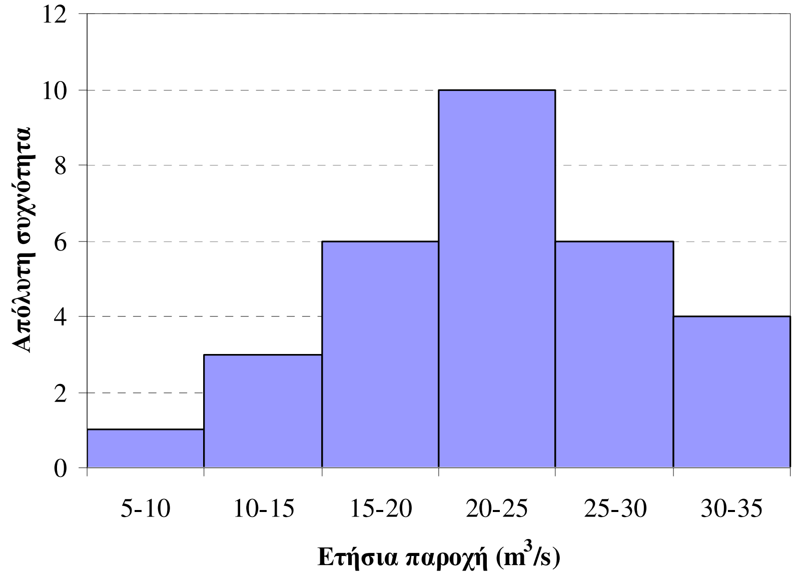
$X_1 \ldots X_n$: Οι τιμές της μεταβλητής $\quad$ n : Αριθμός δεδομένων δείγματος

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

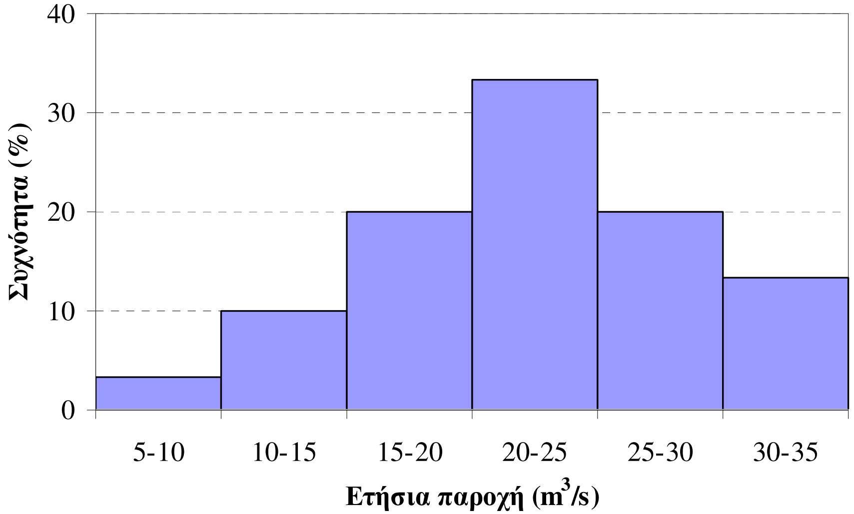
ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ



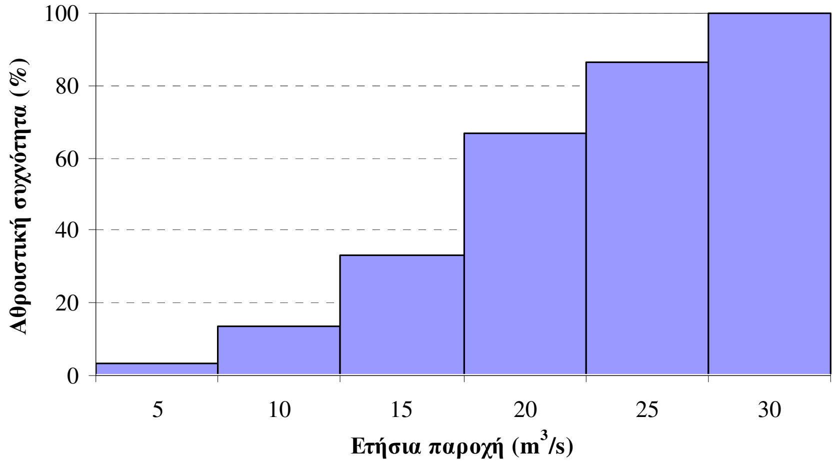
ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ



ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ



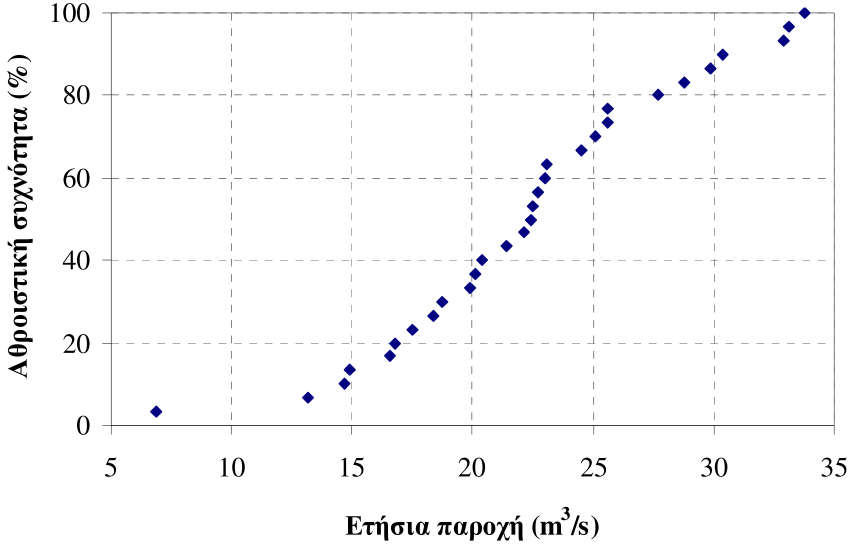
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟ ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ



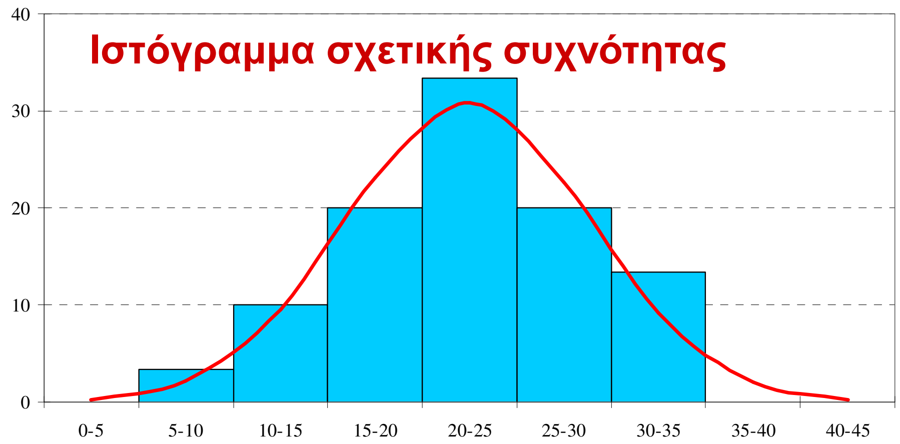
(Πηγή: Εργαστήριο Υδρολογίας και Αξιοποίησης Υδατικών Πόρων, 2012
http://users.itia.ntua.gr/nikos/hydrology/EduMaterial/lecture%208%20gia%20site.pdf)

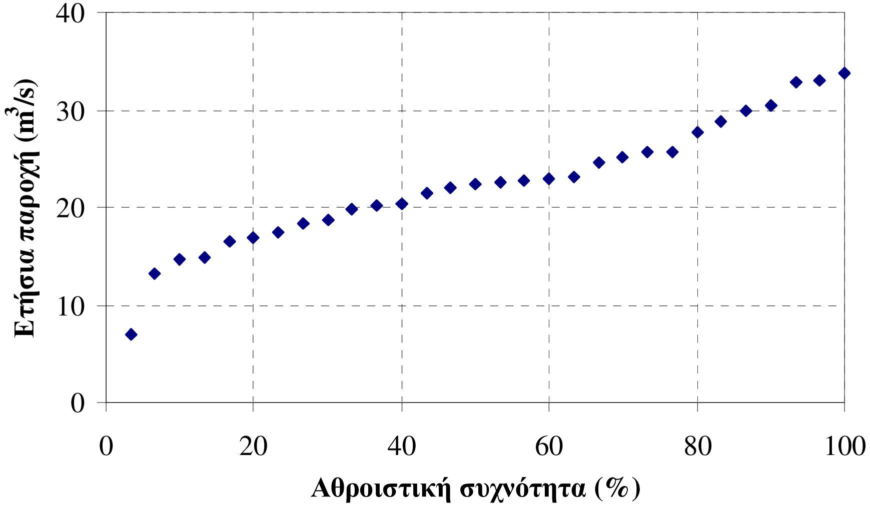
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ



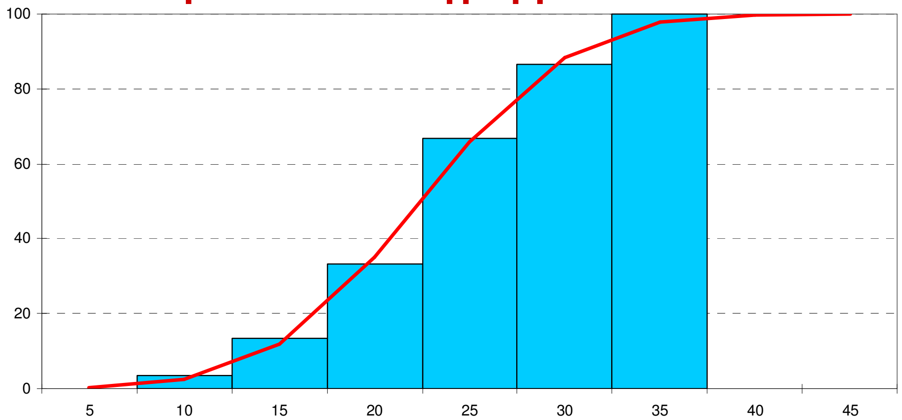
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ





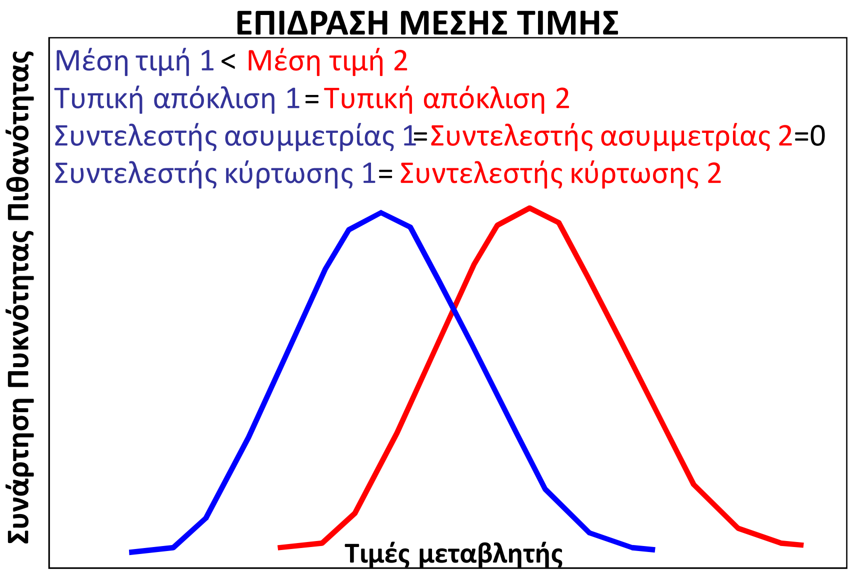
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

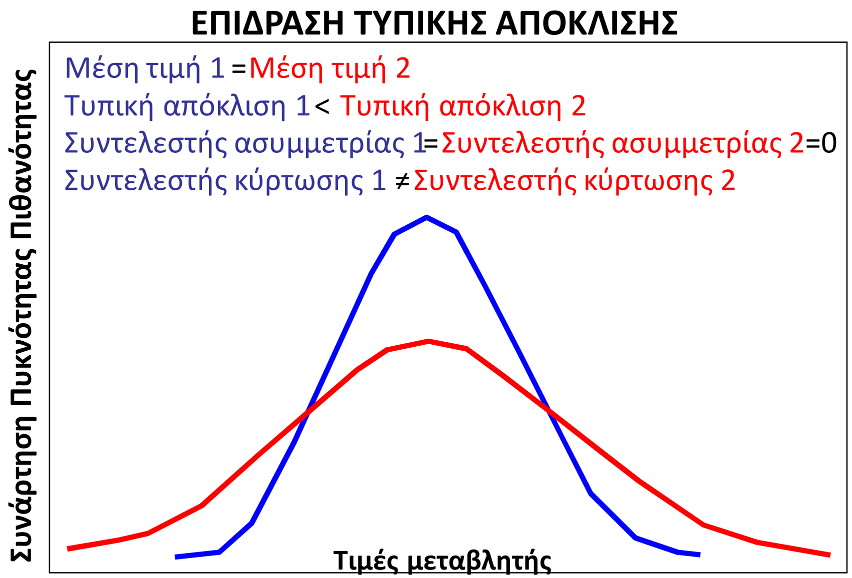
Αθροιστικό ιστόγραμμα

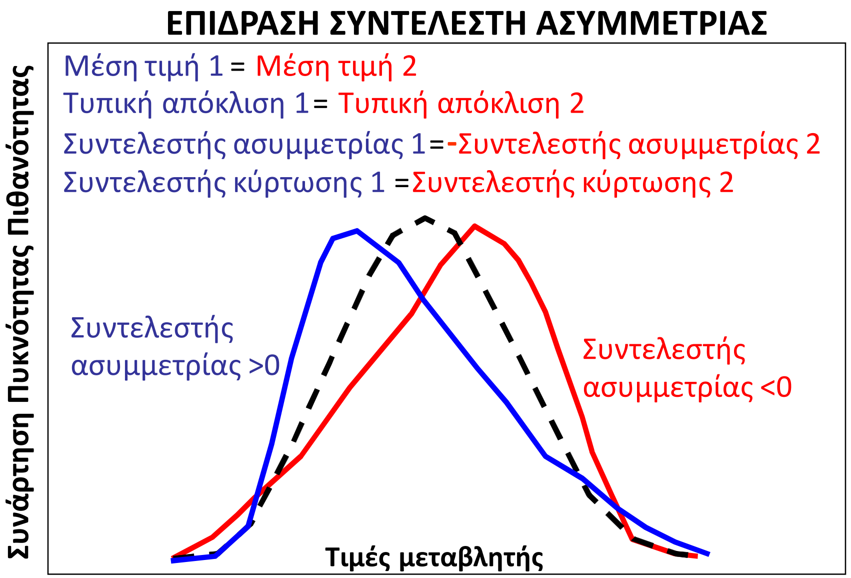


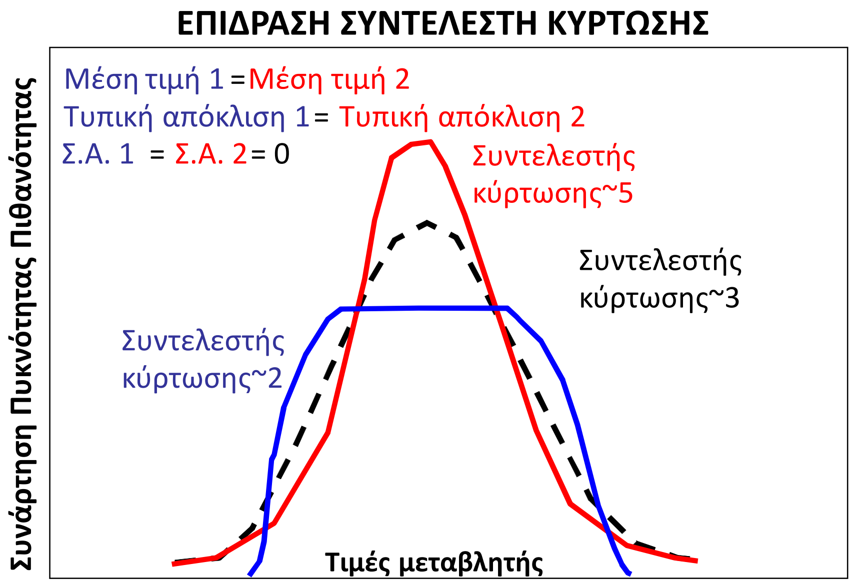
(Πηγή: Εργαστήριο Υδρολογίας και Αξιοποίησης Υδατικών Πόρων, 2012
http://users.itia.ntua.gr/nikos/hydrology/EduMaterial/lecture%208%20gia%20site.pdf)

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ









ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Χ τυχαία μεταβλητή

Συνάρτηση κατανομής (πιθανότητα μη υπέρβασης)
Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να είναι μικρότερη ή ίση της δεδομένης τιμής x

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

$$0 = F_X(-\infty) \le F_X(x) \le F_X(+\infty) = 1$$

Πιθανότητα υπέρβασης
Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να είναι μεγαλύτερη της δεδομένης τιμής x

$$F_{1X} = P(X \ge x) = 1 - F_X(x)$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(X) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

$$T = \frac{1}{P(X > x)} = \frac{1}{F_{1_x}(x)} = \frac{1}{1 - F_X(x)}$$

Η περίοδος επαναφοράς είναι το αντίστροφο της πιθανότητας υπέρβασης. Προϋποθέσεις για να ισχύει η παραπάνω σχέση είναι (α) να είναι συνεχής η τυχαία μεταβλητή και (β) να ισχύει η παραδοχή ανεξαρτησίας της προηγούμενης ενότητας, δηλαδή κάθε εμφάνιση να είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από τις προηγούμενες και επόμενές της.

Βασική σχέση, η οποία συνδέει τα τρία βασικά μεγέθη υδρολογικού σχεδιασμού ενός έργου, δηλαδή την περίοδο επαναφοράς, τη διάρκεια ζωής και τη διακινδύνευση:

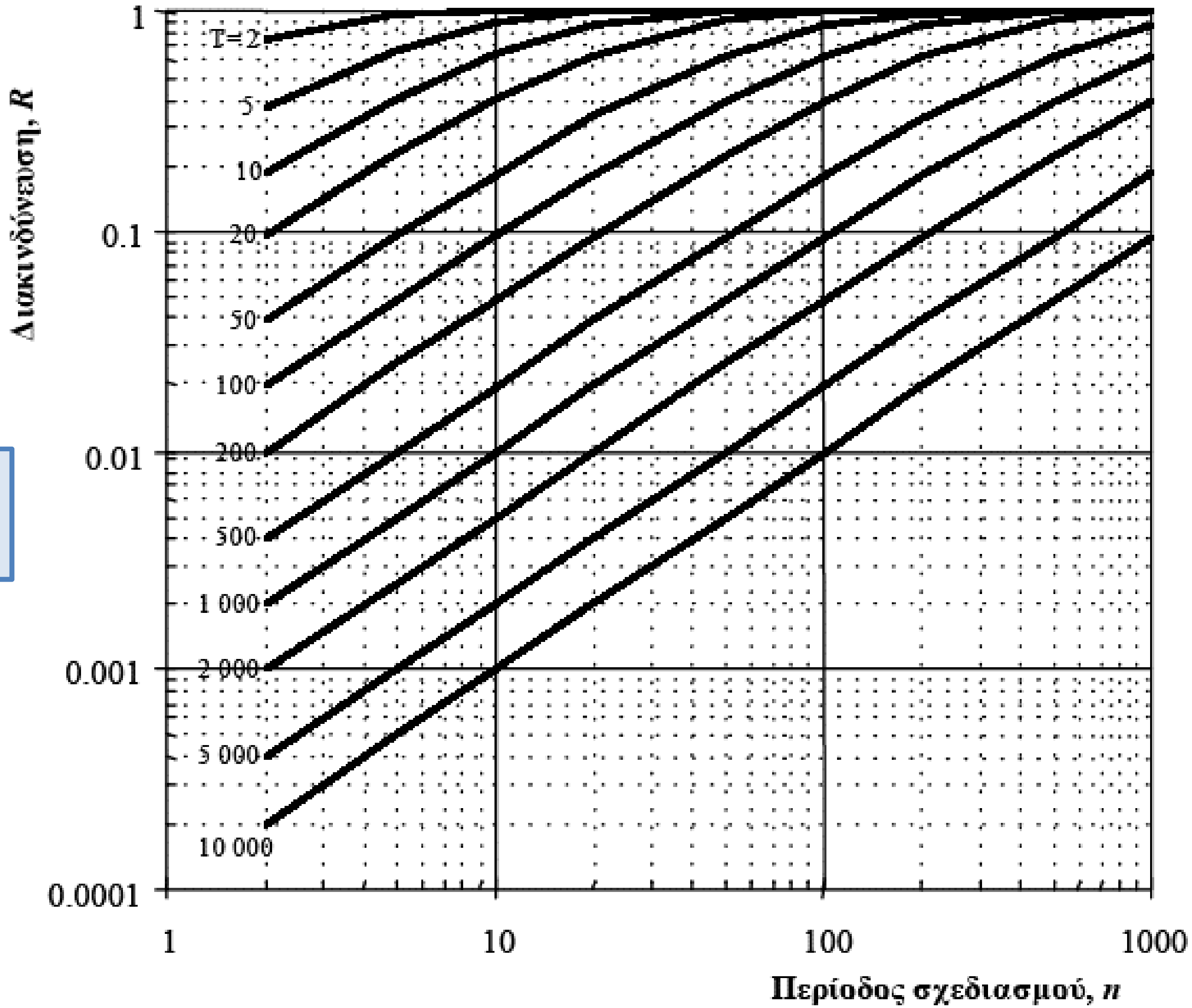
$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \qquad T = \frac{1}{1 - (1 - R)^{\frac{1}{n}}}$$

Τέλος, δεδομένου ότι $\ln(1-x)^n = n\ln(1-x) = n\left(-x - \frac{x^2}{2} - \cdots\right) \approx -nx$, παίρνουμε και την ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση του *R*:

$R = 1 - e^{-n/T}$ η οποία ισχύει με σφάλμα <1% για T ≥ 50 έτη.

