

Ασκήσεις στην αναλυτική γεωμετρία (1^η εκδοχή, Δεκ. 2013)

Στις ακόλουθες ασκήσεις εργαζόμαστε εντός ενός πολικού συστήματος $[\pi] = Ox$ του επιπέδου. Όταν επιπλέον θεωρούμε κι ένα καρτεσιανό σύστημα $[s]$, θα θεωρούμε πως αυτό είναι $[s] = Ox'y'$ με θετικό ημιάξονα Ox' ταυτιζόμενο με τον θετικό ημιάξονα του πολικού συστήματος, εκτός κι αν ρητώς αναφέρεται διαφορετικά. Για να υποδηλώσουμε συντεταγμένες ενός σημείου A στα δύο συστήματα θα γράφουμε $A_{[\pi]}, A_{[s]}$ αντιστοίχως.

Άσκηση 1. Υπολογίστε όλες τις πολικές συντεταγμένες του σημείου $A_{[s]} \left(1, \frac{1}{2}\right)$ καθώς και την απόστασή του από το σημείο $B_{[s]}(1,1)$.

Άσκηση 2. Βρείτε πολική και καρτεσιανή εξίσωση του κύκλου $(c) = (A_{[s]}(2,4), 1)$.

Άσκηση 3. Μετατρέψτε τη δοσμένη πολική εξίσωση των ακόλουθων καμπυλών σε καρτεσιανή:

$$(c_1): \rho = 2(1 + \cos\theta), \quad (c_2): \rho = \frac{2}{\sin(2\theta)}.$$

Άσκηση 4. Μετατρέψτε τη δοσμένη καρτεσιανή εξίσωση των ακόλουθων καμπυλών σε πολική:

$$(c_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad (c_2): y = 2x^2.$$

Άσκηση 5. Βρείτε όλες τις πολικές εξισώσεις της καμπύλης $(c): \rho = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Άσκηση 6. Βρείτε το είδος της κωνικής τομής που παριστάνει η κάθε εξίσωση $(c_1): \rho = \frac{2}{2 - \sin\theta}$, $(c_2): \rho = \frac{4}{1 + 2\cos\theta}$, και σχεδιάστε τις δύο καμπύλες.

Άσκηση 7. Σχεδιάστε τις καμπύλες $(c_1): \rho = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $(c_2): \rho = 2\cos(3\theta)$, $(c_3): \rho = 2 - \cos\theta$, $(c_4): \rho^2 = 4\cos(2\theta)$.

Άσκηση 8. Βρείτε τα σημεία τομής των καμπυλών

1. $(c_1): \rho = -\cos\theta$, $(c_2): r = \cos(2\theta)$,
2. $(c_1): \rho = \cos\theta$, $(c_2): r = \sin\theta$.