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n$$



Γραφική απεικόνιση της σχέσης των χαρακτηριστικών μεγεθών υδρολογικού σχεδιασμού (Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

Παράδειγμα*: *α) Διώρυγα εκτροπής σχεδιάζεται να λειτουργήσει κατά την περίοδο κατασκευής φράγματος, η οποία εκτιμάται σε 5 χρόνια. Ποια πρέπει να είναι η περίοδος επαναφοράς της πλημμύρας σχεδιασμού, ώστε η διακινδύνευση να μην υπερβαίνει το 10%; β) Πόση είναι η διακινδύνευση αν ένα έργο σχεδιαστεί με περίοδο επαναφοράς ίση με τη διάρκεια ζωής του;*

Λύση

α) $R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \rightarrow T = \frac{1}{1-(1-R)^{1/n}} \rightarrow T = \frac{1}{1-(1-0.10)^{\frac{1}{5}}} \rightarrow T = 47.9 \cong 48$ έτη

Στρογγυλεύουμε για περίοδο επαναφοράς T = 50 έτη.

β) Αν δεχτούμε ότι η διάρκεια ζωής του έργου είναι αρκετά μεγάλη (≥ 50 χρόνια), τότε από την προσεγγιστική σχέση παίρνουμε $R = 1 - e^{-1} = 0.632$ = 63.2%. Διαφορετικά η διακινδύνευση υπολογίζεται από την κανονική εξίσωση

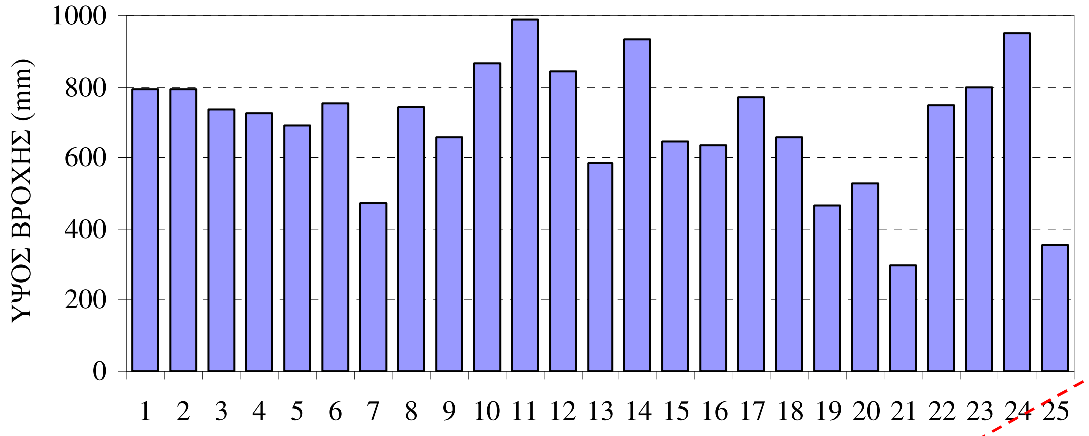
(*Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

$$F_X(x) = \frac{n_x}{N}$$

N: το σύνολο των στοιχείων του δείγματος

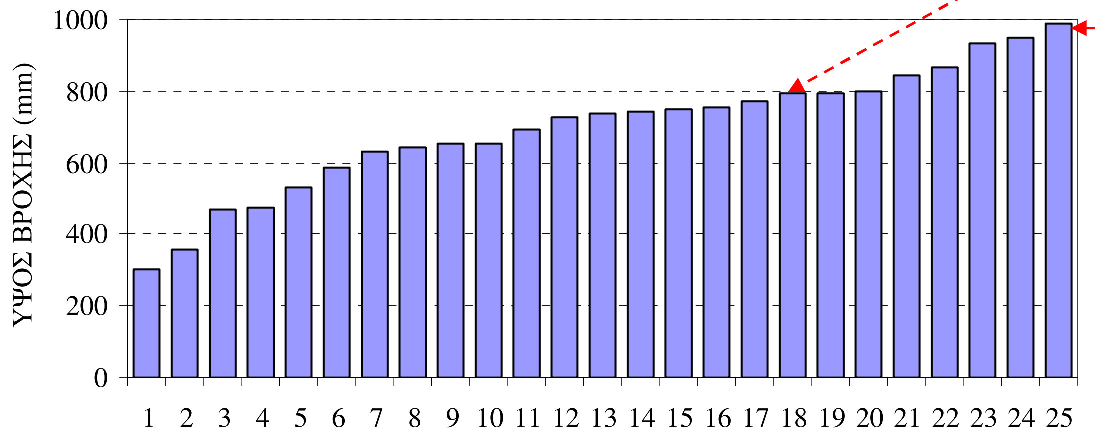
n_x: ο αριθμός των τιμών του δείγματος που δεν υπερβαίνουν την τιμή χ



$F_x(800)=18/25=0.72=72\%$

$F_1(800)=7/25=0.28=28\%$

Όμως:



$F_x(1000)=25/25=1=100\%$

$F_1(1000)=0/25=0=0\%$

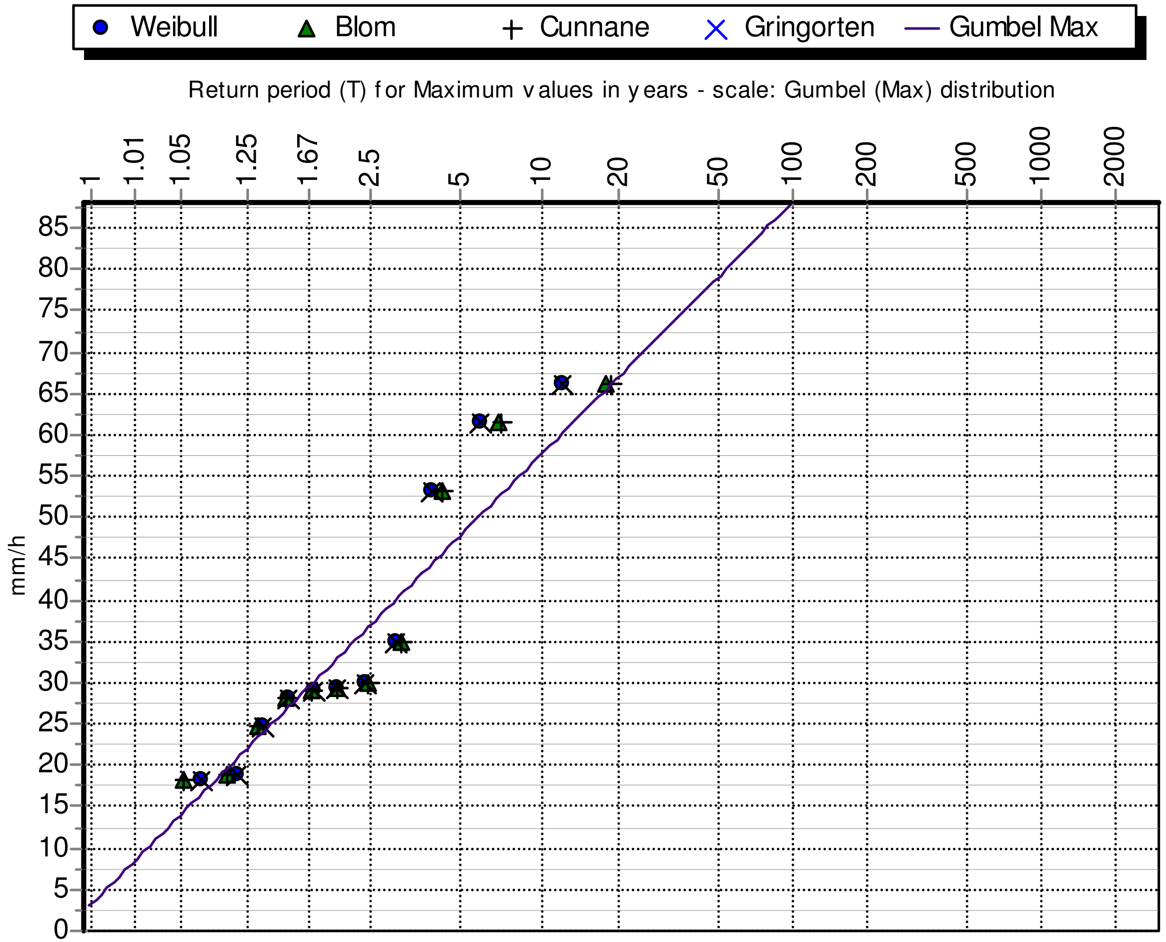
Για αυτό:

$$F_X(x) = \frac{n_x}{N+1}$$

Οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής (πιθανότητες μη-υπέρβασης ταξινομημένου δείγματος σε αύξουσα σειρά)

Όνομα κατανομής	Σχέση q_i=
Weibull	$\dfrac{i}{n+1}$
Blom	$1-\dfrac{(n-i+1)-0.375}{n+0.25}$
Cunnane	$1-\dfrac{(n-i+1)-0.4}{n+0.2}$
Gringorten	$1-\dfrac{(n-i+1)-0.44}{n+0.12}$
Hazen	$\dfrac{2i-1}{2n}$

Εμπειρικές κατανομές Weibull, Blom, Cunnane, Gringorten
Ετήσια μέγιστα έντασης ωριαίων βροχοπτώσεων



ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

Περίοδος επαναφοράς,T μιας δεδομένης τιμής x της τυχαίας μεταβλητής X είναι ο μέσος αριθμός χρονικών διαστημάτων (εν προκειμένω υδρολογικών ετών) που μεσολαβεί μεταξύ 2 διαδοχικών εμφανίσεων της τυχαίας μεταβλητής με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο της δεδομένης τιμής x.

Πιθανότητα υπέρβασης σε ένα έτος: $F_1=1/T$

Πιθανότητα μη υπέρβασης σε ένα έτος: $F=1-F_1=(1-1/T)$

Πιθανότητα μη υπέρβασης σε *n* έτη: $(1-1/T)^n$

Διακινδύνευση είναι η πιθανότητα ***R*** να πραγματοποιηθεί μέσα σε ***n*** έτη τιμή που αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς ***T***.

Πιθανότητα υπέρβασης σε *n* έτη
(Διακινδύνευση): $R=1-(1-1/T)^n$

Παράδειγμα **T=50 έτη, n=10 έτη**

$$R=1-(1-1/50)^{10}=0.18=18\%$$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ

- **Ομοιόμορφη Κατανομή**
- **Διωνυμική Κατανομή**
- **Κατανομή Poisson**
- **Κανονική Κατανομή**
- **Λογαριθμοκανονική Κατανομή**
- **Κατανομές Ακραίων Τιμών (Extreme Value distributions)**
  - **Ακραίων τιμών τύπου I (EVI, Gumbel)**
  - **Ακραίων τιμών τύπου II**
  - **Ακραίων τιμών τύπου III (Weibull)**
- **Κατανομή Pearson III**
- **Κατανομή Log-Pearson III**

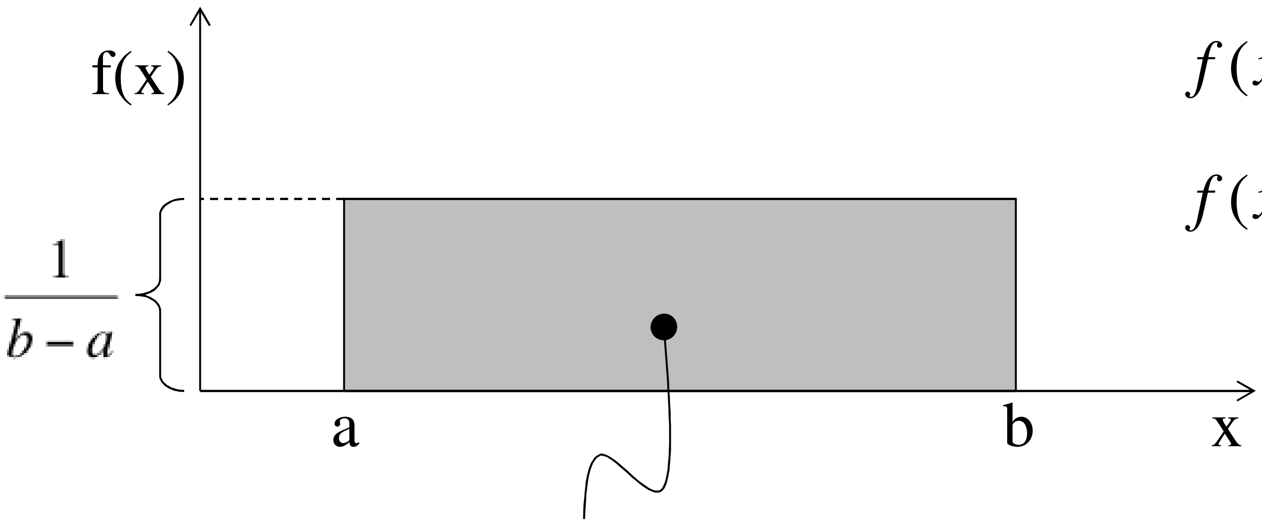
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Θεωρούμε την ***ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας (uniform probability distribution).*** Ορισμένες φορές καλείται *ορθογώνια κατανομή πιθανότητας*). Περιγράφεται από την συνάρτηση:

$$f(x) = 0, x < a$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a \le x \le b$$

$$f(x) = 0, b < x$$



εμβαδόν = μήκος x ύψος = (b – a) x $\frac{1}{b-a}$ = 1

ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$p(n/N) = \binom{N}{n} p^n * q^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n * (1-p)^{N-n}$$

Η διωνυμική κατανομή δίνει την πιθανότητα να έχουμε ***n*** επιτυχίες σε ***N*** δοκιμές όπου ***p*** η πιθανότητα επιτυχίας κάθε δοκιμής και ***q=1-p*** η πιθανότητα αποτυχίας κάθε δοκιμής

- **Παράδειγμα.** Η πιθανότητα να εμφανιστεί η τιμή με πιθανότητα 20%, 3 φορές σε 5 χρόνια είναι :

  $p(3/5) = (5!/(3!*2!))*0.2^3*0.8^{(5-3)} = 0.0512$

Η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός με **πιθανότητα υπέρβασης *p* τουλάχιστον μια φορά στα *n* χρόνια** είναι: $F(x) = 1-(1-p)^n$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Τυχαία γεγονότα που συμβαίνουν κατά τη **διάρκεια του χρόνου *t*** με **μέσο ρυθμό άφιξης *λ***

Υποθέσεις:

Α) Μονιμότητας

Β) Μη πολλαπλασιαστικότητας

Γ) Ανεξαρτησίας

Για κάθε χρονικό διάστημα *t* ο αριθμός των γεγονότων *χ* που θα συμβεί έχει μια πιθανότητα Poisson.

$$F(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Συνεχής και ορισμένη για όλες τις θετικές τιμές

2. Άνω κλάδος χωρίς όριο (unbounded)

3. Κάτω κλάδος με όριο μηδέν ή μια θετική τιμή

4. Ασυμπτωτική στον άξονα για μεγάλες θετικές τιμές της μεταβλητής

5. Μέγιστος αριθμός παραμέτρων = τρείς (3)

(μέση τιμή, διασπορά ή τυπική απόκλιση, συντελεστής ασυμμετρίας)

ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΥΠΕΡΒΑΣΗΣ (ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ)

1. Επιλογή τιμών
2. Διάταξη κατά φθίνουσα σειρά μεγέθους (για μέγιστα) και κατά αύξουσα σειρά μεγέθους (για ελάχιστα)
3. Υπολογισμός της πιθανότητας υπέρβασης και της περιόδου επαναφοράς
4. Προσαρμογή μιας θεωρητικής κατανομής με εκτίμηση των παραμέτρων της
5. Εκτίμηση μεγέθους γεγονότος για μια δεδομένη περίοδο επαναφοράς

   ή

6. Εκτίμηση περιόδου επαναφοράς ενός δεδομένου μεγέθους

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΜΙΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΣΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

1. Η μέθοδος των **Ροπών** (method of moments)
2. Η μέθοδος της **μέγιστης πιθανοφάνειας** (method of maximum likelihood)
3. Η μέθοδος των L-ροπών (πιθανοτικά σταθμισμένων ροπών) (method of L-moments)
4. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (method of least squares)
5. Η μέθοδος του ελαχίστου x^2 (minimum x^2 method)
6. Η μέθοδος των έξι διαιρέσεων (method of sextiles)
7. Η μέθοδος επιλογής ειδικών σημείων (method of matching selected points)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

- **Υπολογισμός των ροπών**
  - Μέσος

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

  - Διακύμανση ή τυπική απόκλιση

$$\hat{\sigma} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{N-1} \right]^{1/2}$$

  - Συντελεστής ασυμμετρίας

$$\hat{g} = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^3}{\hat{\sigma}^{3/2}}$$

Δειγματικές ροπές ως στατιστικοί δείκτες

Απλές (μεροληπτικές) εκτιμήτριες των δειγματικών ροπών

Στατιστικός δείκτης	Εκτιμήτρια
Μέση τιμή	$\mu_x = \dfrac{\sum x_i}{n}$
Τυπική απόκλιση	$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \mu_x)^2}{n}}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_x^{(3)} = \dfrac{1}{n}\sum x_i^3 - 3\mu_x \sigma_x^2 - \mu_x^3$ ή $\mu_x^{(3)} = \dfrac{1}{n}\sum (x_i - \mu_x)^3$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{sx} = \dfrac{\mu_x^{(3)}}{\sigma_x^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή m_4, συντελεστής κύρτωσης δείγματος g_2 (μεροληπτικός)	$m_4 = \dfrac{1}{n}\sum (x_i - \mu_x)^4$, $g_2 = \dfrac{m_4}{m_2^2} - 3$ όπου m_2 η δειγματική μεταβλητότητα = σ_x^2

Για την περίπτωση της εκτίμησης παραμέτρων κατανομών με την έμμεση μέθοδο των ροπών (περίπτωση κατανομής Log-Pearson III) θα χρησιμοποιείται η μετασχηματισμένη μεταβλητή: $y_i = \ln x_i$ στην θέση της x_i

Δειγματικές ροπές ως στατιστικοί δείκτες

Συντελεστές διόρθωσης μεροληψίας - αμερόληπτες εκτιμήσεις των ροπών του πληθυσμού

Στατιστικός δείκτης	Συντελεστής διόρθωσης μεροληψίας
Μέση τιμή	-
Τυπική απόκλιση	$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2}$
Αμερόληπτη εκτιμήτρια της κύρτωσης του πληθυσμού.	$\frac{(n+1)n}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{k_2{}^2}-3\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$ Όπου x η μέση τιμή του δείγματος και k_2 η αμερόληπτη εκτιμήτρια για την μεταβλητότητα του πληθυσμού.

Για την περίπτωση της εκτίμησης παραμέτρων κατανομών με την έμμεση μέθοδο των ροπών (περίπτωση κατανομής Log-Pearson III) θα χρησιμοποιείται η μετασχηματισμένη μεταβλητή: $y_i=\ln x_i$ στην θέση της x_i.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ) ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- **Για πολλές κατανομές πιθανότητας μπορεί να γραφεί η ακόλουθη σχέση**

$$x_T = \bar{x} + \hat{\sigma} \cdot K_T$$

όπου K_T είναι ο παράγοντας συχνότητας που εξαρτάται από την περίοδο επαναφοράς T και τα χαρακτηριστικά της κατανομής

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-0.5*(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}xdx$$

Όρια εμπιστοσύνης

$$x_{(T)_{max}}=x_{(T)}+z_{(1+\alpha)/2}S_T$$

$$x_{(T)_{min}}=x_{(T)}-z_{(1+\alpha)/2}S_T$$

$$S_T=\delta\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

$$\delta=\sqrt{1+\frac{K_{(T)}^2}{2}}$$

$$K_{(T)}=Z_{(1-1/T)}$$

S_T η τυπική απόκλιση του x_T

$Z_{(1+\alpha)/2}$ η μεταβλητή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής όταν το επίπεδο είναι ***α%***

$\hat{\sigma}$ η τυπική απόκλιση του δείγματος

N ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος

Βήματα Προσαρμογής Κανονικής Κατανομής

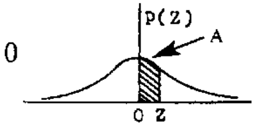
1. Εύρεση στατιστικών χαρακτηριστικών δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλιση).
2. Κατάταξη δείγματος σε φθίνουσα σειρά και αρίθμηση των παρατηρήσεων.
3. Προσδιορισμός Περιόδου Επαναφοράς από τον τύπο του Weibull $T=(N+1)/m$.
4. Υπολογισμός πιθανότητας μη υπέρβασης $F = 1-1/T$ (εμπειρική).
5. Εύρεση τυποποιημένης μεταβλητής Z από πίνακα για κάθε F.
6. Εκτίμηση τιμών μεταβλητής από τα Z. $$X = \bar{x} + Z * S_x$$
7. Σχεδίαση θεωρητικής κατανομής και δείγματος με τα Z στον οριζόντιο άξονα.
8. Έλεγχος x^2 ή/και Kolmogorov-Smirnov για την καταλληλότητα της κατανομής.

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ F(Z) ΣΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

(Επιφάνεια υπό την καμπύλη κανονικής κατανομής από $-\infty$ έως Z)

$F(Z) = 0.50 - A$ για $Z < 0$, $F(Z) = 0.50 + A$ για $Z > 0$

A = η τιμή από τον Πίνακα (επιφάνεια από 0 έως Z).



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000									

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x) (%) για $0 \leq Z \leq 3.09$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	50.00	50.40	50.80	51.20	51.60	51.99	52.39	52.79	53.19	53.59
0.1	53.98	54.38	54.78	55.17	55.57	55.96	56.36	56.75	57.14	57.53
0.2	57.93	58.32	58.71	59.10	59.48	59.87	60.26	60.64	61.03	61.41
0.3	61.79	62.17	62.55	62.93	63.31	63.68	64.06	64.43	64.80	65.17
0.4	65.54	65.91	66.28	66.64	67.00	67.36	67.72	68.08	68.44	68.79
0.5	69.15	69.50	69.85	70.19	70.54	70.88	71.23	71.57	71.90	72.24
0.6	72.57	72.91	73.24	73.57	73.89	74.22	74.54	74.86	75.17	75.49
0.7	75.80	76.11	76.42	76.73	77.04	77.34	77.64	77.94	78.23	78.52
0.8	78.81	79.10	79.39	79.67	79.95	80.23	80.51	80.78	81.06	81.33
0.9	81.59	81.86	82.12	82.38	82.64	82.89	83.15	83.40	83.65	83.89
1	84.13	84.38	84.61	84.85	85.08	85.31	85.54	85.77	85.99	86.21
1.1	86.43	86.65	86.86	87.08	87.29	87.49	87.70	87.90	88.10	88.30
1.2	88.49	88.69	88.88	89.07	89.25	89.44	89.62	89.80	89.97	90.15
1.3	90.32	90.49	90.66	90.82	90.99	91.15	91.31	91.47	91.62	91.77
1.4	91.92	92.07	92.22	92.36	92.51	92.65	92.79	92.92	93.06	93.19
1.5	93.32	93.45	93.57	93.70	93.82	93.94	94.06	94.18	94.29	94.41
1.6	94.52	94.63	94.74	94.84	94.95	95.05	95.15	95.25	95.35	95.45
1.7	95.54	95.64	95.73	95.82	95.91	95.99	96.08	96.16	96.25	96.33
1.8	96.41	96.49	96.56	96.64	96.71	96.78	96.86	96.93	96.99	97.06
1.9	97.13	97.19	97.26	97.32	97.38	97.44	97.50	97.56	97.61	97.67
2	97.72	97.78	97.83	97.88	97.93	97.98	98.03	98.08	98.12	98.17
2.1	98.21	98.26	98.30	98.34	98.38	98.42	98.46	98.50	98.54	98.57
2.2	98.61	98.64	98.68	98.71	98.75	98.78	98.81	98.84	98.87	98.90
2.3	98.93	98.96	98.98	99.01	99.04	99.06	99.09	99.11	99.13	99.16
2.4	99.18	99.20	99.22	99.25	99.27	99.29	99.31	99.32	99.34	99.36
2.5	99.38	99.40	99.41	99.43	99.45	99.46	99.48	99.49	99.51	99.52
2.6	99.53	99.55	99.56	99.57	99.59	99.60	99.61	99.62	99.63	99.64
2.7	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72	99.73	99.74
2.8	99.74	99.75	99.76	99.77	99.77	99.78	99.79	99.79	99.80	99.81
2.9	99.81	99.82	99.82	99.83	99.84	99.84	99.85	99.85	99.86	99.86
3	99.87	99.87	99.87	99.88	99.88	99.89	99.89	99.89	99.90	99.90

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x) (%) για -3.09 ≤ Z ≤-0.10

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10
-2,9	0,19	0,18	0,18	0,17	0,16	0,16	0,15	0,15	0,14	0,14
-2,8	0,26	0,25	0,24	0,23	0,23	0,22	0,21	0,21	0,20	0,19
-2,7	0,35	0,34	0,33	0,32	0,31	0,30	0,29	0,28	0,27	0,26
-2,6	0,47	0,45	0,44	0,43	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36
-2,5	0,62	0,60	0,59	0,57	0,55	0,54	0,52	0,51	0,49	0,48
-2,4	0,82	0,80	0,78	0,75	0,73	0,71	0,69	0,68	0,66	0,64
-2,3	1,07	1,04	1,02	0,99	0,96	0,94	0,91	0,89	0,87	0,84
-2,2	1,39	1,36	1,32	1,29	1,25	1,22	1,19	1,16	1,13	1,10
-2,1	1,79	1,74	1,70	1,66	1,62	1,58	1,54	1,50	1,46	1,43
-2	2,28	2,22	2,17	2,12	2,07	2,02	1,97	1,92	1,88	1,83
-1,9	2,87	2,81	2,74	2,68	2,62	2,56	2,50	2,44	2,39	2,33
-1,8	3,59	3,51	3,44	3,36	3,29	3,22	3,14	3,07	3,01	2,94
-1,7	4,46	4,36	4,27	4,18	4,09	4,01	3,92	3,84	3,75	3,67
-1,6	5,48	5,37	5,26	5,16	5,05	4,95	4,85	4,75	4,65	4,55
-1,5	6,68	6,55	6,43	6,30	6,18	6,06	5,94	5,82	5,71	5,59
-1,4	8,08	7,93	7,78	7,64	7,49	7,35	7,21	7,08	6,94	6,81
-1,3	9,68	9,51	9,34	9,18	9,01	8,85	8,69	8,53	8,38	8,23
-1,2	11,51	11,31	11,12	10,93	10,75	10,56	10,38	10,20	10,03	9,85
-1,1	13,57	13,35	13,14	12,92	12,71	12,51	12,30	12,10	11,90	11,70
-1	15,87	15,62	15,39	15,15	14,92	14,69	14,46	14,23	14,01	13,79
-0,9	18,41	18,14	17,88	17,62	17,36	17,11	16,85	16,60	16,35	16,11
-0,8	21,19	20,90	20,61	20,33	20,05	19,77	19,49	19,22	18,94	18,67
-0,7	24,20	23,89	23,58	23,27	22,96	22,66	22,36	22,06	21,77	21,48
-0,6	27,43	27,09	26,76	26,43	26,11	25,78	25,46	25,14	24,83	24,51
-0,5	30,85	30,50	30,15	29,81	29,46	29,12	28,77	28,43	28,10	27,76
-0,4	34,46	34,09	33,72	33,36	33,00	32,64	32,28	31,92	31,56	31,21
-0,3	38,21	37,83	37,45	37,07	36,69	36,32	35,94	35,57	35,20	34,83
-0,2	42,07	41,68	41,29	40,90	40,52	40,13	39,74	39,36	38,97	38,59
-0,1	46,02	45,62	45,22	44,83	44,43	44,04	43,64	43,25	42,86	42,47

ΡΥΘΜΙΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

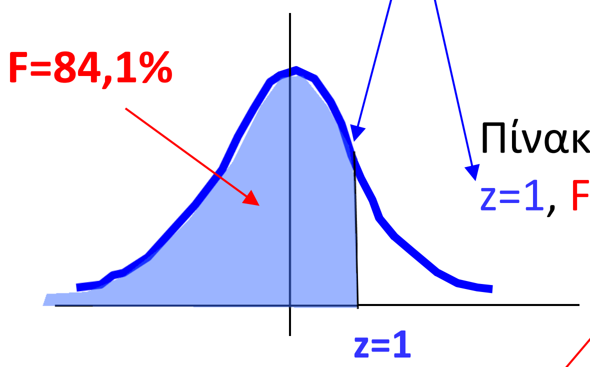
Κανονική κατανομή

Σε δείγμα τιμών Xi με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ η παράμετρος z=(Xi-μ)/σ ακολουθεί κανονική κατανομή με μ=0, σ=1 (τυπική κανονική κατανομή)

Δείγμα έχει μ=10, σ=5 και ακολουθεί κανονική κατανομή

Ποια είναι η περίοδος επαναφοράς *T* της τιμής *Xi*=15

z=(15-10)/5=1



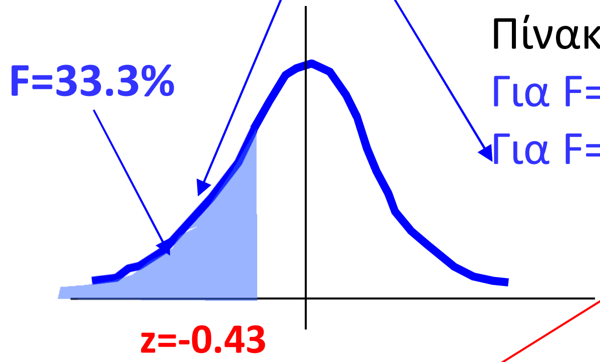
Πίνακας (0,1)

z=1, F=0,8413

***T*=1/(1-0,8413) ≈ 6 έτη**

Ποια είναι η τιμή *Xi* που αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς *T* = 1.5 έτη

F=1-(1/1.5)=0,333



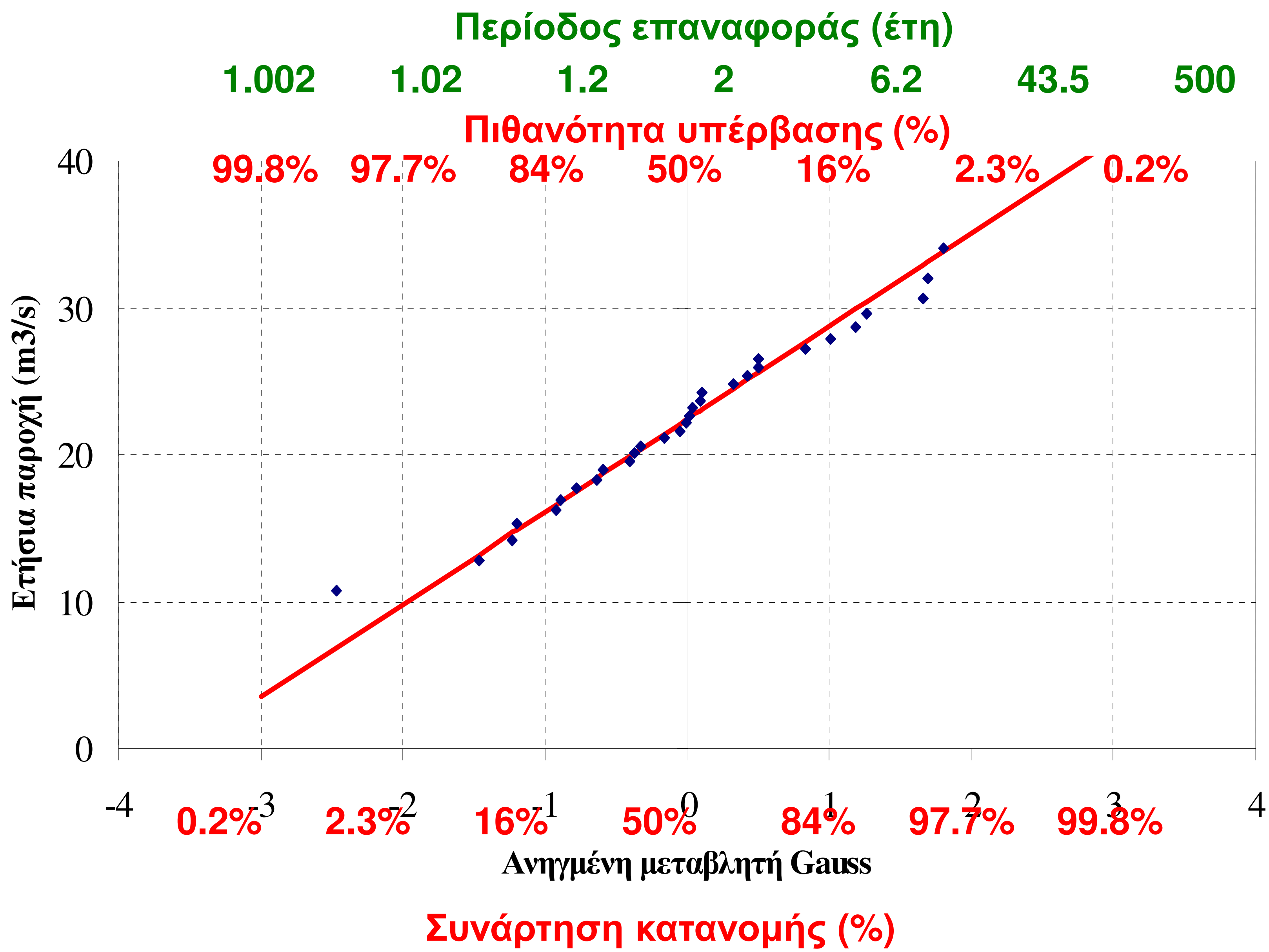
Πίνακας (0,1)

Για F=1-0.333 z=0.43

Για F=0.333 z=-0.43

(*Xi*-10)/5=-0.43 άρα *Xi*=7.85

ΧΑΡΤΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ



Βήματα ελέγχου x^2

1. Υπολογίζονται οι παράμετροι της κατανομής που πρόκειται να προσαρμοστεί (για την κανονική κατανομή r=2, μ και σ).
2. Χωρίζεται το δείγμα των στοιχείων σε k ισοπίθανες κλάσεις (κριτήριο συνήθως να έχω τουλάχιστον 5 στοιχεία σε κάθε κλάση ή $k \geq r+2$ ή και $k \leq N/5$).
3. Υπολογίζεται ο βαθμός ελευθερίας της κατανομής $v= k-r-1$.
4. Υπολογίζεται η Αθροιστική Πιθανότητα οι τιμές να βρίσκονται στην τρέχουσα και τις προηγούμενες κλάσεις.
5. Προσδιορίζεται το X που αντιστοιχεί στην αθροιστική πιθανότητα Z κάθε κλάσης και τα όρια των κλάσεων.
6. Υπολογίζεται η πιθανότητα (p_i) μίας τυχαίας τιμής της κατανομής x^2 να ανήκει σε κάθε κλάση (γι’ αυτό χρειάζεται τουλάχιστον μία παρατήρηση σε κάθε κλάση).
7. Υπολογίζεται ο αναμενόμενος (θεωρητικός) αριθμός παρατηρήσεων για κάθε κλάση με τη συγκεκριμένη κατανομή, $E_i= n*p_i$ (πολλαπλασιάζεται το p_i με το μέγεθος του δείγματος n).

Βήματα ελέγχου x^2

8. Γίνεται καταμέτρηση των πραγματικών παρατηρήσεων N_i από το δείγμα που πέφτουν μέσα σε κάθε κλάση.
9. Υπολογίζεται η στατιστική παράμετρος, D (όταν η τιμή είναι πολύ μεγάλη, αναμένεται ότι η κατανομή δεν προσαρμόζεται καλά στη x^2).

$$D = \Sigma[(N_i - E_i)^2 / E_i]$$

10. Συγκρίνεται η τιμή της παραμέτρου D με την τιμή που προκύπτει από τους πίνακες x^2 για το συγκεκριμένο ν και συγκεκριμένες πιθανότητες - επίπεδα σημαντικότητας α x^2_{α}.
11. Η μηδενική υπόθεση (ότι το δείγμα ακολουθεί τη θεωρητική κατανομή στην οποία προσαρμόστηκε (π.χ. την κανονική)) γίνεται δεκτή σε κάποιο επίπεδο σημαντικότητας α, αν $D < x^2_{\alpha}$. Συνήθη επίπεδα σημαντικότητας είναι τα 1%, 5% και 10%.

ΕΛΕΓΧΟΣ χ^2 για κανονική κατανομή

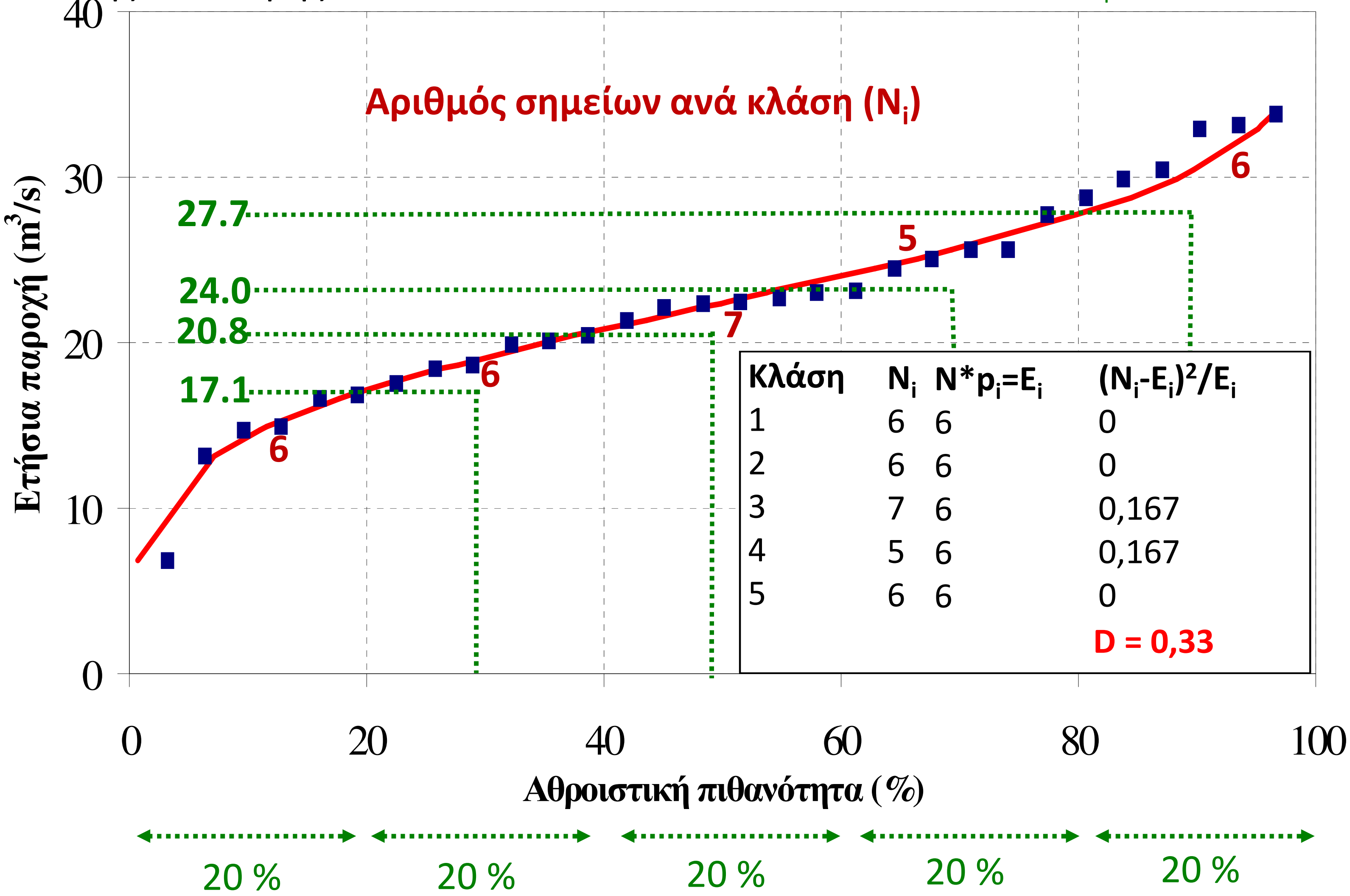
Αριθμός κλάσεων (k): **5**

Αριθμός παραμέτρων κανονικής κατανομής: **2**

Βαθμοί ελευθερίας κατανομής χ^2: **5-2-1**

Πιθανότητα κλάσης (p_i): 1/5=**20%**

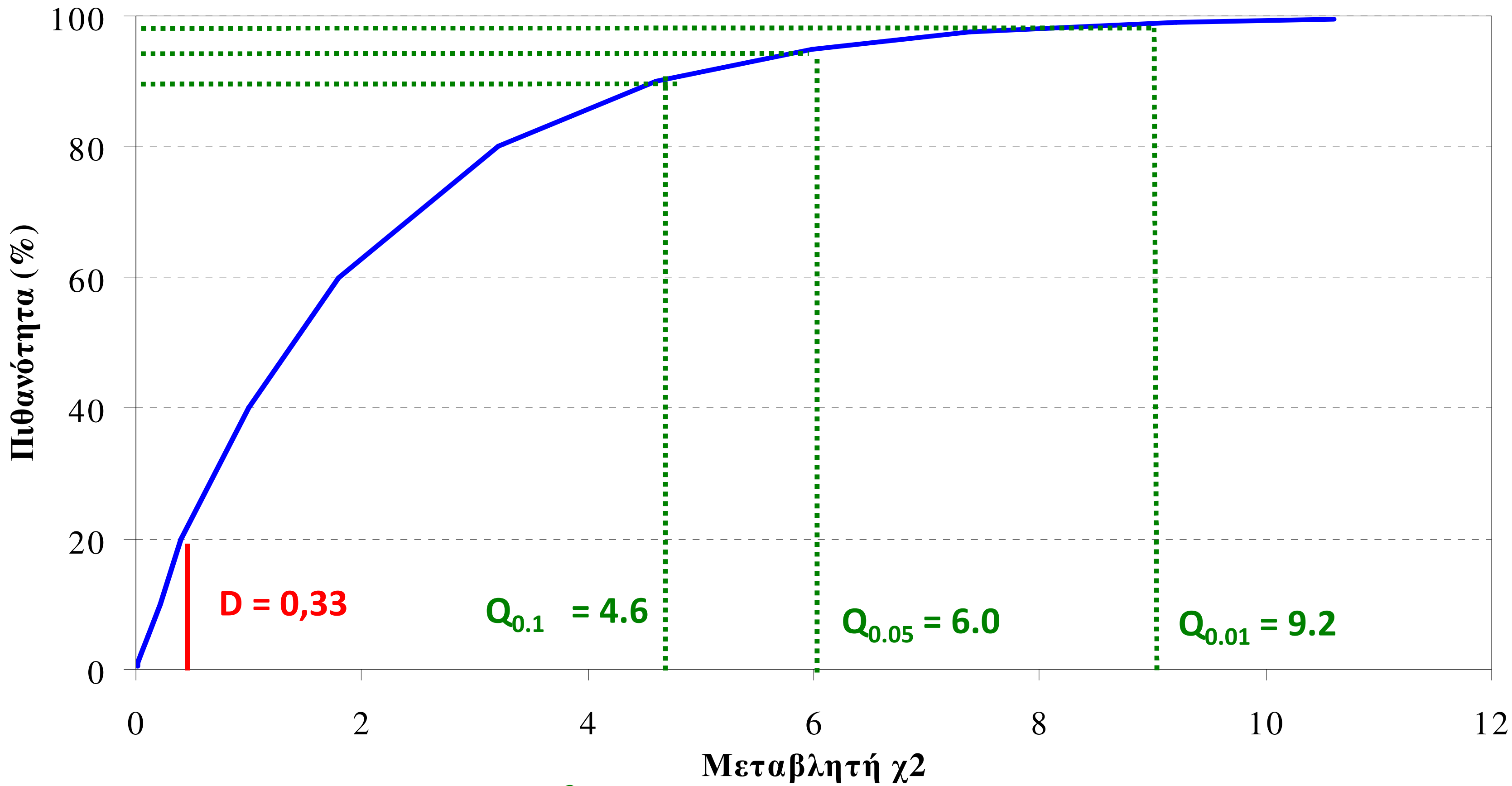
Θεωρητικός αριθμός σημείων κλάσης (N^*p_i): **30*0.2=6**



Κλάση	N_i	$N^*p_i=E_i$	$(N_i-E_i)^2/E_i$
1	6	6	0
2	6	6	0
3	7	6	0,167
4	5	6	0,167
5	6	6	0
			D = 0,33

ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

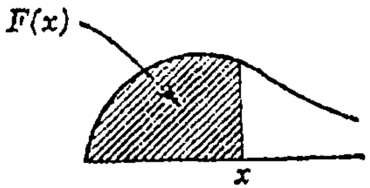
1. Η μεταβλητή $\boldsymbol{\chi^2}$ ακολουθεί την κατανομή χ^2 με 2 βαθμούς ελευθερίας
2. Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζεται η στατιστική παράμετρος ***D***
3. Η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ‘**το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή**’ γίνεται δεκτή σε κάποιο επίπεδο σημαντικότητας ***α*** αν $\boldsymbol{D<\chi^2_\alpha}$



Το ***D (0.33)*** είναι μικρότερο από το $\boldsymbol{\chi^2_\alpha}$ για τα συνήθη επίπεδα σημαντικότητας **1%** (*9.2*), **5%** (*6.0*), **10%** (*4.6*). Άρα η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ‘**το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή**’ γίνεται δεκτή στα συνήθη επίπεδα σημαντικότητας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2, $F(x) \equiv F(\chi^2|\nu)$
(τιμές του χ^2 για δοθείσες τιμές των $F(x)$ και ν)



Παράδειγμα: Για 5 βαθμούς ελευθερίας και $F(x) = 0.95 \longrightarrow \chi^2 = 11.07$

F(x)	Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0.001	0.00	0.00	0.02	0.09	0.21	0.38	0.60	0.86	1.15	1.48
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.010	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.050	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.100	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87
0.250	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74
0.500	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34
0.750	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55
0.900	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99
0.950	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.990	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19
0.999	10.83	13.82	16.27	18.47	20.52	22.46	24.32	26.13	27.88	29.59

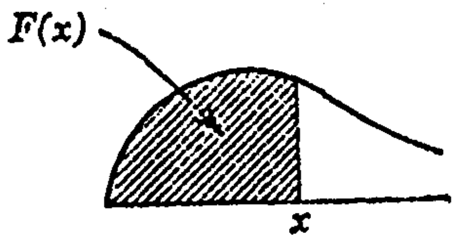
ΠΙΝΑΚΑΣ

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ χ^2, $F(x) \equiv F(\chi^2|\nu)$

(τιμές του χ^2 για δοθείσες τιμές των $F(x)$ και ν)

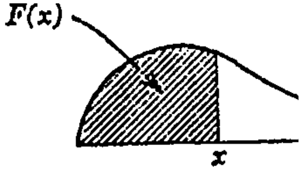
F(x)	Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.001	1.83	2.21	2.62	3.04	3.48	3.94	4.42	4.90	5.41	5.92
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.010	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.050	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.100	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44
0.250	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45
0.500	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34
0.750	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83
0.900	17.28	18.55	19.81	21.06	22.31	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41
0.950	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.990	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00
0.999	31.26	32.91	34.53	36.12	37.70	39.25	40.79	42.31	43.82	45.32

ΠΙΝΑΚΑΣ (συνέχεια)



F(x)	Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.001	6.4	7.0	7.5	8.1	8.7	9.2	9.8	10.4	11.0	11.6
0.005	8.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.2	11.8	12.5	13.1	13.8
0.010	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5	12.2	12.9	13.6	14.3	15.0
0.025	10.3	11.0	11.7	12.4	13.1	13.8	14.6	15.3	16.0	16.8
0.050	11.6	12.3	13.1	13.8	14.6	15.4	16.2	16.9	17.7	18.5
0.100	13.2	14.0	14.8	15.7	16.5	17.3	18.1	18.9	19.8	20.6
0.250	16.3	17.2	18.1	19.0	19.9	20.8	21.7	22.7	23.6	24.5
0.500	20.3	21.3	22.3	23.3	24.3	25.3	26.3	27.3	28.3	29.3
0.750	24.9	26.0	27.1	28.2	29.3	30.4	31.5	32.6	33.7	34.8
0.900	29.6	30.8	32.0	33.2	34.4	35.6	36.7	37.9	39.1	40.3
0.950	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.975	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.990	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9
0.995	41.4	42.8	44.2	45.6	46.9	48.3	49.6	51.0	52.3	53.7
0.999	46.8	48.3	49.7	51.2	52.6	54.1	55.5	56.9	58.3	59.7

ΠΙΝΑΚΑΣ (συνέχεια)



F(x)	Αριθμός βαθμών ελευθερίας ν							
	40	50	60	70	80	90	100	> 100 (προσέγγιση)
0.001	17.9	24.7	31.7	39.0	46.5	54.2	61.9	$(h-3.09)^2 / 2$
0.005	20.7	28.0	35.5	43.3	51.2	59.2	67.3	$(h-2.58)^2 / 2$
0.010	22.2	29.7	37.5	45.4	53.5	61.8	70.1	$(h-2.33)^2 / 2$
0.025	24.4	32.4	40.5	48.8	57.2	65.6	74.2	$(h-1.96)^2 / 2$
0.050	26.5	34.8	43.2	51.7	60.4	69.1	77.9	$(h-1.64)^2 / 2$
0.100	29.1	37.7	46.5	55.3	64.3	73.3	82.4	$(h-1.28)^2 / 2$
0.250	33.7	42.9	52.3	61.7	71.1	80.6	90.1	$(h-0.67)^2 / 2$
0.500	39.3	49.3	59.3	69.3	79.3	89.3	99.3	$h^2 / 2$
0.750	45.6	56.3	67.0	77.6	88.1	98.6	109.1	$(h+0.67)^2 / 2$
0.900	51.8	63.2	74.4	85.5	96.6	107.6	118.5	$(h+1.28)^2 / 2$
0.950	55.8	67.5	79.1	90.5	101.9	113.1	124.3	$(h+1.64)^2 / 2$
0.975	59.3	71.4	83.3	95.0	106.6	118.1	129.6	$(h+1.96)^2 / 2$
0.990	63.7	76.2	88.4	100.4	112.3	124.1	135.8	$(h+2.33)^2 / 2$
0.995	66.8	79.5	92.0	104.2	116.3	128.3	140.2	$(h+2.58)^2 / 2$
0.999	73.4	86.7	99.6	112.3	124.8	137.2	149.4	$(h+3.09)^2 / 2$

Στην τελευταία στήλη $h = \sqrt{2m-1}$, όπου m είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας.

ΕΛΕΓΧΟΣ Kolmogorov-Smirnov

Βασίζεται στη διαφορά μεταξύ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F_x(x)$ και του παρατηρημένου αθροιστικού ιστογράμματος F*(x)

$F^*(X^{(i)})=i/n$ όπου είναι η ***i*** μεγαλύτερη παρατηρημένη τιμή σε δείγμα με μέγεθος ***n***

Από τα δεδομένα του δείγματος υπολογίζεται η στατιστική παράμετρος ***D***

$$D=\max_{i=1}^{n}\left[\left|F^*(X^{(i)})-Fx(X^{(i)})\right|\right]=\max_{i=1}^{n}\left[\left|\frac{i}{n}-Fx(X^{(i)})\right|\right]$$

Η μηδενική υπόθεση (H_0) ότι ‘**το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή**’ γίνεται δεκτή σε κάποιο επίπεδο σημαντικότητας ***α*** αν $D<D_c$

ΤΙΜΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ D_c

Μέγεθος δείγματος	α=0.10	α=0.05	α=0.01
5	0.51	0.56	0.67
10	0.37	0.41	0.49
15	0.30	0.34	0.40
20	0.26	0.29	0.35
25	0.24	0.26	0.32
30	0.22	0.24	0.29
40	0.19	0.21	0.25
>40	$1.22/n^{1/2}$	$1.36/n^{1/2}$	$1.63/n^{1/2}$

ΠΙΝΑΚΑΣ

ΕΛΕΓΧΟΣ KOLMOGOROV – SMIRNOV

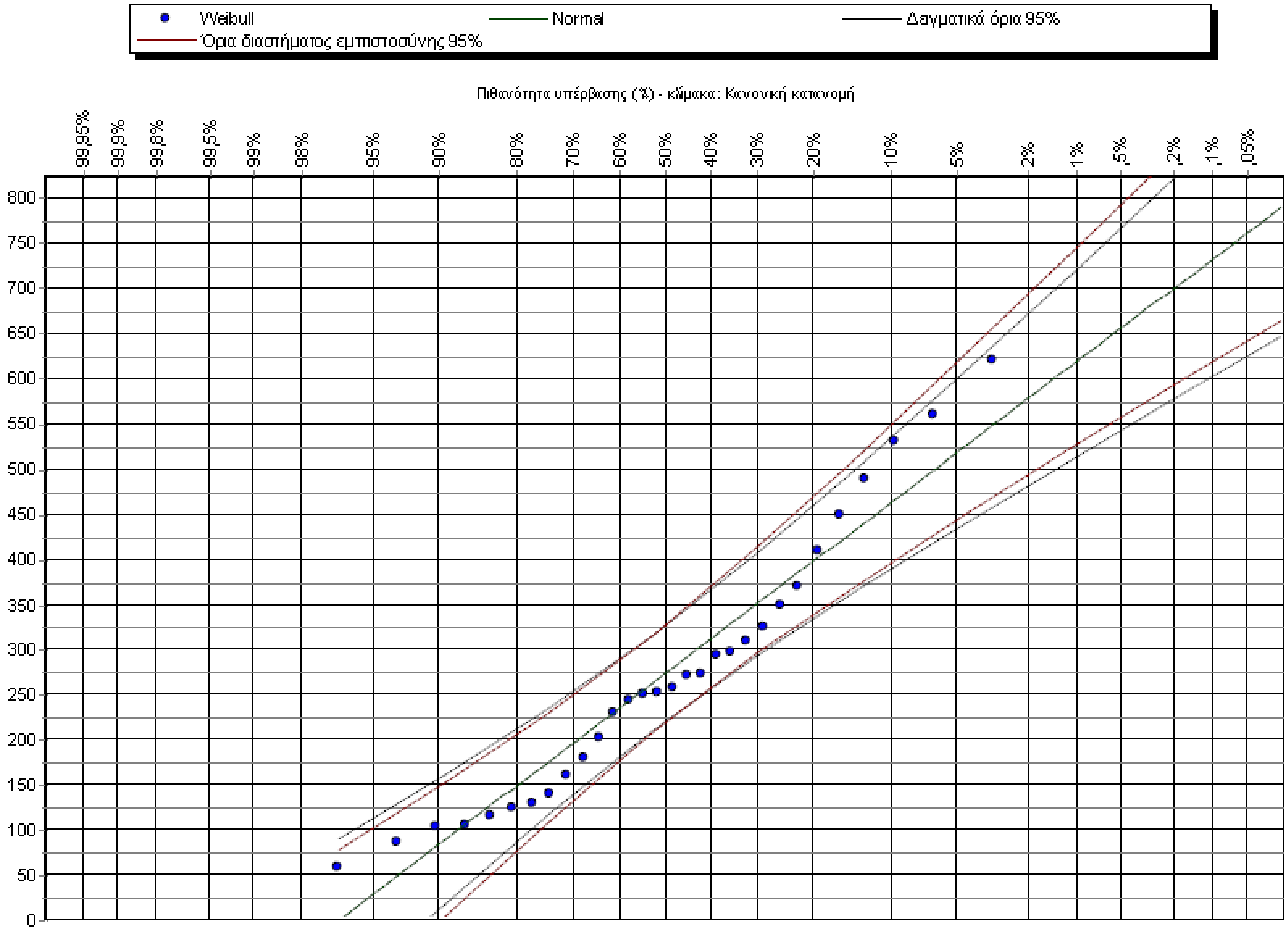
[Τιμές της παραμέτρου

: P(D ≤ c) 1 - α]*

Μέγεθος δείγματος n	Επίπεδο σημαντικότητας α				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.829
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.734
5	0.446	0.474	0.510	0.563	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.332	0.342	0.368	0.409	0.486
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.391
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.380
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.370
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.361
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.352
25	0.210	0.220	0.240	0.264	0.320
30	0.190	0.200	0.220	0.242	0.290
35	0.180	0.190	0.210	0.230	0.270
40				0.210	0.250
50				0.190	0.230
60				0.170	0.210
70				0.160	0.190
80				0.150	0.180
90				0.140	
100				0.140	
Ασυμπτωτικός τύπος για μεγάλο n	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

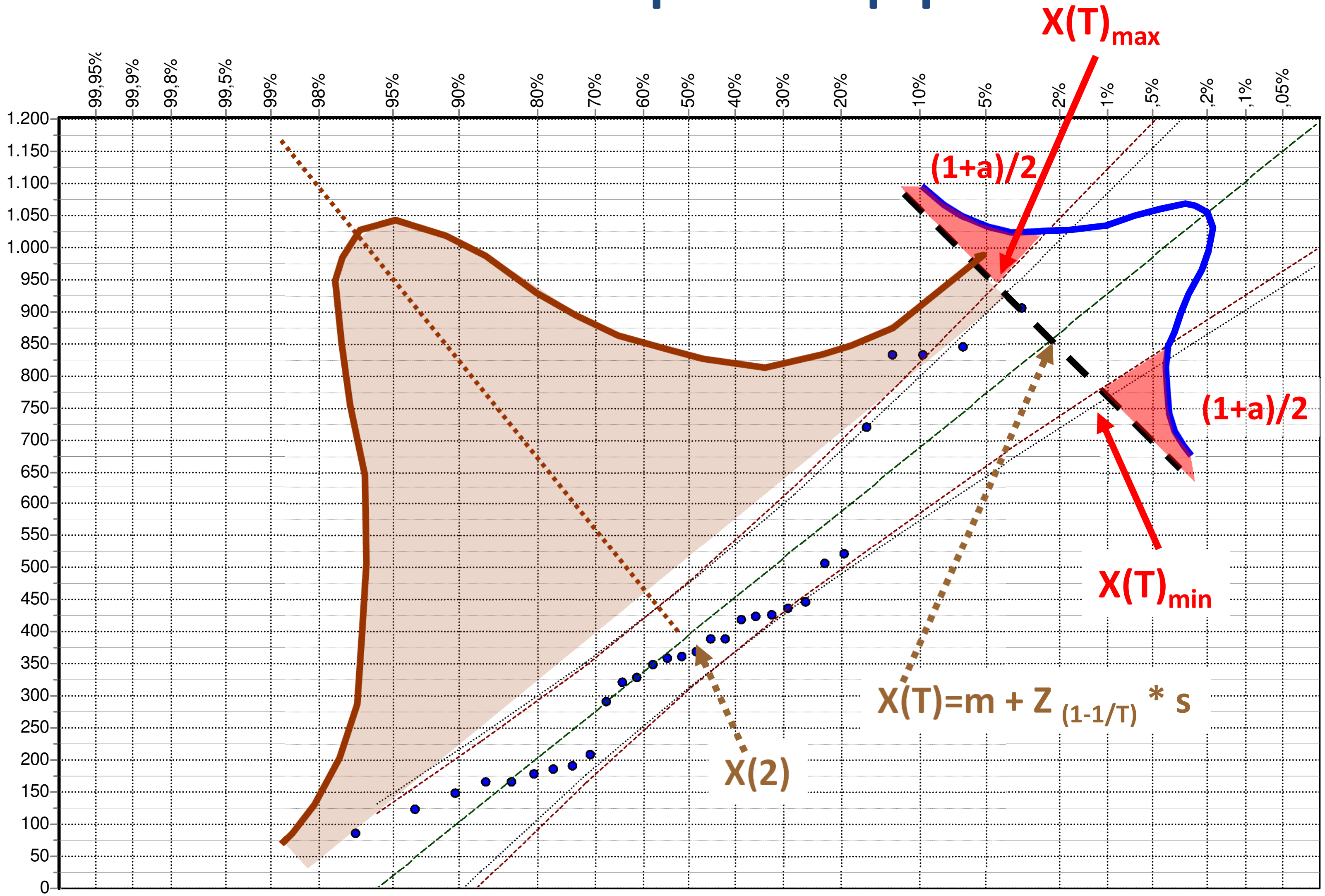
(*) Birnbaum, Z. W. (1952). Journal of the American Statistical Association, 47: 425-441.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Προσαρμογή κανονικής κατανομής



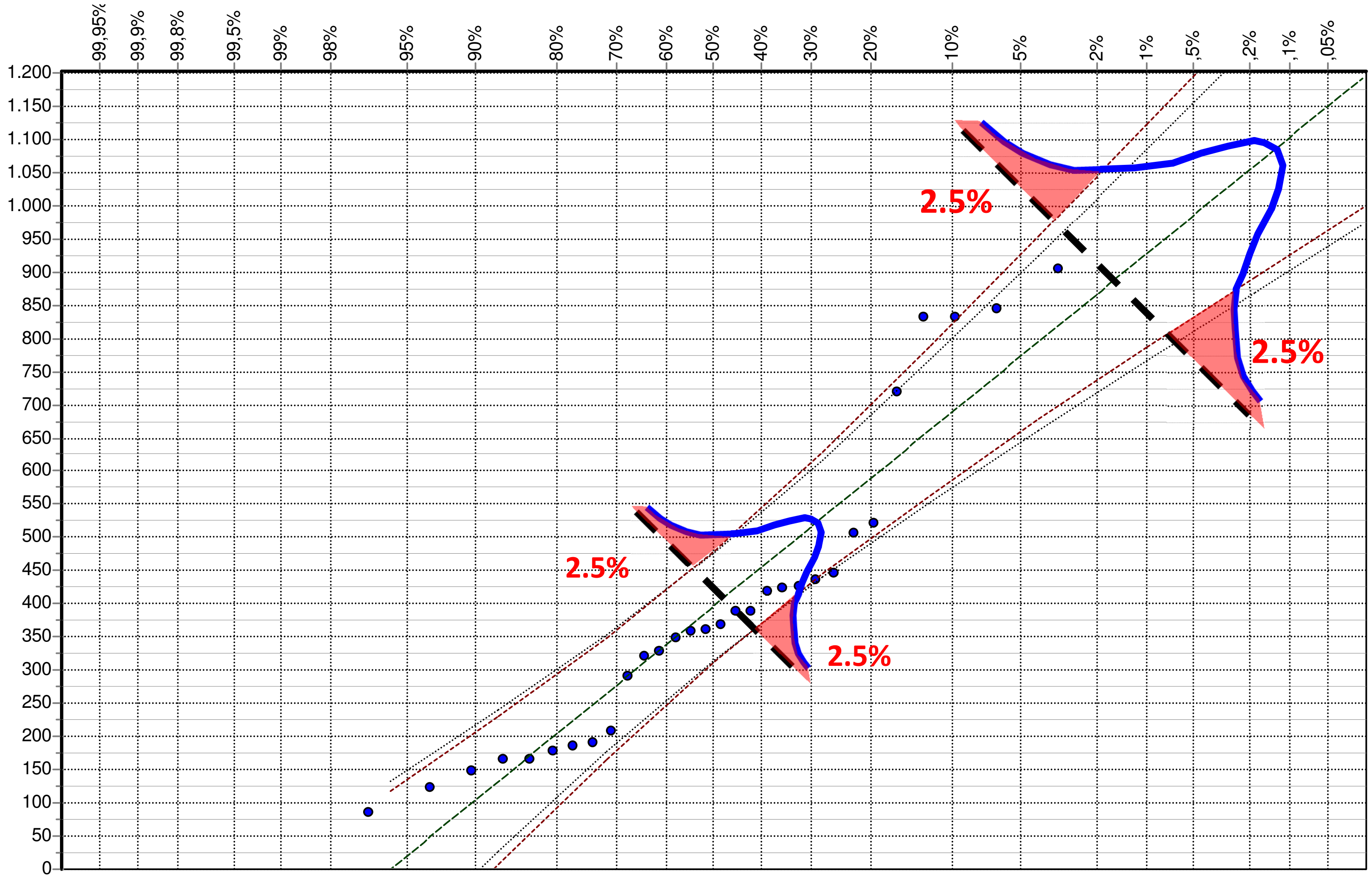
ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Κανονική κατανομή



ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ 95%

Κανονική κατανομή



ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ *α%*

$$x(\mathrm{T})_{\max} = x(\mathrm{T}) + z_{(1+\alpha)/2} S_T$$
$$x(\mathrm{T})_{\min} = x(\mathrm{T}) - z_{(1+\alpha)/2} S_T$$

$Z_{(1+\alpha)/2}$ η μεταβλητή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής όταν το επίπεδο είναι ***α%***

S_T η τυπική απόκλιση του x_T

$$S_T = \delta \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\mathrm{N}}}$$

$\hat{\sigma}$ Η τυπική απόκλιση του δείγματος

N Ο αριθμός των N παρατηρήσεων του δείγματος

Κανονική κατανομή

$$\delta = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{K}(T)^2}{2}}$$

$$K(T) = Z_{(1-1/T)}$$

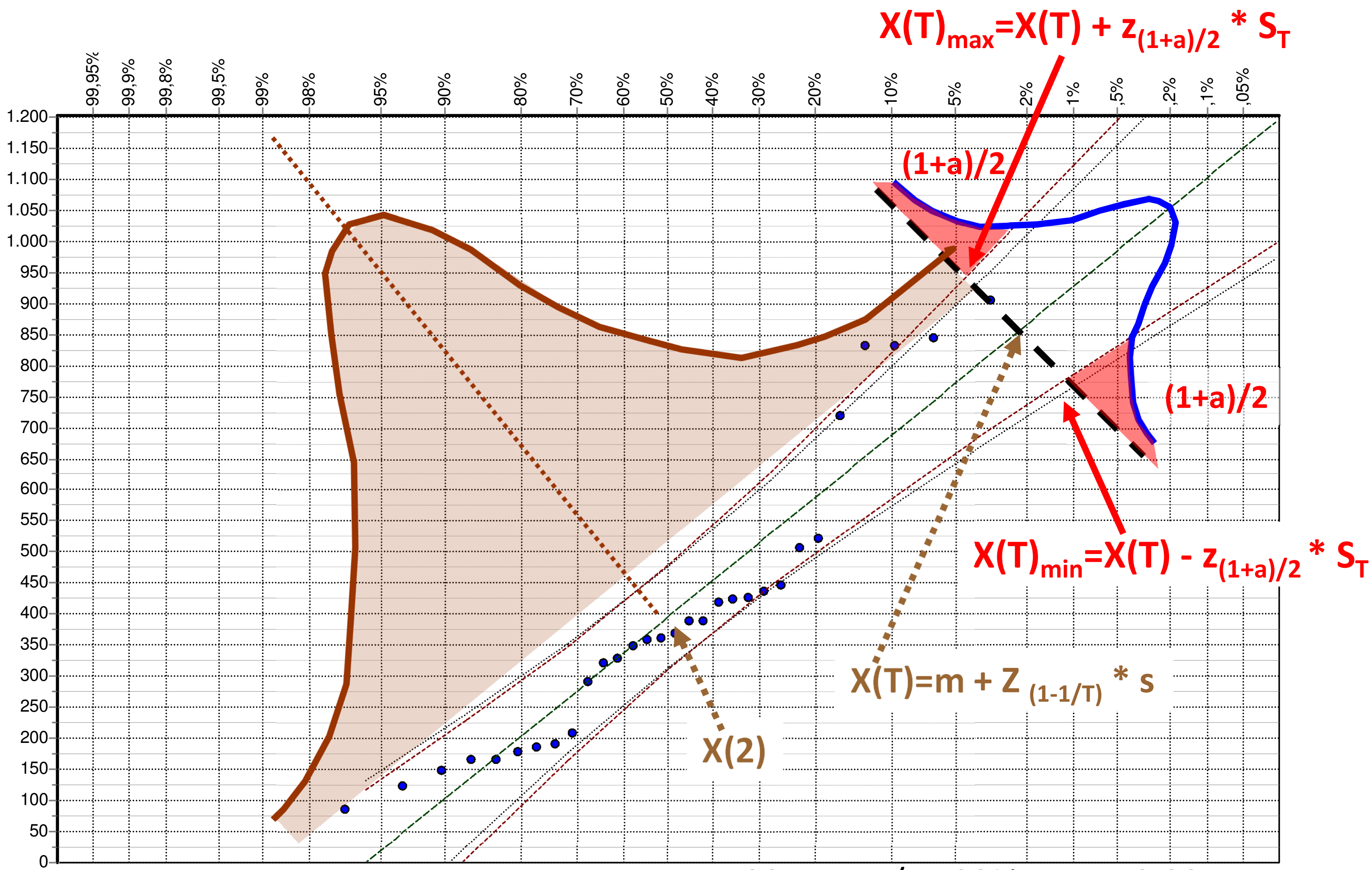
Κατανομή Gumbel μεγίστων

$$\delta = \sqrt{1 + 1.1396\mathrm{K}(T) + 1.1\,\mathrm{K}(T)^2}$$

$$k(T) = -0.45 - 0.7797 * \ln(-\ln(1 - 1/T))$$

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Κανονική κατανομή



T=100, 1-1/T =99%, $z_{99\%}$ =2.33

a=95% (1+a)/2=97.5% $z_{97.5\%}$ =1.96

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi S_y}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m_y}{S_y}\right)^2}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{s\sqrt{2\pi S_y}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - m_y}{S_y}\right)^2}$$

Εκτίμηση παραμέτρων (μέθοδος ροπών)

$$S_{y'} = \sqrt{\ln(1 + S_x^2 / m_x^{\ 2})}$$

$$m_{y'} = \ln m_x - S_y^2 / 2$$

Χειρισμός της κατανομής βάσει της μεθόδου max πιθανοφάνειας

$$z = \frac{\ln x - m_y}{S_y}$$

$$\ln x = Z * S_y + m_y$$

$$x = e^{Z*S_y + m_y}$$

Z η μεταβλητή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

Βήματα Προσαρμογής Λογαριθμοκανονικής Κατανομής

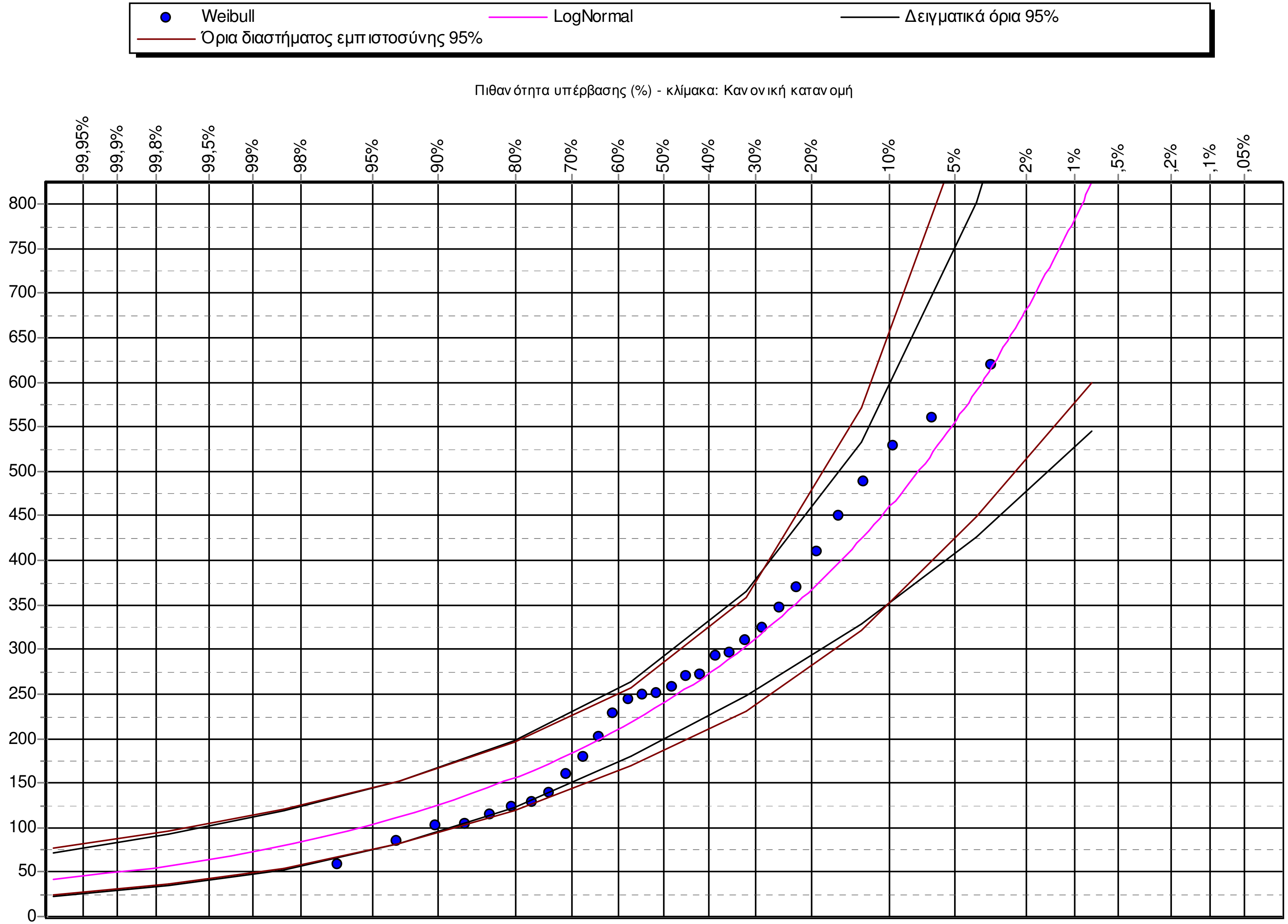
1. Εύρεση στατιστικών χαρακτηριστικών λογαρίθμων δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλιση).
2. Κατάταξη λογαρίθμων δείγματος σε φθίνουσα σειρά και αρίθμηση των παρατηρήσεων.
3. Προσδιορισμός Περιόδου Επαναφοράς από τον τύπο του Weibull T=(N+1)/m.
4. Υπολογισμός πιθανότητας μη υπέρβασης F = 1-1/T (εμπειρική).
5. Εύρεση τυποποιημένης μεταβλητής Z από πίνακα για κάθε F.
6. Εκτίμηση τιμών από τα Z.

$$x = e^{Z*S_y + m_y}$$

7. Σχεδίαση θεωρητικής κατανομής και δείγματος με τα Z στον οριζόντιο άξονα.
8. Έλεγχος x^2 ή/και K-S για την καταλληλότητα της κατανομής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή λογαριθμοκανονικής κατανομής



ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ (EXTREME VALUE DISTRIBUTIONS, EV)

- **ΤΥΠΟΣ Ι: Αρχική κατανομή χωρίς όριο προς την κατεύθυνση της ακραίας τιμής**
  - **(EV I ή Gumbel, για μέγιστα και ελάχιστα)**
- **ΤΥΠΟΣ ΙΙ: Αρχική κατανομή χωρίς όριο προς τις δύο κατευθύνσεις**
  - **(EV II π.χ. Cauchy δεν εφαρμόζεται στην υδρολογία)**
- **ΤΥΠΟΣ ΙΙΙ: Αρχική κατανομή με όριο προς την κατεύθυνση της ακραίας τιμής**
  - **(EV III ή κατανομές Pearson)**

ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Παράμετροι (μέθοδος ροπών)

$c = \bar{x} - 0{,}45 S_x$ παράμετρος θέσης

$a = 1{,}282 / S_x$ παράμετρος κλίμακας

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = a e^{-a(x-c) - e^{-a(x-c)}}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = e^{-e^{-a(x-c)}}$$

$$x(T) = c - \frac{\ln(-\ln F_x)}{a} = c - \frac{\ln(-\ln(1-1/T))}{a}$$

$$x(T) = \bar{x} - S_x \{0{,}45 + 0{,}7797 \ln[\ln(T) - \ln(T-1)]\}$$

Όρια εμπιστοσύνης

$$x(T) = \bar{x} + k(T) * S_x$$

$$k(T) = -0.45 - 0.7797 * \ln(-\ln(1-1/T))$$

$$x(T)_{\max,\min} = x(T) \pm Z_{(1+a)/2} * \underbrace{\frac{S_x}{\sqrt{n}} \underbrace{\sqrt{1 + 1.1396 * k(T) + 1.1 * k(T)^2}}_{\delta}}_{S_T}$$

Βήματα Προσαρμογής Κατανομής EVI (Gumbel) (μέθοδος ροπών)

1. Εύρεση στατιστικών χαρακτηριστικών δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλιση).
2. Υπολογισμός παραμέτρων α και c. $a = 1{,}282 / S_x$ $\quad c = \overline{x} - 0{,}45 S_x$
3. Κατάταξη δείγματος σε φθίνουσα σειρά και αρίθμηση των παρατηρήσεων.
4. Προσδιορισμός Περιόδου Επαναφοράς από τον τύπο του Weibull T=(N+1)/m.
5. Υπολογισμός πιθανότητας μη υπέρβασης F = 1-1/T (εμπειρική).
6. Εύρεση για κάθε F=1-1/T της τιμής του x απευθείας από τον τύπο της θεωρητικής κατανομής Gumbel.

$$x = \overline{x} - S_x\{0{,}45 + 0{,}7797 \ln[\ln(T) - \ln(T-1)]\}$$

7. Σχεδίαση θεωρητικής κατανομής και δείγματος με την ποσότητα –ln(lnT-ln(T-1)).
8. Έλεγχος x^2 ή/και K-S για την καταλληλότητα της κατανομής.

ΟΡΙΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ EVI (Gumbel) (μέθοδος ροπών)

1. Επιλέγεται το επίπεδο σημαντικότητας (significance level, α) (συνήθως α=5%)
2. Βρίσκονται η μεταβλητή $Z_{1-\alpha/2}$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής για αθροιστική πιθανότητα μεταξύ των ορίων 1-α.
3. Υπολογίζεται η τυπική απόκλιση των τιμών της κατανομής EVI (Gumbel) από τον τύπο:

$$S_T = \delta \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

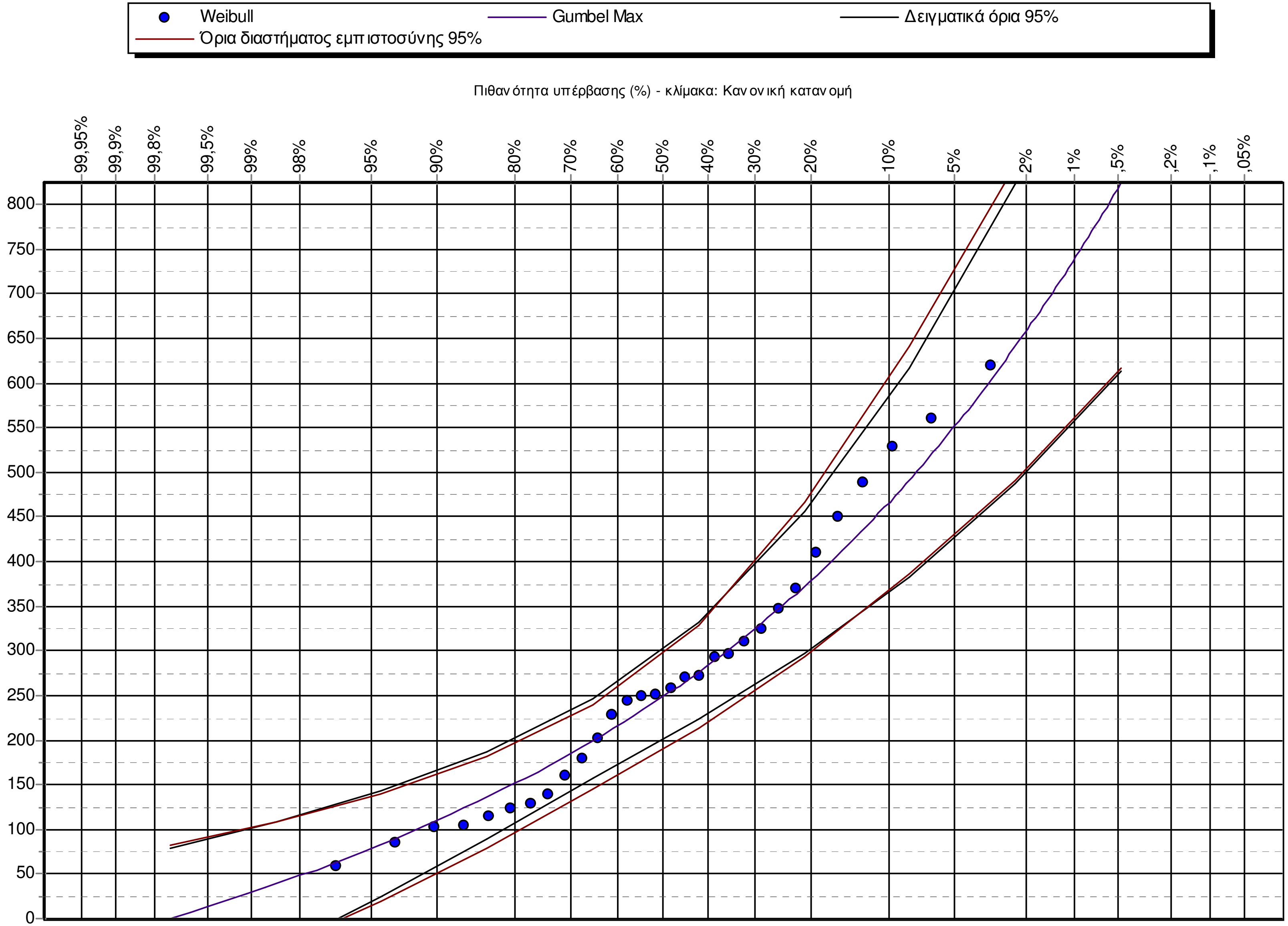
όπου: $\hat{\sigma}$ είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος μεγέθους N παρατηρήσεων και

$$\delta = \sqrt{1 + 1.3 \cdot K_T + 1.1 \cdot K_T^{\ 2}}$$

4. Υπολογίζονται τα όρια εμπιστοσύνης (Confidence Limits) της Θεωρητικής κατανομής Gumbel
   - Άνω Όριο : $$X_{T,\max} = X_T + Z_{1-\alpha/2} \cdot S_T$$
   - Κάτω Όριο: $$X_{T,\min} = X_T - Z_{1-\alpha/2} \cdot S_T$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής EVI ή Gumbel μεγίστων



ΕΛΕΓΧΟΣ χ^2 για κατανομή EVI (Gumbel)

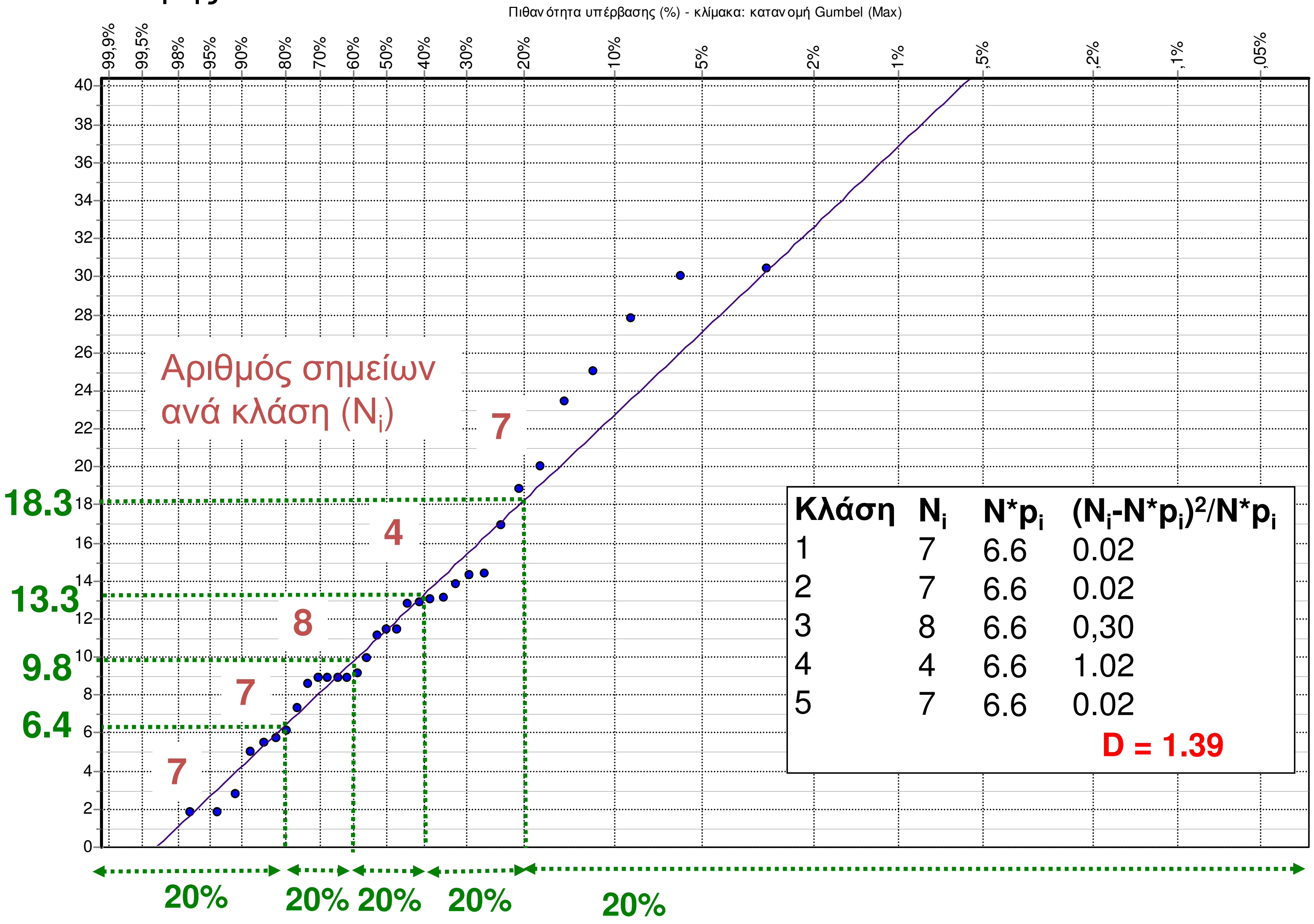
Αριθμός κλάσεων (k): **5**

Αριθμός παραμέτρων κατανομής Gumbel: **2**

Βαθμοί ελευθερίας κατανομής χ^2: **5-2-1**

Πιθανότητα κλάσης (p_i): 1/5=**20%**

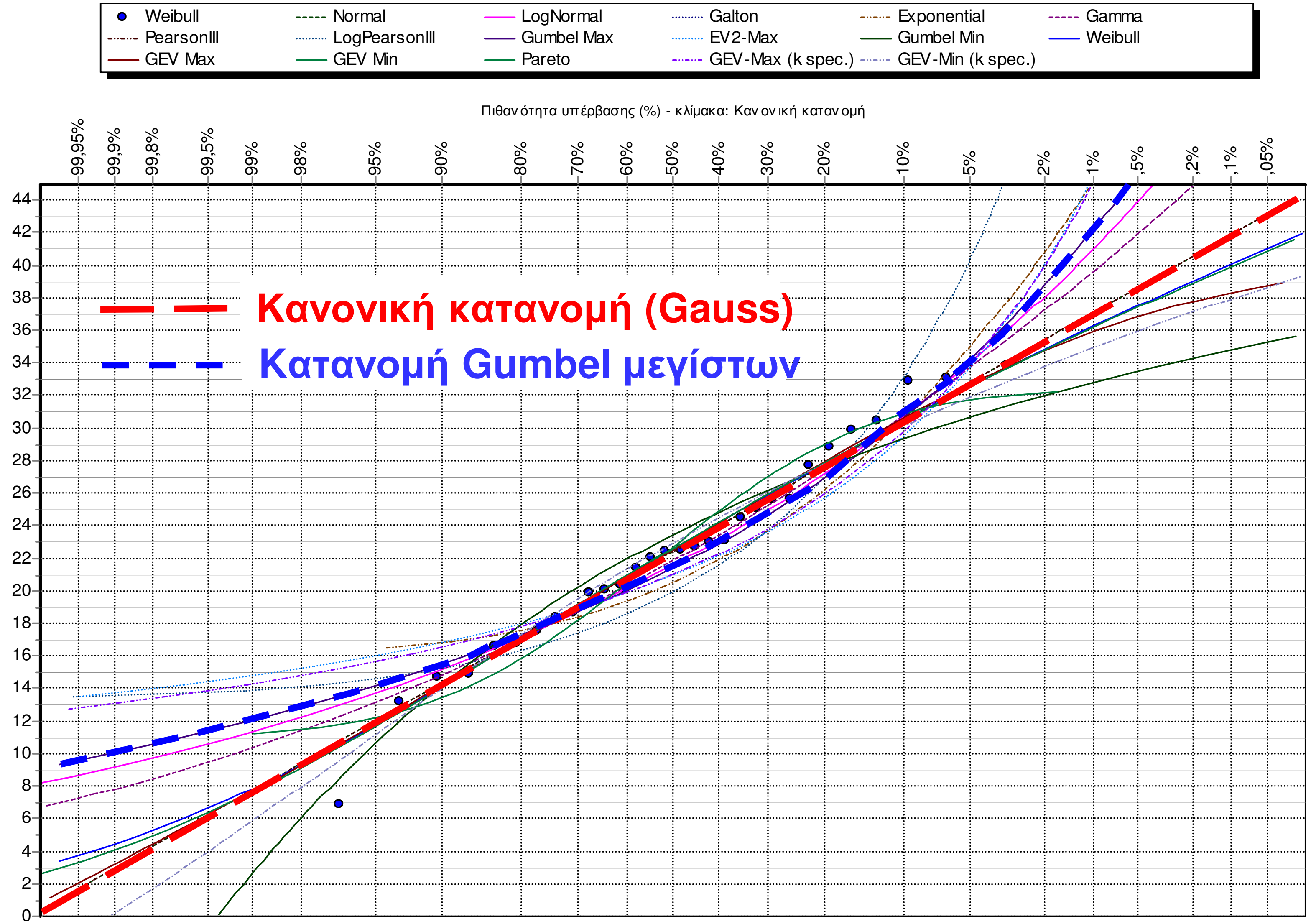
Θεωρητικός αριθμός σημείων κλάσης ($N*p_i$): **33*0.2=6.6**



Κλάση	N_i	$N*p_i$	$(N_i-N*p_i)^2/N*p_i$
1	7	6.6	0.02
2	7	6.6	0.02
3	8	6.6	0,30
4	4	6.6	1.02
5	7	6.6	0.02
			D = 1.39

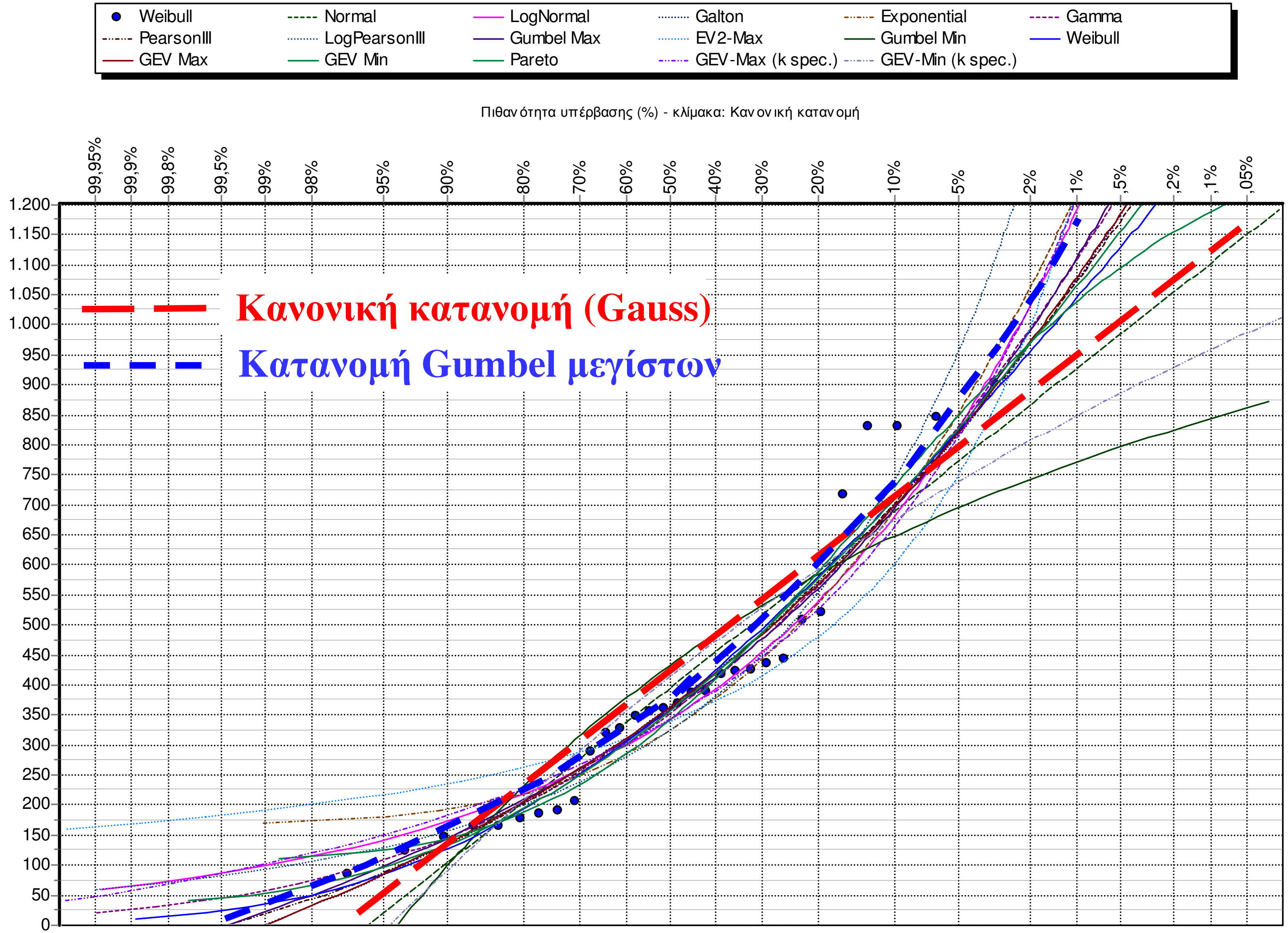
ΜΕΣΕΣ ΕΤΗΣΙΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ

Προσαρμογή 16 θεωρητικών κατανομών



ΜΕΓΙΣΤΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ

Προσαρμογή 16 θεωρητικών κατανομών



ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΜΕΓΙΣΤΩΝ

$$x_u = c - \frac{\ln(-\ln u)}{\lambda}$$

Εκτίμηση Παραμέτρων

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{6}\, s_X} = \frac{1}{0.78\, s_X}$$

$$c = \overline{x} - \frac{\gamma}{\lambda} = \overline{x} - \frac{0.577}{\lambda} = \overline{x} - 0.45\, s_X$$

$$\lambda = \frac{\dfrac{1}{0.78} - \dfrac{1.57}{(n+1)^{0.65}}}{s_X}$$

$$c = \overline{x} - \frac{0.577 - \dfrac{0.53}{(n+2.5)^{0.74}}}{\lambda}$$

(Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

Τυπολόγιο της κατανομής Gumbel μεγίστων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda(x-c)-\mathrm{e}^{-\lambda(x-c)}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda(x-c)}}$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	c: παράμετρος θέσης $\lambda > 0$: παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$\mu_X = c + \frac{\gamma}{\lambda} = c + \frac{0.5772}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6\lambda^2} = \frac{1.645}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = \frac{2.404}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{14.6}{\lambda^4}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = 1.1396$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 5.4$
Πιθανότερη τιμή	$x_\mathrm{p} = c$
Διάμεσος τιμή	$x_{0.5} = c - \frac{\ln(-\ln 0.5)}{\lambda} = c + \frac{0.3665}{\lambda}$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΜΕΓΙΣΤΩΝ

Συντελεστής συχνότητας

$$K_T = -0{,}7797\left[0{,}5772 + \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)\right]$$

ή

$$K_T = 0{,}7797\,y - 0{,}45$$

$$F(y) = \exp(-\exp(-y))$$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

Παράμετροι (μέθοδος ροπών)

$$c = \bar{x} + 0{,}45 S_x$$

$$a = 1{,}282 / S_x$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = a e^{a(x-c) - e^{a(x-c)}}$$

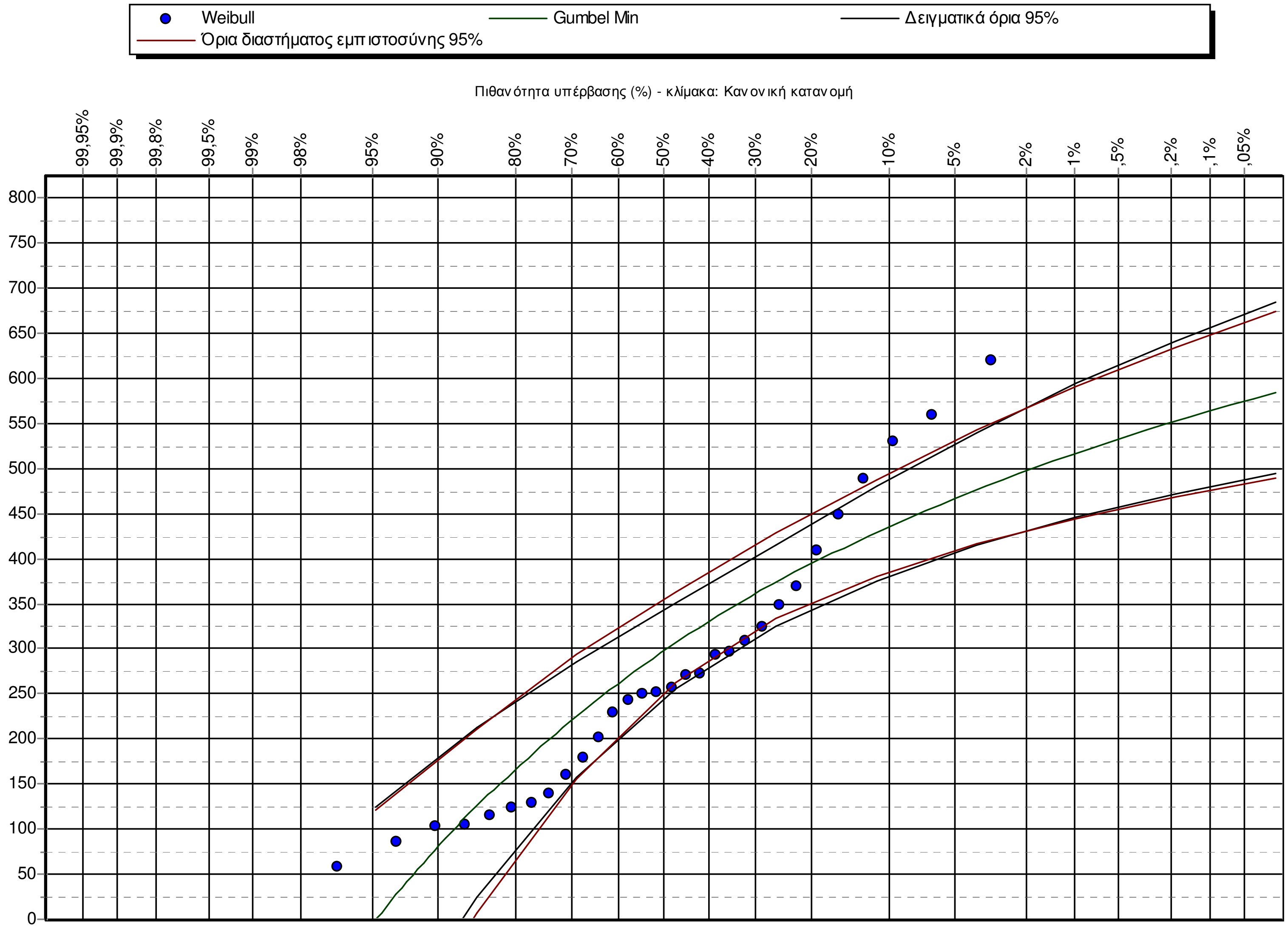
Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = 1 - e^{-e^{a(x-c)}}$$

$$x(T) = c + \frac{\ln(-\ln(1 - F_x))}{a} = c + \frac{\ln(-\ln(1/T))}{a}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής EVI (Gumbel) ελαχίστων



ΚΑΤΑΝΟΜΗ EVI (GUMBEL) ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

$$x_u = c + \frac{\ln[-\ln(1-u)]}{\lambda}$$

Εκτίμηση Παραμέτρων

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{6}\, s_X} = \frac{1}{0.78\, s_X}$$

$$c = \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda} = \bar{x} + \frac{0.577}{\lambda} = \bar{x} + 0.45\, s_X$$

(Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

Τυπολόγιο της κατανομής Gumbel ελαχίστων.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x) = \lambda\, e^{\lambda(x-c) - e^{\lambda(x-c)}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x) = 1 - e^{-e^{\lambda(x-c)}}$
Τιμές μεταβλητής	$-\infty < x < \infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	c: παράμετρος θέσης $\lambda > 0$: παράμετρος κλίμακας
Μέση τιμή	$\mu_X = c - \frac{\gamma}{\lambda} = c - \frac{0.5772}{\lambda}$
Διασπορά	$\sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6\lambda^2} = \frac{1.645}{\lambda^2}$
Τρίτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(3)} = -\frac{2.404}{\lambda^3}$
Τέταρτη κεντρική ροπή	$\mu_X^{(4)} = \frac{14.6}{\lambda^4}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$C_{s_X} = -1.1396$
Συντελεστής κύρτωσης	$C_{k_X} = 5.4$
Πιθανότερη τιμή	$x_p = c$
Διάμεσος τιμή	$x_{0.5} = c + \frac{\ln(-\ln 0.5)}{\lambda} = c - \frac{0.3665}{\lambda}$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ WEIBULL

Παράμετροι (μέθοδος ροπών)

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2}+1=\frac{\Gamma(1+\frac{2}{k})}{\left[\Gamma(1+\frac{1}{k})\right]^2}$$

$$c=\frac{\mu}{\Gamma(1+\frac{1}{k})}$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x)=\frac{k}{c}*(\frac{x}{c})^{k-1}e^{(x/c)^k}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x)=1-e^{-(x/c)^k}$$

$$x(T)=c*\left[-\ln(1-F_x)\right]^{1/k}=c*\left[-\ln(1/T)\right]^{1/k}$$

μ*, *σ μέση τιμή και τυπική απόκλιση του δείγματος
c*, *κ παράμετροι της κατανομής Weibull
Γ(*x*) συνάρτηση Γάμμα

KATANOMH WEIBULL

Τυπολόγιο της κατανομής Weibull (δύο παραμέτρων).

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	$f_X(x)=\frac{\kappa}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\kappa-1} \mathrm{e}^{-(x/\alpha)^{\kappa}}$
Συνάρτηση κατανομής	$F_X(x)=1-e^{-(x/\alpha)^{\kappa}}$
Τιμές μεταβλητής	$0<x<\infty$ (συνεχής)
Παράμετροι	$\alpha>0$: παράμετρος κλίμακας $\kappa>0$: παράμετρος σχήματος
Μέση τιμή	$\mu_X=\alpha\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)$
Διασπορά	$\sigma_X^2=\alpha^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\kappa}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2\right\}$
Τρίτη ροπή περί την αρχή	$m_X^{(3)}=\alpha^3\,\Gamma\left(1+\frac{3}{\kappa}\right)$
Συντελεστής μεταβλητότητας	$C_{v_X}=\Gamma\left(1+\frac{2}{\kappa}\right)/\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2-1$
Πιθανότερη τιμή	$x_p=\alpha(1-1/\kappa)^{1/\kappa}$ (για $\kappa>1$)
Διάμεσος	$x_{0.5}=\alpha(\ln 2)^{1/\kappa}$

$$x_u=\alpha[-\ln(1-u)]^{1/\kappa}$$

Εκτίμηση Παραμέτρων

$$\frac{\Gamma(1+2/\kappa)}{\Gamma^2(1+1/\kappa)}=\frac{s_X^2}{\bar{x}^2}+1$$

$$\alpha=\frac{\bar{x}}{\Gamma(1+1/\kappa)}$$

Θέτω Y = lnX

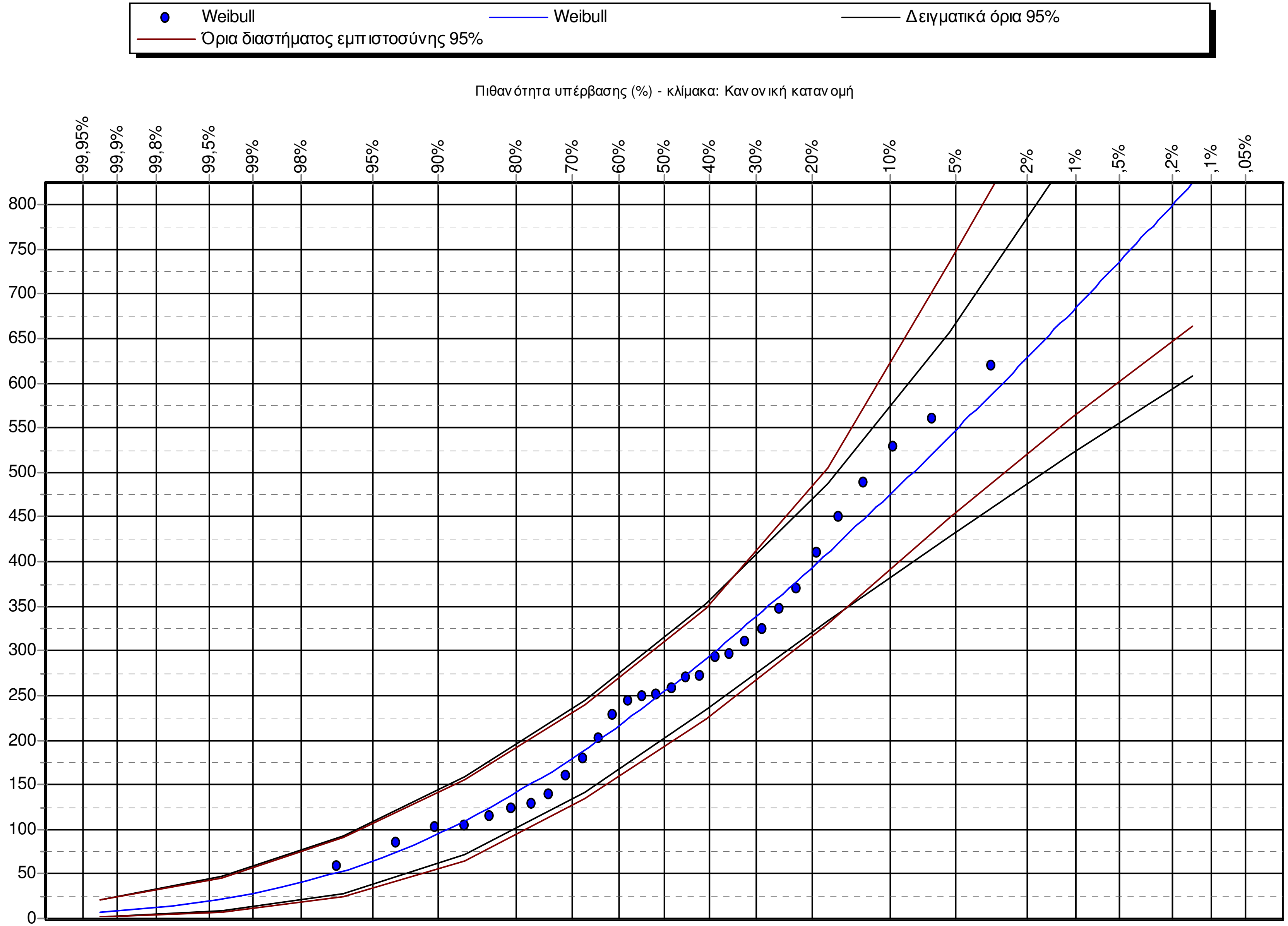
$$F_Y(y)=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{\kappa(y-\ln\alpha)}}$$

Συνάρτηση κατανομής ελαχίστων τύπου Ι με παράμετρο θέσης lnα και παράμετρο κλίμακας κ

(Πηγή: Κουτσογιάννης, 1997)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής Weibull



ΚΑΤΑΝΟΜΗ LOG PEARSON III

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\kappa}{x\Gamma(\kappa)} * \ln(x-c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(\ln x - c)}$$

Συνάρτηση Κατανομής

$$F_X(x) = \int_{e^c}^{x} \frac{\lambda^\kappa}{x\Gamma(\kappa)} * (\ln s - c)^{\kappa-1} e^{-\lambda(\ln s - c)} ds$$

Παράμετροι
c: παράμετρος κλίμακας
λ>0 παράμετρος σχήματος
κ>0 παράμετρος σχήματος

Χειρισμός της κατανομής

$$z = \frac{\ln x - \bar{x}_{\ln x}}{S_{\ln x}}$$

$$\ln x = zS_{\ln x} + \bar{x}_{\ln x}$$

$$x = e^{zS_{\ln x} + \bar{x}_{\ln x}}$$

Το *Z* υπολογίζεται από πίνακες με βάση την πιθανότητα εμφάνισης και το συντελεστή ασυμμετρίας της *lnx*

Βήματα Προσαρμογής Λογαριθμικής Pearson III Κατανομής

1. Εύρεση στατιστικών χαρακτηριστικών λογαρίθμων δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλιση, συντελεστής ασυμμετρίας).

2. Κατάταξη λογαρίθμων δείγματος σε φθίνουσα σειρά και αρίθμηση των παρατηρήσεων.

3. Προσδιορισμός Περιόδου Επαναφοράς από τον τύπο του Weibull T=(N+1)/m.

4. Εύρεση από Πίνακα Log Pearson των συντελεστών συχνότητας K(T) με βάση το g του δείγματος και τα διάφορα T.

5. Εκτίμηση νέων θεωρητικών τιμών από τις σχέσεις(*):

$$y(T) = \overline{x}_{\ln x} + K(T) * S_{\ln x}, \kappa\alpha\iota, x(T) = e^{y(T)}$$

6. Γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ λογαρίθμων δείγματος y(T) και K(T) με σκοπό την καλύτερη προσαρμογή των σημείων y(T), K(T), έτσι ώστε η ευθεία να y(T)=m+K(T)*C να προσεγγίζει κατά το δυνατόν την ευθεία.

7. Εύρεση διορθωμένου y΄(T) από τη σχέση y΄(T) = m + K(T)*C,

8. $x'(T) = e^{y'(T)}$.

9. Χάραξη θεωρητικής κατανομής και δείγματος με τα K(T) στον οριζόντιο άξονα.

10. Έλεγχος x^2 ή/και K-S για την καταλληλότητα της κατανομής.

*Μιμίκου, Μ., 2006. Τεχνολογία Υδατικών Πόρων, Εκδόσεις Παπασωτηρίου

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ PEARSON III

Πίνακας 7.7: Δείκτης συχνότητας K(T) της Pearson III

Φ	0.0010	0.0050	0.0100	0.0200	0.0250	0.0400	0.0500	0.1000	0.2000	0.3000	0.4[illegible]
g\T	1.0010	1.0050	1.0101	1.0204	1.0256	1.0417	1.0526	1.1111	1.2500	1.4286	1.[illegible]
−3.5	−7.7202	−5.2529	−4.2247	−3.2264	−2.9130	−2.2686	−1.9715	−1.0955	−0.3217	0.0573	0.2[illegible]
−3.4	−7.6095	−5.1989	−4.1926	−3.2137	−2.9060	−2.2723	−1.9795	−1.1134	−0.3413	0.0421	0.2[illegible]
−3.3	−7.4974	−5.1436	−4.1592	−3.2000	−2.8979	−2.2751	−1.9867	−1.1308	−0.3610	0.0265	0.25[illegible]
−3.2	−7.3838	−5.0870	−4.1245	−3.1851	−2.8888	−2.2769	−1.9931	−1.1477	−0.3808	0.0105	0.24[illegible]
−3.1	−7.2688	−5.0290	−4.0886	−3.1691	−2.8786	−2.2778	−1.9987	−1.1642	−0.4006	−0.0060	0.23[illegible]
−3.0	−7.1523	−4.9696	−4.0514	−3.1519	−2.8673	−2.2778	−2.0033	−1.1801	−0.4204	−0.0228	0.22[illegible]
−2.9	−7.0344	−4.9088	−4.0129	−3.1336	−2.8549	−2.2768	−2.0071	−1.1954	−0.4401	−0.0400	0.21[illegible]
−2.8	−6.9150	−4.8467	−3.9730	−3.1140	−2.8413	−2.2747	−2.0099	−1.2101	−0.4598	−0.0575	0.20[illegible]
−2.7	−6.7942	−4.7831	−3.9318	−3.0932	−2.8266	−2.2716	−2.0118	−1.2242	−0.4793	−0.0752	0.19[illegible]
−2.6	−6.6719	−4.7181	−3.8893	−3.0712	−2.8106	−2.2674	−2.0126	−1.2377	−0.4987	−0.0932	0.17[illegible]
−2.5	−6.5481	−4.6518	−3.8454	−3.0479	−2.7934	−2.2622	−2.0125	−1.2504	−0.5179	−0.1114	0.16[illegible]
−2.4	−6.4228	−4.5839	−3.8001	−3.0233	−2.7751	−2.2558	−2.0113	−1.2624	−0.5368	−0.1298	0.14[illegible]
−2.3	−6.2963	−4.5147	−3.7535	−2.9974	−2.7554	−2.2483	−2.0090	−1.2736	−0.5555	−0.1483	0.13[illegible]
−2.2	−6.1632	−4.4440	−3.7054	−2.9703	−2.7345	−2.2397	−2.0057	−1.2841	−0.5738	−0.1668	0.115
−2.1	−6.0386	−4.3719	−3.6560	−2.9418	−2.7123	−2.2299	−2.0013	−1.2938	−0.5918	−0.1854	0.10[illegible]
−2.0	−5.9078	−4.2983	−3.6052	−2.9120	−2.6889	−2.2189	−1.9957	−1.3026	−0.6094	−0.2040	0.08[illegible]
−1.9	−5.7755	−4.2234	−3.5529	−2.8809	−2.6641	−2.2067	−1.9891	−1.3105	−0.6266	−0.2225	0.06[illegible]
−1.8	−5.6419	−4.1470	−3.4993	−2.8485	−2.6381	−2.1933	−1.9812	−1.3176	−0.6433	−0.2409	0.05[illegible]
−1.7	−5.5070	−4.0693	−3.4444	−2.8147	−2.6108	−2.1787	−1.9723	−1.3238	−0.6596	−0.2592	0.03[illegible]
−1.6	−5.3709	−3.9902	−3.3880	−2.7796	−2.5821	−2.1629	−1.9621	−1.3290	−0.6753	−0.2774	0.01[illegible]
−1.5	−5.2335	−3.9097	−3.3303	−2.7432	−2.5522	−2.1459	−1.9508	−1.3333	−0.6905	−0.2953	−0.00[illegible]
−1.4	−5.0950	−3.8280	−3.2713	−2.7056	−2.5210	−2.1277	−1.9384	−1.3366	−0.7051	−0.3131	−0.01[illegible]
−1.3	−4.9555	−3.7450	−3.2110	−2.6666	−2.4885	−2.1082	−1.9247	−1.3390	−0.7191	−0.3305	−0.03[illegible]
−1.2	−4.8149	−3.6607	−3.1494	−2.6263	−2.4548	−2.0876	−1.9099	−1.3405	−0.7326	−0.3477	−0.05[illegible]
−1.1	−4.6734	−3.5753	−3.0866	−2.5848	−2.4198	−2.0657	−1.8939	−1.3409	−0.7454	−0.3646	−0.07[illegible]
−1.0	−4.5311	−3.4887	−3.0226	−2.5421	−2.3836	−2.0427	−1.8768	−1.3404	−0.7575	−0.3811	−0.08[illegible]
−0.9	−4.3881	−3.4011	−2.9573	−2.4981	−2.3462	−2.0185	−1.8586	−1.3389	−0.7690	−0.3973	−0.10[illegible]
−0.8	−4.2444	−3.3124	−2.8910	−2.4530	−2.3076	−1.9931	−1.8392	−1.3364	−0.7799	−0.4131	−0.12[illegible]
−0.7	−4.1002	−3.2228	−2.8236	−2.4067	−2.2679	−1.9666	−1.8186	−1.3329	−0.7900	−0.4285	−0.13[illegible]
−0.6	−3.9557	−3.1323	−2.7551	−2.3593	−2.2270	−1.9390	−1.7970	−1.3285	−0.7995	−0.4435	−0.15[illegible]
−0.5	−3.8109	−3.0410	−2.6857	−2.3108	−2.1850	−1.9102	−1.7743	−1.3231	−0.8083	−0.4581	−0.17[illegible]
−0.4	−3.6661	−2.9490	−2.6154	−2.2613	−2.1420	−1.8804	−1.7505	−1.3167	−0.8164	−0.4723	−0.18[illegible]
−0.3	−3.5214	−2.8564	−2.5442	−2.2108	−2.0979	−1.8495	−1.7256	−1.3094	−0.8238	−0.4860	−0.20
−0.2	−3.3770	−2.7632	−2.4723	−2.1593	−2.0529	−1.8176	−1.6997	−1.3010	−0.8304	−0.4993	−0.22
−0.1	−3.2332	−2.6696	−2.3996	−2.1070	−2.0069	−1.7846	−1.6728	−1.2918	−0.8364	−0.5121	−0.23

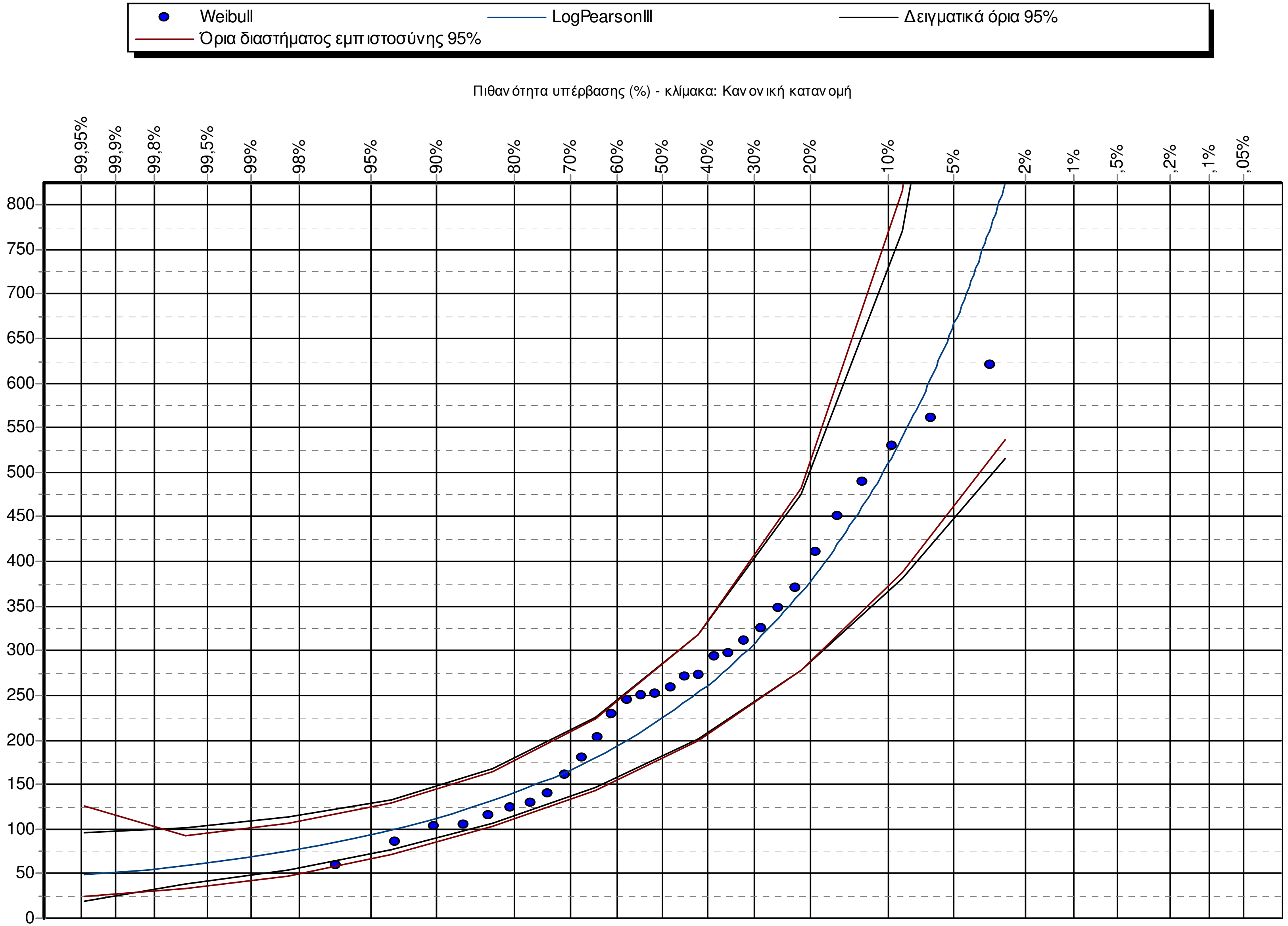
Πίνακας 7.7: (Συνέχεια)

Φ	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	0.9500	0.9600	0.9750	0.9800	0.9900	0.9950	0.9990
g\T	2.0000	2.5000	3.3333	5.0000	10.000	20.000	25.000	40.000	50.000	100.00	200.00	1000.0
−3.5	0.4125	0.4939	0.5399	0.5624	0.5703	0.5713	0.5714	0.5714	0.5714	0.5714	0.5714	0.5714
−3.4	0.4106	0.4984	0.5500	0.5765	0.5867	0.5880	0.5881	0.5882	0.5882	0.5882	0.5882	0.5882
−3.3	0.4079	0.5024	0.5599	0.5910	0.6038	0.6057	0.6059	0.6060	0.6060	0.6061	0.6061	0.6061
−3.2	0.4045	0.5058	0.5695	0.6057	0.6217	0.6244	0.6247	0.6249	0.6249	0.6250	0.6250	0.6250
−3.1	0.4004	0.5086	0.5789	0.6206	0.6406	0.6443	0.6446	0.6450	0.6451	0.6451	0.6452	0.6452
−3.0	0.3955	0.5107	0.5878	0.6357	0.6602	0.6653	0.6658	0.6664	0.6665	0.6666	0.6667	0.6667
−2.9	0.3899	0.5121	0.5963	0.6509	0.6807	0.6876	0.6834	0.6892	0.6893	0.6896	0.6896	0.6896
−2.8	0.3835	0.5128	0.6043	0.6660	0.7021	0.7112	0.7123	0.7135	0.7138	0.7141	0.7142	0.7143
−2.7	0.3764	0.5126	0.6118	0.6811	0.7242	0.7361	0.7376	0.7394	0.7399	0.7405	0.7407	0.7407
−2.6	0.3685	0.5117	0.6185	0.6960	0.7471	0.7624	0.7646	0.7671	0.7678	0.7688	0.7691	0.7692
−2.5	0.3599	0.5100	0.6246	0.7107	0.7706	0.7901	0.7931	0.7967	0.7976	0.7992	0.7997	0.8000
−2.4	0.3506	0.5074	0.6300	0.7249	0.7947	0.8193	0.8231	0.8282	0.8296	0.8320	0.8328	0.8333
−2.3	0.3406	0.5041	0.6346	0.7388	0.8193	0.8498	0.8549	0.8617	0.8637	0.8672	0.8686	0.8694
−2.2	0.3300	0.4999	0.6383	0.7521	0.8442	0.8816	0.8881	0.8973	0.9001	0.9052	0.9074	0.9085
−2.1	0.3187	0.4949	0.6412	0.7648	0.8694	0.9146	0.9229	0.9349	0.9388	0.9461	0.9494	0.9519
−2.0	0.3068	0.4892	0.6433	0.7769	0.8946	0.9487	0.9592	0.9747	0.9798	0.9899	0.9950	0.9990
−1.9	0.2944	0.4826	0.6445	0.7882	0.9199	0.9838	0.9967	1.0164	1.0231	1.0369	1.0443	1.0507
−1.8	0.2815	0.4754	0.6449	0.7987	0.9450	1.0197	1.0354	1.0600	1.0686	1.0871	1.0975	1.1074
−1.7	0.2681	0.4674	0.6444	0.8084	0.9698	1.0563	1.0751	1.1054	1.1163	1.1404	1.1548	1.1697
−1.6	0.2542	0.4587	0.6430	0.8172	0.9942	1.0934	1.1157	1.1523	1.1658	1.1968	1.2162	1.2380
−1.5	0.2400	0.4494	0.6408	0.8252	1.0181	1.1307	1.1568	1.2006	1.2172	1.2561	1.2817	1.3127
−1.4	0.2253	0.4395	0.6378	0.8322	1.0414	1.1683	1.1984	1.2500	1.2700	1.3181	1.3511	1.3941
−1.3	0.2104	0.4290	0.6340	0.8384	1.0641	1.2058	1.2403	1.3004	1.3241	1.3827	1.4244	1.4822
−1.2	0.1952	0.4179	0.6294	0.8437	1.0861	1.2431	1.2822	1.3515	1.3793	1.4494	1.5011	1.5769
−1.1	0.1797	0.4064	0.6241	0.8481	1.1073	1.2802	1.3241	1.4031	1.4353	1.5181	1.5811	1.6782
−1.0	0.1640	0.3943	0.6181	0.8516	1.1276	1.3168	1.3658	1.4551	1.4919	1.5884	1.6639	1.7857
−0.9	0.1481	0.3819	0.6115	0.8543	1.1471	1.3530	1.4072	1.5071	1.5489	1.6600	1.7492	1.8989
−0.8	0.1320	0.3689	0.6041	0.8561	1.1657	1.3885	1.4481	1.5591	1.6060	1.7327	1.8366	2.0174
−0.7	0.1158	0.3556	0.5961	0.8570	1.1835	1.4234	1.4885	1.6110	1.6632	1.8062	1.9258	2.1405
−0.6	0.0994	0.3420	0.5876	0.8572	1.2003	1.4576	1.5283	1.6625	1.7203	1.8803	2.0164	2.2678
−0.5	0.0830	0.3280	0.5784	0.8565	1.2162	1.4910	1.5674	1.7137	1.7772	1.9547	2.1082	2.3987
−0.4	0.0665	0.3136	0.5687	0.8551	1.2311	1.5236	1.6057	1.7643	1.8336	2.0293	2.2009	2.5326
−0.3	0.0499	0.2990	0.5584	0.8528	1.2452	1.5553	1.6433	1.8143	1.8896	2.1039	2.2942	2.6691
−0.2	0.0332	0.2840	0.5476	0.8499	1.2582	1.5861	1.6800	1.8636	1.9450	2.1784	2.3879	2.8079

Πηγή: Μ.Α. Μιμίκου, 2006. Τεχνολογία υδατικών πόρων, Εκδόσεις Παπασωτηρίου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Προσαρμογή κατανομής Log-Pearson III



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Κανονική κατανομή

x: τιμή της μεταβλητής μ: μέση τιμή σ: τυπική απόκλιση	**NORMDIST(x ; μ ; σ ; TRUE)**	Επιστρέφει τη συνάρτηση κατανομής, F (από 0 έως 1)
x: τιμή της μεταβλητής μ: μέση τιμή σ: τυπική απόκλιση	**NORMDIST(x ; μ ; σ ; FALSE)**	Επιστρέφει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, f
F: συνάρτηση κατανομής μ: μέση τιμή σ: τυπική απόκλιση	**NORMINV(F ; μ ; σ)**	Επιστρέφει την τιμή της μεταβλητής, x
F: συνάρτηση κατανομής	**NORMSINV(F)**	Επιστρέφει την τιμή της τυποποιημένης μεταβλητής Z
Z: τιμή της τυποποιημένης μεταβλητής	**NORMSDIST(Z)**	Επιστρέφει τη συνάρτηση κατανομής, **F**

(Πηγή: Εργαστήριο Υδρολογίας και Αξιοποίησης Υδατικών Πόρων, 2012 http://users.itia.ntua.gr/nikos/hydrology/EduMaterial/lecture%208%20gia%20site.pdf)

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

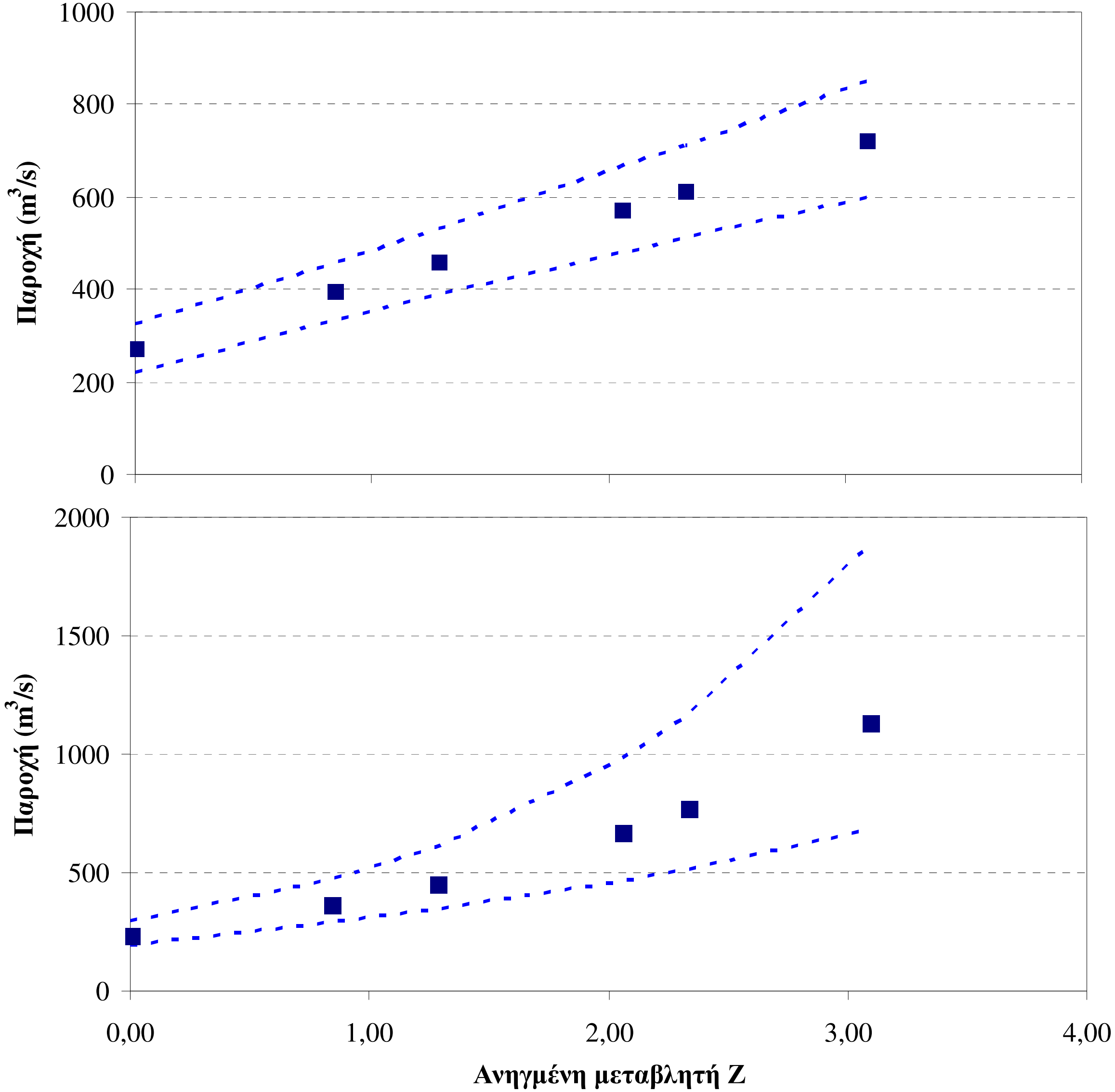
Κατανομή x^2

F_1: πιθανότητα υπέρβασης n: βαθμοί ελευθερίας	CHIINV(F_1 ; n)	Επιστρέφει την τιμή της μεταβλητής
x: τιμή της μεταβλητής n: βαθμοί ελευθερίας	CHIDIST(x ; n)	Επιστρέφει την πιθανότητα υπέρβασης (από 0 έως 1)

(Πηγή: Εργαστήριο Υδρολογίας και Αξιοποίησης Υδατικών Πόρων, 2012 http://users.itia.ntua.gr/nikos/hydrology/EduMaterial/lecture%208%20gia%20site.pdf)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ

Εκτίμηση τιμών και ορίων εμπιστοσύνης 95%



ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

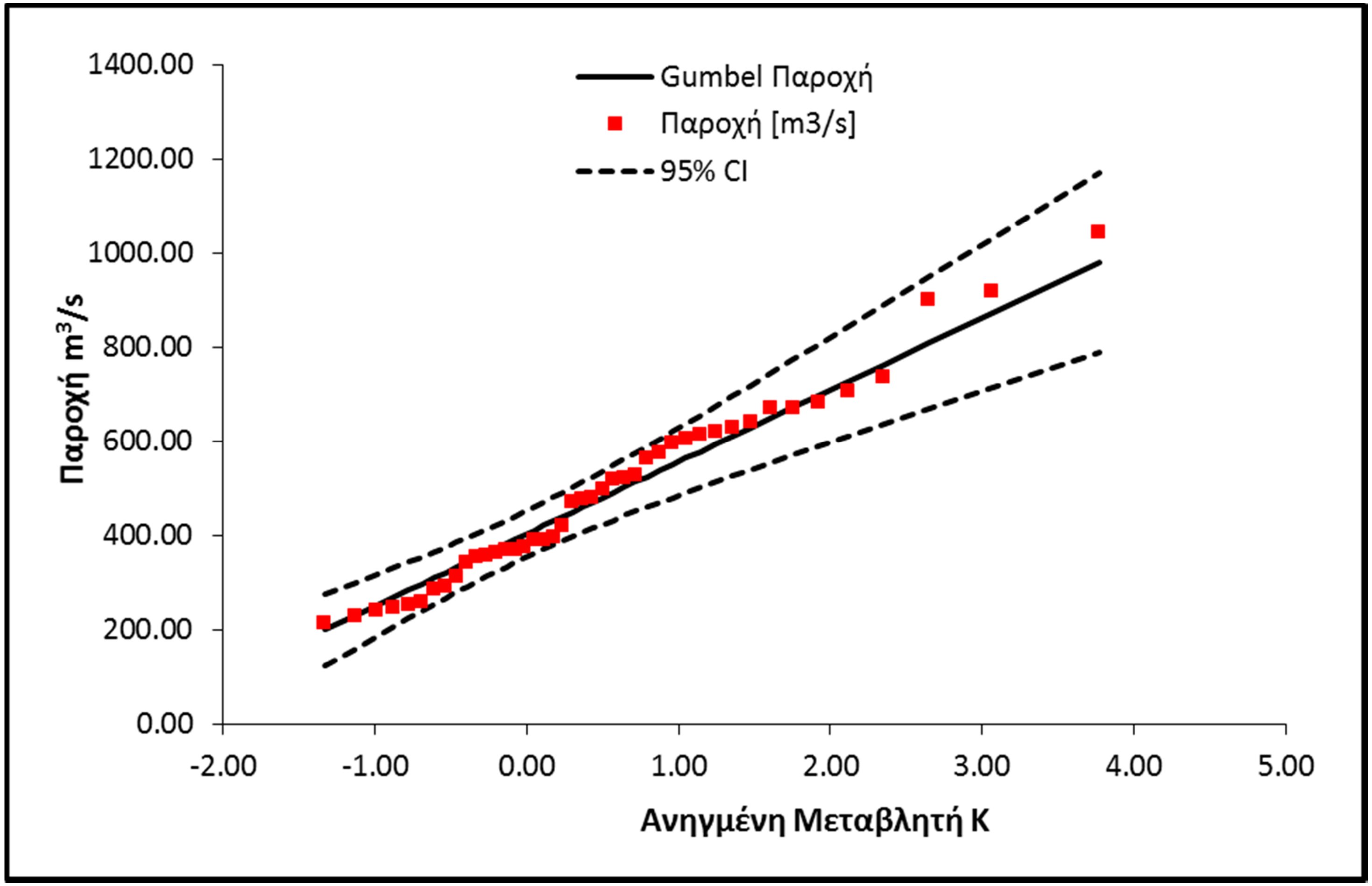
ΛΟΓΑΡΙΘΜΟ-ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

(Πηγή: Εργαστήριο Υδρολογίας και Αξιοποίησης Υδατικών Πόρων, 2012 http://users.itia.ntua.gr/nikos/hydrology/EduMaterial/lecture%208%20gia%20site.pdf)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ

Εκτίμηση τιμών και ορίων εμπιστοσύνης 95%

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GUMBELL ΜΕΓΙΣΤΩΝ



ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

- Κανονική κατανομή μπορούμε να εφαρμόζουμε σε μεγέθη που προέρχονται από συνάθροιση (ή μέσες τιμές) πάνω σε ένα χρονικό διάστημα, για παράδειγμα ετήσιες βροχοπτώσεις
  - Ειδικά για την κανονική κατανομή ένα κριτήριο για να ικανοποιείται η απαίτηση της κυριαρχίας των θετικών τιμών είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας ($C_{vx}=\sigma_x/\mu_x$) να είναι $C_{vx}<0.25$. Αν όμως $C_{vx}>0.5$ θα πρέπει να αποκλείεται η κανονική κατανομή
- Κατανομή γάμα (ή Pearson III ή και λογαριθμοκανονική 2-3 παραμέτρων) εφαρμόζουμε σε μεγέθη που παρουσιάζουν (θετική) ασυμμετρία.
  - π.χ. τα δείγματα που έχουν εποχικότητα (π.χ. χρονοσειρά βροχοπτώσεων συγκεκριμένου μήνα ετήσιου χρονικού βήματος)
- Εκθετική κατανομή για την περιγραφή υδρολογικών μεταβλητών σε μικρή χρονική κλίμακα
- Κατανομές ακραίων τιμών (ΑΤ) ή Log-Pearson III για την περιγραφή ακραίων τιμών σε ένα χρονικό διάστημα (όπως χρονοσειρές ετησίων μεγίστων βροχόπτωσης ή παροχής)
- ΑΤ-3 ελαχίστων (Weibull) για την περιγραφή παροχών ξηρασίας
- Pareto για την περιγραφή μεταβλητών που ξεπερνούν ένα δεδομένο κατώφλι

Βιβλιογραφία

Εργαστήριο Υδρολογίας και Αξιοποίησης Υδατικών Πόρων, Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. 2012. «Πιθανοτική προσέγγιση των υδρολογικών μεταβλητών», Διαφάνειες του μαθήματος «Τεχνική Υδρολογία» http://users.itia.ntua.gr/nikos/hydrology/

Κουτσογιάννης, Δ., και Θ. Ξανθόπουλος. «Τεχνική Υδρολογία», Έκδοση 3, 418 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999.

Κουτσογιάννης, Δ. «Στατιστική Υδρολογία», Έκδοση 4, 312 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1997.

Μιμίκου, Μ.Α. «Τεχνολογία Υδατικών Πόρων», Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 3η Έκδοση, 2006.

Μιμίκου, Μ.Α. και Ε.Α. Μπαλτάς. «Τεχνική Υδρολογία», Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 5η Έκδοση, 2012.

Παπαμιχαήλ, Δ.Μ. «Τεχνική Υδρολογία Επιφανειακών Υδάτων», Εκδόσεις Γιαχούδη-Γιαπούδη, 2001.

Τσακίρης, Γ. «Υδατικοί Πόροι Ι. Τεχνική Υδρολογία», Εκδόσεις Συμμετρία, 1995.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης