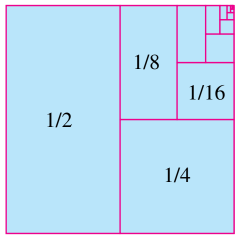
8 Άπειρες σειρές

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Επί αιώνες, το πρόβλημα της άθροισης μιας σειράς άπειρων όρων προβλημάτιζε τους μαθηματικούς. Και αυτό γιατί έβλεπαν πως μερικές φορές μια τέτοια σειρά καταλήγει σε πεπερασμένο αποτέλεσμα, π.χ.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1.$$



(Μπορείτε να πεισθείτε γι' αυτό αθροίζοντας τα εμβαδά των άπειρων ορθογωνίων που αποκόπτονται από το μοναδιαίο τετράγωνο με τον τρόπο που δείχνει το διπλανό σχήμα.) Άλλες όμως φορές, ένα άπειρο άθροισμα απειριζόταν, π.χ.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty$$

(κάτι που δεν είναι καθόλου προφανές), και τέλος υπήρχαν περιπτώσεις όπου ήταν αδύνατον να αποφανθεί κανείς για την τιμή του άπειρου αθροίσματος, π.χ.

$$1-1+\ 1-1+1-1+\cdots.$$

(Είναι μηδέν; Είναι 1; Ή τίποτα από τα δύο;)

Παρά ταύτα, μαθηματικοί όπως ο Gauss και ο Euler χρησιμοποίησαν επιτυχώς τις άπειρες σειρές για να εξαγάγουν μερικά πρωτοφανή αποτελέσματα. Ο Laplace απέδειξε με σειρές την ευστάθεια του ηλιακού μας συστήματος (χωρίς αυτό να αποτρέπει σήμερα μερικούς από το να εκφράζουν την ανησυχία τους για το ότι «υπερβολικά πολλοί» πλανήτες έχουν γείρει από τη μία πλευρά του Ήλιου!). Θα περνούσαν αρκετά ακόμη χρόνια μέχρι να εμφανιστούν ειδικοί της μαθηματικής ανάλυσης, όπως ο Cauchy, οι οποίοι ανέπτυξαν το θεωρητικό υπόβαθρο των υπολογισμών με σειρές, αναγκάζοντας έτσι πολλούς συναδέλφους τους (μεταξύ αυτών και τον Laplace) να επανεξετάσουν σε αυστηρότερο υπόβαθρο τα πρότερα αποτελέσματά τους.

Οι άπειρες σειρές αποτελούν τη βάση ενός αξιοθαύμαστου μαθηματικού τύπου ο οποίος μας επιτρέπει να περιγράφουμε πολλές συναρτήσεις με πολυώνυμα που περιέχουν άπειρους όρους (τα οποία καλούνται δυναμοσειρές), ενώ παράλληλα μας πληροφορεί για το μέγεθος του σφάλματος που υπεισέρχεται αν κρατήσουμε πεπερασμένο πλήθος όρων στα πολυώνυμα αυτά. Οι δυναμοσειρές, πέραν του ότι προσεγγίζουν με πολυώνυμα τις διαφορίσιμες συναρτήσεις, βρίσκουν και πολλές άλλες εφαρμογές. Παρακάτω θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άπειρα αθροίσματα τριγωνομετρικών όρων (τις λεγόμενες σειρές Fourier), προκειμένου να αναπαραστήσουμε μερικές από τις σπουδαιότερες συναρτήσεις που συναντά κανείς σε επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές. Οι άπειρες σειρές παρέχουν έναν ευχερή τρόπο υπολογισμού μη στοιχειωδών ολοκληρωμάτων, καθώς και επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη διάδοση της θερμότητας, τις ταλαντώσεις, τη διάχυση χημικών ουσιών, και τη μετάδοση σημάτων. Στο παρόν κεφάλαιο θα προετοιμάσουμε το έδαφος για την κατανόηση του ρόλου που παίζουν οι σειρές στις φυσικές επιστήμες και στα μαθηματικά.

8.1 Όρια ακολουθιών

Ορισμοί και συμβολισμός • Σύγκλιση και απόκλιση • Υπολογισμός ορίων ακολουθιών • Κάνοντας χρήση του κανόνα του l'Hôpital • Όρια που απαντούν συχνά

Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ακολουθία είναι μια διατεταγμένη διάταξη τυχόντων αντικειμένων, όμως στο παρόν κεφάλαιο τα αντικείμενα που θα μας απασχολήσουν είναι αριθμοί. Ήδη έχουμε συναντήσει ακολουθίες, π.χ. αυτή των αριθμών $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ που προκύπτει από τη μέθοδο του Νεύτωνα. Αργότερα θα δούμε ακολουθίες δυνάμεων του x, καθώς και ακολουθίες τριγωνομετρικών όρων, π.χ. $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$. Ένα ζήτημα κεντρικής σημασίας είναι αν μια ακολουθία διαθέτει όριο ή όχι.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Ιστορικά στοιχεία
Ακολουθίες και σειρές

Ορισμοί και συμβολισμός

Μπορούμε να διατάξουμε τα ακέραια πολλαπλάσια του 3 ως εξής:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Πεδίο ορισμού:} & 1 & 2 & 3\ \ldots & n\ \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Πεδίο τιμών:} & 3 & 6 & 9 & 3n \end{array}$$

Ο πρώτος αριθμός στη σειρά είναι το 3, έπειτα το 6, έπειτα το 9, κ.ο.κ. Η συνάρτηση λοιπόν που δρα εδώ αποδίδει την τιμή $3n$ στη n-οστή θέση. Αυτή είναι η βασική ιδέα της κατασκευής ακολουθιών: Υπάρχει μια συνάρτηση που τοποθετεί τον κάθε αριθμό της ακολουθίας στην κατάλληλη διατεταγμένη θέση του.

Ορισμός **Ακολουθία**

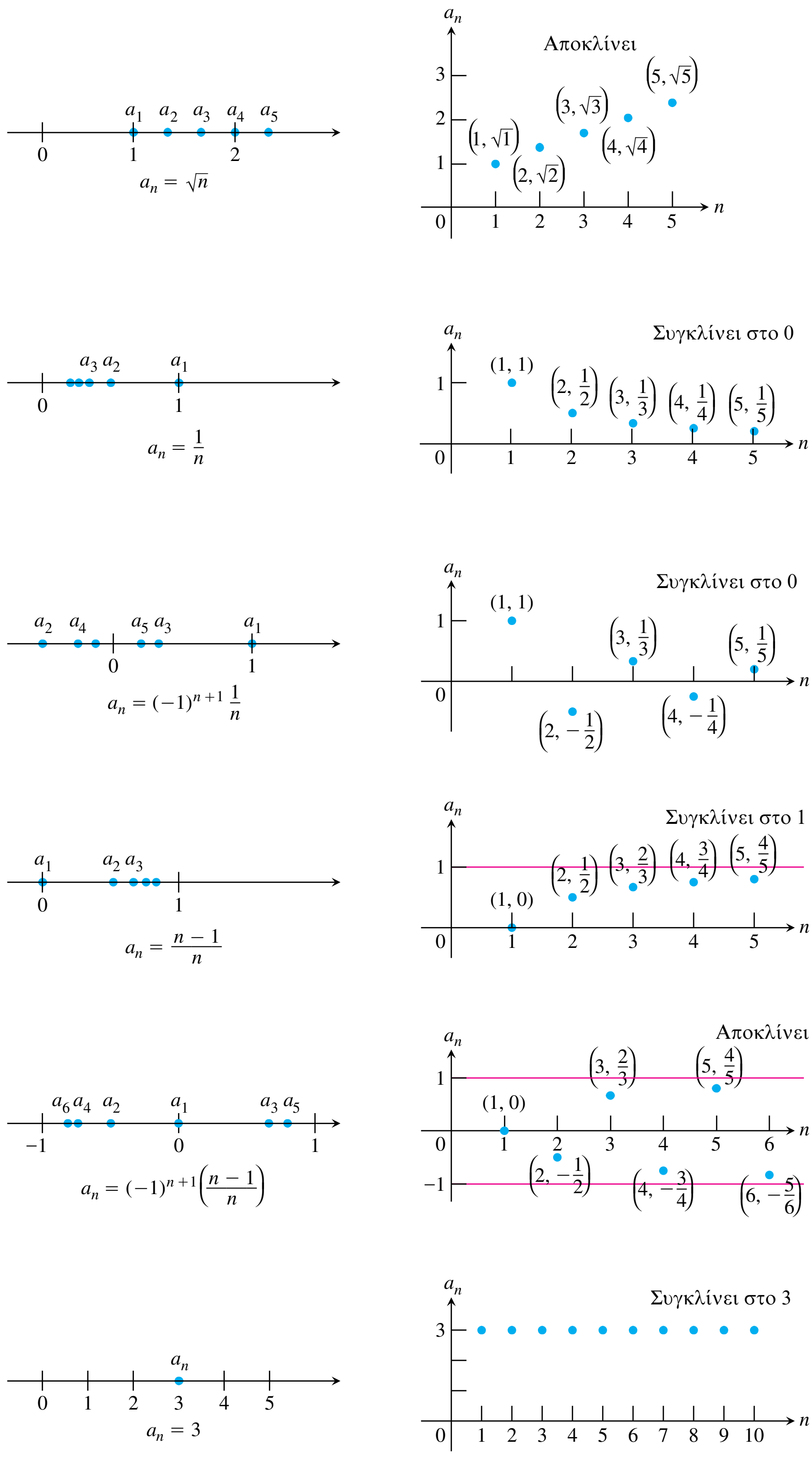
Άπειρη **ακολουθία** αριθμών είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των ακεραίων που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι ενός ακεραίου n_0.

Συνήθως, το n_0 είναι 1 και το πεδίο ορισμού της ακολουθίας είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων. Μερικές φορές, ωστόσο, επιθυμούμε η ακολουθία να ξεκινά από άλλον αριθμό. Π.χ., στη μέθοδο του Νεύτωνα παίρνουμε $n_0 = 0$. Αν πάλι θέλαμε να ορίσουμε μια ακολουθία πολυγώνων με πλήθος πλευρών n, θα παίρναμε $n_0 = 3$.

Οι ακολουθίες ορίζονται όπως και οι υπόλοιπες συναρτήσεις, για παράδειγμα

$$a(n) = \sqrt{n}, \qquad a(n) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \qquad a(n) = \frac{n-1}{n}$$

(Παράδειγμα 1 και Σχήμα 8.1). Για να δηλώσουμε ότι το πεδίο ορισμού των ακολουθιών περιλαμβάνει ακεραίους, χρησιμοποιούμε το



(α) Οι όροι $a_n = \sqrt{n}$ υπερβαίνουν τελικά κάθε ακέραιο, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ αποκλίνει, . . .

(β) . . . όμως οι όροι $a_n = 1/n$ μικραίνουν διαρκώς και προσεγγίζουν αυθαίρετα το 0 καθώς το n αυξάνεται, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 0.

(γ) Οι όροι $a_n = (-1)^{n+1}(1/n)$ εναλλάσσουν τα πρόσημά τους, ωστόσο συγκλίνουν στο 0.

(δ) Οι όροι $a_n = (n-1)/n$ προσεγγίζουν αυθαίρετα το 1 καθώς το n αυξάνεται, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 1.

(ε) Οι όροι $a_n = (-1)^{n+1}[(n-1)/n]$ εναλλάσσουν τα πρόσημά τους. Οι θετικοί όροι τείνουν στο 1. Ωστόσο, οι αρνητικοί όροι τείνουν στο -1 καθώς το n αυξάνεται, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ αποκλίνει.

(στ) Οι όροι της ακολουθίας σταθερών αριθμών $a_n = 3$ έχουν την ίδια τιμή ανεξαρτήτως του n, οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 3.

ΣΧΗΜΑ 8.1 Οι ακολουθίες του Παραδείγματος 1 απεικονίζονται εδώ με δύο τρόπους: τοποθετώντας τους αριθμούς a_n στον οριζόντιο άξονα, και τα σημεία (n, a_n) στο επίπεδο.

γράμμα n ως δηλωτικό της ανεξάρτητης μεταβλητής, αντί των x, y, z, και t που χρησιμοποιούμε συνήθως όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει πραγματικές τιμές. Ωστόσο, συχνά οι μαθηματικοί τύποι που ορίζουν ακολουθίες, όπως οι ανωτέρω, ισχύουν και για πεδία ορισμού μεγαλύτερα του συνόλου των θετικών ακεραίων. Όπως θα δούμε, κάτι τέτοιο μπορεί να μας εξυπηρετεί. Ο αριθμός $a(n)$ καλείται ***n*-οστός όρος** της ακολουθίας, ή αλλιώς **όρος με δείκτη *n*.** Έτσι για $a(n) = (n - 1)/n$, θα έχουμε

Πρώτος όρος	Δεύτερος όρος	Τρίτος όρος		*n*-οστός όρος
$a(1) = 0$	$a(2) = \frac{1}{2}$,	$a(3) = \frac{2}{3}$,	$\ldots,$	$a(n) = \frac{n-1}{n}$.

Αν συμβολίσουμε ως a_n το $a(n)$, η ακολουθία γράφεται ως εξής:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = \frac{2}{3}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{n-1}{n}.$$

Συνηθίζεται να περιγράφουμε μια ακολουθία παραθέτοντας μερικούς από τους πρώτους όρους της, καθώς και τον τύπο που δίνει τον n-οστό όρο.

Παράδειγμα 1 Περιγραφή ακολουθιών

Όροι ακολουθίας	Τύπος ακολουθίας
(α) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots$	$a_n = \sqrt{n}$
(β) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{n}$
(γ) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots$	$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$
(δ) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$
(ε) $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right), \ldots$	$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$
(στ) $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$	$a_n = 3$

Συμβολισμός Για να αναφερθούμε στην ακολουθία n-οστού όρου a_n γράφουμε $\{a_n\}$ (και διαβάζουμε «ακολουθία a δείκτης n»). Έτσι, η δεύτερη ακολουθία του Παραδείγματος 1 είναι η $\{1/n\}$ («ακολουθία 1 διά n»)· η τελευταία ακολουθία είναι η $\{3\}$ («σταθερή ακολουθία 3»).

Σύγκλιση και απόκλιση

Όπως δείχνει το Σχήμα 8.1, οι ακολουθίες στο Παράδειγμα 1 δεν έχουν όλες την ίδια συμπεριφορά. Οι $\{1/n\}$, $\{(-1)^{n+1}(1/n)\}$, και $\{(n-1)/n\}$ δείχνουν να προσεγγίζουν μια μοναδική οριακή τιμή καθώς το n αυξάνεται, και μάλιστα η $\{3\}$ έχει καταλήξει στην οριακή της τιμή από τον πρώτο ήδη όρο. Από την άλλη, οι όροι της ακολουθίας $\{(-1)^{n+1}(n-1)/n\}$ δείχνουν να «συνωστίζονται» σε δύο διαφορετικές τιμές, τις -1 και 1, ενώ οι όροι της $\{\sqrt{n}\}$ αυξάνονται απεριόριστα και δεν συγκλίνουν πουθενά.

Ο ακόλουθος ορισμός διαχωρίζει τις ακολουθίες που προσεγγίζουν μια μοναδική οριακή L, καθώς το n αυξάνεται, από εκείνες που δεν εμφανίζουν τέτοια συμπεριφορά.

Ορισμοί **Σύγκλιση, απόκλιση, όριο**

Η ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει** στον αριθμό L αν σε κάθε θετικό αριθμό ϵ αντιστοιχεί ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε n,

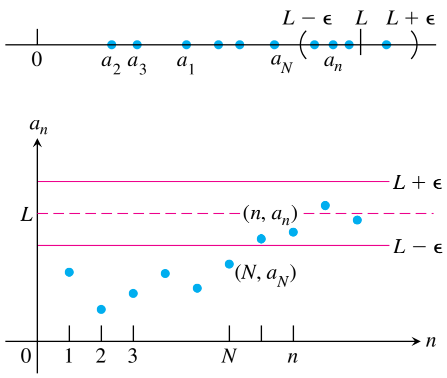
$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός L, λέμε ότι η $\{a_n\}$ **αποκλίνει.**

Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L, γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, ή απλούστερα $a_n \to L$, και καλούμε το L **όριο** της ακολουθίας (Σχήμα 8.2).

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία

Nicole Oresme
(περ. 1320-1382)



Σχημα 8.2 $a_n \to L$ εάν $y = L$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη της ακολουθίας σημείων $\{(n, a_n)\}$. Όπως βλέπουμε στο σχήμα, όλα τα a_n μετά το a_N κείνται σε απόσταση μικρότερη του ϵ από το L.

Παράδειγμα 2 Έλεγχος του ορισμού

Δείξτε ότι

(α) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(β) $\lim_{n\to\infty} k = k$ (τυχούσα σταθερά k).

Λύση

(α) Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε n,

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Η πρόταση αυτή θα ισχύει για $(1/n) < \epsilon$, δηλαδή για $n > 1/\epsilon$. Έτσι, αν N είναι τυχών ακέραιος μεγαλύτερος του $1/\epsilon$, η πρόταση θα ισχύει για κάθε $n > N$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$.

(β) Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε n,

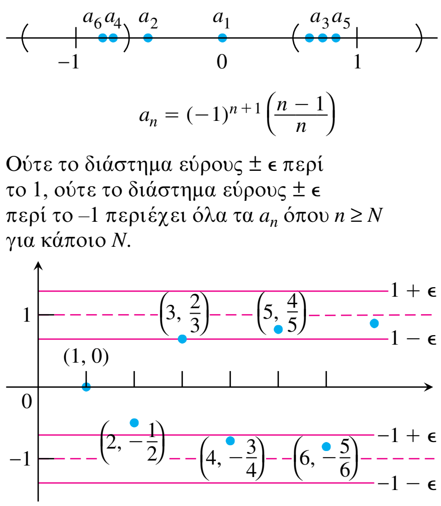
$$n > N \Rightarrow |k - k| < \epsilon.$$

Εφόσον $k - k = 0$, για κάθε ακέραια τιμή του N η πρόταση θα εξακολουθεί να ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to\infty} k = k$ για κάθε σταθερό αριθμό k.

Παράδειγμα 3 Αποκλίνουσα ακολουθία

Δείξτε ότι η $\{(-1)^{n+1}[(n-1)/n]\}$ αποκλίνει.

Λύση Έστω ϵ θετικός αριθμός μικρότερος του 1, τέτοιος ώστε να μην αλληλεπικαλύπτονται οι λωρίδες γύρω από τις ευθείες $y = 1$ και $y = -1$ που φαίνονται στο Σχήμα 8.3. Κάθε $\epsilon < 1$ ικανοποιεί την προϋπόθεση αυτή. Η σύγκλιση στο 1 θα σήμαινε ότι κάθε σημείο του γραφήματος πέραν ενός δεδομένου δείκτη N κείται στην άνω λωρίδα, όμως αυτό δεν συμβαίνει. Και αυτό διότι μόλις το σημείο (n, a_n) «εισέλθει» στην άνω λωρίδα, τότε το $(n+1, a_{n+1})$ και όλα τα επόμενα σημεία ανά δύο εισέρχονται στην κάτω λωρίδα. Συνεπώς, η ακολουθία δεν μπορεί να συγκλίνει στο 1. Ομοίως, δεν μπορεί να συγκλίνει στο -1. Από την άλλη, εφόσον οι όροι της ακολουθίας προσεγγίζουν εναλλάξ όλο και περισσότερο τις τιμές 1 και -1, δεν τείνουν ποτέ σε κάποια άλλη τιμή. Συνεπώς, η ακολουθία αποκλίνει.



ΣΧΗΜΑ 8.3 Η ακολουθία $\{(-1)^{n+1}[(n-1)/n]\}$ αποκλίνει.

Η συμπεριφορά της $\{(-1)^{n+1}[(n-1)/n]\}$ είναι ποιοτικά διαφορετική από αυτήν της $\{\sqrt{n}\}$, η οποία αποκλίνει διότι υπερβαίνει κάθε θετικό αριθμό L. Για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά της $\{\sqrt{n}\}$, γράφουμε

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n}) = \infty.$$

Λέγοντας πως όριο της $\{a_n\}$ είναι το άπειρο, δεν εννοούμε βέβαια ότι η διαφορά μεταξύ του a_n και του απείρου μειώνεται καθώς το n αυξάνεται. Εννοούμε απλώς ότι το a_n μεγαλώνει αριθμητικά με την αύξηση του n.

Υπολογισμός ορίων ακολουθιών

Η μελέτη των ορίων θα καταντούσε αρκετά επίπονη αν έπρεπε να απαντήσουμε σε κάθε ερώτημα σχετικό με τη σύγκλιση, εφαρμόζοντας τον ορισμό. Για καλή μας τύχη, υπάρχουν τρία θεωρήματα που διευκολύνουν την όλη διαδικασία. Το πρώτο από αυτά έρχεται ως φυσιολογική συνέχεια των όσων είπαμε όταν μελετούσαμε τα όρια. Οι αποδείξεις παραλείπονται.

Θεώρημα 1 **Ιδιότητες ορίων ακολουθιών**

Έστω $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών και A και B πραγματικοί αριθμοί. Έστω $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ και $\lim_{n \to \infty} b_n = B$. Ισχύουν τότε οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. *Όριο αθροίσματος*: $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. *Όριο διαφοράς*: $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = A - B$
3. *Όριο γινομένου*: $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου*: $\lim_{n \to \infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ (τυχών αριθμός k)
5. *Όριο πηλίκου*: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ εφόσον $B \neq 0$

Παράδειγμα 4 Εφαρμογή των ιδιοτήτων ορίων ακολουθιών

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1 και τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 2, έχουμε

(α) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=-1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=-1\cdot 0=0$

(β) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=1-0=1$

(γ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=5\cdot 0\cdot 0=0$

(δ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-7n^6}{n^6+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4/n^6)-7}{1+(3/n^6)}=\dfrac{0-7}{1+0}=-7.$

Παράδειγμα 5 Τα σταθερά πολλαπλάσια αποκλίνουσας ακολουθίας αποκλίνουν

Κάθε μη μηδενικό πολλαπλάσιο μιας αποκλίνουσας ακολουθίας $\{a_n\}$ αποκλίνει. Για να αποδειχθεί αυτό, ας υποθέσουμε ότι η $\{ca_n\}$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $c \neq 0$. Τότε, αν θέσουμε $k = 1/c$ στον τύπο του ορίου σταθερού πολλαπλασίου του Θεωρήματος 1, βλέπουμε ότι η ακολουθία

$$\left\{\frac{1}{c}\cdot ca_n\right\}=\{a_n\}$$

συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η $\{ca_n\}$ δεν μπορεί να συγκλίνει παρά μόνον αν και η $\{a_n\}$ συγκλίνει. Αν η $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει, τότε ούτε η $\{ca_n\}$ θα συγκλίνει.

Στην Άσκηση 69 καλείστε να αποδείξετε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2 **Θεώρημα «σάντουιτς» για ακολουθίες**

Έστω $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, και $\{c_n\}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \le b_n \le c_n$ για κάθε n πέραν κάποιου N και αν $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, τότε θα ισχύει επίσης $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2 είναι ότι αν $|b_n| \le c_n$ και $c_n \to 0$, τότε $b_n \to 0$ εφόσον $-c_n \le b_n \le c_n$. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα αυτό στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6 Χρήση του θεωρήματος «σάντουιτς»

Εφόσον $1/n \to 0$, γνωρίζουμε ότι

(α) $\dfrac{\cos n}{n}\to 0$ διότι $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right|=\dfrac{|\cos n|}{n}\le\dfrac{1}{n}$

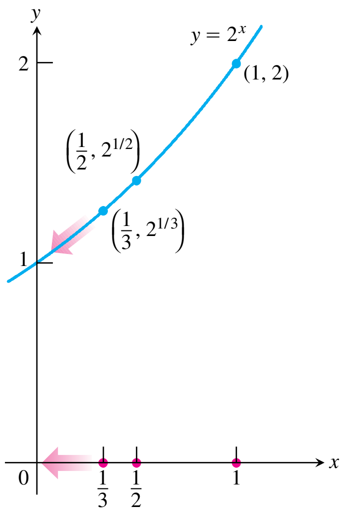
(β) $\dfrac{1}{2^n}\to 0$ διότι $\dfrac{1}{2^n}\le\dfrac{1}{n}$

(γ) $(-1)^n\dfrac{1}{n}\to 0$ διότι $\left|(-1)^n\dfrac{1}{n}\right|\le\dfrac{1}{n}.$

Τα Θεωρήματα 1 και 2 βρίσκουν πολλές εφαρμογές χάρη σε ένα τρίτο θεώρημα που μας λέει ότι αν εφαρμόσουμε μια συνεχή συνάρτηση σε μια συγκλίνουσα ακολουθία, θα προκύψει μια ακολουθία που επίσης συγκλίνει. Παραθέτουμε εδώ το θεώρημα χωρίς απόδειξη (Ασκηση 70).

Θεώρημα 3

Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to L$ και η f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο L και ορισμένη για κάθε a_n, τότε $f(a_n) \to f(L)$.



Σχημα 8.4 Καθώς $n \to \infty$, $1/n \to 0$ και $2^{1/n} \to 2^0$.

Παράδειγμα 7 Εφαρμογή του Θεωρήματος 3

Δείξτε ότι $\sqrt{(n+1)/n} \to 1$.

Λύση Γνωρίζουμε ότι $(n+1)/n \to 1$. Θέτοντας $f(x) = \sqrt{x}$ και $L = 1$ στο Θεώρημα 3 έχουμε $\sqrt{(n+1)/n} \to \sqrt{1} = 1$.

Παράδειγμα 8 Η ακολουθία $\{2^{1/n}\}$

Η ακολουθία $\{1/n\}$ συγκλίνει στο 0. Θέτοντας $a_n = 1/n$, $f(x) = 2^x$, και $L = 0$ στο Θεώρημα 3, βλέπουμε ότι $2^{1/n} = f(1/n) \to f(L) = 2^0 = 1$. Η ακολουθία $\{2^{1/n}\}$ συγκλίνει στο 1 (Σχήμα 8.4).

Κάνοντας χρήση του κανόνα του l'Hôpital

Το θεώρημα που ακολουθεί μας επιτρέπει να εφαρμόζουμε τον κανόνα του l'Hôpital προκειμένου να βρούμε τα όρια μερικών ακολουθιών. Το θεώρημα αντιστοιχίζει τιμές μιας (συνήθως διαφορίσιμης) συνάρτησης με τις τιμές δεδομένης ακολουθίας.

Θεώρημα 4

Έστω $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη για κάθε $x \geq n_0$ και $\{a_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n = f(n)$ για $n \geq n_0$. Στην περίπτωση αυτή

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Παράδειγμα 9 Εφαρμογή του κανόνα του l'Hôpital

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Λύση Η συνάρτηση $(\ln x)/x$ ορίζεται για κάθε $x \geq 1$ και για θετικούς ακεραίους παίρνει ίδιες τιμές με την ακολουθία. Συνεπώς, βάσει του Θεωρήματος 4, το $\lim_{n \to \infty} (\ln n)/n$ θα ισούται με το $\lim_{x \to \infty} (\ln x)/x$ εφόσον το τελευταίο υπάρχει. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του l'Hôpital μία φορά παίρνουμε

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lim_{n \to \infty} (\ln n)/n = 0$.

Όταν χρησιμοποιούμε τον κανόνα του l'Hôpital για την εύρεση του ορίου μιας ακολουθίας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο n παίρνει συνεχείς πραγματικές τιμές, και να παραγωγίσουμε ως προς n. Δείτε σχετικά το Παράδειγμα 10.

Παράδειγμα 10 Εφαρμογή του κανόνα του l'Hôpital

Να βρεθεί το

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{5n}.$$

Λύση Εφαρμόζοντας τον κανόνα του l'Hôpital (παραγωγίζοντας ως προς n),

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{5n} &= \lim_{n \to \infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Απόδειξη Θεωρήματος 4 Έστω ότι $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$. Τότε για κάθε θετικό αριθμό ϵ θα υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε x,

$$x > M \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Έστω N ακέραιος, μεγαλύτερος του M και μεγαλύτερος ή ίσος του n_0. Τότε

$$n > N \ \Rightarrow\ a_n = f(n) \qquad \text{και} \qquad |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon.$$

Παράδειγμα 11 Εφαρμογή του κανόνα του l'Hôpital για τον προσδιορισμό σύγκλισης

Συγκλίνει η ακολουθία με n-οστό όρο

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n;$$

Αν ναι, να βρεθεί το $\lim_{n \to \infty} a_n$.

Λύση Το όριο καταλήγει στην απροσδιόριστη μορφή 1^∞. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του l'Hôpital στη μορφή $\infty \cdot 0$, η οποία προκύπτει από την παραπάνω αν πάρουμε τον φυσικό λογάριθμο του a_n:

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\ &= n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \ln a_n &= \lim_{n \to \infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right) && \infty \cdot 0 \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} && \frac{0}{0} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} && \text{Κανόνας του l'Hôpital} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2. \end{aligned}$$

Εφόσον $\ln a_n \to 2$ και η $f(x) = e^x$ είναι συνεχής, το Θεώρημα 3 μας λέει ότι

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^2.$$

Συνεπώς, η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο e^2.

Όρια που απαντούν συχνά

Μερικά από τα όρια που απαντούν συχνότερα παρατίθενται στον Πίνακα 8.1. Το πρώτο από αυτά το συναντήσαμε στο Παράδειγμα 9. Τα δύο επόμενα προκύπτουν παίρνοντας λογαρίθμους και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3 (Ασκήσεις 67 και 68). Τα υπόλοιπα όρια αποδεικνύονται στο Παράρτημα 7.

Πίνακας 8.1

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$
4. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (τυχόν x)
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (τυχόν x)

Στους τύπους (3) έως (6), το x μένει σταθερό καθώς $n \to \infty$.

Παράδειγμα 12 Όρια του Πίνακα 8.1

(α) $\frac{\ln (n^2)}{n} = \frac{2 \ln n}{n} \to 2 \cdot 0 = 0$ — Τύπος 1

(β) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \to (1)^2 = 1$ — Τύπος 2

(γ) $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n}(n^{1/n}) \to 1 \cdot 1 = 1$ — Τύπος 3 για $x = 3$ και Τύπος 2

(δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ — Τύπος 4 για $x = -\frac{1}{2}$

(ε) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ — Τύπος 5 για $x = -2$

(στ) $\frac{100^n}{n!} \to 0$ — Τύπος 6 για $x = 100$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.1

Εύρεση όρων ακολουθίας

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-4 δίνεται ο τύπος του n-οστού όρου a_n μιας ακολουθίας $\{a_n\}$. Να βρεθούν οι τιμές των a_1, a_2, a_3, και a_4.

1. $a_n = \frac{1-n}{n^2}$

2. $a_n = \frac{1}{n!}$

3. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

4. $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$

Εύρεση τύπων ακολουθιών

Στις Ασκήσεις 5-12, να βρεθεί ο τύπος του n-οστού όρου της ακολουθίας.

5. Η ακολουθία $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ — Μονάδες με εναλλασσόμενα πρόσημα

6. Η ακολουθία $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$ — Τετράγωνα θετικών ακεραίων, με εναλλασσόμενα πρόσημα

7. Η ακολουθία $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$ — Τετράγωνα θετικών ακεραίων ελαττωμένα κατά 1

8. Η ακολουθία $-3, -2, -1, 0, 1, \ldots$ — Οι ακέραιοι από το -3 και εφεξής

9. Η ακολουθία $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ — Περιττοί θετικοί ακέραιοι ανά δύο

10. Η ακολουθία $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$ — Άρτιοι θετικοί ακέραιοι ανά δύο

11. Η ακολουθία $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ — Εναλλάξ 1 και 0

12. Η ακολουθία $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \ldots$ — Κάθε θετικός ακέραιος επαναλαμβανόμενος

Εύρεση ορίων

Ποιες από τις ακολουθίες $\{a_n\}$ στις Ασκήσεις 13-56 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Να βρεθεί το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας.

13. $a_n = 2 + (0{,}1)^n$

14. $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

15. $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

16. $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

17. $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n - 1}$

18. $a_n = \dfrac{n + 3}{n^2 + 5n + 6}$

19. $a_n = 1 + (-1)^n$

20. $a_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

21. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

22. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n - 1}$

23. $a_n = \sqrt{\dfrac{2n}{n + 1}}$

24. $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right)$

25. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

26. $a_n = \dfrac{\sin^2 n}{2^n}$

27. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

28. $a_n = \dfrac{\ln (n + 1)}{\sqrt{n}}$

29. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{1/n}}$

30. $a_n = \ln n - \ln (n + 1)$

31. $a_n = \left(1 + \dfrac{7}{n}\right)^n$

32. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

33. $a_n = \sqrt[n]{10n}$

34. $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

35. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

36. $a_n = (n + 4)^{1/(n+4)}$

37. $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

38. $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$

39. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (*Υπόδειξη*: Συγκρίνετε με το $1/n$.)

40. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

41. $a_n = \dfrac{n!}{10^{6n}}$

42. $a_n = \dfrac{n!}{2^n \cdot 3^n}$

43. $a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$

44. $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

45. $a_n = \left(\dfrac{3n + 1}{3n - 1}\right)^n$

46. $a_n = \left(\dfrac{n}{n + 1}\right)^n$

47. $a_n = \left(\dfrac{x^n}{2n + 1}\right)^{1/n}, \quad x > 0$

48. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

49. $a_n = \dfrac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!}$

50. $a_n = \dfrac{n^2}{2n - 1} \sin \dfrac{1}{n}$

51. $a_n = \tan^{-1} n$

52. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \tan^{-1} n$

53. $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$

54. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

55. $a_n = \dfrac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

56. $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

Διερεύνηση ορίων με κομπιουτεράκι

Στις Ασκήσεις 57-60, δοκιμάστε να βρείτε με κομπιουτεράκι την τιμή του N που ικανοποιεί την εκάστοτε ανισότητα για $n > N$. Δεδομένου ότι η κάθε ανισότητα προέρχεται από τον αυστηρό ορισμό του ορίου κάποιας ακολουθίας, βρείτε ποια είναι η ακολουθία αυτή και σε ποιο όριο συγκλίνει.

57. $|\sqrt[n]{0{,}5} - 1| < 10^{-3}$

58. $|\sqrt[n]{n} - 1| < 10^{-3}$

59. $(0{,}9)^n < 10^{-3}$

60. $(2^n/n!) < 10^{-7}$

Θεωρία και παραδείγματα

61. Δίνεται η εξής ακολουθία ρητών αριθμών:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a + 2b}{a + b}, \ldots.$$

Εδώ οι αριθμητές από μόνοι τους σχηματίζουν μια ακολουθία, οι παρονομαστές επίσης σχηματίζουν μια ακολουθία, και τέλος οι λόγοι τους σχηματίζουν μια τρίτη ακολουθία. Έστω x_n και y_n αντίστοιχα, ο αριθμητής και ο παρονομαστής του n-οστού κλάσματος $r_n = x_n/y_n$.

(α) Επιβεβαιώστε ότι $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$, $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$, και γενικότερα, ότι αν $a^2 - 2b^2 = -1$ ή $+1$, τότε

$$(a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = +1 \quad \text{ή} \quad -1,$$

αντίστοιχα.

(β) Τα κλάσματα $r_n = x_n/y_n$ τείνουν σε κάποιο όριο καθώς το n αυξάνεται. Ποιο είναι αυτό; (*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το ερώτημα (α) για να δείξετε ότι $r_n^2 - 2 = \pm(1/y_n)^2$ και ότι το y_n δεν είναι μικρότερο του n.)

62. (α) Έστω ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε x στο $[0, 1]$ και ότι $f(0) = 0$. Έστω ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ ορίζεται από τον κανόνα $a_n = nf(1/n)$. Δείξτε ότι $\lim_{n \to \infty} a_n = f'(0)$.

Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα (α) για να βρείτε τα όρια των εξής ακολουθιών $\{a_n\}$.

(β) $a_n = n \tan^{-1} \dfrac{1}{n}$

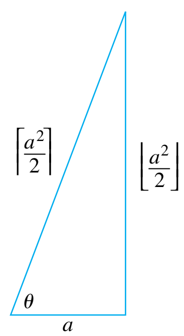
(γ) $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

(δ) $a_n = n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$

63. *Τριάδες πυθαγόρειων αριθμών* Οι αριθμοί a, b, και c καλούνται **πυθαγόρεια τριάδα** αν ισχύει $a^2 + b^2 = c^2$. Έστω a ένας περιττός θετικός ακέραιος και ότι οι

$$b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor \quad \text{και} \quad c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil$$

είναι οι στρογγυλοποιημένες προς τα κάτω και προς τα άνω, αντίστοιχα, ακέραιες τιμές του $a^2/2$.



(α) Δείξτε ότι $a^2 + b^2 = c^2$. (*Υπόδειξη*: Θέστε $a = 2n + 1$ και εκφράστε τα b και c συναρτήσει του n.)

(β) Με απευθείας υπολογισμό, ή με τη βοήθεια του σχήματος, βρείτε την τιμή του

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil}.$$

64. *Η n-οστή ρίζα του n!*

(α) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} (2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ και συνεπώς, βάσει του προσεγγιστικού τύπου του Stirling [Κεφάλαιο 7, Επιπρόσθετη Άσκηση 50, ερώτημα (α)], ότι

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \qquad \text{για μεγάλες τιμές του } n.$$

(β) Ελέγξτε την προσέγγιση που κάνατε στο (α) για $n = 40, 50, 60, \ldots$ μέχρι όσο σας επιτρέπει το κομπιουτεράκι σας.

65. **(α)** Αν $\lim_{n\to\infty} (1/n^c) = 0$ για τυχούσα θετική σταθερά c, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0.$$

(β) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} (1/n^c) = 0$ όπου c τυχούσα θετική σταθερά. (*Υπόδειξη*: Αν $\epsilon = 0{,}001$ και $c = 0{,}04$, τότε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το N έτσι ώστε $|1/n^c - 0| < \epsilon$ για $n > N$;)

66. *Το «θεώρημα... φερμουάρ»* Αποδείξτε το «θεώρημα φερμουάρ» για ακολουθίες: Αν οι $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ συγκλίνουν ταυτόχρονα στο L, τότε και η ακολουθία

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

θα συγκλίνει στο L.

67. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

68. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \ (x > 0)$.

69. Αποδείξτε το Θεώρημα 2.

70. Αποδείξτε το Θεώρημα 3.

71. *Οι όροι συγκλίνουσας ακολουθίας προσεγγίζουν αυθαίρετα ο ένας στον άλλο* Δείξτε ότι αν η $\{a_n\}$ είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία, τότε σε κάθε θετικό αριθμό ϵ θα αντιστοιχεί ένας ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε m και n, να ισχύει

$$m > N \quad \text{και} \quad n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

72. *Μοναδικότητα ορίων* Δείξτε ότι το όριο κάθε ακολουθίας είναι μοναδικό. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι αν L_1 και L_2 είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_n \to L_1$ και $a_n \to L_2$, τότε $L_1 = L_2$.

73. *Σύγκλιση και απόλυτη τιμή* Δείξτε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο 0 αν και μόνο αν η ακολουθία των απόλυτων τιμών $\{|a_n|\}$ συγκλίνει στο 0.

74. *Βελτίωση παραγωγής* Σύμφωνα με πρωτοσέλιδο άρθρο στη *Wall Street Journal* της 15ης Δεκεμβρίου 1992, για ένα τυπικό όχημα που κατασκευάζει η αυτοκινητοβιομηχανία Ford Motor Company απαιτείται χρόνος εργασίας $7\frac{1}{4}$ h στην πρέσα, σε σχέση με αντίστοιχο χρόνο 15 h το 1980. Οι ιαπωνικές εταιρείες χρειάζονται για την ίδια εργασία μόλις $3\frac{1}{2}$ h.

Η βελτίωση της αποδοτικότητας στη Ford σε σχέση με το 1980 σημαίνει μια ετήσια μείωση του χρόνου εργασίας κατά 6%. Αν ο ρυθμός αυτός συνεχιστεί, τότε σε n έτη από τώρα το προσωπικό της Ford θα χρειάζεται για την ίδια εργασία χρόνο

$$S_n = 7{,}25(0{,}94)^n$$

ωρών στην πρέσα για ένα τυπικό όχημα. Αν υποτεθεί ότι οι Ιάπωνες ανταγωνιστές εξακολουθήσουν να χρειάζονται $3\frac{1}{2}$ h ανά όχημα, τότε σε πόσα χρόνια θα τους φτάσει η Ford; Λύστε το πρόβλημα με δύο τρόπους:

(α) Βρείτε τον πρώτο όρο της ακολουθίας $\{S_n\}$ που είναι μικρότερος ή ίσος του 3,5.

T **(β)** Παραστήστε γραφικά την $f(x) = 7{,}25(0{,}94)^x$ και χρησιμοποιήστε την εφαρμογή «Trace» του υπολογιστή γραφικών που διαθέτετε για να βρείτε το σημείο όπου η καμπύλη τέμνει την ευθεία $y = 3{,}5$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Έλεγχος σύγκλισης και απόκλισης

Με ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα για τις ακολουθίες των Ασκήσεων 75-84.

(α) Υπολογίστε και τοποθετήστε σε διάγραμμα τους πρώτους 25 όρους κάθε ακολουθίας. Η ακολουθία δείχνει να συγκλίνει ή να αποκλίνει; Αν συγκλίνει, τότε ποιο είναι το όριό της L;

(β) Αν συγκλίνει η ακολουθία, βρείτε έναν ακέραιο N τέτοιον ώστε $|a_n - L| \le 0{,}01$ για $n \ge N$. Το ίδιο ερώτημα για $|a_n - L| \le 0{,}0001$.

75. $a_n = \sqrt[n]{n}$

76. $a_n = \left(1 + \dfrac{0{,}5}{n}\right)^n$

77. $a_n = \sin n$

78. $a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$

79. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

80. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

81. $a_n = (0{,}9999)^n$

82. $a_n = 123456^{1/n}$

83. $a_n = \dfrac{8^n}{n!}$

84. $a_n = \dfrac{n^{41}}{19^n}$

8.2 Υποακολουθίες, φραγμένες ακολουθίες και η μέθοδος Picard

Υποακολουθίες • Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες • Αναδρομικά οριζόμενες ακολουθίες • Η μέθοδος του Picard για την εύρεση ριζών

Η παρούσα ενότητα συνεχίζει τη μελέτη της σύγκλισης και της απόκλισης ακολουθιών.

Υποακολουθίες

Αν ο όροι μιας ακολουθίας εμφανίζονται σε άλλη ακολουθία με την ίδια διάταξη, καλούμε την πρώτη ακολουθία **υποακολουθία** της δεύτερης.

Παράδειγμα 1 Υποακολουθίες της ακολουθίας θετικών ακεραίων

(α) Η υποακολουθία των άρτιων ακεραίων: $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$

(β) Η υποακολουθία των περιττών ακεραίων: $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$

(γ) Η υποακολουθία των πρώτων αριθμών: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Οι υποακολουθίες έχουν σημασία για δύο λόγους:

1. Αν μια ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο L, τότε όλες οι υποακολουθίες της συγκλίνουν στο L. Αν γνωρίζουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει, τότε διευκολυνόμαστε στην εύρεση ή στην εκτίμηση του ορίου μιας υποακολουθίας της που μας ενδιαφέρει.
2. Αν κάποια υποακολουθία μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ αποκλίνει ή αν δύο υποακολουθίες της έχουν διαφορετικά όρια, τότε η $\{a_n\}$ αποκλίνει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\{(-1)^n\}$ αποκλίνει διότι η υποακολουθία $-1, -1, -1, \ldots$ των όρων περιττού δείκτη (δηλ. του 1ου, 3ου, 5ου, ... όρου) συγκλίνει στο -1, ενώ η υποακολουθία $1, 1, 1, \ldots$ των άρτιου δείκτη όρων της συγκλίνει στο 1, σε διαφορετικό δηλαδή όριο.

Η σύγκλιση ή απόκλιση μιας ακολουθίας δεν έχει καμία σχέση με το πώς συμπεριφέρονται οι πρώτοι όροι της ακολουθίας. Εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της ουράς της.

Οι υποακολουθίες μάς παρέχουν επίσης έναν νέο τρόπο μελέτης της σύγκλισης. Η **ουρά** μιας ακολουθίας είναι μια υποακολουθία της που περιέχει όλους τους όρους της πέραν κάποιου N-οστού όρου. Δηλαδή, η ουρά είναι ένα σύνολο $\{a_n | n \geq N\}$. Έτσι, ένας άλλος τρόπος για να δηλώσουμε ότι a_n 1 L είναι να πούμε ότι κάθε διάστημα εύρους $\pm\epsilon$ περί το L περιέχει την ουρά της ακολουθίας.

Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός Μη φθίνουσα, μη αύξουσα, μονότονη ακολουθία

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ με την ιδιότητα $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε n καλείται **μη φθίνουσα ακολουθία**· δηλαδή, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$.

Μια ακολουθία καλείται **μη αύξουσα** αν $a_n \geq a_{n+1}$ για κάθε n. Μια ακολουθία που είναι είτε μη φθίνουσα είτε μη αύξουσα, καλείται **μονότονη.**

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Fibonacci
(1170-1240)

Παράδειγμα 2 Μονότονες ακολουθίες

(α) Η ακολουθία 1, 2, 3, . . . , n, . . . των φυσικών αριθμών είναι μη φθίνουσα.

(β) Η ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ είναι μη φθίνουσα.

(γ) Η ακολουθία $\frac{3}{8}, \frac{3}{9}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{3}{n+7}, \ldots$ είναι μη αύξουσα.

(δ) Η σταθερή ακολουθία $\{3\}$ είναι ταυτόχρονα μη φθίνουσα και μη αύξουσα.

Παράδειγμα 3 Μια μη φθίνουσα ακολουθία

Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

είναι μη φθίνουσα.

Λύση

(α) Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$, $a_n \leq a_{n+1}$· δηλαδή, ότι

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}.$$

Η φορά της ανισότητας διατηρείται αν πολλαπλασιάσουμε χιαστί αριθμητές και παρονομαστές:

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} &\Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n}{n+2}\\ &\Leftrightarrow (n-1)(n+2) \leq n(n+1)\\ &\Leftrightarrow n^2+n-2 \leq n^2+n\\ &\Leftrightarrow -2 \leq 0.\end{aligned}$$

Εφόσον αληθεύει ότι $-2 \leq 0$, θα ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$ και άρα η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι μη φθίνουσα.

(β) Ένας άλλος τρόπος για να δείξουμε ότι η $\{a_n\}$ είναι μη φθίνουσα είναι να ορίσουμε την $f(n) = a_n$ και να δείξουμε ότι $f'(x) \geq 0$. Στο εδώ παράδειγμα, $f(n) = (n-1)/(n+1)$, οπότε

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\\ &= \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} \qquad \text{Παράγωγος πηλίκου}\\ &= \frac{2}{(x+1)^2} > 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η f είναι αύξουσα συνάρτηση, άρα $f(n+1) \geq f(n)$, δηλ. $a_{n+1} \geq a_n$.

Ορισμός **Άνω φραγμένη, άνω φράγμα, κάτω φραγμένη, κάτω φράγμα, φραγμένη ακολουθία**

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι **άνω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $a_n \leq M$ για κάθε n. Ο αριθμός M είναι τότε ένα **άνω φράγμα** της $\{a_n\}$. Η ακολουθία είναι **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός m τέτοιος ώστε $m \leq a_n$ για κάθε n. Ο αριθμός m είναι τότε ένα **κάτω φράγμα** της $\{a_n\}$. Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω και κάτω φραγμένη, καλείται **φραγμένη ακολουθία.**

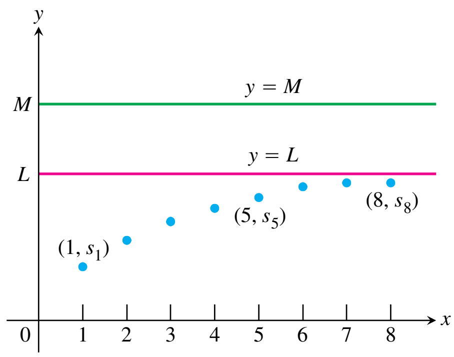
Παράδειγμα 4 Εφαρμογή του ορισμού φραγμένης ακολουθίας

(α) Η ακολουθία $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ δεν έχει άνω φράγμα, αλλά είναι κάτω φραγμένη από το $m = 1$.

(β) Η ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ είναι άνω φραγμένη από το $M = 1$ και κάτω φραγμένη από το $m = \frac{1}{2}$.

(γ) Η ακολουθία $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.

Γνωρίζουμε ότι μια φραγμένη ακολουθία δεν συγκλίνει κατ' ανάγκην, διότι η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη $(-1 \leq a_n \leq 1)$ αλλά αποκλίνουσα. Ούτε μια μονότονη ακολουθία συγκλίνει αναγκαστικά, διότι η ακολουθία των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ είναι μονότονη αλλά αποκλίνει. Αν μια ακολουθία είναι όμως *ταυτόχρονα* φραγμένη και μονότονη, τότε οφείλει να συγκλίνει. Αυτό είναι και το επόμενο θεώρημα.



ΣΧΗΜΑ 8.5 Αν οι όροι μιας μη φθίνουσας ακολουθίας έχουν άνω φράγμα M, θα συγκλίνουν σε κάποιο όριο $L \leq M$.

Θεώρημα 5 **Θεώρημα μονότονων ακολουθιών**

Κάθε φραγμένη μονότονη ακολουθία συγκλίνει.

Παρ' όλο που δεν θα αποδείξουμε το Θεώρημα 5, το Σχήμα 8.5 πείθει για την ισχύ του θεωρήματος στην περίπτωση μιας μη φθίνουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας. Εφόσον η ακολουθία είναι μη φθίνουσα και δεν μπορεί να υπερβεί το M, οι όροι της «συνωστίζονται» προς κάποιον αριθμό (το όριο) $L \leq M$.

Παράδειγμα 5 Εφαρμογή του θεωρήματος 5

(α) Η μη φθίνουσα ακολουθία $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ συγκλίνει διότι είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό $M = 1$. Μάλιστα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + (1/n)} \\ &= \frac{1}{1+0} \\ &= 1,\end{aligned}$$

οπότε η ακολουθία συγκλίνει στο όριο $L = 1$.

(β) Η μη αύξουσα ακολουθία $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό $m = 0$ και συνεπώς συγκλίνει. Το όριό της είναι $L = 0$.

Οι αναδρομικοί τύποι απαντούν συχνά σε προγράμματα υπολογιστών και σε ρουτίνες αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, π.χ. στη μέθοδο του Euler.

Συμβολισμός παραγοντικού

Ο συμβολισμός $n!$ («n παραγοντικό») δηλώνει το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ των ακεραίων από 1 έως n. Ισχύει $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Έτσι, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ και $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120$. Ορίζουμε ότι το 0! ισούται με 1. Η τιμή του παραγοντικού αυξάνεται ακόμη πιο γρήγορα από το εκθετικό, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

n	e^n (περίπου)	$n!$
1	3	1
5	148	120
10	22.026	3.628.800
20	$4{,}9 \times 10^8$	$2{,}4 \times 10^{18}$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία

Charles Émile Picard (1856-1941)

Αναδρομικά οριζόμενες ακολουθίες

Μέχρι τώρα, υπολογίζαμε τον τυχόντα όρο a_n μιας ακολουθίας εισάγοντας σε κάποιον τύπο το n. Πολλές φορές, ωστόσο, μια ακολουθία ορίζεται **αναδρομικά,** οπότε μας δίνεται

1. Ο πρώτος ή οι πρώτοι όροι της, και
2. Ένας κανόνας, που καλείται **αναδρομικός τύπος,** και που επιτρέπει τον υπολογισμό οποιουδήποτε όρου αν γνωρίζουμε τους προηγούμενους όρους της ακολουθίας.

Παράδειγμα 6 Αναδρομική κατασκευή ακολουθιών

(α) Οι προτάσεις $a_1 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + 1$ ορίζουν την ακολουθία $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ των θετικών ακεραίων. Για $a_1 = 1$, έχουμε $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$, κ.ο.κ.

(β) Οι προτάσεις $a_1 = 1$ και $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ορίζουν την ακολουθία $1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$ των παραγοντικών. Για $a_1 = 1$, έχουμε $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$, κ.ο.κ.

(γ) Οι προτάσεις $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, και $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ορίζουν την ακολουθία $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ των **αριθμών Fibonacci.** Για $a_1 = 1$ και $a_2 = 1$, έχουμε $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = 3 + 2 = 5$, κ.ο.κ.

(δ) Όπως μπορούμε να δούμε από την εφαρμογή της μεθόδου του Νεύτωνα, οι προτάσεις $x_0 = 1$ και $x_{n+1} = x_n - [(\sin x_n - x_n^2)/(\cos x_n - 2x_n)]$ ορίζουν μια ακολουθία που συγκλίνει στη λύση της εξίσωσης $\sin x - x^2 = 0$.

Η μέθοδος του Picard για την εύρεση ριζών

Το πρόβλημα επίλυσης της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης λύσης της

$$g(x) = f(x) + x = x,$$

που προκύπτει αν προσθέσουμε το x κατά μέλη στην Εξίσωση (1). Έτσι φέρνουμε την Εξίσωση (1) σε μορφή κατάλληλη για επίλυση με υπολογιστή με τη χρήση μιας πολύ χρήσιμης μεθόδου που καλείται **μέθοδος του Picard.**

Αν το πεδίο ορισμού της g περιέχει το πεδίο τιμών της g, μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού και να εφαρμόσουμε κατ' εξακολούθηση την g, παίρνοντας διαδοχικά

$$x_1 = g(x_0), \qquad x_2 = g(x_1), \qquad x_3 = g(x_2), \ldots .$$

Αν πληρούνται κάποιες απλές προϋποθέσεις που περιγράφουμε πιο κάτω, η ακολουθία που παράγεται από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = g(x_n)$ θα συγκλίνει σε σημείο x για το οποίο ισχύει $g(x) = x$. Το σημείο αυτό είναι η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ διότι

$$f(x) = g(x) - x = x - x = 0.$$

Το σημείο x για το οποίο ισχύει $g(x) = x$ καλείται **σταθερό σημείο** της g. Από την τελευταία εξίσωση είναι φανερό ότι τα σταθερά σημεία της g δεν είναι παρά οι ρίζες της f.

Παράδειγμα 7 Έλεγχος της μεθόδου του Picard

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x + 3 = x.$$

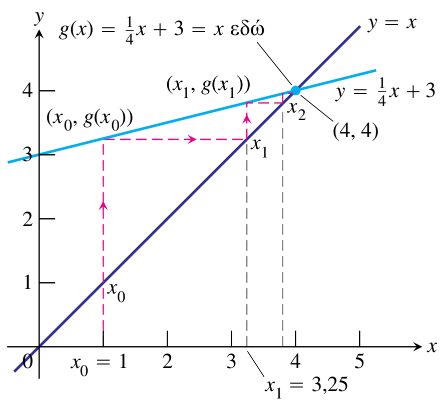
Λύση Γνωρίζουμε (εκτελώντας τις πράξεις) ότι η ζητούμενη λύση είναι $x = 4$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Picard, οπότε θέτουμε

$$g(x) = \frac{1}{4}x + 3,$$

επιλέγουμε ένα σημείο εκκινήσεως, π.χ. $x_0 = 1$, και υπολογίζουμε τους αρχικούς όρους της ακολουθίας $x_{n+1} = g(x_n)$. Στον Πίνακα 8.2 παρατίθενται τα αποτελέσματα. Μέσα σε 10 βήματα, η λύση της αρχικής εξίσωσης βρίσκεται με σφάλμα μικρότερο του 3×10^{-6}.

Πίνακας 8.2 Διαδοχικές τιμές της $g(x) = (1/4)x + 3$, με τιμή εκκινήσεως τη $x_0 = 1$

x_n	$x_{n+1} = g(x_n) = (1/4)\,x_n + 3$
$x_0 = 1$	$x_1 = g(x_0) = (1/4)(1) + 3 = 3{,}25$
$x_1 = 3{,}25$	$x_2 = g(x_1) = (1/4)(3{,}25) + 3 = 3{,}8125$
$x_2 = 3{,}8125$	$x_3 = g(x_2) = 3{,}9531\ 25$
$x_3 = 3{,}9531\ 25$	$x_4 = 3{,}9882\ 8125$
.	$x_5 = 3{,}9970\ 70313$
.	$x_6 = 3{,}9992\ 67578$
.	$x_7 = 3{,}9998\ 16895$
	$x_8 = 3{,}9999\ 54224$
	$x_9 = 3{,}9999\ 88556$
	$x_{10} = 3{,}9999\ 97139$
	$\vdots$



Σχημα 8.6 Η λύση κατά Picard της εξίσωσης $g(x) = (1/4)x + 3 = x$. (Παράδειγμα 7)

Το Σχήμα 8.6 δείχνει τη γεωμετρία της διαδικασίας επίλυσης. Ξεκινούμε με $x_0 = 1$ και υπολογίζουμε την πρώτη τιμή $g(x_0)$, την οποία επανεισάγουμε στον αναδρομικό τύπο ως δεύτερη x-τιμή x_1. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη δεύτερη y-τιμή $g(x_1)$ την οποία επανεισάγουμε ως τρίτη x-τιμή x_2, κ.ο.κ. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία ξεκινάει από το $x_0 = 1$, κινείται κατακόρυφα μέχρι το σημείο $(x_0, g(x_0)) = (x_0, x_1)$, έπειτα οριζόντια έως το (x_1, x_1), και πάλι κατακόρυφα έως το $(x_1, g(x_1))$, κ.ο.κ. Έτσι η διαδρομή συγκλίνει στο σημείο όπου το γράφημα της g τέμνει την ευθεία $y = x$. Δηλαδή στο ζητούμενο σημείο όπου $g(x) = x$.

Παράδειγμα 8 Χρήση της μεθόδου του Picard

Να λυθεί η εξίσωση $\cos x = x$.

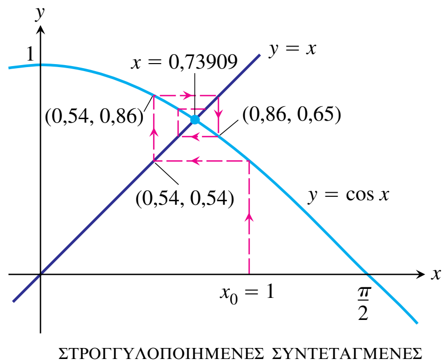
Λύση Θέτουμε $g(x) = \cos x$, επιλέγουμε ως τιμή εκκινήσεως τη $x_0 = 1$, και χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = g(x_n)$, οπότε

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = \cos 1, \qquad x_2 = \cos(x_1), \ldots .$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τους πρώτους 50 περίπου όρους με ένα κομπιουτεράκι (γωνίες σε ακτίνια, «radian mode») πληκτρολογώντας το 1 και πατώντας κατ' επανάληψη το πλήκτρο υπολογισμού συνημιτόνου («cos»). Ο εμφανιζόμενος στην οθόνη αριθμός παύει να αλλάζει μόλις η εξίσωση $\cos x = x$ ικανοποιηθεί με ακρίβεια τόσων δεκαδικών ψηφίων όσα χωράνε στην οθόνη.

Δοκιμάστε και μόνοι σας. Καθώς πατάτε το πλήκτρο του συνημιτόνου, οι διαδοχικές προσεγγίσεις κείνται εναλλάξ εκατέρωθεν του σταθερού σημείου $x = 0.739085133 \ldots$.

Το Σχήμα 8.7 δείχνει ότι οι τιμές ταλαντώνονται με τον παραπάνω τρόπο λόγω της σπειροειδούς διαδρομής προς το σταθερό σημείο που διαγράφει το σημείο που προσεγγίζει τη λύση.



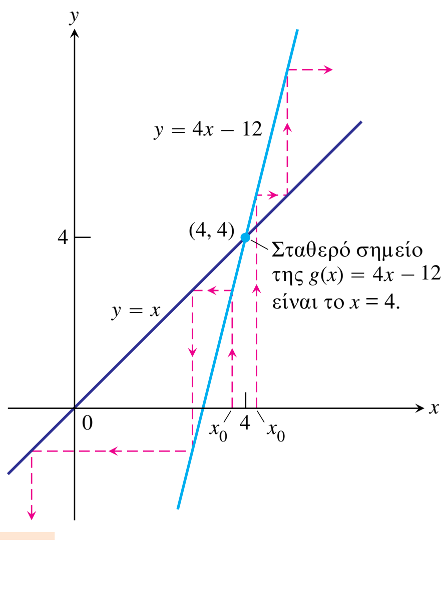
Σχημα 8.7 Η λύση της $\cos x = x$ με τη μέθοδο του Picard και σημείο εκκίνησης το $x_0 = 1$. (Παράδειγμα 8)

Παράδειγμα 9 Η μέθοδος του Picard ενδέχεται να μην μπορεί να μας δώσει τη λύση μιας εξίσωσης

Η μέθοδος του Picard δεν θα μας δώσει τη λύση της εξίσωσης

$$g(x) = 4x - 12 = x.$$

Όπως δείχνει το Σχήμα 8.8, όποια τιμή επιλέξουμε για το x_0 πλην της ίδιας της λύσης $x_0 = 4$, παράγει μια αποκλίνουσα ακολουθία που απομακρύνεται από τη λύση που ζητούμε.



Σχημα 8.8 Η μέθοδος του Picard εφαρμοζόμενη στην εξίσωση $g(x) = 4x - 12$ δεν θα βρει το σταθερό σημείο, παρά μόνο αν το x_0 είναι το ίδιο το σταθερό σημείο 4. (Παράδειγμα 9)

Η αποτυχία της μεθόδου στο Παράδειγμα 9 οφείλεται στο ότι η κλίση της ευθείας $y = 4x - 12$ υπερβαίνει το 1, που είναι η κλίση της $y = x$. Αντιθέτως, η διαδικασία που ακολουθήσαμε στο Παράδειγμα 7 πέτυχε διότι η κλίση της $y = (1/4)x + 3$ ήταν (κατ' απόλυτη τιμή) μικρότερη του 1. Ένα θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού μάς λέει ότι αν η $g'(x)$ είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα I που περιέχει τη λύση της εξίσωσης $g(x) = x$ και αν $|g'(x)| < 1$ στο I, τότε κάθε τιμή εκκινήσεως x_0 που επιλέγουμε στο εσωτερικό του I οδηγεί στη λύση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.2

Εύρεση όρων αναδρομικά οριζόμενης ακολουθίας

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-6 δίνονται ο πρώτος ή οι δύο πρώτοι όροι μιας ακολουθίας, καθώς και ένας αναδρομικός τύπος υπολογισμού των υπόλοιπων όρων. Να γραφούν οι πρώτοι δέκα όροι κάθε ακολουθίας.

1. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (1/2^n)$

2. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n/(n+1)$

3. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1} a_n/2$

4. $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = na_n/(n+1)$

5. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

6. $a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}/a_n$

T **7.** *Ακολουθίες που ορίζονται με τη μέθοδο του Νεύτωνα* Η μέθοδος του Νεύτωνα, εφαρμοζόμενη σε μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x)$, παίρνει ως τιμή εκκινήσεως κάποιο x_0 από το οποίο κατασκευάζει μια ακολουθία αριθμών $\{x_n\}$ που υπό κατάλληλες προϋποθέσεις συγκλίνει σε κάποιο σημείο μηδενισμού της f. Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(α) Να δειχθεί ότι ο αναδρομικός τύπος για την $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$, μπορεί να γραφεί ως $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Με τιμή εκκινήσεως $x_0 = 1$ και $a = 3$, υπολογίστε διαδοχικούς όρους της ακολουθίας μέχρι ο εμφανιζόμενος αριθμός στο κομπιουτεράκι σας να πάψει να αλλάζει. Ποιος αριθμός προσεγγίζεται έτσι; Εξηγήστε.

T **8.** (*Συνέχεια της Άσκησης 7*) Επαναλάβετε το ερώτημα (β) της Άσκησης 7 με $a = 2$ αντί για $a = 3$.

T **9.** *Μέθοδος του Νεύτωνα* Οι παρακάτω ακολουθίες προέρχονται από τον αναδρομικό τύπο της μεθόδου του Νεύτωνα (δείτε την Άσκηση 7).

Συγκλίνουν οι ακολουθίες; Αν ναι, σε ποια τιμή; Σε κάθε περίπτωση, βρείτε πρώτα τη συνάρτηση f που παράγει την κάθε ακολουθία.

(α) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$

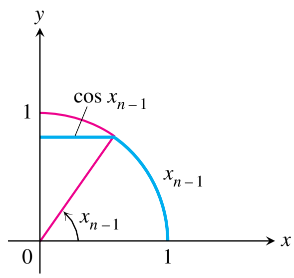
(β) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

(γ) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

T **10.** *Αναδρομικός ορισμός του $\pi/2$* Ξεκινώντας με $x_1 = 1$ και ορίζοντας τους επόμενους όρους της $\{x_n\}$ με τον κανόνα $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$, κατασκευάστε μια ακολουθία που συγκλίνει ταχύτατα στο $\pi/2$.

(α) Δοκιμάστε το.

(β) Χρησιμοποιήστε το ακόλουθο σχήμα για να εξηγήσετε γιατί η σύγκλιση είναι τόσο γρήγορη.



Θεωρία και παραδείγματα

Στις Ασκήσεις 11-14, προσδιορίστε αν οι ακολουθίες είναι μη φθίνουσες και/ή άνω φραγμένες.

11. $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

12. $a_n = \dfrac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

13. $a_n = \dfrac{2^n 3^n}{n!}$

14. $a_n = 2 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$

Ποιες από τις ακολουθίες στις Ασκήσεις 15-24 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

15. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

16. $a_n = n - \dfrac{1}{n}$

17. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

18. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n}$

19. $a_n = ((-1)^n + 1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

20. Ο πρώτος όρος μιας ακολουθίας είναι $x_1 = \cos(1)$. Οι επόμενοι όροι είναι $x_2 = x_1$ ή $\cos(2)$, οποιοσδήποτε εκ των δύο είναι μεγαλύτερος, και $x_3 = x_2$ ή $\cos(3)$, οποιοσδήποτε εκ των δύο είναι μεγαλύτερος (δηλ. σε δεξιότερη θέση στο γράφημα). Εν γένει,

$$x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\}.$$

21. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

22. $a_n = \dfrac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$

23. $a_n = \dfrac{1-4^n}{2^n}$

24. $a_n = \dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$

25. *Όρια και υποακολουθίες* Δείξτε ότι αν δύο υποακολουθίες μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ έχουν διαφορετικά όρια $L_1 \neq L_2$, τότε η $\{a_n\}$ αποκλίνει.

26. *Άρτιοι και περιττοί δείκτες* Για μια ακολουθία $\{a_n\}$, οι όροι άρτιου δείκτη δηλώνονται ως a_{2k} ενώ οι όροι περιττού δείκτη δηλώνονται ως a_{2k+1}. Δείξτε ότι αν a_{2k} l L και a_{2k+1} l L, τότε a_n l L.

Μέθοδος του Picard

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Picard για να λύσετε τις εξισώσεις στις Ασκήσεις 27-32.

27. $\sqrt{x} = x$

28. $x^2 = x$

29. $\cos x + x = 0$

30. $\cos x = x + 1$

31. $x - \sin x = 0{,}1$

32. $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{1+x}$ (*Υπόδειξη*: Υψώστε στο τετράγωνο.)

33. Λύνοντας την εξίσωση $\sqrt{x} = x$ με τη μέθοδο του Picard βρίσκουμε τη λύση $x = 1$ αλλά όχι τη λύση $x = 0$. Γιατί; (*Υπόδειξη*: Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τις $y = x$ και $y = \sqrt{x}$.)

34. Λύνοντας την εξίσωση $x^2 = x$ με τη μέθοδο του Picard για $|x_0| \neq 1$ βρίσκουμε τη λύση $x = 0$ αλλά όχι τη λύση $x = 1$. Γιατί; (*Υπόδειξη*: Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τις $y = x^2$ και $y = x$.)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Σύγκλιση αναδρομικά οριζόμενων ακολουθιών

Χρησιμοποιήστε κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας για να εκτελέσετε τα παρακάτω βήματα για τις ακολουθίες των Ασκήσεων 35 και 36.

(α) Υπολογίστε και κατόπιν τοποθετήστε σε διάγραμμα τους πρώτους 25 όρους της ακολουθίας. Δείχνει η ακολουθία να είναι άνω ή κάτω φραγμένη; Δείχνει να συγκλίνει ή να αποκλίνει; Αν συγκλίνει, τότε ποιο είναι το όριό της L;

(β) Αν η ακολουθία συγκλίνει, να βρεθεί ακέραιος N τέτοιος ωστε $|a_n - L| \leq 0{,}01$ για $n \geq N$. Το ίδιο ερώτημα για $|a_n - L| \leq 0{,}0001$.

35. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{5^n}$

36. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

37. *Ανατοκισμός, καταθέσεις, και αναλήψεις* Αν επενδύσετε ένα ποσό A_0 με σταθερό ετήσιο επιτόκιο r και ανατοκισμό m φορές το έτος, και αν ταυτόχρονα με κάθε ανατοκισμό κάνετε κατάθεση ενός σταθερού ποσού b (ή ανάληψη, αν $b < 0$), τότε το ποσό στον λογαριασμό σας μετά από $n+1$ ανατοκισμούς θα ισούται με

$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)A_n + b. \tag{2}$$

(α) Αν $A_0 = 1000$, $r = 0{,}02015$, $m = 12$, και $b = 50$, υπολογίστε και τοποθετήστε σε διάγραμμα τα πρώτα 100 σημεία (n, A_n). Πόσα χρήματα θα υπάρχουν στον λογαριασμό σας μετά από 5 χρόνια; Συγκλίνει η ακολουθία $\{A_n\}$; Είναι φραγμένη η $\{A_n\}$;

(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για $A_0 = 5000$, $r = 0{,}0589$, $m = 12$, και $b = -50$.

(γ) Αν επενδύσετε €5000 σε κλειστό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, ανατοκιζόμενο ανά τρίμηνο, και δεν κάνετε περαιτέρω καταθέσεις, τότε σε περίπου πόσα χρόνια θα υπάρχουν στον λογαριασμό σας €20.000; Το ίδιο ερώτημα για ετήσιο επιτόκιο 6,25%.

(δ) Μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε $k \geq 0$, η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από την Εξίσωση (2) ικανοποιεί τη σχέση

$$A_k = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^k \left(A_0 + \frac{mb}{r}\right) - \frac{mb}{r}. \tag{3}$$

Για τις τιμές των σταθερών A_0, r, m, και b που δίνονται στο ερώτημα (α), επαληθεύστε την παραπάνω πρόταση συγκρίνοντας τις τιμές των πρώτων 50 όρων των δύο ακολουθιών. Κατόπιν δείξτε με απευθείας αντικατάσταση ότι οι όροι της Εξίσωσης (3) ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο (2).

38. *Λογιστική εξίσωση διαφορών και διακλάδωση* Η αναδρομική σχέση

$$a_{n+1} = ra_n(1 - a_n)$$

καλείται **λογιστική εξίσωση διαφορών** και, για δοσμένη αρχική τιμή a_0, ορίζει τη λεγόμενη **λογιστική ακολουθία** $\{a_n\}$. Σε όλη την άσκηση, επιλέγουμε κάποιο a_0 στο διάστημα $0 < a_0 < 1$, π.χ. $a_0 = 0{,}3$.

(α) Έστω $r = 3/4$. Υπολογίστε και τοποθετήστε σε διάγραμμα τα σημεία (n, a_n) για τους πρώτους 100 όρους της ακολουθίας. Δείχνει να συγκλίνει η ακολουθία; Ποιο νομίζετε ότι είναι το όριό της; Δείχνει να εξαρτάται το όριο αυτό από την τιμή του a_0 που επιλέχθηκε;

(β) Επιλέξτε μερικές τιμές του r στο διάστημα $1 < r < 3$ και επαναλάβετε τη διαδικασία του ερωτήματος (α). Φροντίστε να επιλέξετε και τιμές κοντά στα άκρα του διαστήματος. Περιγράψτε τη συμπεριφορά των ακολουθιών στα διαγράμματα που κάνατε.

(γ) Εξετάστε τη συμπεριφορά της ακολουθίας για τιμές του r κοντά στα άκρα του διαστήματος $3 < r < 3{,}45$. Η τιμή μετάβασης $r = 3$ καλείται **τιμή διακλάδωσης.** Περιγράφουμε τη νέα συμπεριφορά της ακολουθίας στο διάστημα αυτό λέγοντας ότι υπάρχει ένας **ελκτικός κύκλος περιόδου 2.** Εξηγήστε γιατί ο όρος αυτός αποδίδει σχετικά ικανοποιητικά τη συμπεριφορά της ακολουθίας.

(δ) Στη συνέχεια διερευνήστε τη συμπεριφορά για τιμές r κοντά στα άκρα καθενός από τα υποδιαστήματα $3{,}45 < r < 3{,}54$ και $3{,}54 < r < 3{,}55$. Τοποθετήστε σε διάγραμμα τους πρώτους 200 όρους των ακολουθιών. Περιγράψτε με δικά σας λόγια τη συμπεριφορά κάθε διαγράμματος που κάνατε. Μεταξύ πόσων τιμών δείχνει να ταλαντεύεται η ακολουθία σε κάθε διάστημα; Οι τιμές $r = 3{,}45$ και $r =$

3,54 (εδώ τις στρογγυλοποιήσαμε σε 2 δεκαδικά ψηφία) καλούνται επίσης τιμές διακλαδώσεως, διότι η συμπεριφορά της ακολουθίας μεταβάλλεται καθώς το r «διαβαίνει» από τις τιμές αυτές.

(ε) Η κατάσταση μπορεί να γίνει ακόμη πιο ενδιαφέρουσα. Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία τιμών διακλαδώσεως $3 < 3{,}45 < 3{,}54 < \ldots < c_n < c_{n+1} \ldots$ τέτοια ώστε για $c_n < r < c_{n+1}$, η λογιστική εξίσωση $\{a_n\}$ ταλαντεύεται τελικά ευσταθώς μεταξύ 2^n τιμών, οπότε κάνουμε λόγο για **ελκτικό κύκλο περιόδου 2^n.** Επιπλέον, η ακολουθία τιμών διακλάδωσης $\{c_n\}$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 3,57 (άρα συγκλίνει). Αν επιλέξετε την τιμή $r < 3{,}57$, θα παρατηρήσετε έναν ελκτικό κύκλο περιόδου 2^n. Επιλέξτε $r = 3{,}5695$ και τοποθετήστε σε διάγραμμα 300 σημεία.

(στ) Ας δούμε τι συμβαίνει για $r > 3{,}57$. Αφού θέσετε $r = 3{,}65$ και υπολογίσετε τους πρώτους 300 όρους της $\{a_n\}$, τοποθετήστε τους σε διάγραμμα . Παρατηρήστε πώς τα σημεία «περιφέρονται» με μη προβλέψιμο, χαοτικό τρόπο. Είναι αδύνατον να προβλέψετε την τιμή του a_{n+1} από την τιμή του a_n.

(ζ) Για $r = 3{,}65$, επιλέξτε δύο αρχικές τιμές του a_0 που γειτνιάζουν μεταξύ τους, έστω τις $a_0 = 0{,}3$ και $a_0 = 0{,}301$. Υπολογίστε και τοποθετήστε σε διάγραμμα τους πρώτους 300 όρους των ακολουθιών για κάθε αρχική τιμή. Συγκρίνετε τις συμπεριφορές των δύο ακολουθιών. Μετά από πόσους όρους δείχνουν να διαφέρουν αισθητά οι αντίστοιχοι όροι των δύο ακολουθιών; Επαναλάβετε τη διερεύνηση για $r = 3{,}75$. Μπορείτε να δείτε πώς διαφέρει η συμπεριφορά κάθε διαγράμματος αναλόγως της τιμής του a_0; Λέμε ότι η λογιστική ακολουθία είναι **υπερευαίσθητη στην αρχική συνθήκη** a_0.

8.3 Άπειρες σειρές

Σειρές και μερικά αθροίσματα • Γεωμετρικές σειρές • Αποκλίνουσες σειρές • Κριτήριο n-οστού όρου για απόκλιση • Πρόσθεση ή αφαίρεση όρων • Αλλαγή δείκτη • Συνδυασμός σειρών

Τόσο στα μαθηματικά όσο και στις φυσικές επιστήμες, πολλές συναρτήσεις γράφονται υπό μορφή πολυωνύμων με άπειρους όρους, π.χ.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad |x| < 1$$

(παρακάτω θα δούμε σε τι μας εξυπηρετεί η γραφή αυτή). Για τυχούσα επιτρεπόμενη τιμή του x, ένα τέτοιο πολυώνυμο υπολογίζεται ως ένα άπειρο άθροισμα σταθερών όρων, το οποίο καλούμε *άπειρη σειρά* (ή απλώς *σειρά*). Η παρούσα ενότητα αποσκοπεί στο να εξοικειώσει τον αναγνώστη με την έννοια αυτή.

Σειρές και μερικά αθροίσματα

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να γίνει σαφές είναι ότι μια άπειρη σειρά δεν αποτελεί απλώς ένα ακόμη παράδειγμα πρόσθεσης. Η πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι μια *δυαδική* πράξη, που σημαίνει ότι κάθε φορά προσθέτουμε αριθμούς ανά δύο. Ο λόγος που η γραφή $1 + 2 + 3$ έχει νόημα να καλείται «πρόσθεση» είναι ότι μπορούμε να *ομαδοποιούμε* τους αριθμούς και κατόπιν να τους προσθέτουμε ανά δύο. Η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης σημαίνει ότι ανεξαρτήτως της ομαδοποίησης που χρησιμοποιούμε, το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο:

$$1 + (2 + 3) = 1 + 5 = 6 \qquad \text{και} \qquad (1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6.$$

Με δυο λόγια, ένα *πεπερασμένο άθροισμα* πραγματικών αριθμών δίνει πάντοτε πραγματικό αριθμό, ως αποτέλεσμα πεπερασμένου πλήθους δυαδικών προσθέσεων. Όμως ένα *άπειρο άθροισμα* πραγματικών αριθμών είναι κάτι το τελείως διαφορετικό. Γι' αυτό τον λόγο χρειαζόμαστε έναν προσεκτικό ορισμό της άπειρης σειράς.

Ας δοκιμάσουμε να προσδώσουμε νόημα σε μια έκφραση της μορφής

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots .$$

Προφανώς κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει αν προσπαθήσουμε να προσθέσουμε όλους τους όρους (πράγμα αδύνατο). Μπορούμε όμως να αρχίσουμε να προσθέτουμε έναν έναν τους όρους από την αρχή, ερευνώντας για κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά και εξετάζοντας πώς αυτά τα «μερικά αθροίσματα» εξελίσσονται.

Μερικό άθροισμα		**Τιμή**
Πρώτο:	$s_1 = 1$	$2 - 1$
Δεύτερο:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
Τρίτο:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
⋮	⋮	⋮
n-οστό	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

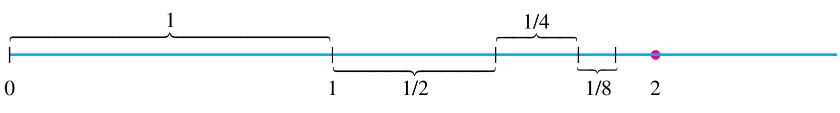
Πράγματι, υπάρχει μια τέτοια χαρακτηριστική συμπεριφορά. Τα μερικά αθροίσματα σχηματίζουν μια ακολουθία με n-οστό όρο

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(Θα δούμε σε λίγο γιατί.) Η ακολουθία συγκλίνει στο 2 διότι $\lim_{n\to\infty} (1/2^n) = 0$. Λέμε λοιπόν,

«Το άθροισμα της άπειρης σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$ είναι 2.Θ

Τι σημαίνει αυτό; Μήπως ότι το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων της σειράς ισούται με 2; Όχι. Μήπως ότι μπορούμε να εκτελέσουμε την άθροιση άπειρων όρων ανά δύο, προκειμένου να αποφανθούμε για το αποτέλεσμα; Και πάλι όχι. Αυτό που σημαίνει η παραπάνω πρόταση είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε το παραπάνω άθροισμα ως το όριο καθώς $n \to \infty$ μιας ακολουθίας μερικών αθροισμάτων. Το όριο αυτό ισούται εδώ με 2 (Σχήμα 8.9). Τα όσα έχουμε μάθει περί ορίων και ακολουθιών μάς επιτρέπουν να υπερβούμε τους εννοιολογικούς φραγμούς των πεπερασμένων αθροισμάτων και να ορίσουμε την εντελώς καινούργια έννοια της άπειρης σειράς.



Σχημα 8.9 Καθώς τα μήκη 1, 1/2, 1/4, 1/8, . . . προστίθενται ένα ένα, το άθροισμα τείνει στο 2.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Blaise Pascal
(1623-1662)

Ορισμός Άπειρη σειρά

Δοθείσας μιας ακολουθίας αριθμών $\{a_n\}$, κάθε έκφραση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

είναι μια **άπειρη σειρά.** Ο αριθμός a_n είναι ο ***n*-οστός όρος** της σειράς.

Τα **μερικά αθροίσματα** της σειράς σχηματίζουν μια ακολουθία πραγματικών αριθμών

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\ \vdots \\
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

καθένας εκ των οποίων είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα. Αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων έχει όριο S καθώς $n \to \infty$, λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** στο άθροισμα S, και γράφουμε

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Στην αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει.**

Παράδειγμα 1 Προσδιορισμός σύγκλισης σειράς

Συγκλίνει η σειρά

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots;$$

Λύση Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, γραμμένη σε δεκαδική μορφή, είναι

$$0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ 0{,}3333,\ \ldots$$

Η ακολουθία αυτή έχει όριο $0{,}\overline{3}$, το οποίο όπως αντιλαμβάνεστε ισούται με το κλάσμα $1/3$. Η σειρά συγκλίνει λοιπόν στο όριο $1/3$.

Όταν μας δίνεται μια σειρά $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, συνήθως δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν αυτή συγκλίνει ή αποκλίνει. Σε κάθε περίπτωση, ο συμβολισμός «σίγμα» μάς επιτρέπει να γράφουμε τη σειρά στη μορφή

CD-ROM
Δικτυότοπος

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad \text{ή απλώς} \quad \sum a_n.$$

Χρήσιμη συντομογραφία: εννοείται ότι αθροίζουμε από 1 έως ∞

Γεωμετρικές σειρές

Η σειρά του Παραδείγματος 1 είναι μια **γεωμετρική σειρά** διότι κάθε όρος της προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον προηγούμενο με κάποια σταθερά r, που εδώ ισούται με $1/10$. (Η σειρά των εμβαδών του επ' άπειρον διχοτομούμενου τετραγώνου που είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου αποτελεί επίσης γεωμετρική σειρά.) Το ζήτημα της σύγκλισης γεωμετρικών σειρών ήταν από τα λίγα προβλήματα που αν και αφορούσαν άπειρες διαδικασίες μπορούσαν να αντιμετωπισθούν με μαθηματικές μεθόδους προϋπάρχουσες του απειροστικού λογισμού. Ας δούμε γιατί.

Γεωμετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

όπου a και r είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$. Ο **λόγος** r μπορεί να είναι θετικός, π.χ.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots,$$

ή αρνητικός, όπως εδώ

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots.$$

Αν $|r| \neq 1$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση της σειράς ως ακολούθως, ξεκινώντας με το n-οστό μερικό άθροισμα:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$ Πολλαπλασιάζουμε το s_n με το r.

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$ Αφαιρούμε το rs_n από το s_n. Οι περισσότεροι όροι στο δεξιό μέλος διαγράφονται.

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$ Κοινός παράγοντας.

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad (r \neq 1).$$ Λύνουμε ως προς s_n εφόσον $r \neq 1$.

Αν $|r| < 1$, τότε $r^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (Πίνακας 8.1, Τύπος 4) και $s_n \to a/(1 - r)$. Αν $|r| > 1$, τότε $|r^n| \to \infty$ και η σειρά αποκλίνει.

Αν $r = 1$, τότε το n-οστό μερικό άθροισμα της γεωμετρικής σειράς ισούται με

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \ldots + a(1)^{n-1} = na,$$

και η σειρά αποκλίνει εφόσον $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, αναλόγως του προσήμου του a. Αν $r = -1$, η σειρά αποκλίνει επειδή τα n-οστά μερικά αθροίσματα ταλαντώνονται μεταξύ του a και του 0. Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας.

Η ισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}, \qquad |r| < 1$$

ισχύει μόνο αν η άθροιση ξεκινά από το $n = 1$.

Η γεωμετρική σειρά

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

συγκλίνει στο άθροισμα $a/(1 - r)$ αν $|r| < 1$ και αποκλίνει αν $|r| \geq 1$.

Τα παραπάνω ξεκαθαρίζουν τα πάντα περί γεωμετρικών σειρών. Τώρα γνωρίζουμε πότε μια τέτοια σειρά συγκλίνει και πότε αποκλίνει, στη δε περίπτωση σύγκλισης, ξέρουμε την τιμή των αθροισμάτων. Το διάστημα $-1 < r < 1$ είναι το **διάστημα σύγκλισης.**

Παράδειγμα 2 Ανάλυση γεωμετρικής σειράς

Αποφανθείτε για το αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές. Στην περίπτωση σύγκλισης, βρείτε την τιμή του αθροίσματος.

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(β) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$

(γ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$

(δ) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8} + \cdots$

Λύση

(α) Ο πρώτος όρος είναι $a = 3$ και $r = 1/2$. Η σειρά συγκλίνει στο

$$\frac{3}{1-(1/2)} = 6.$$

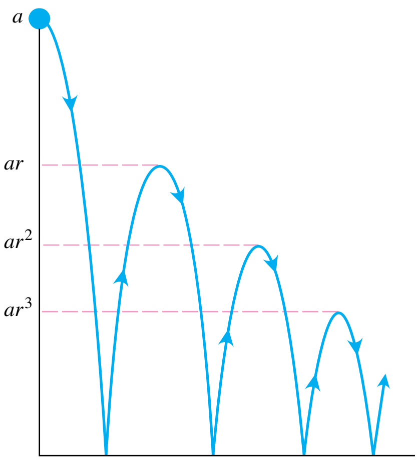
(β) Ο πρώτος όρος είναι $a = 1$ και $r = -1/2$. Η σειρά συγκλίνει στο

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}.$$

(γ) Ο πρώτος όρος είναι $a = (3/5)^0 = 1$ και $r = 3/5$. Η σειρά συγκλίνει στο

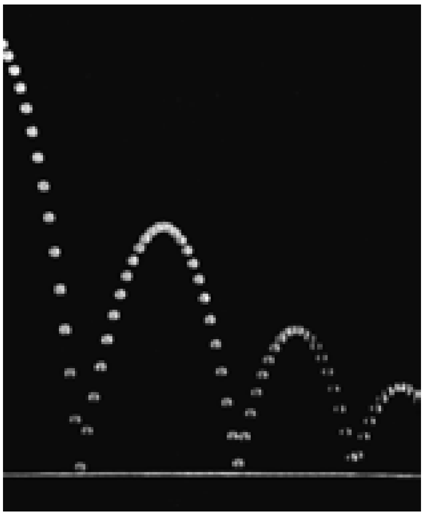
$$\frac{1}{1-(3/5)} = \frac{5}{2}.$$

(δ) Εδώ $r = \pi/2 > 1$. Η σειρά αποκλίνει.



(α)

CD-ROM
Δικτυότοπος



(β)

ΣΧΗΜΑ 8.10 (α) Το Παράδειγμα 3 δείχνει πώς μπορούμε με τη χρήση γεωμετρικών σειρών να υπολογίσουμε τη συνολική κατακόρυφη απόσταση που διανύει ένα μπαλάκι που αναπηδά, αν το ύψος κάθε αναπήδησης μειώνεται κατά έναν παράγοντα r.
(β) Στροβοσκοπική φωτογραφία των αναπηδήσεων που κάνει το μπαλάκι.

Παράδειγμα 3 Μπαλάκι που αναπηδά

Έστω ότι από ύψος a m πάνω από επίπεδη επιφάνεια αφήνουμε ένα μπαλάκι να πέσει. Κάθε φορά που το μπαλάκι προσκρούει στην επιφάνεια μετά από πτώση από κατακόρυφη απόσταση h, αναπηδά σε ύψος rh, όπου r θετική σταθερά μικρότερη του 1. Να βρεθεί το συνολικό κατακόρυφο διάστημα (πάνω και κάτω) που διανύει το μπαλάκι (Σχήμα 8.10).

Λύση Το συνολικό διάστημα είναι

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{Το άθροισμα αυτό ισούται με } 2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\frac{1+r}{1-r}.$$

Για $a = 6$ m και $r = 2/3$, για παράδειγμα, το διάστημα ισούται με

$$s = 6\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30 \text{ m}.$$

Παράδειγμα 4 Επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία

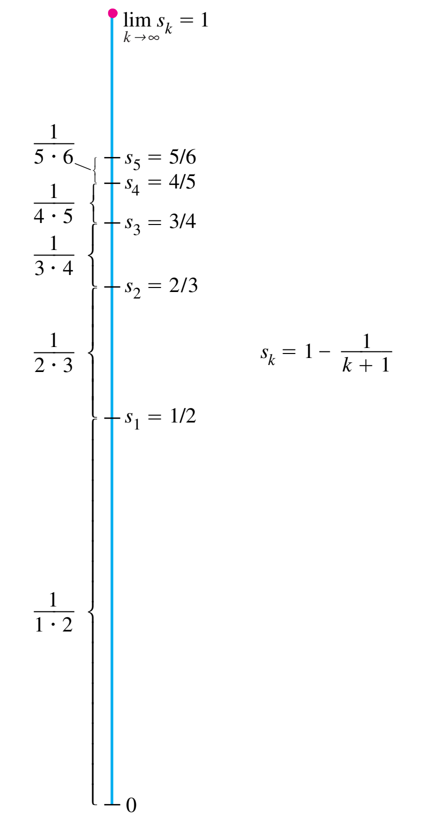
Εκφράστε τον δεκαδικό αριθμό 5,23 23 23 . . . ως λόγο δύο ακεραίων.

Λύση

$$\begin{aligned} 5{,}23\ 23\ 23\ldots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\ &= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0{,}01)} \qquad a = 1,\ r = 1/100 \\ &= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0{,}99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \end{aligned}$$

Μπορεί να έχουμε μόλις αρχίσει τη μελέτη των άπειρων σειρών, αλλά ήδη κατανοήσαμε πλήρως τα περί σύγκλισης και απόκλισης μιας *ολόκληρης κλάσης* σειρών (των γεωμετρικών). Βρισκόμαστε τώρα στο ίδιο σημείο με τους μαθηματικούς της εποχής της Αναγέννησης· ας δούμε λοιπόν πού μπορούμε να φτάσουμε με όσα μάθαμε.

Δυστυχώς, τύποι όπως αυτός του αθροίσματος όρων γεωμετρικής σειράς σπανίζουν, και έτσι συνήθως θα πρέπει να αρκούμαστε σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς αθροισμάτων (περισσότερα για το θέμα αυτό θα πούμε αργότερα). Το επόμενο παράδειγμα, ωστόσο, αφορά άλλη μια ευτυχή συγκυρία στην οποία το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς.



Σχημα 8.11 Τα μερικά αθροίσματα της σειράς του Παραδείγματος 5.

Παράδειγμα 5 Μια μη γεωμετρική αλλά τηλεσκοπική σειρά

Να βρεθεί το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Λύση Αναζητούμε κάποια χαρακτηριστική συμπεριφορά της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων που να μας οδηγήσει σε κάποιον τύπο για το s_k. Το κλειδί εδώ είναι τα μερικά κλάσματα. Αν παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε το μερικό άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

ως εξής:

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Αφαιρώντας τις παρενθέσεις και διαγράφοντας τους αλληλοαναιρούμενους όρους, παίρνουμε

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Είναι τώρα προφανές ότι $s_k \to 1$ καθώς $k \to \infty$. Η σειρά λοιπόν συγκλίνει στην τιμή 1 (Σχήμα 8.11).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Αποκλίνουσες σειρές

Οι γεωμετρικές σειρές με λόγο $|r| \geq 1$ δεν είναι, βέβαια, οι μόνες που αποκλίνουν.

Παράδειγμα 6 Προσδιορισμός απόκλισης σειράς

Συγκλίνει η σειρά $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$;

Λύση Ενδεχομένως να μπείτε στον πειρασμό να ομαδοποιήσετε τους όρους της σειράς ως εξής

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots.$$

Όμως αυτό θα ήταν λάθος, διότι η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει *άπειρο* πλήθος αθροίσεων όρων ανά δύο, και συνεπώς δεν μπορεί να αιτιολογηθεί βάσει της προσεταιριστικής ιδιότητας της άθροισης. Εδώ έχουμε να κάνουμε με μια άπειρη σειρά, όχι με άθροισμα πεπερασμένων όρων, και έτσι αν η σειρά καταλήγει σε πεπερασμένο αποτέλεσμα, αυτό *δεν μπορεί παρά να είναι* το όριο της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων,

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots.$$

Εφόσον η ακολουθία αυτή δεν έχει όριο, ούτε και η άπειρη σειρά έχει. Άρα αποκλίνει.

Παράδειγμα 7 Μερικά αθροίσματα που υπερβαίνουν κάθε φράγμα

(α) Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

αποκλίνει διότι τα μερικά της αθροίσματα υπερβαίνουν κάθε πεπερασμένο αριθμό L. Μετά το $n = 1$, κάθε μερικό άθροισμα $s_n = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$ είναι μεγαλύτερο του n^2.

(β) Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

αποκλίνει διότι τα μερικά της αθροίσματα υπερβαίνουν τελικά κάθε προκαθορισμένο αριθμό. Κάθε όρος είναι μεγαλύτερος του 1, συνεπώς το άθροισμα των n όρων είναι μεγαλύτερο του n.

Κριτήριο *n*-οστού όρου για απόκλιση

Προσέξτε ότι το $\lim_{n\to\infty} a_n$ οφείλει να ισούται με το μηδέν αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Για να δούμε γιατί, έστω S το άθροισμα της σειράς και $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ το n-οστό μερικό άθροισμα. Για μεγάλο n, τόσο το s_n όσο και το s_{n-1} προσεγγίζουν το S, συνεπώς η διαφορά τους, a_n, πλησιάζει στο μηδέν. Αυστηρότερα,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0. \quad \text{Όριο διαφοράς ακολουθιών}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Το Θεώρημα 6 *δεν λέει* ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν $a_n \to 0$. Μια σειρά μπορεί να αποκλίνει ακόμη και όταν $a_n \to 0$.

Θεώρημα 6 **Όριο *n*-οστού όρου συγκλίνουσας σειράς**

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \to 0$.

Το Θεώρημα 6 οδηγεί σε ένα κριτήριο για το είδος της απόκλισης που συναντήσαμε στα Παραδείγματα 6 και 7.

Κριτήριο *n*-οστού όρου για απόκλιση

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει εάν το $\lim_{n\to\infty} a_n$ δεν υπάρχει ή είναι διάφορο του μηδενός.

Παράδειγμα 8 Εφαρμογή του κριτηρίου n-οστού όρου

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ αποκλίνει διότι $n^2 \to \infty$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ αποκλίνει διότι $\frac{n+1}{n} \to 1$.

(γ) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ αποκλίνει διότι το $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ δεν υπάρχει.

(δ) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ αποκλίνει διότι $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-n}{2n+5}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$.

Παράδειγμα 9 $a_n \to 0$, αλλά η σειρά αποκλίνει

Η σειρά

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ όροι}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ όροι}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ όροι}} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

αποκλίνει παρά το ότι οι όροι της σχηματίζουν μια ακολουθία η οποία συγκλίνει στο 0.

Πρόσθεση ή αφαίρεση όρων

Μπορούμε πάντα να προσθέτουμε ένα πεπερασμένο πλήθος όρων σε μια σειρά (ή να αφαιρούμε πεπερασμένο πλήθος όρων από αυτήν) χωρίς να επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλισή της, αν και στην περίπτωση της σύγκλισης, η διαδικασία αυτή θα μεταβάλλει την τιμή του αθροίσματος. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει για κάθε $k > 1$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Αντιστρόφως, αν η $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ συγκλίνει για κάθε $k > 1$, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Έτσι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

και

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}.$$

Αλλαγή δείκτη

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Richard Dedekind
(1831-1916)

Μπορούμε να αλλάξουμε κατά βούληση τον δείκτη μιας σειράς, αρκεί να διατηρήσουμε τη διάταξη των όρων της (δείτε το Παράδειγμα 2γ). Έτσι, μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή εκκίνησης του δείκτη κατά h μονάδες, αντικαθιστώντας το n στον τύπο του a_n με το $n - h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να μειώσουμε την τιμή εκκίνησης του δείκτη κατά h μονάδες, αντικαθιστώντας το n στον τύπο του a_n με το $n + h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Η διαδικασία είναι παρόμοια με την οριζόντια μετατόπιση του γραφήματος συναρτήσεως.

Παράδειγμα 10 Αλλαγή δείκτη γεωμετρικής σειράς

Μπορούμε να γράψουμε τη γεωμετρική σειρά που ξεκινά ως εξής

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

με τους ακόλουθους τρόπους

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \qquad \text{ή και} \qquad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}.$$

Τα μερικά αθροίσματα παραμένουν τα ίδια, ανεξαρτήτως του δείκτη που επιλέγουμε.

Για προφανείς λόγους, συνήθως προτιμούμε δείκτες που απλοποιούν τις μαθηματικές εκφράσεις.

Συνδυασμός σειρών

Αν μας δίνονται δύο συγκλίνουσες σειρές, μπορούμε να τις προσθέτουμε όρο προς όρο, να τις αφαιρούμε όρο προς όρο, ή να τις πολλαπλασιάζουμε με σταθερές. Σε όλες τις περιπτώσεις, η προκύπτουσα σειρά είναι συγκλίνουσα.

Θεώρημα 7 **Ιδιότητες συγκλινουσών σειρών**

Αν $\Sigma\, a_n = A$ και $\Sigma\, b_n = B$ είναι συγκλίνουσες σειρές, τότε

1. *Άθροισμα σειρών:* $\Sigma\,(a_n + b_n) = \Sigma\, a_n + \Sigma\, b_n = A + B$
2. *Διαφορά σειρών:* $\Sigma\,(a_n - b_n) = \Sigma\, a_n - \Sigma\, b_n = A - B$
3. *Σταθερό πολλαπλάσιο σειράς:* $\Sigma\, ka_n = k\,\Sigma\, a_n = kA$ (τυχών αριθμός k).

Παράδειγμα 11 Εφαρμογή του Θεωρήματος 7

Να βρεθούν τα αθροίσματα των ακόλουθων σειρών.

(α)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} && \text{Διαφορά σειρών} \\
&= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} && \text{Γεωμετρική σειρά με } a = 1 \text{ και } r = 1/2,\ 1/6 \\
&= 2 - \frac{6}{5} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} && \text{Σταθερό πολλαπλάσιο σειράς} \\
&= 4 \left(\frac{1}{1 - (1/2)} \right) && \text{Γεωμετρική σειρά με } a = 1,\ r = 1/2 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Απόδειξη Θεωρήματος 7 Οι τρεις ιδιότητες σειρών έπονται από τις ανάλογες ιδιότητες ακολουθιών που παρουσιάστηκαν στο Θεώρημα 1, Ενότητα 8.1. Προκειμένου να αποδείξουμε τον τύπο αθροίσματος σειρών, έστω

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Τα μερικά αθροίσματα της $\Sigma\,(a_n + b_n)$ θα είναι τότε

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n. \end{aligned}$$

Εφόσον $A_n \to A$ και $B_n \to B$, θα έχουμε $S_n \to A + B$ βάσει της ιδιότητας ορίου αθροίσματος για ακολουθίες. Παρόμοια είναι και η απόδειξη του τύπου διαφοράς σειρών.

Προκειμένου για τον τύπο σταθερού πολλαπλασίου σειράς, παρατηρούμε ότι τα μερικά αθροίσματα της $\Sigma\, ka_n$ σχηματίζουν την ακολουθία

$$S_n = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = kA_n,$$

η οποία συγκλίνει στο kA βάσει της ιδιότητας ορίου σταθερού πολλαπλασίου για ακολουθίες.

Συμπεράσματα από το Θεώρημα 7 σχετικά με την απόκλιση σειράς

1. Κάθε μη μηδενικό σταθερό πολλαπλάσιο αποκλίνουσας σειράς αποκλίνει.
2. Αν η $\Sigma\, a_n$ συγκλίνει και η $\Sigma\, b_n$ αποκλίνει, τότε οι $\Sigma\,(a_n + b_n)$ και $\Sigma\,(a_n - b_n)$ αποκλίνουν.

Οι αποδείξεις παραλείπονται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.3

Εύρεση *n*-οστών μερικών αθροισμάτων

Στις Ασκήσεις 1-6, βρείτε έναν τύπο του n-οστού μερικού αθροίσματος για κάθε σειρά, τον οποίο ακολούθως χρησιμοποιήστε για να υπολογίσετε το άθροισμα κάθε σειράς στην περίπτωση σύγκλισης.

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

4. $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-1)^{n-1}\,2^{n-1} + \ldots$

5. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$

6. $\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$

Σειρές με γεωμετρικούς όρους

Στις Ασκήσεις 7-12, αφού γράψετε μερικούς από τους πρώτους όρους κάθε σειράς, υπολογίστε τα αθροίσματα.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

Τηλεσκοπικές σειρές

Χρησιμοποιήστε μερικά κλάσματα για να βρείτε το άθροισμα κάθε σειράς στις Ασκήσεις 13-16.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Να βρεθούν τα αθροίσματα των σειρών στις Ασκήσεις 17 και 18.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+2)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

Σύγκλιση ή απόκλιση

Ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 19-32 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. Στην περίπτωση σύγκλισης, να υπολογιστεί το άθροισμα κάθε σειράς.

19. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ **20.** $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$ **22.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{5^n}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{n}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n},\quad |x|>1$ **26.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ **28.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **30.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

31. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1000^n}$ **32.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

Γεωμετρικές σειρές

Για κάθε γεωμετρική σειρά των Ασκήσεων 33-36, γράψτε μερικούς από τους πρώτους όρους προκειμένου να βρείτε τα a και r και να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς. Έπειτα εκφράστε την ανισότητα $|r|<1$ συναρτήσει του x και βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η ανισότητα ικανοποιείται και η σειρά συγκλίνει.

33. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ **34.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ **36.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$

Στις Ασκήσεις 37-40, βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η δοθείσα γεωμετρική σειρά συγκλίνει. Επίσης, υπολογίστε τα αθροίσματα (συναρτήσει του x) για τις τιμές αυτές του x.

37. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$ **38.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{-2n}$

39. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n$ **40.** $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$

Δεκαδικά ψηφία που επαναλαμβάνονται

Εκφράστε κάθε αριθμό στις Ασκήσεις 41-46 ως λόγο δύο ακεραίων.

41. $0,\overline{23} = 0,23\ 23\ 23\ldots$

42. $0,\overline{234} = 0,234\ 234\ 234\ldots$

43. $0,\overline{7} = 0,7777\ldots$

44. $1,\overline{414} = 1,414\ 414\ 414\ldots$

45. $1,24\overline{123} = 1,24\ 123\ 123\ 123\ldots$

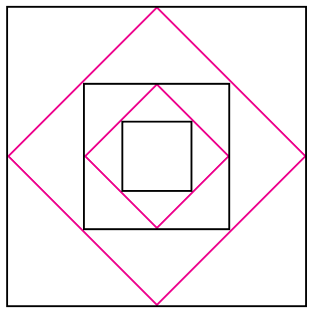
46. $3,\overline{142857} = 3,142857\ 142857\ldots$

Θεωρία και παραδείγματα

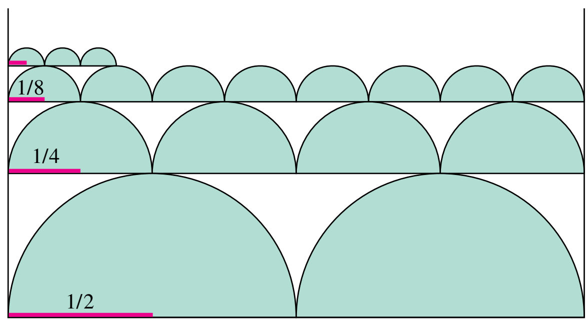
47. *Διανυθέν διάστημα από μπάλα που αναπηδάει* Μια μπάλα αφήνεται να πέσει από ύψος 4 m. Κάθε φορά που προσκρούει στο πεζοδρόμιο μετά από πτώση h m, αναπηδά σε ύψος $0{,}75h$ m. Να βρεθεί το συνολικό κατακόρυφο διάστημα (προς τα πάνω και προς τα κάτω) που διανύει η μπάλα. CD-ROM Δικτυότοπος

48. *Συνολικός χρόνος αναπήδησης* Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος κίνησης της μπάλας στην Άσκηση 47. (*Υπόδειξη:* Ο τύπος $s = 4{,}9t^2$ δίνει $t=\sqrt{s/4{,}9}$.) CD-ROM Δικτυότοπος

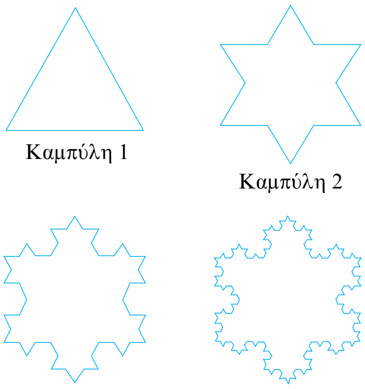
49. *Άθροιση εμβαδών* Το ακόλουθο σχήμα δείχνει τα πρώτα πέντε μέλη μιας ακολουθίας τετραγώνων. Το εξωτερικό τετράγωνο έχει εμβαδόν 4 m^2. Καθένα από τα άλλα τετράγωνα προκύπτει ενώνοντας με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα των πλευρών του αμέσως προηγούμενου τετραγώνου. Να βρεθεί το άθροισμα των εμβαδών όλων των τετραγώνων.



50. *Άθροιση εμβαδών* Το ακόλουθο σχήμα δείχνει τις τρεις πρώτες γραμμές και μέρος της τέταρτης γραμμής μιας ακολουθίας γραμμών με ημικύκλια. Η n-οστή γραμμή περιέχει 2^n ημικύκλια, ακτίνας $1/2^n$. Να βρεθεί το άθροισμα των εμβαδών όλων των ημικυκλίων.



51. *Η καμπύλη της νιφάδας χιονιού της Helge von Koch* Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο μοναδιαίου μήκους πλευράς, το οποίο καλούμε Καμπύλη 1. Χωρίζουμε κάθε πλευρά σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα, και στο μεσαίο τρίτο κάθε πλευράς σχεδιάζουμε πάλι ένα ισόπλευρο τρίγωνο που «δείχνει» προς το εξωτερικό του αρχικού τριγώνου. Σβήνουμε το μεσαίο τρίτο τμήμα κάθε πλευράς του αρχικού τριγώνου. Την καμπύλη που σχηματίστηκε με τον τρόπο αυτόν καλούμε Καμπύλη 2. Συνεχίζουμε τη διαδικασία, τοποθετώντας ισόπλευρα τρίγωνα, ξανά με «κατεύθυνση» προς τα έξω, στα μεσαία τρίτα των πλευρών της Καμπύλης 2. Ξανασβήνουμε τα μεσαία τρίτα της Καμπύλης 2· τώρα κατασκευάσαμε την Καμπύλη 3. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, όπως φαίνεται στο σχήμα, ορίζοντας μιαν άπειρη ακολουθία καμπυλών στο επίπεδο. Η οριακή καμπύλη της ακολουθίας αυτής είναι η καμπύλη της Koch και παριστάνει μια νιφάδα χιονιού.



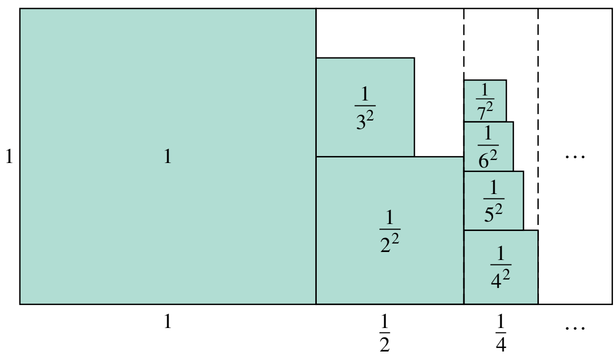
Καμπύλη 1 Καμπύλη 2 Καμπύλη 3 Καμπύλη 4

Μπορεί να αποδειχτεί ότι η καμπύλη της Koch έχει άπειρο μήκος, ενώ περικλείει χωρίο πεπερασμένου εμβαδού, ως ακολούθως.

(α) Βρείτε το μήκος L_n της n-οστής καμπύλης C_n και δείξτε ότι $\lim_{n \to \infty} L_n = \infty$.

(β) Βρείτε το εμβαδόν A_n του χωρίου που περικλείει η C_n και υπολογίστε το $\lim_{n \to \infty} A_n$.

52. *Μάθετε γράφοντας* Το ακόλουθο σχήμα μάς παρέχει μιαν άτυπη απόδειξη του ότι το $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ είναι μικρότερο του 2. Εξηγήστε τι συμβαίνει. (*Πηγή*: "Convergence with Pictures", άρθρο του P. J. Rippon, *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 6 (1986), pp. 476-478.)



53. *Αλλαγή δείκτη* Η σειρά της Άσκησης 5 μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{και} \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

Γράψτε την ως άθροισμα με δείκτη που ξεκινά από την τιμή

(α) $n = -2$

(β) $n = 0$

(γ) $n = 5$.

54. *Μάθετε γράφοντας* Κατασκευάστε μια άπειρη σειρά μη μηδενικών όρων των οποίων το άθροισμα να ισούται με

(α) 1

(β) -3

(γ) 0.

Μπορείτε να κατασκευάσετε μια άπειρη σειρά μη μηδενικών όρων που να συγκλίνει σε οιονδήποτε αριθμό θέλετε; Εξηγήστε.

55. *Γεωμετρική σειρά* Βρείτε την τιμή του b για την οποία

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \cdots = 9.$$

56. *Τροποποιημένη γεωμετρική σειρά* Για ποιες τιμές του r συγκλίνει η άπειρη σειρά

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + r^6 + \cdots;$$

Βρείτε το άθροισμα της σειράς στην περίπτωση σύγκλισης.

57. *Σφάλμα στη χρήση μερικού αθροίσματος* Δείξτε ότι το σφάλμα $(L - s_n)$ που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά με κάποιο από τα μερικά της αθροίσματα s_n είναι $ar^n/(1-r)$.

58. *Γινόμενο όρο προς όρο* Βρείτε συγκλίνουσες γεωμετρικές σειρές $A = \Sigma\, a_n$ και $B = \Sigma\, b_n$ που να δείχνουν ότι η $\Sigma a_n b_n$ μπορεί να συγκλίνει χωρίς να ισούται με AB.

59. *Πηλίκο όρο προς όρο* Φέρτε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι η $\Sigma\,(a_n/b_n)$ μπορεί να συγκλίνει σε τιμή διάφορη του A/B, όπου $A = \Sigma\, a_n$, $B = \Sigma\, b_n \neq 0$, και κανένας όρος b_n δεν μηδενίζεται.

60. *Πηλίκο όρο προς όρο* Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η $\Sigma\,(a_n/b_n)$ μπορεί να αποκλίνει, παρ' ότι τόσο η $\Sigma\, a_n$ όσο και η $\Sigma\, b_n$ συγκλίνουν και κανένας όρος b_n δεν μηδενίζεται.

61. *Αντίστροφοι όρο προς όρο* Αν η $\Sigma\, a_n$ συγκλίνει και $a_n > 0$ για κάθε n, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τη σειρά $\Sigma\,(1/a_n)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

62. *Πρόσθεση ή αφαίρεση όρων* Τι θα συμβεί αν προσθέσουμε ένα πεπερασμένο πλήθος όρων σε μια αποκλίνουσα σειρά, ή αν αφαιρέσουμε (διαγράψουμε) ένα πεπερασμένο πλήθος όρων από μια αποκλίνουσα σειρά; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

63. *Άθροιση συγκλίνουσας και αποκλίνουσας ακολουθίας* Αν η $\Sigma\, a_n$ συγκλίνει και η $\Sigma\, b_n$ αποκλίνει, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για το άθροισμα $\Sigma\,(a_n + b_n)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

8.4 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Κριτήριο του ολοκληρώματος • Αρμονικές σειρές και p-σειρές • Κριτήρια σύγκρισης • Κριτήρια λόγου και ρίζας

Δοθείσας μιας σειράς $\Sigma\, a_n$, έχουμε δύο ερωτήματα προς απάντηση.

1. Συγκλίνει η σειρά;
2. Αν ναι, ποιο είναι το άθροισμά της;

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με σειρές που δεν έχουν αρνητικούς όρους. Ο λόγος του περιορισμού αυτού είναι ότι τα μερικά αθροίσματα τέτοιων σειρών σχηματίζουν μη φθίνουσες ακολουθίες, και οι μη φθίνουσες ακολουθίες που είναι άνω φραγμένες συγκλίνουν πάντοτε. Τα μερικά αθροίσματα είναι μη φθίνοντα διότι $s_{n+1} = s_n + a_n$ και $a_n \geq 0$:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \ldots .$$

Βάσει του θεωρήματος μονότονων ακολουθιών (Θεώρημα 5, Ενότητα 8.2), η σειρά θα συγκλίνει εάν η $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη.

Πόρισμα Θεωρήματος 5

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μη αρνητικών όρων συγκλίνει αν τα μερικά της αθροίσματα είναι άνω φραγμένα.

Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί θεμέλιο για τα κριτήρια σύγκλισης που θα εξετάσουμε στην παρούσα ενότητα.

Κριτήριο του ολοκληρώματος

Εισάγουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος μέσα από ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1 Εφαρμογή του Πορίσματος του Θεωρήματος 5

Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

συγκλίνει.

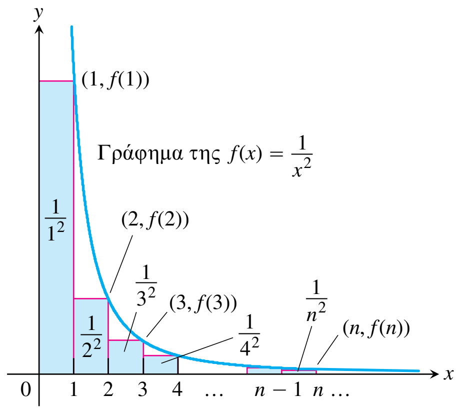
Λύση Εξετάζουμε τη σύγκλιση της $\Sigma_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ συγκρίνοντάς την με το $\int_1^{\infty} (1/x^2)\, dx$. Για να κάνουμε τη σύγκριση, θεωρούμε τους όρους της σειράς ως τιμές της συνάρτησης $f(x) = 1/x^2$, τις οποίες και ερμηνεύουμε ως τα εμβαδά των ορθογωνίων που κείνται κάτω από την καμπύλη $y = 1/x^2$.

Όπως δείχνει το Σχήμα 8.12,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\ &< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx \\ &< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \\ &< 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Όπως και στην Ενότητα 7.7. Παράδειγμα 3, για $p = 2$, $\int_1^{\infty} (1/x^2)\, dx = 1$.

Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ φράσσονται εκ των άνω (από το 2) και άρα η σειρά συγκλίνει. Το άθροισμά της ισούται με $\pi^2/6 \approx 1{,}64493$.



ΣΧΗΜΑ 8.12 Βοηθητικό σχήμα για τις συγκρίσεις εμβαδών στο Παράδειγμα 1.

Κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία θετικών όρων. Έστω $a_n = f(n)$, όπου f συνεχής, θετική, φθίνουσα συνάρτηση του x για κάθε $x \geq N$ (N είναι θετικός ακέραιος). Στην περίπτωση αυτή, η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ και το ολοκλήρωμα $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ θα συγκλίνουν ή θα αποκλίνουν ταυτόχρονα.

ΠΡΟΣΟΧΗ Στην περίπτωση σύγκλισης, το άθροισμα της σειράς δεν θα ισούται απαραιτήτως με το ολοκλήρωμα. Στο Παράδειγμα 1, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) = \pi^2/6$, ενώ $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1$.

Απόδειξη Θα δείξουμε το κριτήριο για την περίπτωση όπου $N = 1$. Η απόδειξη για γενικότερο N είναι παρόμοια.

Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι η f είναι φθίνουσα συνάρτηση και $f(n) = a_n$ για κάθε n. Αυτό μας οδηγεί στην παρατήρηση ότι τα ορθογώνια στο Σχήμα 8.13α, με εμβαδά $a_1, a_2, \ldots, a_n$, περικλείουν συνολικά μεγαλύτερο εμβαδόν από το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από $x = 1$ έως $x = n + 1$. Με άλλα λόγια,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Στο Σχήμα 8.13β τα ορθογώνια περικλείουν συνολικά μεγαλύτερο εμβαδόν από το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει με τον άξονα x η καμπύλη. Αγνοώντας προς στιγμήν το πρώτο ορθογώνιο, εμβαδού a_1, παίρνουμε

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx.$$

Αν τώρα συμπεριλάβουμε το ορθογώνιο εμβαδού a_1, ισχύει ότι

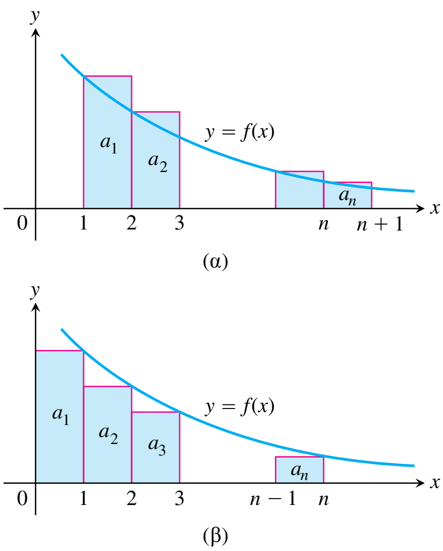
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα αυτά,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Αν το $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ είναι πεπερασμένο, η δεξιά ανισότητα σημαίνει ότι η σειρά $\sum a_n$ είναι πεπερασμένη. Αν το $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ απειρίζεται, η αριστερή ανισότητα δείχνει ότι η σειρά $\sum a_n$ επίσης απειρίζεται.

Συνεπώς, η σειρά και το ολοκλήρωμα θα συγκλίνουν ή θα αποκλίνουν ταυτόχρονα.



ΣΧΗΜΑ 8.13 Αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου του ολοκληρώματος, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Παράδειγμα 2 Εφαρμογή του κριτηρίου του ολοκληρώματος

Συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$;

Λύση Το κριτήριο του ολοκληρώματος μπορεί να εφαρμοστεί, εφόσον η

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

είναι συνεχής, θετική, φθίνουσα συνάρτηση του x για $x > 1$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{k \to \infty} \int_1^k x^{-3/2}\, dx \\
&= \lim_{k \to \infty} \left[-2x^{-1/2}\right]_1^k \\
&= \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{k}} + 2\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, άρα το ίδιο θα ισχύει και για τη σειρά.

Αρμονικές σειρές και p-σειρές

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος μπορούμε να αποφανθούμε περί σύγκλισης για κάθε σειρά της μορφής $\Sigma_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$, όπου p πραγματική σταθερά. (Η σειρά του Παραδείγματος 2 είχε τέτοια μορφή, συγκεκριμένα $p = 3/2$.) Οι σειρές αυτές καλούνται ***p*-σειρές.**

Η p-σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

(p πραγματική σταθερά) συγκλίνει για $p > 1$, ενώ αποκλίνει για $p \leq 1$.

Απόδειξη Από το Παράδειγμα 3 της Ενότητας 7.7, το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} dx/x^p$ συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$. Βάσει του Κριτηρίου του Ολοκληρώματος, το ίδιο θα ισχύει και για την p-σειρά $\Sigma_{n=1}^{\infty}$ $(1/n^p)$: Συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

Η p-σειρά για $p = 1$ είναι η λεγόμενη **αρμονική σειρά**, η οποία πιθανότατα είναι η πλέον φημισμένη αποκλίνουσα σειρά στα μαθηματικά. Το κριτήριο της p-σειράς μάς λέει ότι η αρμονική σειρά είναι *μόλις* αποκλίνουσα· αυξάνοντας κατά ένα ελάχιστο το p, π.χ. δίνοντάς του την τιμή 1,000000001, η σειρά συγκλίνει!

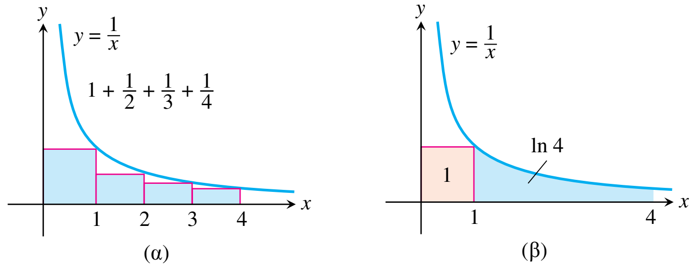
Η βραδύτητα με την οποία τα μερικά αθροίσματα της αρμονικής σειράς τείνουν στο άπειρο είναι εντυπωσιακή. Δείτε σχετικά το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3 Η αργή απόκλιση της αρμονικής σειράς

Πόσοι περίπου όροι της αρμονικής σειράς απαιτούνται για να σχηματιστεί ένα μερικό άθροισμα μεγαλύτερο του 20;

Λύση Οι γραφικές παραστάσεις είναι εύγλωττες (Σχήμα 8.14).

Τι το αρμονικό στην αρμονική σειρά;
Οι όροι της αρμονικής σειράς αντιστοιχούν στους κόμβους μιας χορδής που παλλόμενη παράγει πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας. Για παράδειγμα, ο όρος 1/2 παράγει ήχο διπλάσιας συχνότητας της θεμελιώδους, ο όρος 1/3 παράγει μια συχνότητα τριπλάσια της θεμελιώδους, κ.ο.κ. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι η χαμηλότερη που εκπέμπεται όταν μια χορδή πάλλεται.



ΣΧΗΜΑ 8.14 Εύρεση άνω φράγματος για ένα από τα μερικά αθροίσματα της αρμονικής σειράς. (Παράδειγμα 3)

Έστω H_n το n-οστό μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς. Από τη σύγκριση των δύο γραφημάτων προκύπτει ότι $H_4 < (1 + \ln 4)$ και (εν γένει) ότι $H_n \leq (1 + \ln n)$. Εμείς θέλουμε το H_n να είναι μεγαλύτερο του 20, οπότε

$$\begin{aligned} 1 + \ln\ n &> H_n > 20 \\ 1 + \ln\ n &> 20 \\ \ln\ n &> 19 \\ n &> e^{19}. \end{aligned}$$

Η τιμή του e^{19} είναι περίπου 178.482.301. Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται *τουλάχιστον* τόσοι όροι της αρμονικής σειράς για να υπερβεί ένα μερικό άθροισμά της τον αριθμό 20. Αν κάνατε τον υπολογισμό του μερικού αθροίσματος αυτού με το κομπιουτεράκι σας, θα χρειαζόσασταν αρκετές εβδομάδες. Παρά ταύτα, η αρμονική σειρά αποκλίνει!

Κριτήρια σύγκρισης

Το κριτήριο της p-σειράς μάς λέει ό,τι χρειάζεται να ξέρουμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση σειρών της μορφής $\Sigma\,(1/n^p)$. Ομολογουμένως, η μορφή αυτή αφορά μια μικρή κλάση σειρών, ωστόσο μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση πολλών άλλων σειρών (συμπεριλαμβανομένης της σειράς της οποίας ο n-οστός όρος είναι τυχούσα ρητή συνάρτηση του n) *συγκρίνοντάς τις* με την p-σειρά.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Αλβέρτος
της Σαξονίας
(περ. 1316-1390)

Κριτήριο της άμεσης σύγκρισης
Έστω $\Sigma\, a_n$ σειρά μη αρνητικών όρων.

(α) Η $\Sigma\, a_n$ θα συγκλίνει αν υπάρχει συγκλίνουσα σειρά $\Sigma\, c_n$ τέτοια ώστε $a_n \leq c_n$ για κάθε $n > N$, για κάποιον ακέραιο N.

(β) Η $\Sigma\, a_n$ θα αποκλίνει αν υπάρχει αποκλίνουσα σειρά μη αρνητικών όρων $\Sigma\, d_n$ τέτοια ώστε $a_n \geq d_n$ για κάθε $n > N$, για κάποιον ακέραιο N.

Απόδειξη Στο μέρος (α), τα μερικά αθροίσματα της $\Sigma\, a_n$ είναι άνω φραγμένα από τον αριθμό

$$M = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n.$$

Συνεπώς, σχηματίζουν μια μη φθίνουσα ακολουθία με όριο $L \leq M$.

Στο μέρος (β), τα μερικά αθροίσματα της $\Sigma\, a_n$ δεν είναι άνω φραγμένα. Διότι αν ήταν, τότε τα μερικά αθροίσματα της $\Sigma\, d_n$ θα φράσσονταν από τον αριθμό

$$M^* = d_1 + d_2 + \dots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

οπότε η $\Sigma\, d_n$ όφειλε να συγκλίνει αντί να αποκλίνει.

Όταν εφαρμόζουμε το κριτήριο άμεσης σύγκρισης, δεν είναι ανάγκη να συμπεριλάβουμε όλους τους αρχικούς όρους της σειράς στη μελέτη μας. Μπορούμε να παραλείψουμε όλους τους πρώτους N όρους, όπου N τυχών αριθμός, αρκεί όμως από 'κεί κι έπειτα να συμπεριλάβουμε όλους τους επόμενους όρους.

Παράδειγμα 4 Εφαρμογή του κριτηρίου άμεσης σύγκρισης

Συγκλίνει η ακόλουθη σειρά;

$$5 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

Λύση Παραλείπουμε τους πρώτους τέσσερις όρους και συγκρίνουμε τους επόμενους όρους με αυτούς της συγκλίνουσας γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n)$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Συνεπώς, η αρχική σειρά συγκλίνει βάσει του κριτηρίου άμεσης σύγκρισης.

Η εφαρμογή του κριτηρίου άμεσης σύγκρισης διευκολύνεται αν έχουμε πρόχειρες μερικές σειρές των οποίων ο συγκλίνων ή αποκλίνων χαρακτήρας μας είναι γνωστός. Ιδού οι σειρές που είδαμε ώς τώρα:

Συγκλίνουσες σειρές	**Αποκλίνουσες σειρές**
Γεωμετρική σειρά με $\lvert r\rvert < 1$	Γεωμετρική σειρά με $\lvert r\rvert \ge 1$
Τηλεσκοπικές σειρές όπως η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	Κάθε σειρά $\sum a_n$ για την οποία το $\lim_{n\to\infty} a_n$ δεν υπάρχει ή $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$
Κάθε p-σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p > 1$	Κάθε p-σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p \le 1$

Εκτός από το κριτήριο άμεσης σύγκρισης, υπάρχει και το *κριτήριο οριακής σύγκρισης*.

Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Έστω $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \ge N$ (N θετικός ακέραιος).

1. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, $0 < c < \infty$, τότε οι $\Sigma\, a_n$ και $\Sigma\, b_n$ θα συγκλίνουν ή θα αποκλίνουν ταυτόχρονα.

2. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ και η $\Sigma\, b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\Sigma\, a_n$ συγκλίνει.

3. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ και η $\Sigma\, b_n$ αποκλίνει, τότε και η $\Sigma\, a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη Θα δείξουμε το (1). Τα (2) και (3) αφήνονται στον αναγνώστη (Άσκηση 67).

Εφόσον $c/2 > 0$, θα υπάρχει ένας ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε n,

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}.$$

Ορισμός ορίου με $\epsilon = c/2$, $L = c$, και το a_n/b_n στη θέση του a_n.

Άρα, για $n > N$,

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

$$\left(\frac{c}{2}\right) b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right) b_n.$$

Αν η σειρά $\Sigma\, b_n$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\Sigma\,(3c/2)b_n$ αλλά και η $\Sigma\, a_n$, βάσει του κριτηρίου άμεσης σύγκρισης. Αν η σειρά $\Sigma\, b_n$ αποκλίνει, τότε τόσο η $\Sigma\,(c/2)b_n$ όσο και η $\Sigma\, a_n$ θα αποκλίνουν επίσης, βάσει του ίδιου κριτηρίου.

Παράδειγμα 5 Χρήση του κριτηρίου οριακής σύγκρισης

Προσδιορίστε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

(α) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$

(β) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

(γ) $\frac{1 + 2\ln 2}{9} + \frac{1 + 3\ln 3}{14} + \frac{1 + 4\ln 4}{21} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5}$

Λύση

Θα μπορούσαμε κάλλιστα να είχαμε πάρει $b_n = 2/n$, αλλά η τιμή $1/n$ απλοποιεί τα πράγματα.

(α) Έστω $a_n = (2n+1)/(n^2+2n+1)$. Για μεγάλο n, ο όρος a_n συμπεριφέρεται όπως η ποσότητα $2n/n^2 = 2/n$, οπότε θεωρούμε $b_n = 1/n$. Εφόσον η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει, και ακόμη

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2,$$

τότε και η σειρά $\Sigma\, a_n$ θα αποκλίνει, βάσει του (1) του κριτηρίου σύγκρισης ορίου.

(β) Έστω $a_n = 1/(2^n - 1)$. Για μεγάλο n, ο όρος a_n συμπεριφέρεται όπως η ποσότητα $1/2^n$, οπότε θεωρούμε $b_n = 1/2^n$. Εφόσον η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

συγκλίνει, και ακόμη

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - (1/2^n)}\\ &= 1,\end{aligned}$$

τότε και η σειρά $\Sigma\, a_n$ θα συγκλίνει, βάσει του (1) του κριτηρίου σύγκρισης ορίου.

(γ) Έστω $a_n = (1 + n \ln n)/(n^2 + 5)$. Για μεγάλο n, ο όρος a_n θα συμπεριφέρεται όπως ο $(n \ln n)/n^2 = (\ln n)/n$, που είναι μεγαλύτερος του $1/n$ για $n \geq 3$, οπότε θεωρούμε $b_n = 1/n$. Εφόσον η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει, και ακόμη

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n + n^2 \ln n}{n^2 + 5}$$
$$= \infty,$$

τότε και η σειρά $\Sigma\, a_n$ θα αποκλίνει, βάσει του (3) του κριτηρίου σύγκρισης ορίου.

Κριτήρια λόγου και ρίζας

Με το κριτήριο του λόγου μπορούμε να μετρήσουμε τον ρυθμό αύξησης (ή ελάττωσης) μιας σειράς, εξετάζοντας τον λόγο a_{n+1}/a_n. Σε μια γεωμετρική σειρά $\Sigma\, ar^n$, ο ρυθμός αυτός είναι σταθερός ($(ar^{n+1})/(ar^n) = r$), και η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν ο λόγος της είναι μικρότερος του 1 κατ' απόλυτη τιμή. Μπορούμε να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα αυτό, παίρνοντας έτσι το Κριτήριο του Λόγου.

Κριτήριο του λόγου

Έστω η σειρά $\Sigma\, a_n$ με θετικούς όρους. Έστω ακόμη

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

Στην περίπτωση αυτή

(α) η σειρά *συγκλίνει* για $\rho < 1$
(β) η σειρά *αποκλίνει* για $\rho > 1$ ή για απειριζόμενο ρ
(γ) το κριτήριο *δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης* αν $\rho = 1$.

Απόδειξη

(α) $\boldsymbol{\rho < 1}$**.** Έστω r αριθμός μεταξύ του ρ και του 1. Στην περίπτωση αυτή η ποσότητα $\epsilon = r - \rho$ είναι θετική. Εφόσον

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho,$$

ο λόγος a_{n+1}/a_n θα πρέπει να κείται με απόσταση μικρότερη του ϵ από το ρ για αρκούντως μεγάλο n, δηλ. για κάθε $n \geq N$. Με άλλα λόγια,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r, \qquad \text{για } n \geq N.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &< r\,a_N, \\
a_{N+2} &< r\,a_{N+1} < r^2 a_N, \\
a_{N+3} &< r\,a_{N+2} < r^3 a_N, \\
&\vdots \\
a_{N+m} &< r\,a_{N+m-1} < r^m a_N.
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω ανισότητες δείχνουν ότι οι όροι της σειράς μας, μετά τον N-οστό όρο, τείνουν στο μηδέν ταχύτερα από τους όρους της γεωμετρικής προόδου με λόγο $r < 1$. Ακριβέστερα, θεωρήστε τη σειρά $\Sigma\, c_n$, όπου $c_n = a_n$ για $n = 1, 2, \ldots, N$ και $c_{N+1} = ra_N$, $c_{N+2} = r^2 a_N, \ldots, c_{N+m} = r^m a_N, \ldots$. Ισχύει $a_n \le c_n$ για κάθε n, και ακόμη

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \cdots).\end{aligned}$$

Η γεωμετρική σειρά $1 + r + r^2 + \ldots$ συγκλίνει εφόσον $|r| < 1$, άρα και η $\Sigma\, c_n$ συγκλίνει. Δεδομένου ότι $a_n \le c_n$, η σειρά $\Sigma\, a_n$ θα συγκλίνει επίσης.

(β) $\boldsymbol{1 < \rho \le \infty}$**.** Από κάποιον δείκτη M και εφεξής,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \text{και} \qquad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \ldots.$$

Οι όροι της ακολουθίας δεν τείνουν στο μηδέν καθώς το n απειρίζεται, οπότε η σειρά αποκλίνει, βάσει του κριτηρίου του n-οστού όρου.

(γ) $\boldsymbol{\rho = 1}$**.** Η συμπεριφορά των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

μας πείθει ότι θα χρειαστεί κάποιο άλλο κριτήριο σύγκλισης για την περίπτωση $\rho = 1$.

Για την $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\displaystyle\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1.$

Για την $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $\displaystyle\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1.$

Και στις δύο περιπτώσεις λοιπόν $\rho = 1$, ωστόσο η πρώτη σειρά αποκλίνει, ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Το κριτήριο του λόγου αποβαίνει συχνά χρήσιμο όταν οι όροι μιας σειράς περιέχουν παραγοντικά του n ή εκφράσεις υψωμένες στη n-οστή δύναμη.

Παράδειγμα 6 Εφαρμογή του κριτηρίου του λόγου

Διερευνήστε τη σύγκλιση των ακόλουθων σειρών.

(α) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ **(β)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ **(γ)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

Λύση

(α) Για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5)/3^n$, έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 + 5 \cdot 2^{-n}}{1 + 5 \cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

Η σειρά συγκλίνει εφόσον το $\rho = 2/3$ είναι μικρότερο του 1. Αυτό όμως *δεν* σημαίνει ότι το $2/3$ είναι το άθροισμα της σειράς. Για την ακρίβεια, είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}.$$

(β) Αν $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, τότε $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ και

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4.$$

Η σειρά αποκλίνει εφόσον το $\rho = 4$ είναι μεγαλύτερο του 1.

(γ) Αν $a_n = 4^n n!n!/(2n)!$, τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!n!}$$

$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1.$$

Εφόσον το ανωτέρω όριο είναι $\rho = 1$, το κριτήριο του λόγου δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης. Αν όμως παρατηρήσουμε ότι $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$, συμπεραίνουμε ότι ο όρος a_{n+1} είναι πάντα μεγαλύτερος του a_n εφόσον το $(2n+2)/(2n+1)$ υπερβαίνει πάντοτε τη μονάδα. Κατά συνέπεια, όλοι οι όροι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του $a_1 = 2$, άρα ο n-οστός όρος δεν τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς η σειρά αποκλίνει.

Το κριτήριο της n-οστής ρίζας αποτελεί άλλο ένα χρήσιμο εργαλείο για τη διερεύνηση της σύγκλισης σειρών με μη αρνητικούς όρους. Αναφέρουμε εδώ το κριτήριο χωρίς απόδειξη.

Κριτήριο n-οστής ρίζας

Έστω η σειρά $\Sigma\, a_n$ με $a_n \geq 0$ για $n \geq N$. Έστω ακόμη ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

Στην περίπτωση αυτή

(α) η σειρά *συγκλίνει* για $\rho < 1$

(β) η σειρά *αποκλίνει* για $\rho > 1$ ή για απειριζόμενο ρ

(γ) το κριτήριο *δεν μας επιτρέπει να αποφανθούμε περί σύγκλισης ή απόκλισης* αν $\rho = 1$.

Παράδειγμα 7 Εφαρμογή του κριτηρίου της n-οστής ρίζας

Έστω

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ περιττός} \\ 1/2^n, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Συγκλίνει η σειρά $\Sigma\, a_n$;

Λύση Εφαρμόζουμε το κριτήριο της n-οστής ρίζας, οπότε

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ περιττός} \\ 1/2, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}.$$

Εφόσον $\sqrt[n]{n} \to 1$ (Ενότητα 8.1, Πίνακας 8.1), θα είναι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ βάσει του θεωρήματος «σάντουιτς». Το όριο αυτό είναι μικρότερο της μονάδας, άρα η σειρά συγκλίνει βάσει του κριτηρίου της n-οστής ρίζας.

Παράδειγμα 8 Εφαρμογή του κριτηρίου της n-οστής ρίζας

Ποια από τις ακόλουθες σειρές συγκλίνει, και ποια αποκλίνει;

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **(β)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

Λύση

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ συγκλίνει διότι $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} 1 \frac{1}{2} < 1.$

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ αποκλίνει διότι $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} 1 \frac{2}{1} > 1.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.4

Κριτήριο του ολοκληρώματος

Εφαρμόστε το κριτήριο του ολοκληρώματος για να προσδιορίσετε ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 1-8 συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

7. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

Κριτήριο άμεσης σύγκρισης

Εφαρμόστε το κριτήριο άμεσης σύγκρισης για να προσδιορίσετε ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 9-14 συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

14. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Εφαρμόστε το κριτήριο οριακής σύγκρισης για να προσδιορίσετε ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 15-20 συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν.

15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$

Κριτήριο λόγου

Εφαρμόστε το κριτήριο του λόγου για να προσδιορίσετε ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 21-28 συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

Κριτήριο ρίζας

Εφαρμόστε το κριτήριο της n-οστής ρίζας για να προσδιορίσετε ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 29-34 συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$

31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

Προσδιορισμός σύγκλισης ή απόκλισης

Ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 35-60 συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. (Καθώς ελέγχετε τις απαντήσεις σας, θυμηθείτε ότι υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι προσδιορισμού της σύγκλισης ή της απόκλισης μιας σειράς.)

35. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2}$

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

41. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \tan^{-1} n}{1+n^2}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1{,}25^n}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

56. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1,1}}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1,3}}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

Αναδρομικά οριζόμενες σειρές

Ποιες από τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ που ορίζονται από τους τύπους των Ασκήσεων 61-66 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

61. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$

62. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\tan^{-1} n}{n} a_n$

63. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$

64. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

65. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

66. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

Θεωρία και παραδείγματα

67. Δείξτε

(α) Το (2) του κριτηρίου οριακής σύγκρισης.

(β) Το (3) του κριτηρίου οριακής σύγκρισης.

68. *Μάθετε γράφοντας* Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα σειρά μη αρνητικών αριθμών, τι μπορείτε να συμπεράνετε για την $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$; Εξηγήστε.

69. *Μάθετε γράφοντας* Έστω $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για $n \geq N$ (N ακέραιος). Αν $\lim_{n1 \infty} (a_n/b_n) = \infty$ και η σειρά Σa_n συγκλίνει, τι μπορείτε να συμπεράνετε για την Σb_n; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

70. *Ύψωση κάθε όρου στο τετράγωνο* Δείξτε ότι αν η Σa_n είναι συγκλίνουσα σειρά μη αρνητικών όρων, τότε η Σa_n^2 συγκλίνει.

Για ποιες τιμές του a, αν υπάρχουν τέτοιες, συγκλίνουν οι σειρές των Ασκήσεων 71 και 72;

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$

72. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1}\right)$

73. *Το Κριτήριο του Cauchy* Το κριτήριο του Cauchy λέει ότι: Έστω $\{a_n\}$ μια μη αύξουσα ακολουθία ($a_n \geq a_{n+1}$ για κάθε n) θετικών όρων που συγκλίνει στο 0. Η Σa_n θα συγκλίνει αν και μόνο αν και η $\Sigma 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. Για παράδειγμα, η $\Sigma (1/n)$ αποκλίνει διότι η $\Sigma 2^n \cdot (1/2^n) = \Sigma 1$ αποκλίνει. Δείξτε γιατί ισχύει το συγκεκριμένο κριτήριο.

74. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy της Άσκησης 73 για να δείξετε ότι

(α) Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ αποκλίνει.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

75. *Λογαριθμική p-σειρά*

(α) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \qquad (p \text{ μια θετική σταθερά})$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

(β) Τι συνεπάγεται η απάντησή σας στο ερώτημα (α) προκειμένου για τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p};$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

76. (Συνέχεια της Άσκησης 75) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 75 για να προσδιορίσετε ποιες από τις ακόλουθες σειρές συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(α) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

(β) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1{,}01}}$

(γ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n^3)}$

(δ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

77. *Άλλη μία λογαριθμική p-σειρά* Δείξτε ότι ούτε το κριτήριο του λόγου ούτε το κριτήριο της n-οστής ρίζας μάς παρέχει κάποια πληροφορία για τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad (p \text{ σταθερά}).$$

78. Έστω

$$a_n = \begin{cases} n/2^n & \text{αν } n \text{ πρώτος αριθμός} \\ 1/2^n & \text{αν όχι.} \end{cases}$$

Συγκλίνει η σειρά Σa_n; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

79. *p-σειρά* Ούτε το κριτήριο του λόγου ούτε το κριτήριο της n-οστής ρίζας μάς επιτρέπουν να προσδιορίσουμε τη σύγκλιση μιας p-σειράς. Δοκιμάστε να εφαρμόσετε τα κριτήρια αυτά στην

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

και δείξτε ότι αμφότερα αποτυγχάνουν να διαλευκάνουν την υπόθεση.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Ένα μυστήριο

80. Ακόμη δεν είναι γνωστό αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

συγκλίνει ή αποκλίνει. Κάνοντας χρήση ενός συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας, διερευνήστε τη συμπεριφορά της σειράς εκτελώντας τα ακόλουθα βήματα.

(α) Ορίστε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}.$$

Τι συμβαίνει όταν προσπαθήσετε να βρείτε το όριο του s_k καθώς $k \to \infty$; Βρίσκει το υπολογιστικό σας σύστημα κάποια λύση κλειστής μορφής για το όριο;

(β) Τοποθετήστε σε διάγραμμα τα πρώτα 100 σημεία (k, s_k) της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων. Δείχνουν να συγκλίνουν; Σε ποιο όριο πιστεύετε;

(γ) Κατόπιν, τοποθετήστε σε διάγραμμα τα πρώτα 200 σημεία (k, s_k). Περιγράψτε με δικά σας λόγια τη συμπεριφορά που βλέπετε.

(δ) Τοποθετήστε σε διάγραμμα τα πρώτα 400 σημεία (k, s_k). Τι παρατηρείτε για $k = 355$; Υπολογίστε τον αριθμό 355/113. Βάσει του υπολογισμού σας, εξηγήστε τι συμβαίνει όταν $k = 355$. Για ποιες τιμές του k περιμένετε ότι η συμπεριφορά αυτή μπορεί να επαναληφθεί;

Μια ενδιαφέρουσα μελέτη της σειράς αυτής υπάρχει στο Κεφ. 72 του βιβλίου *Mazes for the Mind* του Clifford A. Pickover (New York: St. Martin's Press, 1992).

8.5 Εναλλασσόμενες σειρές, απόλυτη σύγκλιση και υπό συνθήκη σύγκλιση

Εναλλασσόμενες σειρές • Απόλυτη σύγκλιση • Αναδιάταξη σειρών • Διαδικασία προσδιορισμού σύγκλισης

Τα κριτήρια σύγκλισης που είδαμε ώς τώρα αφορούν μόνο σειρές με μη αρνητικούς όρους. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε σειρές που περιέχουν και αρνητικούς όρους. Ένα παράδειγμα τέτοιας σειράς με μεγάλη σπουδαιότητα είναι η *εναλλασσόμενη σειρά*, της οποίας οι όροι εναλλάσσουν πρόσημα. Θα μάθουμε επίσης ποιες συγκλίνουσες σειρές μπορούν να υποστούν αναδιάταξη των όρων τους χωρίς να μεταβληθεί το άθροισμά τους.

Εναλλασσόμενες σειρές

Μια σειρά της οποίας οι όροι είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί καλείται **εναλλασσόμενη σειρά.**

Ιδού τρία παραδείγματα.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \tag{1}$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \cdots \tag{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + (-1)^{n+1} n + \ldots \tag{3}$$

Η σειρά (1) –που καλείται **εναλλασσόμενη αρμονική σειρά**– συγκλίνει, κάτι που θα δείξουμε σύντομα. Η σειρά (2), μια γεωμετρική σειρά με $a = -2$ και $r = -1/2$, συγκλίνει στην τιμή $-2/[1 + (1/2)] = -4/3$. Η σειρά (3) αποκλίνει βάσει του κριτηρίου του n-οστού όρου.

Θα δείξουμε τη σύγκλιση της εναλλασσόμενης αρμονικής σειράς εφαρμόζοντας το ακόλουθο κριτήριο.

Θεώρημα 8 **Κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς (θεώρημα Leibniz)**
Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

συγκλίνει αν πληρούνται ταυτόχρονα οι εξής προϋποθέσεις.

1. Τα u_n είναι όλα θετικά.
2. $u_n \geq u_{n+1}$ για κάθε $n \geq N$, για κάποιον ακέραιο N.
3. $u_n \to 0$.

Απόδειξη Αν n είναι άρτιος ακέραιος, έστω $n = 2m$, τότε το άθροισμα των πρώτων n όρων είναι

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα δείχνει ότι το s_{2m} είναι άθροισμα m μη αρνητικών όρων, εφόσον κάθε όρος εντός των παρενθέσεων είναι θετικός ή μηδέν. Συνεπώς, $s_{2m+2} \geq s_{2m}$, και η ακολουθία $\{s_{2m}\}$ είναι μη φθίνουσα. Η δεύτερη ισότητα δείχνει ότι $s_{2m} \leq u_1$. Εφόσον η $\{s_{2m}\}$ είναι μη φθίνουσα και άνω φραγμένη, οφείλει να έχει όριο, έστω το

$$\lim_{m \to \infty} s_{2m} = L. \tag{4}$$

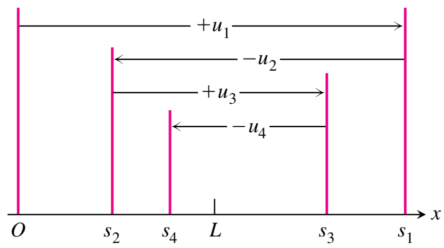
Αν n είναι περιττός ακέραιος, έστω $n = 2m + 1$, τότε το άθροισμα των πρώτων n όρων είναι $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$. Εφόσον $u_n \to 0$, θα ισχύει ότι

$$\lim_{m \to \infty} u_{2m+1} = 0$$

οπότε, καθώς $m \to \infty$,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L. \tag{5}$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των Εξισώσεων (4) και (5) παίρνουμε $\lim_{n \to \infty} s_n = L$ (Ενότητα 8.2, Άσκηση 26). Το Σχήμα 8.15 δείχνει πώς τα μερικά αθροίσματα συγκλίνουν προς το όριό τους L.



Σχημα 8.15 Τα μερικά αθροίσματα μιας εναλλασσόμενης σειράς που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 8 για $N = 1$, «διασκελίζουν» διαρκώς το όριο προσεγγίζοντάς το.

Στην πραγματικότητα, το Σχήμα 8.15 δείχνει αρκετά περισσότερα από το *γεγονός* της σύγκλισης και μόνο· μας δείχνει ακόμη τον *τρόπο* με τον οποίο μια εναλλασσόμενη σειρά συγκλίνει όταν πληρούνται οι απαιτήσεις του κριτηρίου. Τα μερικά αθροίσματα «ξεπερνούν» το όριο ταλαντευόμενα γύρω από αυτό πάνω στον άξονα των αριθμών, και προσεγγίζοντάς το βαθμιαία. Έτσι, αν προς στιγμήν είμαστε στο n-οστό μερικό άθροισμα, γνωρίζουμε ότι ο επόμενος όρος $(\pm u_{n+1})$ θα οδηγήσει την τιμή του μερικού αθροίσματος στην αντίθετη πλευρά του ορίου από αυτήν που είμαστε τώρα· η πλευρά αυτή θα είναι η θετική ή η αρνητική, αναλόγως του προσήμου του u_{n+1}. Η παρατήρηση αυτή μάς επιτρέπει μια εύκολη εκτίμηση ενός άνω φράγματος για το **σφάλμα αποκοπής**, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 9 **Θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς**
Αν η εναλλασσόμενη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 8, τότε το σφάλμα αποκοπής όλων των όρων μετά το n-οστό μερικό άθροισμα, θα είναι μικρότερο του u_{n+1} και θα έχει ίδιο πρόσημο με τον $(n+1)$-οστό όρο της σειράς.

Παράδειγμα 1 Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά

Δείξτε ότι η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά συγκλίνει, ενώ η αντίστοιχη σειρά απόλυτων τιμών όχι. Βρείτε ένα φράγμα για το σφάλμα αποκοπής μετά από 99 όρους.

Λύση Οι όροι εναλλάσσουν πρόσημα και μικραίνουν κατ' απόλυτη τιμή:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots.$$

Επίσης,

$$\frac{1}{n}\ 1\ \ 0.$$

Βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενης σειράς, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

συγκλίνει.

Από την άλλη, η σειρά απόλυτων τιμών $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ δεν είναι παρά η αρμονική σειρά, η οποία ως γνωστόν αποκλίνει.

Το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς μάς εγγυάται ότι το σφάλμα αποκοπής μετά από 99 όρους θα είναι μικρότερο του $u_{99+1} = 1/(99 + 1) = 1/100$.

Φράγμα σφάλματος

Το Θεώρημα 9 δεν παρέχει έναν *τύπο* για το σφάλμα αποκοπής, αλλά ένα *φράγμα* του. Ενδέχεται το φράγμα αυτό να είναι αρκετά συντηρητικό. Για παράδειγμα, προστιθέμενοι οι πρώτοι 99 όροι της εναλλασσόμενης αρμονικής σειράς δίνουν περίπου 0,6981721793, ενώ το άπειρο άθροισμα των όρων της σειράς είναι $\ln 2 \approx 0{,}6931471806$. Το πραγματικό σφάλμα αποκοπής είναι λοιπόν σχεδόν 0,005, περίπου το μισό του φράγματος που μας δίνει το Θεώρημα 9 (και που ισούται με 0,01).

Παράδειγμα 2 Εφαρμογή του θεωρήματος εκτίμησης

Ας δοκιμάσουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 9 σε μια σειρά της οποίας το άθροισμα μας είναι γνωστό:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \mid + \frac{1}{256} - \cdots.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα, αν αποκόψουμε τους όρους μετά τον όγδοο, παραλείπουμε ένα υπόλοιπο το οποίο είναι θετικό και μικρότερο του 1/256. Το άθροισμα των πρώτων οκτώ όρων είναι 0,6640 625. Το άθροισμα της σειράς είναι

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η διαφορά, $(2/3) - 0{,}6640\,625 = 0{,}0026\,0416\,6\ldots$, είναι θετική και μικρότερη του $(1/256) = 0{,}0039\,0625$.

Απόλυτη σύγκλιση

Ορισμός Απόλυτη σύγκλιση

Η σειρά $\Sigma\, a_n$ **συγκλίνει απολύτως** (είναι **απολύτως συγκλίνουσα**) αν συγκλίνει η αντίστοιχη σειρά απόλυτων τιμών, δηλαδή η $\Sigma\, |a_n|$.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Niccolo Tartaglia
(1499-1557)

Η γεωμετρική σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

συγκλίνει απολύτως διότι η αντίστοιχη σειρά απόλυτων τιμών

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

συγκλίνει. Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά (Παράδειγμα 1) δεν συγκλίνει απολύτως. Η αντίστοιχη σειρά απόλυτων τιμών είναι η (αποκλίνουσα) αρμονική σειρά.

Ορισμός **Σύγκλιση υπό συνθήκη**

Λέμε ότι μια σειρά **συγκλίνει υπό συνθήκη** όταν συγκλίνει μεν, αλλά όχι απολύτως.

Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

Παράδειγμα 3 Απόλυτη σύγκλιση και υπό συνθήκη σύγκλιση

Προσδιορίστε ποιες από τις ακόλουθες σειρές συγκλίνουν απολύτως, ποιες υπό συνθήκη, και ποιες αποκλίνουν.

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

(β) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^{4} - \cdots$

(γ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{2^{n}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$

Λύση

(α) Η σειρά συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενης σειράς διότι $(1/\sqrt{n}) > (1/\sqrt{n+1})$ και $(1/\sqrt{n})$ 1 0. Η σειρά απόλυτων τιμών $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\sqrt{n})$ αποκλίνει, ωστόσο, εφόσον είναι μια p-σειρά με $p = (1/2) < 1$. Κατά συνέπεια, η δοθείσα σειρά είναι *συγκλίνουσα υπό συνθήκη*.

(β) Η σειρά *αποκλίνει* βάσει του κριτηρίου του n-οστού όρου εφόσον $\lim_{n 1 \infty} (1 - (1/n))^{n} = e^{-1} \neq 0$ (Πίνακας 8.1, Τύπος 5).

(γ) Η σειρά αυτή *δεν* είναι εναλλασσόμενη. Ωστόσο, η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{2^{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}}$$

είναι μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά, άρα η δοθείσα σειρά είναι *απολύτως συγκλίνουσα*.

Η απόλυτη σύγκλιση παρουσιάζει ενδιαφέρον για δύο λόγους. Πρώτον, διότι διαθέτουμε ήδη κριτήρια σύγκλισης σειρών με θετικούς όρους. Δεύτερον, διότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε είναι συγκλίνουσα. Αυτό μας λέει το επόμενο θεώρημα.

ΠΡΟΣΟΧΗ Το Θεώρημα 10 μας λέει ότι *κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει.* Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε: Πολλές συγκλίνουσες σειρές δεν συγκλίνουν απολύτως.

Θεώρημα 10 **Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης**

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη Για κάθε n,

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|, \qquad \text{δηλ.} \qquad 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|.$$

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ συγκλίνει επίσης, και, βάσει του κριτηρίου άμεσης σύγκρισης, η σειρά μη αρνητικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ θα συγκλίνει. Η ισότητα $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ μας επιτρέπει να εκφράσουμε την $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ως τη διαφορά δύο συγκλινουσών σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Συνεπώς, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 4 Εφαρμογή του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης

Για την

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots,$$

η αντίστοιχη σειρά απόλυτων τιμών είναι η συγκλίνουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Η αρχική εναλλασσόμενη σειρά συγκλίνει εφόσον συγκλίνει απολύτως.

Παράδειγμα 5 Εφαρμογή του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης

Για την

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\, n}{n^2} = \frac{\sin\, 1}{1} + \frac{\sin\, 2}{4} + \frac{\sin\, 3}{9} + \cdots,$$

η αντίστοιχη σειρά απόλυτων τιμών είναι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\, n}{n^2} \right| = \frac{|\sin\, 1|}{1} + \frac{|\sin\, 2|}{4} + \cdots,$$

η οποία προφανώς συγκλίνει, δεδομένου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ συγκλίνει και $|\sin n| \le 1$ για κάθε n. Η αρχική σειρά είναι λοιπόν απολύτως συγκλίνουσα, άρα συγκλίνει.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Georg Cantor
(1845-1918)

Παράδειγμα 6 Εναλλασσόμενη p-σειρά

Αν p είναι μια θετική σταθερά, η ακολουθία $\{1/n^p\}$ είναι φθίνουσα και έχει όριο το μηδέν. Συνεπώς, η εναλλασσόμενη p-σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \qquad p > 0,$$

θα συγκλίνει.

Για $p > 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Για $0 < p \le 1$, η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

Σύγκλιση υπό συνθήκη: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

Απόλυτη σύγκλιση: $1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots$

Αναδιάταξη σειρών

Θεώρημα 11 Θεώρημα αναδιάταξης για απολύτως συγκλίνουσες σειρές

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$ είναι μια τυχούσα διάταξη όρων της ακολουθίας $\{a_n\}$, τότε και η σειρά $\sum b_n$ θα συγκλίνει απολύτως, και μάλιστα

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(Στην Άσκηση 60 περιγράφεται η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.)

Παράδειγμα 7 Εφαρμογή του θεωρήματος αναδιάταξης

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4, η σειρά

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

συγκλίνει απολύτως. Μια πιθανή αναδιάταξη των όρων της σειράς θα ήταν να ξεκινούσαμε με τον θετικό όρο, έπειτα να πάρουμε δύο αρνητικούς όρους, μετά τρεις θετικούς όρους, κ.ο.κ.: Μετά από k όρους ενός προσήμου, ακολουθούν $k+1$ όροι αντίθετου προσήμου. Οι πρώτοι 10 όροι μιας τέτοιας σειράς θα ήταν λοιπόν οι εξής:

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \cdots.$$

Το θεώρημα αναδιάταξης μας λέει ότι και οι δύο σειρές συγκλίνουν στην ίδια τιμή. Στο παράδειγμα αυτό, αν αρχικά μας δινόταν η δεύτερη σειρά, θα μας εξυπηρετούσε να την αντικαταστήσουμε με την πρώτη, αν βέβαια ήμασταν βέβαιοι ότι κάτι τέτοιο είναι επιτρεπτό. Και οι δύο σειρές συγκλίνουν στην τιμή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

(Δείτε σχετικά την Άσκηση 61.)

Παράδειγμα 8 Αναδιάταξη της εναλλασσόμενης αρμονικής σειράς

Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots$$

μπορεί να αναδιαταχθεί έτσι ώστε να αποκλίνει ή ακόμη και να συγκλίνει προς οποιαδήποτε προκαθορισμένη τιμή επιθυμούμε(!).

ΠΡΟΣΟΧΗ Αναδιατάσσοντας άπειρο πλήθος όρων μιας υπό συνθήκη συγκλίνουσας σειράς, μπορεί να προκύψει ένα τελείως διαφορετικό αποτέλεσμα από το άθροισμα της αρχικής σειράς.

Η συμπεριφορά που είδαμε στο παράδειγμα αυτό είναι χαρακτηριστική του τι μπορεί να συμβεί με την αναδιάταξη των όρων μιας υπό συνθήκη συγκλίνουσας σειράς. Δίδαγμα: Προσθέστε τους όρους μιας υπό συνθήκη συγκλίνουσας σειράς με τη διάταξη που σας δίνεται.

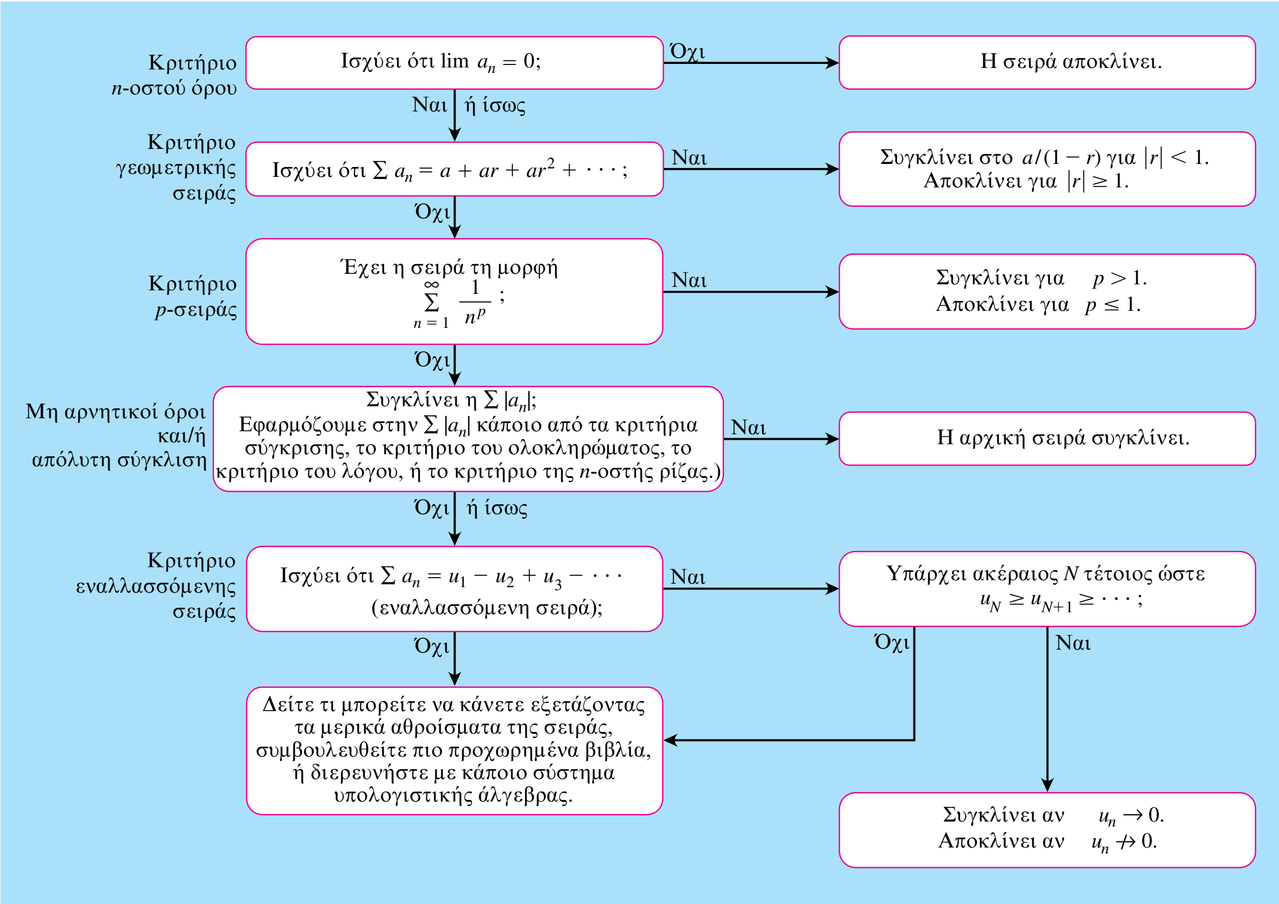
(α) *Αναδιατάσσοντας την* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ *έτσι ώστε να αποκλίνει*. Η σειρά $\Sigma\ [1/(2n-1)]$ αποκλίνει στο $+\infty$, ενώ η σειρά $\Sigma\ (-1/2n)$ αποκλίνει στο $-\infty$. Ανεξάρτητα από το ποιοι όροι της αρχικής σειράς έχουν ήδη προηγηθεί, μπορούμε πάντα να προσθέσουμε κατάλληλο πλήθος θετικών όρων (δηλ. περιττού δείκτη) ώστε να προκύψει ένα αυθαίρετα μεγάλο άθροισμα. Ομοίως για τους αρνητικούς όρους, ανεξάρτητα από το πόσοι όροι της σειράς έχουν προηγηθεί, μπορούμε πάντα να προσθέσουμε ικανό πλήθος διαδοχικών αρνητικών όρων (δηλ. άρτιου δείκτη) ώστε να πάρουμε ένα αρνητικό άθροισμα όσο μεγάλης απόλυτης τιμής επιθυμούμε. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με περιττούς όρους μέχρι να φτιάξουμε άθροισμα μεγαλύτερο του $+3$, και κατόπιν να συνεχίσουμε με τόσους αρνητικούς όρους, ώστε το νέο άθροισμα να γίνει μικρότερο του -4. Έπειτα θα προσθέταμε τόσους θετικούς όρους ώστε το άθροισμα να γίνει μεγαλύτερο του $+5$, και κατόπιν πάλι θα παίρναμε αρνητικούς όρους φτιάχνοντας νέο άθροισμα μικρότερο του -6, κ.ο.κ. Με τη διαδικασία αυτή, η τιμή του αθροίσματος θα ταλαντεύεται αυθαίρετα προς κάθε κατεύθυνση.

(β) *Αναδιατάσσοντας την* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ *έτσι ώστε να συγκλίνει* στο 1. Μια άλλη δυνατότητα είναι να καταλήξουμε σε ένα συγκεκριμένο όριο. Έστω ότι επιθυμούμε να κατασκευάσουμε αθροίσματα που συγκλίνουν στο 1. Ξεκινούμε με τον πρώτο όρο, τον $1/1$, από τον οποίο αφαιρούμε το $1/2$. Έπειτα προσθέτουμε τους όρους $1/3$ και $1/5$, οπότε το άθροισμα υπερβαίνει κατά τι το 1. Κατόπιν προσθέτουμε διαδοχικούς αρνητικούς όρους μέχρι το άθροισμα να γίνει μικρότερο του 1. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: Μόλις το άθροισμα γίνει μικρότερο του 1, προσθέτουμε θετικούς όρους μέχρι να υπερβεί και πάλι το 1, έπειτα αφαιρούμε (προσθέτουμε αρνητικούς) όρους που φέρνουν πάλι την τιμή του αθροίσματος πιο κάτω από το 1. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ' αόριστον. Επειδή τόσο οι περιττού δείκτη όσο και οι άρτιου δείκτη όροι τείνουν στο μηδέν καθώς n 1 ∞, η ποσότητα κατά την οποία υπερβαίνει τη μονάδα το εκάστοτε μερικό άθροισμα τείνει επίσης στο μηδέν. Έτσι, η νέα σειρά συγκλίνει στο 1. Η αναδιατεταγμένη αυτή σειρά ξεκινά ως εξής:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{10}$$
$$+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{12}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{14}+\frac{1}{27}-\frac{1}{16}+\cdots.$$

Διαδικασία προσδιορισμού σύγκλισης

Το διάγραμμα ροής που ακολουθεί μπορεί να σας χρησιμεύσει όταν εξετάζετε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας άπειρης σειράς.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ 8.1 Διαδικασία προσδιορισμού σύγκλισης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.5

Προσδιορισμός σύγκλισης ή απόκλισης

Ποιες από τις εναλλασσόμενες σειρές των Ασκήσεων 1-10 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\ln n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

Απόλυτη σύγκλιση και σύγκλιση υπό συνθήκη

Ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 11-44 συγκλίνουν απολύτως, ποιες συγκλίνουν υπό συνθήκη, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0{,}1)^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0{,}1)^n}{n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n+3}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin n}{n^2}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$
20. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln (n^3)}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n}{n^2}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} n^2 (2/3)^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{10})$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\ln n}{n - \ln n}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

32. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(2n)^n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!\, n}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+n}-n)$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sech} n$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{csch} n$

Εκτίμηση σφάλματος

Στις Ασκήσεις 45-48, εκτιμήστε το μέγεθος του σφάλματος που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το μερικό άθροισμα των πρώτων τεσσάρων όρων για να προσεγγίσουμε το άθροισμα κάθε σειράς.

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ Μπορεί να αποδειχθεί ότι το άθροισμα ισούται με ln 2.

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{10^n}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(0{,}01)^n}{n}$ Όπως θα δούμε στην Ενότητα 8.7, το άθροισμα ισούται με ln (1,01).

48. $\displaystyle\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1$

Στις Ασκήσεις 49 και 50, βρείτε μια προσεγγιστική τιμή των αθροισμάτων με σφάλμα μικρότερο του 5×10^{-6}.

49. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ Όπως θα δούμε στην Ενότητα 8.7, το άθροισμα ισούται με cos 1, δηλ. με το συνημίτονο 1 ακτινίου.

50. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ Όπως θα δούμε στην Ενότητα 8.7, το άθροισμα ισούται με e^{-1}.

Θεωρία και παραδείγματα

51. **(α)** *Μάθετε γράφοντας* Η σειρά

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$$

δεν πληροί μία από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 8. Ποια;

(β) Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς του ερωτήματος (α).

52. Μια εναλλασσόμενη σειρά που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 8 έχει όριο L που κείται ανάμεσα σε δύο οιαδήποτε διαδοχικά μερικά αθροίσματά της. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή

$$\frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2}a_{n+1}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκτίμηση της τιμής του L. Υπολογίστε την ποσότητα

$$s_{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}$$

ως μια προσέγγιση του αθροίσματος της εναλλασσόμενης αρμονικής σειράς. Η ακριβής τιμή του αθροίσματος είναι $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$.

53. *Το πρόσημο του υπολοίπου μιας εναλλασσόμενης σειράς που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 8* Αποδείξτε τον ισχυρισμό του Θεωρήματος 9, ότι δηλαδή όταν μια εναλλασσόμενη σειρά που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 8 προσεγγίζεται από ένα μερικό της άθροισμα, το υπόλοιπο (δηλ. το άθροισμα των απορριφθέντων όρων) έχει το ίδιο πρόσημο με τον πρώτο απορριφθέντα όρο. (*Υπόδειξη:* Ομαδοποιήστε τους όρους του υπολοίπου σε κατάλληλα ζεύγη.)

54. *Μάθετε γράφοντας* Δείξτε ότι το άθροισμα των πρώτων $2n$ όρων της σειράς

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

ισούται με το άθροισμα των πρώτων n όρων της σειράς

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

Συγκλίνουν οι σειρές αυτές; Ποιο το άθροισμα των πρώτων $2n+1$ όρων της πρώτης σειράς; Αν οι σειρές συγκλίνουν, τότε ποιο το άθροισμα της καθεμίας;

55. *Απόκλιση* Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει.

56. Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

57. *Κανόνες απόλυτης σύγκλισης* Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως, τότε το ίδιο θα ισχύει και για την

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

(β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

(γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ (k τυχών αριθμός)

58. *Γινόμενα όρο προς όρο* Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ενδέχεται να αποκλίνει ακόμη και αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν ταυτόχρονα.

T **59.** *Αναδιάταξη* Στο Παράδειγμα 8, έστω ότι θέλουμε να αναδιατάξουμε τους όρους ώστε να κατασκευάσουμε μια νέα σειρά που να συγκλίνει στο $-1/2$. Ξεκινούμε λοιπόν με τον πρώτο αρνητικό όρο, τον $-1/2$. Μόλις προκύψει άθροισμα μικρότερο ή ίσο του $-1/2$, αρχίζουμε να εισάγουμε θετικούς όρους (τους οποίους παίρνουμε με τη σειρά προτεραιότητας που είχαν στο αρχικό άθροισμα), μέχρι το νέο άθροισμα να γίνει μεγαλύτερο του $-1/2$. Έπειτα προσθέτουμε αρνητικούς όρους μέχρι το άθροισμα να γίνει και πάλι μικρότερο ή ίσο του $-1/2$. Συνεχίστε τη διαδικασία αυτή μέχρι τα μερικά σας αθροίσματα να «διασκελίσουν» το επιθυμητό όριο τουλάχιστον τρεις φορές, καταλήγοντας σε μικρότερη ή ίση με αυτό τιμή. Αν s_n είναι το άθροισμα των πρώτων n όρων της νέας σας σειράς, τοποθετήστε σε διάγραμμα τα σημεία (n, s_n) αναδεικνύοντας έτσι τη συμπεριφορά των μερικών αθροισμάτων.

60. *Περιγραφή της απόδειξης του θεωρήματος αναδιάταξης (θεώρημα 11)*

(α) Έστω ϵ θετικός πραγματικός αριθμός, $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, και $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Δείξτε ότι για κάποιους δείκτες N_1 και $N_2 \geq N_1$, θα ισχύουν τα εξής:

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad |s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Εφόσον όλοι οι όροι $a_1, a_2, \ldots, a_{N_2}$ εμφανίζονται κάπου στην ακολουθία $\{b_n\}$, θα υπάρχει ένας δείκτης $N_3 \geq N_2$ τέτοιος ώστε για $n \geq N_3$, η ποσότητα $(\sum_{n=1}^{k} b_k) - s_{N_2}$ ισούται το πολύ με κάποιο άθροισμα όρων a_m για $m \geq N_1$. Συνεπώς, για $n \geq N_3$, θα ισχύει

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} b_k - L \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2} \right| + |s_{N_2} - L| \\ &\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2} - L| < \epsilon. \end{aligned}$$

(β) Η επιχειρηματολογία του ερωτήματος (α) δείχνει ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ θα συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τώρα δείξτε ότι επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ θα συγκλίνει στο $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

61. *Απολύτως συγκλίνουσες σειρές*

(α) Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει και

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{για } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{για } a_n < 0, \end{cases}$$

τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ θα συγκλίνει.

(β) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α) για να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει και

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{για } a_n \geq 0 \\ a_n & \text{για } a_n < 0, \end{cases}$$

τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ θα συγκλίνει.

Με άλλα λόγια, αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε οι θετικοί της όροι χωριστά σχηματίζουν μια συγκλίνουσα σειρά· το ίδιο και οι αρνητικοί της όροι. Επιπλέον,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

εφόσον $b_n = (a_n + |a_n|)/2$ και $c_n = (a_n - |a_n|)/2$.

62. *Εναλλασσόμενη αρμονική σειρά* Πού είναι εδώ το λάθος: Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την εξίσωση

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots$$

με τον αριθμό 2, οπότε παίρνουμε

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Ομαδοποιούμε τους όρους κοινού παρονομαστή, όπως δείχνουν τα βέλη, οπότε

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

Η σειρά στο δεξιό μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι η ίδια με αυτήν που αρχίσαμε. Συνεπώς, έχουμε $2S = S$, και διαιρώντας με S καταλήγουμε στην πρόταση $2 = 1$. (*Πηγή*: "Riemann's Rearrangement Theorem", άρθρο του Stewart Galanor, *Mathematics Teacher*, Vol. 80, No. 8 (1987), pp. 675–681.)

63. Σχεδιάστε σχήμα παρόμοιο με το Σχήμα 8.15 για να δείξετε τη σύγκλιση της σειράς του Θεωρήματος 8 για $N > 1$.

8.6 Δυναμοσειρές

Δυναμοσειρές και σύγκλιση • Ακτίνα και διάστημα σύγκλισης • Παραγώγιση όρο προς όρο • Ολοκλήρωση όρο προς όρο • Πολλαπλασιασμός δυναμοσειρών

Για $|x| < 1$, ο τύπος αθροίσματος όρων γεωμετρικής σειράς μας λέει ότι

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Ας αναλογιστούμε για λίγο την παραπάνω πρόταση. Η έκφραση στο δεξιό μέλος ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των αριθμών $x \neq 1$. Η έκφραση στο αριστερό μέλος ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα σύγκλισης, $|x| < 1$. Η ισότητα λοιπόν έχει νόημα μόνο στο τελευταίο αυτό αριθμοσύνολο, όπου αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης είναι καλώς ορισμένα. Σε αυτό το πεδίο ορισμού, η σειρά *παριστάνει* τη συνάρτηση $1/(1-x)$.

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε «πολυώνυμα» της μορφής

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, που καλούνται δυναμοσειρές, ενώ στην επόμενη, θα δούμε πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια συνάρτηση με την κατάλληλη δυναμοσειρά.

Δυναμοσειρές και σύγκλιση

Η έκφραση $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ μοιάζει αφενός με πολυώνυμο, εφόσον αποτελεί άθροισμα δυνάμεων του x (με κάποιους συντελεστές), αλλά και διαφέρει εφόσον τα συνήθη πολυώνυμα είναι *πεπερασμένου* βαθμού και δεν αποκλίνουν για κάποιες τιμές του x. Ακριβώς όπως μια άπειρη σειρά δεν είναι απλώς ένα άθροισμα, έτσι και η σειρά δυνάμεων του x δεν είναι απλώς ένα πολυώνυμο.

Αν θέσουμε $x = 0$ στην έκφραση

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots ,$$

τότε στο δεξιό μέλος παίρνουμε c_0, ενώ στο αριστερό $c_0 \cdot 0^0$. Δεδομένου ότι το σύμβολο 0^0 δεν αντιστοιχεί σε κάποιον αριθμό, η χρήση του ανωτέρω συμβολισμού είναι κάπως ατυχής, αλλά παρ' όλα αυτά θα τη δεχτούμε. Η ίδια κατάσταση προκύπτει όταν θέσουμε

$$x = a \quad \text{στον όρο} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε ότι κατά σύμβαση η έκφραση $c_0 \cdot 0^0$ θα ισούται με c_0. (Και όντως *οφείλει* να ισούται με c_0, οπότε ο χειρισμός μας δεν στερείται μαθηματικής αυστηρότητας· εδώ απλώς διευκρινίζουμε με ποιον τρόπο πρέπει να ειδωθεί ο συμβολισμός, ώστε να αποδίδει ορθώς τα μαθηματικά.)

Ορισμός Δυναμοσειρές

Κάθε έκφραση της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

είναι μια **δυναμοσειρά με κέντρο το $x = 0$.** Κάθε έκφραση της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

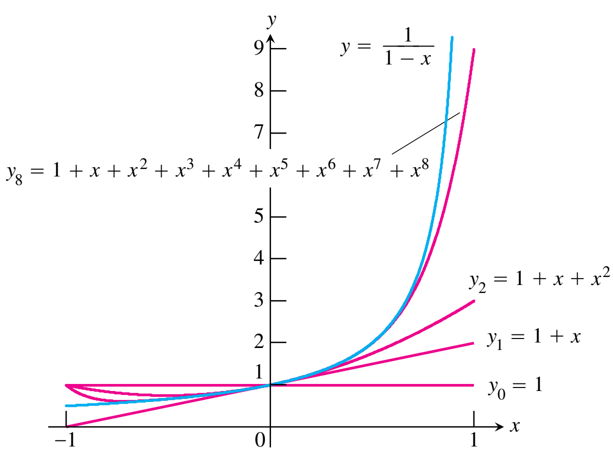
είναι μια **δυναμοσειρά με κέντρο το $x = a$.** Η ποσότητα $c_n(x-a)^n$ είναι ο ***n*-οστός όρος**· ο αριθμός a είναι το **κέντρο της σειράς.**

Παράδειγμα 1 Γεωμετρική σειρά

Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

είναι μια δυναμοσειρά με κέντρο το $x = 0$. Συγκλίνει στην τιμή $1/(1-x)$ στο διάστημα $-1 < x < 1$, το οποίο επίσης έχει κέντρο το $x = 0$ (Σχήμα 8.16). Η συμπεριφορά αυτή είναι χαρακτηριστική, όπως θα δούμε παρακάτω. Μια δυναμοσειρά είτε θα συγκλίνει για κάθε x, είτε θα συγκλίνει σε πεπερασμένο διάστημα ίδιου κέντρου με αυτήν, είτε τέλος θα συγκλίνει μονάχα στο κέντρο αυτό.



ΣΧΗΜΑ 8.16 Γραφικές παραστάσεις της $f(x) = 1/(1-x)$ και τεσσάρων πολυωνυμικών της προσεγγίσεων. (Παράδειγμα 1)

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad -1 < x < 1$$

για να βρούμε έναν εύχρηστο τύπο του αθροίσματος της σειράς του δεξιού μέλους.

Ας αλλάξουμε οπτική γωνία: Ας θεωρήσουμε τα μερικά αθροίσματα της σειράς ως πολυώνυμα $P_n(x)$, τα οποία προσεγγίζουν τη συνάρτηση στο αριστερό μέλος. Για τιμές x κοντά στο μηδέν, αρκούν μερικοί όροι της σειράς για μια ικανοποιητική προσέγγιση. Καθώς όμως το x πλησιάζει την τιμή $x = 1$, ή την -1, απαιτούνται όλο και περισσότεροι όροι. Το Σχήμα 8.16 δείχνει τα γραφήματα της $f(x) = 1/(1-x)$ και των προσεγγιστικών της πολυωνύμων $y_n = P_n(x)$ για $n = 0, 1, 2,$ και 8.

Παράδειγμα 2 Εφαρμογή του ορισμού

Η δυναμοσειρά

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \qquad (1)$$

έχει κέντρο το $a = 2$ και συντελεστές $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/4$, $\ldots$, $c_n = (-1/2)^n$. Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική, με αρχικό όρο 1 και λόγο $r = -\dfrac{x-2}{2}$. Η σειρά συγκλίνει για $\left|\dfrac{x-2}{2}\right| < 1$ δηλαδή για $0 < x < 4$. Το άθροισμά της είναι

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \dfrac{x-2}{2}} = \frac{2}{x},$$

και άρα

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \quad 0 < x < 4.$$

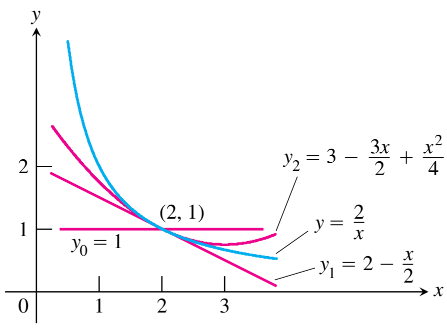
Η σειρά (1) παράγει χρήσιμες πολυωνυμικές προσεγγίσεις της συνάρτησης $f(x) = 2/x$ για τιμές του x κοντά στο 2:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

κ.ο.κ. (Σχήμα 8.17).



Σχημα 8.17 Γραφικές παραστάσεις της $f(x) = 2/x$ και των πρώτων τριών πολυωνυμικών της προσεγγίσεων. (Παράδειγμα 2)

Ακτίνα και διάστημα σύγκλισης

Οι δυναμοσειρές στα Παραδείγματα 1 και 2 συνέβη να είναι γεωμετρικές, οπότε μπορέσαμε να βρούμε τα διαστήματα σύγκλισής τους. Για μη γεωμετρικές σειρές, ξεκινούμε με την παρατήρηση ότι κάθε δυναμοσειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ θα συγκλίνει πάντα για $x = a$, οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών όπου η σύγκλιση είναι δεδομένη. Δεύτερον, έχουμε ήδη συναντήσει δυναμοσειρές, όπως αυτές στα Παραδείγματα 1 και 2, που συγκλίνουν για πεπερασμένο διάστημα τιμών του x γύρω από το κέντρο a. Τέλος, υπάρχουν δυναμοσειρές που συγκλίνουν για κάθε πραγματικό αριθμό. Αυτές είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις, όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 12 **Θεώρημα σύγκλισης δυναμοσειρών**

Όσον αφορά τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ υπάρχουν τρεις δυνατότητες.

1. Υπάρχει θετικός αριθμός R τέτοιος ώστε η σειρά να αποκλίνει για $|x-a|>R$, αλλά να συγκλίνει για $|x-a|<R$. Στα ακραία σημεία $x=a-R$ και $x=a+R$ η σειρά μπορεί είτε να συγκλίνει είτε να αποκλίνει.
2. Η σειρά συγκλίνει για κάθε x $(R=\infty)$.
3. Η σειρά συγκλίνει για $x=a$ και αποκλίνει σε όλα τα άλλα σημεία $(R=0)$.

Ο αριθμός R είναι η **ακτίνα σύγκλισης,** και το σύνολο όλων των x για τα οποία η σειρά συγκλίνει είναι το **διάστημα σύγκλισης.** Η ακτίνα σύγκλισης καθορίζει πλήρως το διάστημα σύγκλισης στην περίπτωση που το R είναι είτε μηδέν είτε άπειρο. Για $0<R<\infty$, ωστόσο, παραμένει ανοιχτό το ζήτημα της σύγκλισης στα άκρα του διαστήματος. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει πώς βρίσκουμε το διάστημα σύγκλισης.

Παράδειγμα 3 Εύρεση του διαστήματος σύγκλισης με χρήση του κριτηρίου του λόγου

Για ποιες τιμές του x συγκλίνουν οι ακόλουθες δυναμοσειρές;

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

(β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$

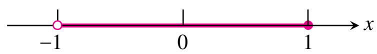
(γ) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

(δ) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n=1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots$

Λύση Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου στη σειρά $\Sigma\,|u_n|$, όπου u_n είναι ο n-οστός της όρος.

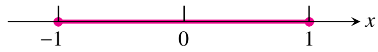
(α) $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n}{n+1}|x|\ 1\ \ |x|.$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως για $|x|<1$. Αποκλίνει για $|x|>1$, διότι ο n-οστός της όρος δεν συγκλίνει τότε στο μηδέν. Για $x=1$, προκύπτει η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά $1-1/2+1/3-1/4+\ldots$, η οποία συγκλίνει. Για $x=-1$, η σειρά γίνεται $-1-1/2-1/3-1/4-\ldots$, που είναι η αντίθετη της αρμονικής σειράς, και άρα αποκλίνει. Η σειρά (α) συγκλίνει λοιπόν για $-1<x\le 1$ και αποκλίνει για κάθε άλλο x.



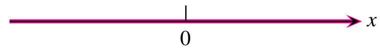
(β) $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n-1}{2n+1}\,x^2\to x^2.$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x^2<1$. Αποκλίνει για $x^2>1$, διότι ο n-οστός της όρος δεν συγκλίνει τότε στο μηδέν. Για $x=1$, η σειρά παίρνει τη μορφή $1-1/3+1/5-1/7+\ldots$, η οποία συγκλίνει βάσει του θεωρήματος εναλλασσόμενης σειράς. Συγκλίνει επίσης για $x = -1$, διότι και τότε παίρνει τη μορφή εναλλασσόμενης σειράς που πληροί τις προϋποθέσεις σύγκλισης. Η τιμή της σειράς για $x = -1$ είναι η αντίθετη αυτής για $x = 1$. Η σειρά (β) συγκλίνει λοιπόν για $-1 \le x \le 1$ και αποκλίνει για κάθε άλλο x.



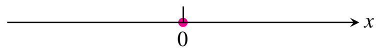
(γ) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{x^n}\right| = \dfrac{|x|}{n+1} \to 0$ για κάθε x.

Η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε x.



(δ) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$ εκτός αν $x = 0$.

Η σειρά αποκλίνει για κάθε μη μηδενικό x.



Συνοψίζουμε τη διαδικασία εύρεσης του διαστήματος σύγκλισης μιας δυναμοσειράς.

Εύρεση διαστήματος σύγκλισης

Βήμα 1: *Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου (ή της n-οστής ρίζας) για να βρούμε το διάστημα όπου η σειρά συγκλίνει απολύτως.* Συνήθως, αυτό είναι ένα ανοιχτό διάστημα

$$|x - a| < R \qquad \text{δηλ.} \qquad a - R < x < a + R.$$

Βήμα 2: *Αν το διάστημα απόλυτης σύγκλισης είναι πεπερασμένο, εξετάζουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση σε κάθε άκρο του,* όπως κάναμε στα Παραδείγματα 3(α) και (β). Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης, το κριτήριο του ολοκληρώματος, ή το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς.

Βήμα 3: *Αν το διάστημα απόλυτης σύγκλισης είναι $a - R < x < a + R$, η σειρά αποκλίνει για $|x - a| > R$* (δεν συγκλίνει καν υπό συνθήκη), διότι ο n-οστός της όρος δεν τείνει στο μηδέν γι' αυτές τις τιμές του x.

Στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης μιας δυναμοσειράς, η τελευταία θα συγκλίνει απολύτως. Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε x, λέμε ότι η **ακτίνα σύγκλισης είναι άπειρη.** Αν συγκλίνει μόνο για $x = a$, η **ακτίνα σύγκλισης είναι μηδενική.**

Παραγώγιση όρο προς όρο

Ένα θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού μάς λέει ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε όρο προς όρο μια δυναμοσειρά σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος σύγκλισης.

ΠΡΟΣΟΧΗ Η παραγώγιση όρο προς όρο ενδέχεται να μην είναι «λειτουργική» για άλλα είδη σειρών. Για παράδειγμα, η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$$

συγκλίνει για κάθε x. Όμως αν την παραγωγίσουμε όρο προς όρο, παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$$

η οποία αποκλίνει για κάθε x.

Θεώρημα 13 Θεώρημα παραγώγισης όρο προς όρο

Αν η $\sum c_n(x-a)^n$ συγκλίνει για $a - R < x < a + R$ για κάποιο $R > 0$, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \qquad a - R < x < a + R.$$

Μια τέτοια συνάρτηση f έχει παραγώγους όλων των τάξεων εντός του διαστήματος σύγκλισης. Οι παράγωγοι αυτές μπορούν να εξαχθούν αν παραγωγίσουμε την αρχική σειρά όρο προς όρο:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

κ.ο.κ. Καθεμία από τις σειρές αυτές συγκλίνει σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος σύγκλισης της αρχικής σειράς.

Παράδειγμα 4 Εφαρμογή της παραγώγισης όρο προς όρο

Εκφράστε σε μορφή σειράς τις $f'(x)$ και $f''(x)$ όπου

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1.$$

Λύση

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad -1 < x < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,x^{n-2}, \qquad -1 < x < 1$$

Ολοκλήρωση όρο προς όρο

Ένα άλλο θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού μάς επιτρέπει να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο μια δυναμοσειρά σε κάθε σημείο του διαστήματος σύγκλισης.

Θεώρημα 14 Θεώρημα ολοκλήρωσης όρο προς όρο

Έστω ότι η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

συγκλίνει για $a - R < x < a + R$ $(R > 0)$. Στην περίπτωση αυτή η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

θα συγκλίνει για $a - R < x < a + R$ και

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

για $a - R < x < a + R$.

Παράδειγμα 5 Η σειρά της συνάρτησης $\tan^{-1} x$, $-1 \leq x \leq 1$

Βρείτε μια κλειστή συναρτησιακή έκφραση για τη σειρά

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Λύση Παραγωγίζουμε όρο προς όρο την αρχική σειρά, οπότε παίρνουμε

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Πρόκειται για γεωμετρική σειρά αρχικού όρου 1 και λόγου $-x^2$, οπότε

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την $f'(x) = 1/(1+x^2)$ και να πάρουμε

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C.$$

Η σειρά που αντιστοιχεί στην $f(x)$ μηδενίζεται για $x = 0$, άρα $C = 0$. Έτσι,

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \tan^{-1} x, \qquad -1 < x < 1.$$

Στην Ενότητα 8.8, θα μάθουμε ότι η εν λόγω σειρά συγκλίνει και στο $\tan^{-1} x$ για τα άκρα $x = \pm 1$.

Προσέξτε ότι αν και η αρχική σειρά του Παραδείγματος 5 συγκλίνει και στα δύο άκρα του διαστήματος σύγκλισης, εν τούτοις το Θεώρημα 13 μας εγγυάται τη σύγκλιση της παραγώγου της σειράς μόνο *μέσα* στο διάστημα.

Παράδειγμα 6 Η σειρά της συνάρτησης $\ln(1+x)$, $-1 < x \leq 1$

Η σειρά

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$$

συγκλίνει στο ανοιχτό διάστημα $-1 < t < 1$. Συνεπώς,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \Big]_0^x$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad -1 < x < 1.$$

Παρ' όλο που το θεώρημα δεν μας εγγυάται για το τι συμβαίνει στο $x = 1$, μπορεί να αποδειχτεί ότι η σειρά συγκλίνει στην τιμή $\ln 2$.

Πολλαπλασιασμός δυναμοσειρών

Ένα τρίτο θεώρημα του προχωρημένου απειροστικού λογισμού μάς λέει ότι μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους δύο απολύτως συγκλίνουσες δυναμοσειρές, σαν να ήταν πολυώνυμα. Προκύπτει έτσι μια νέα δυναμοσειρά που επίσης συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 15 **Θεώρημα πολλαπλασιασμού δυναμοσειρών**

Αν οι $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ συγκλίνουν απολύτως για $|x| < R$ και αν

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ θα συγκλίνει απολύτως στο $A(x)\,B(x)$ για $|x| < R$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Παράδειγμα 7 Εφαρμογή του θεωρήματος πολλαπλασιασμού

Πολλαπλασιάστε τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{για } |x| < 1,$$

με τον εαυτό της ώστε να πάρετε μια δυναμοσειρά που παριστάνει τη συνάρτηση $1/(1-x)^2$, για $|x| < 1$.

Λύση Έστω

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

και

$$c_n = \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0}_{n+1 \text{ όροι}}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ φορές}} = n + 1.$$

Τότε, βάσει του θεωρήματος πολλαπλασιασμού σειρών, η

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

είναι η σειρά που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $1/(1-x)^2$. Και οι δύο σειρές συγκλίνουν απολύτως για $|x| < 1$.

Η παραπάνω σειρά συμπίπτει με αυτήν του Παραδείγματος 4, δεδομένου ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.6

Διαστήματα σύγκλισης

Στις Ασκήσεις 1-32, (α) βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης κάθε σειράς. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η σειρά, (β) απολύτως και (γ) υπό συνθήκη;

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,x^n}{3^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\, x^n$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
24. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-4)^n$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n+1)(x-1)^n$

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$ (Συμβουλευθείτε την Άσκηση 75 της Ενότητας 8.4).

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ (Συμβουλευθείτε την Άσκηση 75 της Ενότητας 8.4).

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}}$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$

Γεωμετρικές σειρές

Στις Ασκήσεις 33-38, βρείτε το διάστημα σύγκλισης κάθε σειράς. Έπειτα, βρείτε τη συνάρτηση του x που παριστάνει η σειρά στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης.

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

36. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

Θεωρία και παραδείγματα

39. *Παραγώγιση όρο προς όρο* Βρείτε για ποιες τιμές του x συγκλίνει η σειρά

$$1-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n+\cdots.$$

Ποιο είναι το άθροισμά της; Ποια σειρά προκύπτει αν παραγωγίσετε όρο προς όρο; Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η νέα αυτή σειρά, και ποιο το άθροισμά της;

40. *Ολοκλήρωση όρο προς όρο* Αν ολοκληρώσετε όρο προς όρο τη σειρά της Άσκησης 39, ποια σειρά παίρνετε; Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η νέα αυτή σειρά; Βρείτε τη συνάρτηση που παριστάνει η σειρά.

41. *Δυναμοσειρά του sin x* Η σειρά

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$$

συγκλίνει στο $\sin x$ για κάθε x.

(α) Βρείτε τους πρώτους έξι όρους της σειράς του $\cos x$. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η σειρά αυτή;

(β) Αντικαθιστώντας το x με το $2x$ στη σειρά του $\sin x$, βρείτε μια σειρά που συγκλίνει στο $\sin 2x$ για κάθε x.

(γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) και πολλαπλασιάζοντας τις κατάλληλες σειρές, βρείτε τους πρώτους έξι όρους της σειράς του $2 \sin x \cos x$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που βρήκατε στο (β).

42. *Δυναμοσειρά του e^x* Η σειρά

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

συγκλίνει στο e^x για κάθε x.

(α) Βρείτε τη σειρά της συνάρτησης $(d/dx)e^x$. Μήπως αυτή συμπίπτει με τη σειρά του e^x; Εξηγήστε γιατί.

(β) Βρείτε τη σειρά της συνάρτησης $\int e^x\,dx$. Μήπως αυτή συμπίπτει με τη σειρά του e^x; Εξηγήστε γιατί.

(γ) Αντικαταστήστε το x με το $-x$ στη σειρά του e^x ώστε να βρείτε μια σειρά που συγκλίνει στο e^{-x} για κάθε x. Έπειτα πολλαπλασιάστε τις σειρές του e^x και του e^{-x} για να βρείτε τους πρώτους έξι όρους της σειράς της συνάρτησης $e^{-x}\cdot e^x$.

43. *Δυναμοσειρά της tan x* Η σειρά

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots$$

συγκλίνει στη συνάρτηση $\tan x$ για $-\pi/2 < x < \pi/2$.

(α) Βρείτε τους πρώτους πέντε όρους της σειράς του $\ln|\sec x|$. Για ποιες τιμές του x αυτή συγκλίνει;

(β) Βρείτε τους πρώτους πέντε όρους της σειράς της $\sec^2 x$. Για ποιες τιμές του x περιμένετε αυτή να συγκλίνει;

(γ) Ελέγξετε το αποτέλεσμά σας στο (β) υψώνοντας στο τετράγωνο τη σειρά της $\sec x$ που δίνεται στην Άσκηση 44.

44. *Δυναμοσειρά της sec x* Η σειρά

$$\sec x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\cdots$$

συγκλίνει στη συνάρτηση $\sec x$ για $-\pi/2 < x < \pi/2$.

(α) Βρείτε τους πρώτους πέντε όρους της δυναμοσειράς της συνάρτησης $\ln|\sec x + \tan x|$. Για ποιες τιμές του x περιμένετε αυτή να συγκλίνει;

(β) Βρείτε τους πρώτους τέσσερις όρους της σειράς της $\sec x \tan x$. Για ποιες τιμές του x περιμένετε αυτή να συγκλίνει;

(γ) Ελέγξετε το αποτέλεσμά σας στο (β) πολλαπλασιάζοντας τη σειρά της συναρτήσεως $\sec x$ με τη σειρά της $\tan x$ που δίνεται στην Άσκηση 43.

45. *Μοναδικότητα συγκλίνουσας δυναμοσειράς*

(α) Δείξτε ότι αν δύο δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ συγκλίνουν και είναι ίσες για κάθε x στο ανοιχτό διάστημα $(-c, c)$, τότε $a_n = b_n$ για κάθε n. (*Υπόδειξη:* Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Παραγωγίστε όρο προς όρο για να δείξετε ότι τα a_n και b_n ισούνται με $f^{(n)}(0)/(n!)$.)

(β) Δείξτε ότι αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ για κάθε x στο ανοιχτό διάστημα $(-c, c)$, τότε $a_n = 0$ για κάθε n.

46. *Άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2/2^n)$* Προκειμένου να βρείτε το άθροισμα της σειράς αυτής, εκφράστε τη συνάρτηση $1/(1-x)$ ως γεωμετρική σειρά, παραγωγίστε (ως προς x) κατά μέλη την προκύπτουσα εξίσωση, πολλαπλασιάστε κατά μέλη με το x, παραγωγίστε ξανά, πολλαπλασιάστε με το x ξανά, και τέλος θέστε το x ίσο με $1/2$. Τι παίρνετε; (*Πηγή*: Επιστολή του David E. Dobbs στο περιοδικό *Illinois Mathematics Teacher*, Vol. 33, Issue 4 (1982), p. 27.)

47. *Σύγκλιση σε ακραία σημεία* Δείξτε με παραδείγματα ότι αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει σε ακραίο σημείο του διαστήματος σύγκλισης, τότε θα συγκλίνει είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη.

48. *Διαστήματα σύγκλισης* Κατασκευάστε μια δυναμοσειρά της οποίας το διάστημα σύγκλισης είναι το **(α)** $(-3, 3)$ **(β)** $(-2, 0)$ **(γ)** $(1, 5)$.

8.7 Σειρές Taylor και Maclaurin

Κατασκευή σειρών • Σειρές Taylor και Maclaurin • Πολυώνυμα Taylor • Υπόλοιπο πολυωνύμου Taylor • Εκτίμηση του υπολοίπου • Σφάλμα αποκοπής • Πίνακας σειρών Maclaurin • Συνδυασμός σειρών Taylor

CD-ROM
Δικτυότοπος

Η σε βάθος κατανόηση των γεωμετρικών σειρών μάς επέτρεψε να βρίσκουμε δυναμοσειρές που παριστάνουν δεδομένες συναρτήσεις και συναρτήσεις που ισοδυναμούν με δεδομένες δυναμοσειρές (υπό την προϋπόθεση της σύγκλισης, πάντα). Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε με εργαλεία του λογισμού μια γενικότερη τεχνική κατασκευής δυναμοσειρών. Σε πολλές περιπτώσεις, οι δυναμοσειρές που κατασκευάζονται έτσι αποτελούν χρήσιμες πολυωνυμικές προσεγγίσεις των γεννητριών συναρτήσεών τους.

Κατασκευή σειρών

Γνωρίζουμε ότι εντός του διαστήματος σύγκλισής της, μια δυναμοσειρά είναι συνεχής συνάρτηση και έχει παραγώγους όλων των τάξεων, αλλά το αντίθετο άραγε ισχύει; Αν μια συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε κάποιο διάστημα I, μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά στο ίδιο διάστημα I; Και αν ναι, με ποιους συντελεστές;

Στο τελευταίο ερώτημα δίνεται εύκολα απάντηση αν υποθέσουμε ότι η $f(x)$ παριστάνεται από τη σειρά

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

με θετική ακτίνα σύγκλισης. Παραγωγίζοντας διαδοχικά όρο προς όρο στο διάστημα σύγκλισης I, παίρνουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

οπότε η n-οστή παράγωγος, για κάθε n, είναι

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{άθροισμα όρων με παράγοντα } (x-a).$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και για $x = a$, οπότε

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1, \\ f''(a) &= 1\cdot 2a_2, \\ f'''(a) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3, \end{aligned}$$

και, εν γένει,

$$f^{(n)}(a) = n!a_n.$$

Οι παραπάνω τύποι φανερώνουν τον τρόπο «σχηματισμού» των συντελεστών κάθε δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ η οποία συγκλίνει στις τιμές της f στο I («παριστάνει την f στο I»). Η σειρά αυτή θα είναι μοναδική (εφόσον *υπάρχει,* κάτι που δεν έχει ακόμη αποδειχτεί), και ο n-οστός συντελεστής της θα έχει τη μορφή

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Αν η f μπορεί να παρασταθεί από κάποια σειρά, η σειρά αυτή οφείλει να είναι η εξής:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \quad (1)$$

Τώρα τίθεται το ερώτημα: Αν έχουμε μια τυχούσα συνάρτηση f που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα I κέντρου $x = a$, και χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση αυτή για να παραγάγουμε τη σειρά της Εξίσωσης (1), τότε θα συγκλίνει η σειρά στην $f(x)$ για κάθε x *μέσα* στο I; Η απάντηση είναι ίσως· για μερικές συναρτήσεις θα συγκλίνει, για άλλες όμως όχι.

Σειρές Taylor και Maclaurin

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία

Brook Taylor
(1685-1731)
Colin Maclaurin
(1698-1746)

Ορισμοί **Σειρά Taylor, σειρά Maclaurin**

Έστω f συνάρτηση με παραγώγους όλων των τάξεων σε κάθε σημείο ενός διαστήματος και a κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος αυτού. Η **σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = a$** είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

Η **σειρά Maclaurin που παράγεται από την f** είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

δηλαδή ισούται με τη σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = 0$.

Παράδειγμα 1 Εύρεση σειράς Taylor

Να βρεθεί η σειρά Taylor την οποία παράγει η $f(x) = 1/x$ στο $a = 2$. Για ποια σημεία (αν υπάρχουν) συγκλίνει η σειρά στο $1/x$;

Λύση Πρέπει να βρούμε τις $f(2), f'(2), f''(2), \ldots$. Παραγωγίζουμε, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1}, & f(2) &= 2^{-1} = \frac{1}{2},\\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(2) &= -\frac{1}{2^2},\\
f''(x) &= 2!\,x^{-3}, & \frac{f''(2)}{2!} &= 2^{-3} = \frac{1}{2^3},\\
f'''(x) &= -3!\,x^{-4}, & \frac{f'''(2)}{3!} &= -\frac{1}{2^4},\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!\,x^{-(n+1)}, & \frac{f^{(n)}(2)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Η σειρά Taylor, λοιπόν, είναι

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-2)^n + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots .$$

Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με αρχικό όρο 1/2 και λόγο $r = -(x-2)/2$. Η σειρά θα συγκλίνει απολύτως για $|x-2| < 2$, και το άθροισμά της θα είναι

$$\frac{1/2}{1+(x-2)/2} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x}.$$

Στο παράδειγμα αυτό, η σειρά Taylor που παράγεται από την $f(x) = 1/x$ στο $a = 2$ θα συγκλίνει στο $1/x$ για $|x-2| < 2$ δηλ. για $0 < x < 4$.

Πολυώνυμα Taylor

Γραμμικοποιώντας μια διαφορίσιμη συνάρτηση f σε σημείο a, παίρνουμε το πολυώνυμο

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Αν η f διαθέτει παραγώγους μεγαλύτερης τάξης στο a, τότε θα διαθέτει και πολυωνυμικές προσεγγίσεις μεγαλύτερης τάξης (μία προσέγγιση για κάθε παράγωγο). Τα πολυώνυμα αυτά καλούνται πολυώνυμα Taylor της f.

Κάνουμε λόγο για πολυώνυμο Taylor *τάξης* n και όχι *βαθμού* n διότι η $f^{(n)}(a)$ μπορεί να μηδενίζεται. Τα πρώτα δύο πολυώνυμα Taylor του $\cos x$ στο $x = 0$, για παράδειγμα, είναι $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = 1$. Έτσι, το πολυώνυμο πρώτης τάξης είναι μηδενικού βαθμού, όχι πρώτου βαθμού.

Ορισμός **Πολυώνυμο Taylor τάξης n**

Έστω f συνάρτηση με παραγώγους k τάξης για $k = 1, 2, \ldots, N$ σε κάποιο διάστημα που περιέχει το a ως εσωτερικό σημείο. Για κάθε ακέραιο n από 0 έως N, το **πολυώνυμο Taylor τάξης n** που παράγεται από την f στο $x = a$ είναι το εξής:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Είδαμε ότι η γραμμικοποίηση της f στο $x = a$ παρέχει την καλύτερη γραμμική προσέγγιση της f στη γειτονιά του a. Ομοίως, τα μεγαλύτερης τάξης πολυώνυμα Taylor παρέχουν τις βέλτιστες (πολυωνυμικές) προσεγγίσεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων αντίστοιχου βαθμού. (Δείτε την Άσκηση 58.)

CD-ROM
Δικτυότοπος

Παράδειγμα 2 Εύρεση πολυωνύμων Taylor για το e^x

Να βρεθεί η σειρά Taylor και τα πολυώνυμα Taylor τα οποία παράγει η $f(x) = e^x$ στο $x = 0$.

Λύση Εφόσον

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \ldots,$$

θα έχουμε

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \ldots .$$

Η σειρά Taylor την οποία παράγει η f στο $x = 0$ είναι, λοιπόν,

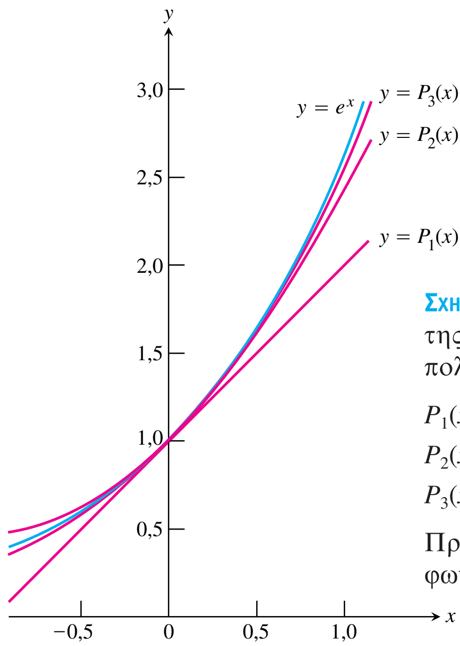
$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Εξ ορισμού, αυτή δεν είναι παρά η σειρά Maclaurin του e^x. Όπως θα δούμε σε λίγο, η σειρά αυτή συγκλίνει στο e^x για κάθε x.

Το πολυώνυμο Taylor τάξης n στο $x=0$ είναι

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

Δείτε το Σχήμα 8.18.



Σχημα 8.18 Γραφική παράσταση της $f(x)=e^x$ και των πολυωνύμων Taylor αυτής

$P_1(x)=1+x$

$P_2(x)=1+x+(x^2/2!)$

$P_3(x)=1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)$.

Προσέξτε την πολύ καλή συμφωνία κοντά στο κέντρο $x=0$.

CD-ROM Δικτυότοπος

Παράδειγμα 3 Εύρεση πολυωνύμων Taylor για το cos x

Να βρεθεί η σειρά Taylor και τα πολυώνυμα Taylor τα οποία παράγει η $f(x)=\cos x$ στο $x=0$.

Λύση Η συνάρτηση συνημιτόνου και οι παράγωγοί της είναι

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos x, & f'(x)&=-\sin x,\\ f''(x)&=-\cos x, & f^{(3)}(x)&=\sin x,\\ &\vdots & &\vdots\\ f^{(2n)}(x)&=(-1)^n\cos x, & f^{(2n+1)}(x)&=(-1)^{n+1}\sin x. \end{aligned}$$

Στο $x=0$, τα συνημίτονα ισούνται με 1 και τα ημίτονα με 0, οπότε

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n,\qquad f^{(2n+1)}(0)=0.$$

Η σειρά Taylor που παράγεται από την f στο 0 είναι

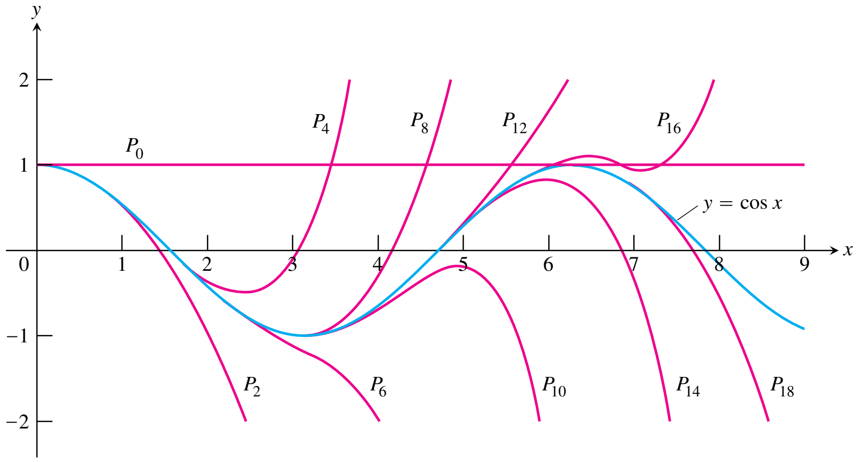
$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$
$$=1+0\cdot x-\frac{x^2}{2!}+0\cdot x^3+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Εξ ορισμού, αυτή ταυτίζεται με τη σειρά Maclaurin για το cos x. Αργότερα θα δούμε ότι η σειρά συγκλίνει στο cos x για κάθε x.

Εφόσον $f^{(2n+1)}(0)=0$, τα πολυώνυμα Taylor των τάξεων $2n$ και $2n+1$ ταυτίζονται:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Το Σχήμα 8.19 δείχνει πόσο πιστά προσεγγίζουν την $f(x) = \cos x$ τα πολυώνυμα αυτά κοντά στο $x = 0$. Λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα y, μόνο το δεξιό σκέλος των γραφημάτων παρατίθεται εδώ.



Σχημα 8.19 Τα πολυώνυμα

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

συγκλίνουν στο $\cos x$ καθώς $n \to \infty$. Η συμπεριφορά του $\cos x$ σε αυθαίρετη απόσταση από την αρχή μπορεί να εξαχθεί απλώς και μόνο με γνώση του συνημιτόνου και των παραγώγων του στο $x = 0$.

Στην πράξη σπανίζουν οι συναρτήσεις που, όντας άπειρες φορές παραγωγίσιμες, διαθέτουν σειρές Taylor σε μεμονωμένα μονάχα σημεία τους.

Παράδειγμα 4 Μια συνάρτηση f με σειρά Taylor συγκλίνουσα για κάθε x, που συγκλίνει όμως στην $f(x)$ μονάχα για $x = 0$

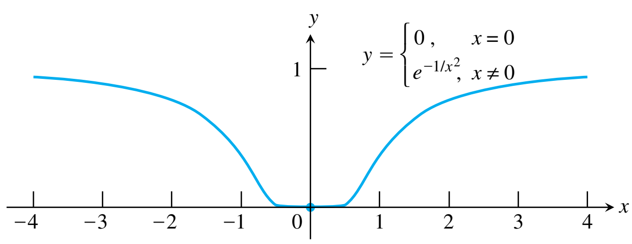
Μπορεί να δειχθεί (όχι και τόσο εύκολα) ότι η

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

(Σχήμα 8.20) έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο $x = 0$ και ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε n. Συνεπώς, η σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = 0$ είναι

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots \\ = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots. \end{aligned}$$

Η σειρά συγκλίνει για κάθε x (έχοντας όριο 0), αλλά συγκλίνει στην $f(x)$ μονάχα για $x = 0$.



Σχημα 8.20 Η γραφική παράσταση της συνεχούς επέκτασης της $y = e^{-1/x^2}$ «οριζοντιώνεται» στην αρχή των αξόνων, οπότε όλες οι παράγωγοί της μηδενίζονται εκεί. (Παράδειγμα 4)

Παραμένουν αναπάντητα δύο ερωτήματα.

1. Για ποιες τιμές του x μπορούμε να περιμένουμε ότι η σειρά Taylor θα συγκλίνει στη γεννήτρια συνάρτησής της;
2. Πόσο αξιόπιστα προσεγγίζουν μια συνάρτηση σε δεδομένο διάστημα τα αντίστοιχα πολυώνυμα Taylor;

Παρακάτω θα απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Υπόλοιπο πολυωνύμου Taylor

Χρειαζόμαστε κάποιο μέτρο της ακρίβειας με την οποία το πολυώνυμο Taylor $P_n(x)$ προσεγγίζει την τιμή της συνάρτησης $f(x)$. Για τον σκοπό αυτόν χρησιμοποιούμε την έννοια του **υπολοίπου** $R_n(x)$, που ορίζεται ως εξής:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Ακριβής τιμή}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Προσεγγιστική τιμή}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Υπόλοιπο}}.$$

Η απόλυτη τιμή $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ καλείται **σφάλμα** της προσέγγισης.

Χάρη στο ακόλουθο θεώρημα μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση του υπολοίπου ενός πολυωνύμου Taylor.

Θεώρημα 16 **Θεώρημα Taylor**

Αν η f είναι $n + 1$ φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα I που περιέχει το a, τότε για κάθε x στο I, θα υπάρχει αριθμός c μεταξύ των x και a τέτοιος ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

όπου

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Το θεώρημα Taylor αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής (Άσκηση 49). Η μακροσκελής απόδειξη παρατίθεται στο Παράρτημα 8.

Αν $R_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε x στο I, λέμε ότι η σειρά Taylor που παράγεται από την f στο $x = a$ **συγκλίνει** στην f στο I, και γράφουμε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Παράδειγμα 5 Η σειρά Maclaurin του e^x

Δείξτε ότι η σειρά Taylor που παράγεται από την $f(x) = e^x$ στο $x = 0$ συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε πραγματική τιμή του x.

Λύση Η συνάρτηση έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε όλο το διάστημα $I = (-\infty, \infty)$ και, βάσει του Παραδείγματος 2,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

όπου

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{για κάποιο } c \text{ μεταξύ του 0 και του } x.$$

Εφόσον η e^x είναι αύξουσα συνάρτηση του x, το e^c κείται μεταξύ των $e^0 = 1$ και e^x. Για αρνητικό x, το c είναι επίσης αρνητικό, δηλ. $e^c < 1$. Για x ίσο με μηδέν, $e^x = 1$ και $R_n(x) = 0$. Για θετικό x, το c είναι επίσης θετικό, άρα $e^c < e^x$. Συνεπώς,

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{για } x \le 0,$$

και

$$|R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{για } x > 0.$$

Τέλος, επειδή

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{για κάθε } x, \quad \text{Πίνακας 8.1, Τύπος 6}$$

θα είναι $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, και άρα η σειρά συγκλίνει στο e^x για κάθε x.

Εκτίμηση του υπολοίπου

Πολλές φορές μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή του $R_n(x)$ όπως κάναμε στο Παράδειγμα 5. Η μέθοδος αυτή είναι τόσο εύχρηστη που την ανάγουμε σε θεώρημα.

Θεώρημα 17 **Θεώρημα εκτίμησης υπολοίπου**

Αν υπάρχουν θετικές σταθερές M και r τέτοιες ώστε $|f^{(n+1)}(t)| \le Mr^{n+1}$ για κάθε t μεταξύ των a και x, τότε το υπόλοιπο $R_n(x)$ του θεωρήματος Taylor θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$|R_n(x)| \le M \frac{r^{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Αν πληρούνται οι παραπάνω συνθήκες για κάθε n, και αν η f πληροί όλες τις υπόλοιπες συνθήκες του θεωρήματος Taylor, τότε η σειρά συγκλίνει στην $f(x)$.

Στα απλούστερα παραδείγματα παίρνουμε $r = 1$ εφόσον η f και όλες οι παράγωγοί της είναι απολύτως φραγμένες από μια σταθερά M. Σε άλλες περιπτώσεις δίνουμε διαφορετική τιμή στο r. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 2\cos(3x)$, τότε κάθε παραγώγιση προσδίδει έναν παράγοντα 3 και έτσι το r πρέπει να γίνει μεγαλύτερο του 1. Θέτουμε λοιπόν εδώ $r = 3$ και $M = 2$.

Ας δούμε με μερικά παραδείγματα πώς εφαρμόζουμε τα θεωρήματα Taylor και εκτίμησης υπολοίπου για να εξετάσουμε τη σύγκλιση συναρτήσεων. Με τα θεωρήματα αυτά μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε με πόση ακρίβεια προσεγγίζεται μια συνάρτηση από κάποιο πολυώνυμο Taylor.

Παράδειγμα 6 Σειρά Maclaurin του $\sin x$

Δείξτε ότι η σειρά Maclaurin του $\sin x$ συγκλίνει στο $\sin x$ για κάθε x.

Λύση Η συνάρτηση και οι παράγωγοί της είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x, \end{aligned}$$

οπότε

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{και} \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Η σειρά έχει μονάχα όρους περιττής δύναμης, και για $n = 2k + 1$, το θεώρημα Taylor δίνει

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x).$$

Όλες οι παράγωγοι του $\sin x$ είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερες ή ίσες του 1, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα εκτίμησης υπολοίπου για $M = 1$ και $r = 1$, παίρνοντας

$$|R_{2k+1}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Εφόσον $(|x|^{2k+2}/(2k+2)!) \to 0$ καθώς $k \to \infty$, ανεξαρτήτως της τιμής του x, θα έχουμε $R_{2k+1}(x) \to 0$, και άρα η σειρά Maclaurin του $\sin x$ θα συγκλίνει στο $\sin x$ για κάθε x.

Παράδειγμα 7 Σειρά Maclaurin του $\cos x$

Δείξτε ότι η σειρά Maclaurin του $\cos x$ θα συγκλίνει στο $\cos x$ για κάθε x.

Λύση Από το Παράδειγμα 3 παίρνουμε το πολυώνυμο Taylor του $\cos x$ στο οποίο προσθέτουμε τον όρο του υπολοίπου. Έτσι έχουμε τον τύπο Taylor για το $\cos x$ με $n = 2k$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

Όλες οι παράγωγοι του $\cos x$ είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερες ή ίσες του 1, οπότε το θεώρημα εκτίμησης υπολοίπου για $M = 1$ και $r = 1$ μας δίνει

$$|R_{2k}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Για κάθε x, είναι $R_{2k} \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει στο $\cos x$ για κάθε x.

Σφάλμα αποκοπής

Η σειρά Maclaurin του e^x συγκλίνει στο e^x για κάθε x, αλλά μένει ακόμη να μάθουμε πόσους όρους χρειαζόμαστε για να προσεγγίσουμε το e^x με δεδομένο βαθμό ακρίβειας. Την πληροφορία αυτή μάς δίνει το θεώρημα εκτίμησης υπολοίπου.

Παράδειγμα 8 Υπολογισμός του e

Υπολογίστε το e με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}.

Λύση Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Παραδείγματος 2 για $x = 1$, οπότε

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

με

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{για κάποιο } c \text{ μεταξύ των 0 και 1.}$$

Για τους σκοπούς του παραδείγματος, έστω πως ξέρουμε ότι $e < 3$. Είμαστε λοιπόν βέβαιοι ότι

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

εφόσον $1 < e^c < 3$ για $0 < c < 1$.

Δοκιμάζοντας διάφορα νούμερα, βρίσκουμε ότι $1/9! > 10^{-6}$, ενώ $3/10! < 10^{-6}$. Συνεπώς, το $(n + 1)$ θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 10, δηλ. το n μεγαλύτερο ή ίσο του 9. Έτσι με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}, γράφουμε

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2{,}7182\,82.$$

Παράδειγμα 9 Η συνάρτηση ημιτόνου ως πολυώνυμο βαθμού 3

Για ποιες τιμές του x μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\sin x$ με το $x - (x^3/3!)$ με σφάλμα μικρότερο (κατ' απόλυτη τιμή) του 3×10^{-4};

Λύση Βάσει του Παραδείγματος 6, το $x - (x^2/3!) = 0 + x + 0x^2 - (x^3/3!) + 0x^4$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης 4, αλλά και τάξης 3, του $\sin x$. Οπότε,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4,$$

και το θεώρημα εκτίμησης υπολοίπου για $M = r = 1$ δίνει

$$|R_4| \leq 1 \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}.$$

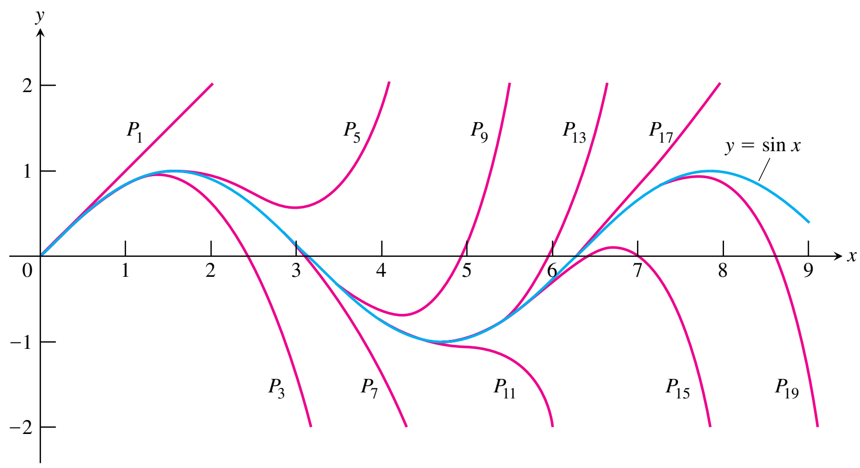
Έτσι, το σφάλμα θα είναι μικρότερο ή ίσο του 3×10^{-4} αν

$$\frac{|x|^5}{120} < 3 \times 10^{-4}, \text{ δηλ. αν } |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0{,}514.$$

Στρογγυλοποιούμε προς τα κάτω, για να είμαστε βέβαιοι

Το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς μας λέει κάτι που το θεώρημα εκτίμησης υπολοίπου παραλείπει: συγκεκριμένα, ότι η έκφραση $x - (x^3/3!)$ «υποεκτιμά» το $\sin x$ για θετικό x επειδή η ποσότητα $x^5/120$ είναι στην περίπτωση αυτή θετική.

Το Σχήμα 8.21 δείχνει το γράφημα του $\sin x$, μαζί με τα γραφήματα μερικών προσεγγιστικών πολυωνύμων Taylor της συνάρτησης. Όπως βλέπετε, η καμπύλη $P_3(x) = x - (x^3/3!)$ δεν διαφέρει σχεδόν καθόλου από την ημιτονοειδή καμπύλη στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$.



Σχημα 8.21 Τα πολυώνυμα

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

συγκλίνουν στο $\sin x$ καθώς $n \to \infty$.

CD-ROM
Δικτυότοπος

Πίνακας σειρών Maclaurin

Παραθέτουμε εδώ μερικές από τις χρησιμότερες σειρές Maclaurin από αυτές που είδαμε ώς τώρα. Στις ασκήσεις θα σας ζητηθεί να χρησιμοποιήσετε τις σειρές αυτές για να κατασκευάσετε άλλες σειρές (π.χ., των συναρτήσεων $\tan^{-1} x^2$, $7xe^x$, κ.ο.κ.). Παραθέτουμε επίσης τα διαστήματα σύγκλισης.

Σειρές Maclaurin

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1)$

2. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (|x| < 1)$

3. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (για κάθε πραγματικό x)

4. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
(για κάθε πραγματικό x)

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
(για κάθε πραγματικό x)

6. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$

7. $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1)$

Συνδυασμός σειρών Taylor

Δύο ή περισσότερες σειρές Taylor μπορούν (στην τομή των διαστημάτων σύγκλισής τους) να προστεθούν, να αφαιρεθούν η μία από την άλλη, να πολλαπλασιασθούν με σταθερές ή και με δυνάμεις του x, έτσι ώστε η προκύπτουσα σειρά να είναι πάλι μια σειρά Taylor. Η σειρά Taylor του αθροίσματος $f(x) + g(x)$ είναι το άθροισμα των σειρών Taylor της $f(x)$ και της $g(x)$ διότι η n-οστή παράγωγος της $f + g$ είναι η $f^{(n)} + g^{(n)}$, κ.ο.κ. Η σειρά Maclaurin του $(1 + \cos 2x)/2$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το x με το $2x$ στη σειρά Maclaurin του $\cos x$, προσθέτοντας το 1, και διαιρώντας με το 2. Η σειρά Maclaurin του $\sin x + \cos x$ είναι το άθροισμα των σειρών του $\sin x$ και του $\cos x$. Η σειρά Maclaurin του $x \sin x$ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους της σειράς Maclaurin του $\sin x$ με το x.

Παράδειγμα 10 Εύρεση σειράς Maclaurin με αντικατάσταση

Βρείτε τη σειρά Maclaurin του $\cos 2x$.

Λύση Στον τύπο της σειράς Maclaurin του $\cos x$, αντικαθιστούμε το x με $2x$:

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots$$

Εξ. (5) με το $2x$ στη θέση του x

$$= 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

Η Εξίσωση (5) ισχύει για $-\infty < x < \infty$, άρα και για $-\infty < 2x < \infty$, επομένως η σειρά που βρήκαμε συγκλίνει για κάθε x. Λύνοντας την Άσκηση 54 θα πεισθείτε γιατί η σειρά που βρήκαμε δεν μπορεί να είναι άλλη από τη σειρά Maclaurin του $\cos 2x$.

Παράδειγμα 11 Εύρεση σειράς Maclaurin με πολλαπλασιασμό

Βρείτε τη σειρά Maclaurin του $x \sin x$.

Λύση Πολλαπλασιάζουμε τον τύπο της σειράς Maclaurin του $\sin x$ (Εξίσωση (4)), με το x:

$$\begin{aligned} x \sin x &= x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots. \end{aligned}$$

Η προκύπτουσα σειρά συγκλίνει για κάθε x, δεδομένου ότι η σειρά του $\sin x$ συγκλίνει για κάθε x. Λύνοντας την Άσκηση 54 θα πεισθείτε γιατί η σειρά που βρήκαμε δεν μπορεί να είναι άλλη από τη σειρά Maclaurin του $x \sin x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.7

Εύρεση πολυωνύμων Taylor

CD-ROM Δικτυότοπος

Στις Ασκήσεις 1-6 βρείτε τα πολυώνυμα Taylor τάξεως 0, 1, 2, και 3 που παράγονται από την f στο a.

1. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
2. $f(x) = \ln(1 + x), \quad a = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x + 2)}, \quad a = 0$
4. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/4$
5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/4$
6. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

Εύρεση σειρών Maclaurin

Βρείτε τις σειρές Maclaurin για τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 7-14.

7. e^{-x}
8. $\dfrac{1}{1 + x}$
9. $\sin 3x$
10. $7 \cos(-x)$
11. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
12. $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
13. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
14. $(x + 1)^2$

Εύρεση σειρών Taylor

Στις Ασκήσεις 15-20, βρείτε τις σειρές Taylor που παράγονται από την f στο $x = a$.

15. $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$
16. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad a = -1$
17. $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$
18. $f(x) = x/(1 - x), \quad a = 0$
19. $f(x) = e^x, \quad a = 2$
20. $f(x) = 2^x, \quad a = 1$

Σειρές Maclaurin

Κάνοντας την κατάλληλη αντικατάσταση, όπως στο Παράδειγμα 10, βρείτε τις σειρές Maclaurin για τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 21-24.

21. e^{-5x}
22. $e^{-x/2}$
23. $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$
24. $\cos \sqrt{x}$

Σειρές Maclaurin

Με κατάλληλη χρήση των σειρών Maclaurin που δίνονται στον πίνακα της τελευταίας ενότητας, βρείτε τις σειρές Maclaurin για τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 25-34.

25. xe^x
26. $x^2 \sin x$
27. $\dfrac{x^2}{2} - 1 + \cos x$
28. $\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!}$
29. $x \cos \pi x$

30. $\cos^2 x$ (*Υπόδειξη*: $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)

31. $\sin^2 x$

32. $\dfrac{x^2}{1 - 2x}$

33. $x \ln(1 + 2x)$

34. $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$

Εκτίμηση σφάλματος

35. *Μάθετε γράφοντας* Για ποιες κατά προσέγγιση τιμές του x μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\sin x$ με το $x - (x^3/6)$ ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να μην υπερβαίνει το 5×10^{-4}; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

36. *Μάθετε γράφοντας* Κάντε μια εκτίμηση του προσεγγιστικού σφάλματος αν αντικαταστήσουμε το $\cos x$ με το $1 - (x^2/2)$ για $|x| < 0{,}5$. Η ποσότητα $1 - (x^2/2)$ παίρνει μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές από το $\cos x$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

37. *Γραμμική προσέγγιση του* $\sin x$ Πόσο καλή είναι η προσέγγιση $\sin x = x$ για $|x| < 10^{-3}$; Για ποιες από τις τιμές αυτές του x ισχύει $x < \sin x$;

38. *Γραμμική προσέγγιση του* $\sqrt{1 + x}$ Η προσέγγιση $\sqrt{1 + x} = 1 + (x/2)$ χρησιμοποιείται για μικρά x. Εκτιμήστε το σφάλμα για $|x| < 0{,}01$.

39. *Δευτεροβάθμια προσέγγιση του* e^x

(α) Η προσέγγιση $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ χρησιμοποιείται για μικρά x. Με χρήση του θεωρήματος εκτίμησης υπολοίπου εκτιμήστε το σφάλμα για $|x| < 0{,}1$.

(β) Για $x < 0$, η σειρά του e^x είναι εναλλασσόμενη. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς για να εκτιμήσετε το σφάλμα προσέγγισης του e^x με το $1 + x + (x^2/2)$ για $-0{,}1 < x < 0$. Συγκρίνετε την εκτίμησή σας με αυτήν που κάνατε στο ερώτημα (α).

40. *Κυβική προσέγγιση του* $\sinh x$ Εκτιμήστε το σφάλμα της προσέγγισης $\sinh x = x + (x^3/3!)$ για $|x| < 0{,}5$. (*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το R_4, όχι το R_3.)

41. *Γραμμική προσέγγιση του* e^h Για $0 \le h \le 0{,}01$, δείξτε ότι το e^h μπορεί να προσεγγιστεί από το $1 + h$ με σφάλμα όχι μεγαλύτερο του 0,6% του h. Θεωρήστε ότι $e^{0{,}01} = 1{,}01$.

42. *Προσεγγίζοντας το* $\ln(1 + x)$ *με το* x Για ποιες θετικές τιμές του x μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\ln(1 + x)$ με το x, ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να μην υπερβαίνει το 1% του x;

43. *Εκτίμηση του* $\pi/4$ Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το $\pi/4$ υπολογίζοντας την κατάλληλη σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\tan^{-1} x$ στο $x = 1$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς για να προσδιορίσετε πόσους όρους της σειράς χρειάζεστε, ώστε η προσέγγισή σας να έχει ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

44. *Φράγμα της* $y = (\sin x)/x$

(α) Χρησιμοποιήστε τη σειρά Maclaurin του $\sin x$ και το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς για να δείξετε ότι

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad x \neq 0.$$

T **(β)** *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα την $f(x) = (\sin x)/x$ και τις συναρτήσεις $y = 1 - (x^2/6)$ και $y = 1$ για $-5 \le x \le 5$. Σχολιάστε τη σχέση μεταξύ των καμπυλών του σχήματος.

Δευτεροβάθμιες προσεγγίσεις

CD-ROM Δικτυότοπος

Το πολυώνυμο Taylor τάξης 2 που παράγεται από τη διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x)$ στο $x = a$ καλείται **δευτεροβάθμια προσέγγιση** της f στο $x = a$. Στις Ασκήσεις 45-48, καλείστε να βρείτε

(α) τη γραμμικοποίηση (πολυώνυμο Taylor τάξης 1) στο $x = 0$

(β) τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της f στο $x = 0$.

45. $f(x) = \ln(\cos x)$

46. $f(x) = e^{\sin x}$

47. $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$

48. $f(x) = \cosh x$

Θεωρία και παραδείγματα

49. *Θεώρημα Taylor και θεώρημα μέσης τιμής* Εξηγήστε γιατί το θεώρημα μέσης τιμής (Ενότητα 3.2, Θεώρημα 4) αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος Taylor.

50. *Γραμμικοποιήσεις σε σημεία καμπής* (*Συνέχεια από την Ενότητα 3.6, Άσκηση 49*) Δείξτε ότι αν η γραφική παράσταση μιας διπλά διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$ έχει σημείο καμπής στο $x = a$, τότε η γραμμικοποίηση της f στο $x = a$ συμπίπτει με τη δευτεροβάθμια προσέγγιση της f στο $x = a$. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η εφαπτόμενη ευθεία ταιριάζει τόσο καλά στην καμπύλη στα σημεία καμπής.

51. *Το (δεύτερο) κριτήριο δεύτερης παραγώγου* Χρησιμοποιήστε την εξίσωση

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x - a)^2$$

για να κατοχυρώσετε το ακόλουθο κριτήριο.

Έστω ότι η f έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και ότι $f'(a) = 0$. Στην περίπτωση αυτή

(α) Η f έχει τοπικό μέγιστο στο a αν $f'' \le 0$ σε όλο το διάστημα στο εσωτερικό του οποίου ανήκει το a.

(β) Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a αν $f'' \ge 0$ σε όλο το διάστημα στο εσωτερικό του οποίου ανήκει το a.

52. *Κυβική προσέγγιση* Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Taylor με $a = 0$ και $n = 3$ για να βρείτε τη συνήθη κυβική προσέγγιση της $f(x) = 1/(1 - x)$ στο $x = 0$. Βρείτε ένα άνω φράγμα του προσεγγιστικού σφάλματος για $|x| \le 0{,}1$.

53. *Βελτίωση προσεγγίσεων του* π

(α) Έστω P μια προσέγγιση του π με ακρίβεια n δεκαδικών ψηφίων. Δείξτε ότι η ποσότητα $P + \sin P$ προσεγγίζει το π με ακρίβεια $3n$ δεκαδικών ψηφίων. (*Υπόδειξη*: Θέστε $P = \pi + x$.)

(β) Δοκιμάστε το με ένα κομπιουτεράκι.

54. *Η σειρά Maclaurin την οποία παράγει η* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *είναι η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης $c > 0$ έχει σειρά Maclaurin που συγκλίνει στη συνάρτηση σε κάθε σημείο του διαστήματος $(-c, c)$. Αποδείξτε την παραπάνω πρόταση δείχνοντας ότι η σειρά Maclaurin την οποία παράγει η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι η ίδια η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Μια άμεση συνέπεια είναι ότι σειρές όπως η

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

και η

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots,$$

που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε σειρές Maclaurin με δυνάμεις του x, αλλά και όλες οι σειρές που προκύπτουν με την ολοκλήρωση ή την παραγώγιση μιας συγκλίνουσας δυναμοσειράς, είναι οι ίδιες οι σειρές Maclaurin των συναρτήσεων τις οποίες παριστάνουν.

55. *Σειρές Maclaurin για άρτιες και περιττές συναρτήσεις* Έστω ότι η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάθε x στο ανοιχτό διάστημα $(-c, c)$.

(α) Δείξτε ότι αν η f είναι άρτια, τότε $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$· ότι δηλαδή η σειρά της f περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x.

(β) Δείξτε ότι αν η f είναι περιττή, τότε $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$· ότι δηλαδή ότι η σειρά της f περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις του x.

56. *Πολυώνυμα Taylor περιοδικών συναρτήσεων*

(α) Δείξτε ότι κάθε συνεχής περιοδική συνάρτηση $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, είναι απολύτως φραγμένη. Δείξτε δηλαδή ότι υπάρχει θετική σταθερά M τέτοια ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε x.

(β) Δείξτε ότι το γράφημα κάθε πολυωνύμου Taylor θετικού βαθμού που παράγεται από την $f(x) = \cos x$ οφείλει τελικά να απομακρύνεται από το γράφημα του $\cos x$ καθώς το $|x|$ αυξάνεται (δείτε το Σχήμα 8.19). Παρόμοια συμπεριφορά έχουν τα πολυώνυμα Taylor του $\sin x$ (Σχήμα 8.21).

T **57.** **(α)** *Δύο γραφήματα* Σχεδιάστε σε κοινό σχήμα τις καμπύλες $y = (1/3) - (x^2)/5$ και $y = (x - \tan^{-1} x)/x^3$ και την ευθεία $y = 1/3$.

(β) Χρησιμοποιήστε μια κατάλληλη σειρά Maclaurin για να ερμηνεύσετε τα γραφήματα. Ποια τιμή έχει το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3};$$

58. *Από όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\le n$, το πολυώνυμο Taylor τάξης n αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση* Έστω $f(x)$ διαφορίσιμη σε διάστημα κέντρου $x = a$ και ότι $g(x) = b_0 + b_1(x - a) + \cdots + b_n(x - a)^n$ είναι πολυώνυμο βαθμού n με σταθερούς συντελεστές $b_0, \ldots, b_n$. Έστω $E(x) = f(x) - g(x)$. Δείξτε ότι αν επιβάλουμε στο g τις συνθήκες

(α) $E(a) = 0$ — Το προσεγγιστικό σφάλμα μηδενίζεται για $x = a$.

(β) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{E(x)}{(x - a)^n} = 0,$ — Το σφάλμα είναι αμελητέο συγκρινόμενο με την ποσότητα $(x - a)^n$.

τότε

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Δηλαδή, το πολυώνυμο Taylor $P_n(x)$ είναι το μόνο πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου με n για το οποίο το προσεγγιστικό σφάλμα είναι μηδέν στο $x = a$ και αμελητέο συγκρινόμενο με το $(x - a)^n$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Γραμμικές, δευτεροβάθμιες και τριτοβάθμιες προσεγγίσεις

Ο τύπος του Taylor για $n = 1$ και $a = 0$ δίνει τη γραμμικοποίηση μιας συνάρτησης στο $x = 0$. Για $n = 2$ και $n = 3$, δίνει τις συνήθεις δευτεροβάθμιες και τριτοβάθμιες προσεγγίσεις. Στις ασκήσεις που ακολουθούν, καλείστε να διερευνήσετε τα σφάλματα των προσεγγίσεων αυτών. Συγκεκριμένα τίθενται δύο ερωτήματα:

(α) Για ποιες τιμές του x μπορεί να αντικατασταθεί η συνάρτηση από καθεμία προσέγγιση με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2};

(β) Πόσο είναι το μέγιστο σφάλμα που αναμένετε αν αντικαταστήσετε τη συνάρτηση με καθεμία από τις προσεγγίσεις αυτές στο διάστημα που δίνεται;

Με τη χρήση κάποιου συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας, εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα για τις συναρτήσεις και τα διαστήματα των Ασκήσεων 59-64. Αυτό θα σας βοηθήσει να απαντήσετε στα ερωτήματα (α) και (β).

Βήμα 1: Σχεδιάστε τη συνάρτηση στο διάστημα που δίνεται.

Βήμα 2: Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$, και $P_3(x)$ στο $x = 0$.

Βήμα 3: Υπολογίστε τη $(n + 1)$-στή παράγωγο $f^{(n+1)}(c)$ που εμφανίζεται στον τύπο του υπολοίπου κάθε πολυωνύμου Taylor. Σχεδιάστε την παράγωγο συναρτήσει του c στο ίδιο διάστημα και εκτιμήστε τη μέγιστη απόλυτη τιμή της, M.

Βήμα 4: Υπολογίστε το υπόλοιπο $R_n(x)$ για κάθε πολυώνυμο. Χρησιμοποιώντας την τιμή M του βήματος 3 αντί για την $f^{(n+1)}(c)$, σχεδιάστε το $R_n(x)$ στο καθορισμένο διάστημα. Κατόπιν εκτιμήστε τις τιμές του x που απαντούν στο ερώτημα (α).

Βήμα 5: Συγκρίνετε το εκτιμώμενο σφάλμα με το πραγματικό σφάλμα $E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$ σχεδιάζοντας το $E_n(x)$ στο διάστημα. Έτσι θα απαντήσετε στο ερώτημα (β).

Βήμα 6: Σχεδιάστε σε κοινό διάγραμμα τη συνάρτηση και τις τρεις προσεγγίσεις της κατά Taylor. Σχολιάστε τις γραφικές παραστάσεις αναφορικά με όσα μάθατε στα βήματα 4 και 5.

59. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}, \quad |x| \le \dfrac{3}{4}$

60. $f(x) = (1 + x)^{3/2}, \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 2$

61. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad |x| \le 2$

62. $f(x) = (\cos x)(\sin 2x), \quad |x| \le 2$

63. $f(x) = e^{-x} \cos 2x, \quad |x| \le 1$

64. $f(x) = e^{x/3} \sin 2x, \quad |x| \le 2$

8.8 Εφαρμογές δυναμοσειρών

Διωνυμική σειρά για δυνάμεις και ρίζες • Λύσεις διαφορικών εξισώσεων σε μορφή σειρών • Όρια που περιλαμβάνουν απροσδιόριστες μορφές και υπολογίζονται με δυναμοσειρές • Τόξα εφαπτομένης

Θα δούμε τώρα με ποιον τρόπο οι επιστήμονες και οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τις δυναμοσειρές σε μια πληθώρα εφαρμογών.

Διωνυμική σειρά για δυνάμεις και ρίζες

Η σειρά Maclaurin την οποία παράγει η $f(x) = (1 + x)^m$, όπου m είναι σταθερά, είναι

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots.$$

Η σειρά αυτή, που καλείται **διωνυμική σειρά,** συγκλίνει απολύτως για $|x| < 1$. Για να καταλήξουμε στην παραπάνω έκφραση της σειράς, καταγράφουμε πρώτα τη συνάρτηση και τις παραγώγους της:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x)^m \\
f'(x) &= m(1 + x)^{m-1} \\
f''(x) &= m(m-1)(1 + x)^{m-2} \\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1 + x)^{m-3} \\
&\ \vdots \\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1 + x)^{m-k}.
\end{aligned}$$

Κατόπιν τις αποτιμούμε στο $x = 0$ και τις αντικαθιστούμε στον τύπο της σειράς Maclaurin, ώστε να πάρουμε τη διωνυμική σειρά.

Αν ο m είναι ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός, η σειρά σταματά μετά από $(m + 1)$ όρους, διότι οι συντελεστές από $k = m + 1$ και εφεξής μηδενίζονται.

Αν ο m δεν είναι θετικός ακέραιος ή μηδέν, η σειρά είναι άπειρη και συγκλίνει για $|x| < 1$. Για να δείτε γιατί συμβαίνει αυτό, έστω u_k ο όρος που περιέχει το x^k. Εφαρμόζουμε τότε το κριτήριο του λόγου για απόλυτη σύγκλιση, οπότε βλέπουμε ότι

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x| \qquad \text{καθώς } k \to \infty.$$

Η ώς τώρα ανάλυση αποδεικνύει μονάχα ότι η διωνυμική σειρά παράγεται από την $(1 + x)^m$ και ότι συγκλίνει για $|x| < 1$. Δεν αποδείξαμε ότι η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $(1 + x)^m$. Έτσι συμβαίνει όντως, αλλά αυτό θα το δεχτούμε χωρίς απόδειξη.

Διωνυμική σειρά

Για $-1 < x < 1$, ισχύει ότι $$(1 + x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k,$$

όπου εξ ορισμού $$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!},$$

και $$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad \text{για } k \geq 3.$$

Παράδειγμα 1 Χρήση της διωνυμικής σειράς

Για $m = -1$, είναι

$$\binom{-1}{1} = -1, \qquad \binom{-1}{2} = \frac{-1(-2)}{2!} = 1,$$

και

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k\left(\frac{k!}{k!}\right) = (-1)^k.$$

Με αυτές τις τιμές για τους συντελεστές, ο τύπος της διωνυμικής σειράς δίνει τη γνωστή μας γεωμετρική σειρά

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots .$$

Παράδειγμα 2 Χρήση της διωνυμικής σειράς

Γνωρίζουμε από την Ενότητα 3.6, Παράδειγμα 1, ότι $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ για μικρά $|x|$. Για $m = 1/2$, η διωνυμική σειρά μάς παρέχει περαιτέρω προσεγγίσεις της συνάρτησης $\sqrt{1+x}$, μέσω πολυωνύμων δευτέρου ή και μεγαλύτερου βαθμού, ενώ με το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς μπορούμε να εκτιμήσουμε το αντίστοιχο σφάλμα:

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots .\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το x καταλλήλως, παίρνουμε προσεγγιστικές εκφράσεις για διάφορες άλλες συναρτήσεις. Για παράδειγμα,

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \qquad \text{για μικρό } |x^2|$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \qquad \text{για μικρό } \left|\frac{1}{x}\right|, \text{ δηλ. για μεγάλο } |x|.$$

Λύσεις διαφορικών εξισώσεων σε μορφή σειρών

Όταν δεν μπορούμε να βρούμε μια σχετικά απλή έκφραση της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών (δηλ. μιας διαφορικής εξίσωσης), προσπαθούμε να «ψηλαφίσουμε» τη λύση με άλλους τρόπους. Ένας εξ αυτών είναι να την εκφράσουμε σε μορφή δυναμοσειράς. Αν αυτό είναι εφικτό, τότε η δυναμοσειρά μάς εφοδιάζει με πολυωνυμικές προσεγγίσεις της λύσης, πράγμα που μπορεί να μας αρκεί για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Το πρώτο παράδειγμα (Παράδειγμα 3) αναφέρεται σε μια πρωτοτάξια γραμμική διαφορική εξίσωση που μπορεί να λυθεί με μεθόδους που έχουμε ήδη δει. Μπορεί όμως να λυθεί και με δυναμοσειρές. Το δεύτερο παράδειγμα (Παράδειγμα 4) έχει να κάνει με μια εξίσωση που δεν λύνεται με μεθόδους που έχουμε ήδη αναφέρει.

Παράδειγμα 3 Λύση σε μορφή σειράς προβλήματος αρχικών τιμών

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' - y = x, \qquad y(0) = 1.$$

Λύση Έστω ότι υπάρχει λύση της μορφής

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + \dots . \tag{1}$$

Στόχος μας είναι να βρούμε τους συντελεστές a_k έτσι ώστε η σειρά και η πρώτη της παράγωγος,

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \tag{2}$$

να ικανοποιούν τη δοθείσα διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη. Η σειρά $y' - y$ είναι η διαφορά των σειρών (1) και (2):

$$\begin{aligned} y' - y = {} & (a_1 + a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \dots \\ & + (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \dots . \end{aligned} \tag{3}$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
John Van Neumann
(1903-1957)

Αν η y ικανοποιεί την εξίσωση $y' - y = x$, τότε η σειρά της Εξίσωσης (3) θα ισούται με x. Και εφόσον η αναπαράσταση μιας συναρτήσεως μέσω δυναμοσειρών είναι μοναδική, όπως είδαμε στην Άσκηση 45 της Ενότητας 8.6, οι συντελεστές στην Εξίσωση (3) οφείλουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 0 && \text{Σταθεροί όροι} \\ 2a_2 - a_1 &= 1 && \text{Συντελεστές του } x \\ 3a_3 - a_2 &= 0 && \text{Συντελεστές του } x^2 \\ &\vdots && \vdots \\ na_n - a_{n-1} &= 0 && \text{Συντελεστές του } x^{n-1} \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Από την Εξίσωση (1) βλέπουμε ότι $y = a_0$ για $x = 0$, οπότε $a_0 = 1$ (αρχική συνθήκη). Έχουμε λοιπόν

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = a_0 = 1, \qquad a_2 = \frac{1 + a_1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2},$$
$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3!}, \qquad \cdots, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{2}{n!}, \ \cdots .$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές αυτούς στην Εξίσωση (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} y &= 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + x + 2\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)}_{\text{Σειρά Maclaurin του } e^x - 1 - x} \end{aligned}$$

$$= 1 + x + 2(e^x - 1 - x) = 2e^x - 1 - x.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι λοιπόν $y = 2e^x - 1 - x$.

Επαληθεύουμε:

$$y(0) = 2e^0 - 1 - 0 = 2 - 1 = 1$$

και

$$y' - y = (2e^x - 1) - (2e^x - 1 - x) = x.$$

Παράδειγμα 4 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης

Να βρεθεί η λύση σε μορφή δυναμοσειράς της

$$y'' + x^2y = 0. \tag{4}$$

Λύση Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση της μορφής

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \tag{5}$$

και βρίσκουμε ποιοι οφείλουν να είναι οι συντελεστές a_k ούτως ώστε η σειρά και η δεύτερη παράγωγός της

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots \tag{6}$$

να ικανοποιούν την Εξίσωση (4). Η σειρά του x^2y ισούται με x^2 επί τη σειρά του y, οπότε, από την Εξίσωση (5) έχουμε:

$$x^2y = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \dots + a_nx^{n+2} + \dots . \tag{7}$$

Η σειρά του $y'' + x^2y$ είναι το άθροισμα των σειρών των Εξισώσεων (6) και (7):

$$\begin{aligned} y'' + x^2y = {} & 2a_2 + 6a_3x + (12a_4 + a_0)x^2 + (20a_5 + a_1)x^3 \\ & + \dots + (n(n-1)a_n + a_{n-4})x^{n-2} + \dots . \end{aligned} \tag{8}$$

Προσέξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-2} στην Εξίσωση (7) είναι a_{n-4}. Αν τα y και y'' ικανοποιούν την Εξίσωση (4), οι συντελεστές κάθε δύναμης του x στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (8) θα πρέπει να μηδενίζονται:

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 0, \quad 12a_4 + a_0 = 0, \quad 20a_5 + a_1 = 0, \tag{9}$$

και για κάθε $n \geq 4$,

$$n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0. \tag{10}$$

Βλέπουμε από την Εξίσωση (5) ότι

$$a_0 = y(0), \qquad a_1 = y'(0).$$

Με άλλα λόγια, οι δύο πρώτοι συντελεστές της σειράς είναι οι τιμές των y και y' για $x = 0$. Οι Εξισώσεις (9) και ο αναδρομικός τύπος της Εξίσωσης (10) μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τους υπόλοιπους συντελεστές συναρτήσει των a_0 και a_1.

Οι δύο πρώτες από τις Εξισώσεις (9) δίνουν

$$a_2 = 0, \qquad a_3 = 0.$$

Η Εξίσωση (10) δίνει $a_{n-4} = 0$, οπότε $a_n = 0$, που σημαίνει ότι

$$a_6 = 0, \qquad a_7 = 0, \qquad a_{10} = 0, \qquad a_{11} = 0,$$

και ότι μηδενίζεται επίσης κάθε άλλος συντελεστής a_n με δείκτη $n = 4k + 2$ ή $4k + 3$. Για τους υπόλοιπους συντελεστές, έχουμε

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)},$$

οπότε

$$a_4 = \frac{-a_0}{4 \cdot 3}, \qquad a_8 = \frac{-a_4}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8},$$

$$a_{12} = \frac{-a_8}{11 \cdot 12} = \frac{-a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12}$$

και

$$a_5 = \frac{-a_1}{5 \cdot 4}, \qquad a_9 = \frac{-a_5}{9 \cdot 8} = \frac{a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9},$$

$$a_{13} = \frac{-a_9}{12 \cdot 13} = \frac{-a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13}.$$

Για αισθητικούς λόγους, εκφράζουμε την τελική λύση ως άθροισμα δύο σειρών, η μία με συντελεστή το a_0, η άλλη με το a_1:

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \cdots \right)$$

$$+ a_1 \left(x - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \cdots \right).$$

Και οι δύο αυτές σειρές συγκλίνουν απολύτως για κάθε x, όπως προκύπτει εύκολα από το κριτήριο του λόγου.

Όρια που περιλαμβάνουν απροσδιόριστες μορφές και υπολογίζονται με δυναμοσειρές

Μερικές φορές μπορούμε να υπολογίζουμε απροσδιόριστες μορφές εκφράζοντας τις σχετικές συναρτήσεις ως σειρές Taylor.

Παράδειγμα 5 Όρια και δυναμοσειρές

Υπολογίστε το

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$

Λύση Η σειρές Maclaurin των $\sin x$ και $\tan x$, μέχρι τον όρο x^5, είναι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

Έτσι,

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots = x^3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots \right)$$

και

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots \right)$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν σειρές για την εύρεση του $\lim_{n \to 0} ((1/\sin x) - (1/x))$, βρίσκουμε όχι μόνο το ζητούμενο όριο αλλά και έναν προσεγγιστικό τύπο για το $\csc x$.

Παράδειγμα 6 Όρια και δυναμοσειρές

Να βρεθεί το

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Λύση

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x \cdot \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{x^3\left(\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots\right)} = x\,\frac{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots}.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(x\,\frac{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \cdots}\right) = 0.$$

Από το τελευταίο κλάσμα βλέπουμε ότι για μικρό $|x|$ θα ισχύει

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \approx x \cdot \frac{1}{3!} = \frac{x}{6} \qquad \text{δηλ.} \qquad \csc x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}.$$

Τόξα εφαπτομένης

Στην Ενότητα 8.6, Παράδειγμα 5, βρήκαμε μια έκφραση σε μορφή σειράς για την $\tan^{-1} x$, παραγωγίζοντας την (άγνωστη, τότε) συνάρτηση

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας,

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Ωστόσο, δεν αποδείξαμε το θεώρημα ολοκλήρωσης όρο προς όρο, κάτι που η τελευταία έκφραση προϋποθέτει. Θα αναπαραγάγουμε τώρα τη σειρά της $\tan^{-1} x$, ολοκληρώνοντας κατά μέλη τον τύπο

$$\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2},$$

όπου ο τελευταίος όρος προέρχεται από την άθροιση των υπολειπόμενων όρων θεωρούμενων ως γεωμετρική σειρά με αρχικό όρο $a = (-1)^{n+1} t^{2n+2}$ και λόγο $r = -t^2$. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την τελευταία εξίσωση από $t = 0$ έως $t = x$ παίρνουμε

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + R(n, x),$$

όπου

$$R(n, x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2}\, dt.$$

Ο παρονομαστής της ολοκληρωτέας ποσότητας είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1· έτσι,

$$|R(n, x)| \le \int_0^{|x|} t^{2n+2}\, dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n + 3}.$$

Για $|x| \le 1$, το δεξιό μέλος της ανισότητας αυτής τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς, $\lim_{n \to \infty} R(n, x) = 0$ για $|x| \le 1$ και

Ακολουθούμε τη μέθοδο αυτή, αντί του απευθείας υπολογισμού της σειράς Maclaurin, διότι οι τύποι των παραγώγων μεγαλύτερης τάξης του $\tan^{-1} x$ γίνονται πολύπλοκοι.

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1.$$

Θέτοντας $x = 1$ στη σειρά του $\tan^{-1} x$ παίρνουμε τον λεγόμενο **τύπο του Leibniz:**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots .$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει εξαιρετικά αργά για να έχει κάποια χρησιμότητα, προκειμένου για δεκαδικές προσεγγίσεις του π. Προτιμότερη για τον σκοπό αυτόν είναι η χρήση του τύπου

$$\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239},$$

όπου χρησιμοποιούνται τιμές του x εγγύτερα στο μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.8

Διωνυμικές σειρές

Βρείτε τους πρώτους τέσσερις όρους των διωνυμικών σειρών για τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 1-10.

1. $(1+x)^{1/2}$ **2.** $(1+x)^{1/3}$

3. $(1-x)^{-1/2}$ **4.** $(1-2x)^{1/2}$

5. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$ **6.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$

7. $(1+x^3)^{-1/2}$ **8.** $(1+x^2)^{-1/3}$

9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$ **10.** $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}$

Να βρεθούν οι διωνυμικές σειρές για τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 11-14.

11. $(1+x)^4$ **12.** $(1+x^2)^3$

13. $(1-2x)^3$ **14.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^4$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Βρείτε λύσεις σε μορφή σειρών για τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 15-32.

15. $y' + y = 0, \quad y(0) = 1$ **16.** $y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1$

17. $y' - y = 1, \quad y(0) = 0$ **18.** $y' + y = 1, \quad y(0) = 2$

19. $y' - y = x, \quad y(0) = 0$ **20.** $y' + y = 2x, \quad y(0) = -1$

21. $y' - xy = 0, \quad y(0) = 1$ **22.** $y' - x^2 y = 0, \quad y(0) = 1$

23. $(1-x)y' - y = 0, \quad y(0) = 2$

24. $(1+x^2)y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 3$

25. $y'' - y = 0, \quad y'(0) = 1$ και $y(0) = 0$

26. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 0$ και $y(0) = 1$

27. $y'' + y = x, \quad y'(0) = 1$ και $y(0) = 2$

28. $y'' - y = x, \quad y'(0) = 2$ και $y(0) = -1$

29. $y'' - y = -x, \quad y'(2) = -2$ και $y(2) = 0$

30. $y'' - x^2 y = 0, \quad y'(0) = b$ και $y(0) = a$

31. $y'' + x^2 y = x, \quad y'(0) = b$ και $y(0) = a$

32. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y'(0) = 1$ και $y(0) = 0$

Προσεγγίζοντας ολοκληρωτικές συναρτήσεις με πολυώνυμα

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 33-36, βρείτε ένα πολυώνυμο που προσεγγίζει την $F(x)$ στο δοθέν διάστημα, με μέγεθος σφάλματος μικρότερο του 10^{-3}.

33. $F(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt, \quad [0, 1]$

34. $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} \, dt, \quad [0, 1]$

35. $F(x) = \int_0^x \tan^{-1} t \, dt, \quad$ (α) $[0, 0{,}5]$ (β) $[0, 1]$

36. $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt, \quad$ (α) $[0, 0{,}5]$ (β) $[0, 1]$

Απροσδιόριστες μορφές

Βρείτε τα όρια των Ασκήσεων 37-42 με χρήση σειρών.

37. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$ **38.** $\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t - (t^2/2)}{t^4}$

39. $\lim_{x\to \infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1)$ **40.** $\lim_{y\to 0} \frac{\tan^{-1} y - \sin y}{y^3 \cos y}$

41. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos x}$ **42.** $\lim_{x\to \infty} (x+1) \sin \frac{1}{x+1}$

Θεωρία και παραδείγματα

43. *Σειρά του* $\ln(1-x)$, $|x| < 1$ Αντικαταστήστε το x με το $-x$ στη σειρά Maclaurin του $\ln(1+x)$ έτσι ώστε να πάρετε τη σειρά του $\ln(1-x)$. Κατόπιν αφαιρέστε αυτό που βρήκατε από τη σειρά Maclaurin του $\ln(1+x)$ για να δείξετε ότι για $|x| < 1$, ισχύει

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

44. *Μάθετε γράφοντας* Πόσους όρους της σειράς Maclaurin του $\ln(1+x)$ πρέπει να συμπεριλάβετε ώστε να είστε βέβαιοι ότι υπολογίζετε το $\ln(1{,}1)$ με μέγεθος σφάλματος μικρότερο του 10^{-8}; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

45. *Μάθετε γράφοντας* Σύμφωνα με το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς, πόσους όρους της σειράς Maclaurin του $\tan^{-1} 1$ πρέπει να συμπεριλάβετε ώστε να είστε βέβαιοι ότι υπολογίζετε το $\pi/4$ με μέγεθος σφάλματος μικρότερο του 10^{-3}; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

46. *Σειρά Maclaurin του $\tan^{-1} x$* Δείξτε ότι η σειρά Maclaurin της $f(x) = \tan^{-1} x$ αποκλίνει για $|x| > 1$.

47. *Πολυώνυμο Taylor του $\sin^{-1} x$*

(α) Χρησιμοποιήστε τη διωνυμική σειρά και το γεγονός ότι

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = (1 - x^2)^{-1/2}$$

ώστε να παραγάγετε τους πρώτους τέσσερις μη μηδενικούς όρους της σειράς Maclaurin του $\sin^{-1} x$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης;

(β) *Πολυώνυμο Taylor του $\cos^{-1} x$* Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα (α) για να βρείτε τους πρώτους πέντε μη μηδενικούς όρους της σειράς Maclaurin του $\cos^{-1} x$.

48. *Σειρά Maclaurin του $\sin^{-1} x$* Ολοκληρώστε τη διωνυμική σειρά της συναρτήσεως $(1 - x^2)^{-1/2}$ για να δείξετε ότι για $|x| < 1$, ισχύει

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

49. *Σειρά της $\tan^{-1} x$ για $|x| > 1$* Προκειμένου να δείξετε ότι

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x > 1$$

$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x < -1$$

ολοκληρώστε τη σειρά

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + (1/t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \cdots$$

από x έως ∞ στην πρώτη περίπτωση, και από $-\infty$ έως x στη δεύτερη.

50. *Η τιμή του $\sum_{n=0}^{\infty} \tan^{-1}(2/n^2)$*

(α) Χρησιμοποιήστε τον τύπο της εφαπτομένης διαφοράς δύο γωνιών για να δείξετε ότι

$$\tan\left(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n-1)\right) = \frac{2}{n^2}$$

και συνεπώς ότι

$$\tan^{-1}\frac{2}{n^2} = \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n-1).$$

(β) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \tan^{-1}\frac{2}{n^2} = \tan^{-1}(N+1) + \tan^{-1} N - \frac{\pi}{4}.$$

(γ) Υπολογίστε το $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}(2/n^2)$.

8.9 Σειρές Fourier

Συντελεστές σειρών Fourier • Σύγκλιση σειρών Fourier • Περιοδική επέκταση

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1766-1830)

Μελετώντας την αγωγή θερμότητας κατά μήκος ενός θερμικά μονωμένου σωλήνα μεγάλου μήκους, ο Γάλλος μαθηματικός Jean-Baptiste Joseph Fourier αντιμετώπισε το ζήτημα του πώς μπορεί μια συνάρτηση $f(x)$ να εκφραστεί ως τριγωνομετρική σειρά. Γενικά, αν η $f(x)$ ορίζεται στο διάστημα $-L < x < L$, ζητούμε να βρούμε τους συντελεστές a_0, a_n, και b_n $(n \geq 1)$ ώστε να ισχύει

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{1}$$

Προσέξτε ότι το διάστημα $-L < x < L$ είναι *συμμετρικό* ως προς την αρχή των αξόνων. Η Εξίσωση (1) καλείται **σειρά Fourier** της f στο διάστημα $(-L, L)$. Οι σειρές Fourier έχουν ευρεία χρήση σε επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές κατά τη μελέτη προβλημάτων αγωγής θερμότητας, κυματικών φαινομένων, συγκεντρώσεων χημικών και ρυπογόνων ουσιών, και αλλού. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε τις τριγωνομετρικές αυτές σειρές ως αναπαραστάσεις μιας δεδομένης συνάρτησης f.

Συντελεστές σειρών Fourier

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο *συμμετρικό* διάστημα $-L < x < L$. Έστω ακόμη ότι η f μπορεί να εκφραστεί ως τριγωνομετρική σειρά βάσει της Εξίσωσης (1). Ζητούμε έναν τρόπο υπολογισμού των συντελεστών $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$. Καίρια σημασία για τους υπολογισμούς μας έχουν τα ορισμένα ολοκληρώματα του Πίνακα 8.3.

Πίνακας 8.3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Αν m και n θετικοί ακέραιοι, τότε

1. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

3. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0$

5. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n. \end{cases}$

(Στις Ασκήσεις 17 έως 21 σας ζητείται ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων αυτών.)

Ο όρος $a_0/2$ στην Εξίσωση (1) χρησιμεύει στο να διατηρηθεί η συμφωνία με τους τύπους υπολογισμού των συντελεστών Fourier.

Υπολογισμός του a_0 Ολοκληρώνουμε κατά μέλη την Εξίσωση (1) από $-L$ έως L και θεωρούμε ότι οι πράξεις ολοκλήρωσης και άθροισης μπορούν να αντιμετατεθούν, οπότε παίρνουμε

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{2}$$

Για κάθε θετικό ακέραιο n, τα δύο τελευταία ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (2) μηδενίζονται (Τύποι 1 και 2 του Πίνακα 8.3). Έτσι,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx = \frac{a_0 x}{2}\bigg]_{-L}^{L} = La_0.$$

Λύνουμε ως προς a_0:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Υπολογισμός του a_m Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την Εξίσωση (1) με το $\cos(m\pi x/L)$, $m > 0$, και ολοκληρώνουμε από $-L$ έως L:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \qquad (4) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (4) μηδενίζεται (Τύπος 1 του Πίνακα 8.3). Επιπλέον, οι Τύποι 3 και 4 του Πίνακα 8.3

απλοποιούν περαιτέρω την εξίσωση, οπότε

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = a_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = La_m.$$

Έτσι,

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx. \tag{5}$$

Υπολογισμός του b_m Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την Εξίσωση (1) με το $\sin(m\pi x/L)$, $m>0$, και ολοκληρώνουμε από $-L$ έως L:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx\\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx.\end{aligned}$$

Από τους Τύπους 2, 4, και 5 του Πίνακα 8.3, παίρνουμε

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = b_m\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = Lb_m.$$

Έτσι,

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx. \tag{6}$$

Η τριγωνομετρική σειρά (1), με συντελεστές a_0, a_n, b_n που δίνονται από τις Εξισώσεις (3), (5), και (6), αντίστοιχα (με το m στη θέση του n), καλείται **ανάπτυγμα σε σειρά Fourier** της συνάρτησης f στο διάστημα $-L<x<L$. Οι σταθερές a_0, a_n, και b_n είναι οι **συντελεστές Fourier** της f.

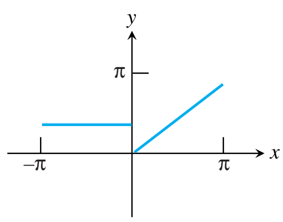
CD-ROM
Δικτυότοπος

Παράδειγμα 1 Εύρεση αναπτύγματος σε σειρά Fourier

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases}1, & -\pi<x<0,\\ x, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

(Σχήμα 8.22).



Σχημα 8.22 Η τμηματικά συνεχής συνάρτηση του Παραδείγματος 1.

Λύση Από το Σχήμα 8.22 προκύπτει ότι $L=\pi$. Συνεπώς, η Εξίσωση (3) μας δίνει

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx\\ &= 1+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Για να βρούμε το a_n, χρησιμοποιούμε την Εξίσωση (5) θέτοντας όπου m το n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin nx\Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.
\end{aligned}$$

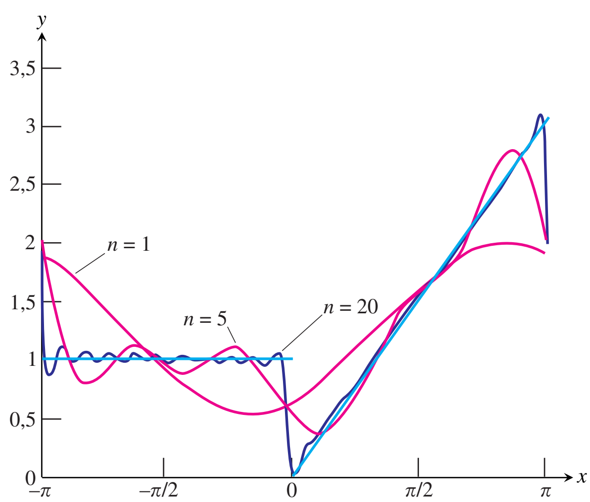
Ομοίως, από την Εξίσωση (6) παίρνουμε (θέτουμε όπου m το n):

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{n\pi}. \qquad \cos n\pi = (-1)^n
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η ζητούμενη σειρά Fourier είναι

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{\pi n}\sin nx.$$

Στο Σχήμα 8.23 παρατίθεται ένα διάγραμμα των προσεγγίσεων Fourier καθώς το n παίρνει τιμές 1, 5, και 20. Προσέξτε πώς οι αλλεπάλληλες προσεγγίσεις προσεγγίζουν το γράφημα της συνάρτησης σε όλα τα σημεία συνέχειας καθώς το n αυξάνεται. Στο σημείο $x = 0$, όπου η f είναι ασυνεχής, οι προσεγγίσεις Fourier τείνουν στην τιμή 0,5 που αντιστοιχεί στο μέσον της ασυνέχειας της f (μεταξύ των τιμών 1 και 0). Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με το θεώρημα σύγκλισης σειρών Fourier που αναφέρεται παρακάτω.



Σχημα 8.23 Προσεγγίσεις με σειρά Fourier της συνάρτησης του Παραδείγματος 1 για n (πλήθος όρων) ίσο με 1, 5, και 20. Καθώς το n αυξάνεται, οι προσεγγίσεις κατά Fourier τείνουν στην $f(x)$.

Κατά τον υπολογισμό των a_0, a_n, και b_n, θεωρήσαμε ότι η f ήταν ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(-L, L)$. Θεωρήσαμε ακόμη ότι τόσο η τριγωνομετρική σειρά στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης (1), όσο και η σειρά που προκύπτει από αυτήν μέσω πολλαπλασιασμού επί $\cos(m\pi x/L)$ ή $\sin(m\pi x/L)$, συγκλίνουν κατά τρόπο που να επιτρέπεται η ολοκλήρωση όρο προς όρο. Αυτά τα ζητήματα σύγκλισης, καθώς και το ερώτημα του πότε ισούται με την $f(x)$ η σειρά Fourier στο διάστημα $-L < x < L$, εξετάζονται στον προχωρημένο λογισμό. Για τις περισσότερες συναρτήσεις που θα συναντήσουμε σε εφαρμογές, η σειρά συγκλίνει και ισούται με την f. Προτού αναφερθούμε περαιτέρω στο θέμα αυτό, ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματα που έχουμε δει ώς τώρα.

Ορισμός **Σειρά Fourier**

Η **σειρά Fourier** της συναρτήσεως $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα $-L < x < L$ είναι

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right], \tag{7}$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \tag{8}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \tag{9}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{10}$$

Σύγκλιση σειρών Fourier

Θα παραθέσουμε τώρα χωρίς απόδειξη το συμπέρασμα περί σύγκλισης των σειρών Fourier για μια μεγάλη κλάση συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται συχνά σε απλά μοντέλα φυσικών συστημάτων. Θυμίζουμε πρώτα ότι μια συνάρτηση f είναι *τμηματικά συνεχής* στο διάστημα I αν αμφότερα τα όρια

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c^+) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c^-)$$

υπάρχουν σε κάθε εσωτερικό σημείο c του I, αν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια υπάρχουν στα ακραία σημεία του I, και αν η f έχει πεπερασμένο (ή μηδενικό) πλήθος ασυνεχειών στο I. Προσέξτε ότι μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα οφείλει να είναι φραγμένη (και άρα δεν μπορεί να τείνει στο άπειρο).

Θεώρημα 18 **Σύγκλιση σειράς Fourier**

Αν η συνάρτηση f και η παράγωγός της f' είναι τμηματικά συνεχείς στο διάστημα $-L < x < L$, τότε σε όλα τα σημεία συνέχειάς της η f ισούται με τη σειρά Fourier που της αντιστοιχεί. Στα δε σημεία c όπου η f παρουσιάζει ασυνέχεια άλματος, η σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2},$$

όπου οι $f(c^+)$ και $f(c^-)$ συμβολίζουν τα δεξιά και αριστερά όρια της f στο c, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2 Τιμές σύγκλισης

Η συνάρτηση του Παραδείγματος 1 ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 18. Για κάθε $x \neq 0$ στο διάστημα $-\pi < x < \pi$, η σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(x)$. Για $x = 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια άλματος και η σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

(Σχήμα 8.23).

Περιοδική επέκταση

Οι τριγωνομετρικοί όροι $\sin(n\pi x/L)$ και $\cos(n\pi x/L)$ στη σειρά Fourier είναι περιοδικοί, με περίοδο $2L$:

$$\begin{aligned}\sin\frac{n\pi(x+2L)}{L} &= \sin\frac{n\pi x}{L}\cos 2n\pi + \cos\frac{n\pi x}{L}\sin 2n\pi \\ &= \sin\frac{n\pi x}{L}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\cos\frac{n\pi(x+2L)}{L} &= \cos\frac{n\pi x}{L}\cos 2n\pi - \sin\frac{n\pi x}{L}\sin 2n\pi \\ &= \cos\frac{n\pi x}{L}.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι και η σειρά Fourier είναι περιοδική, με περίοδο $2L$. Έτσι, η σειρά Fourier όχι μόνο παριστάνει τη συνάρτηση f στο διάστημα $-L < x < L$, αλλά και παράγει την **περιοδική επέκταση** της f σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Βάσει του Θεωρήματος 18, η σειρά συγκλίνει στη μέση τιμή $[f(L^-) + f(-L^+)]/2$ στα άκρα του διαστήματος, καθώς και στα σημεία $\pm 3L$, $\pm 5L$, $\pm 7L$, κ.ο.κ.

Παράδειγμα 3 Σύγκλιση και περιοδική επέκταση

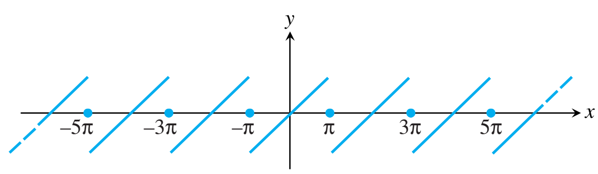
Η σειρά Fourier της $f(x) = x$ στο διάστημα $-\pi < x < \pi$ είναι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

(Στην Άσκηση 3 καλείστε να το αποδείξετε.) Η σειρά συγκλίνει στην περιοδική επέκταση της $f(x) = x$ σε όλο τον άξονα x. Οι κουκκίδες στο Σχήμα 8.24 παριστάνουν την τιμή

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0.$$

Η σειρά συγκλίνει στο 0 στα άκρα του αρχικού διαστήματος και των περιοδικών επεκτάσεών του, δηλ. στα σημεία $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, … .



ΣΧΗΜΑ 8.24 Η σειρά Fourier της $f(x) = x$ συγκλίνει στην f στο διάστημα $-\pi < x < \pi$. Στο υπόλοιπο τμήμα του άξονα των πραγματικών, η σειρά συγκλίνει στην περιοδική επέκταση της f. (Θεώρημα 18).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.9

Εύρεση σειρών Fourier

Στις Ασκήσεις 1-14, αναπτύξτε σε σειρά Fourier κάθε συνάρτηση στο διάστημα που δίνεται.

1. $f(x) = 1, \quad -\pi < x < \pi$

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

4. $f(x) = 1 - x, \quad -\pi < x < \pi$

CD-ROM Δικτυότοπος

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{4}, \quad -\pi < x < \pi$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

7. $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \cos x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 2 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

12. $f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1$

13. $f(x) = |2x - 1|, \quad -1 < x < 1$

14. $f(x) = x|x|, \quad -\pi < x < \pi$

Θεωρία και παραδείγματα

15. Χρησιμοποιήστε τη σειρά Fourier της Άσκησης 5 για να δείξετε ότι

CD-ROM Δικτυότοπος

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

16. Χρησιμοποιήστε τη σειρά Fourier της Άσκησης 6 για να δείξετε ότι

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Αποδείξτε τις ισότητες των Ασκήσεων 17-21, όπου m και n θετικοί ακέραιοι.

17. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$ για κάθε m.

18. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$ για κάθε m.

19. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$

(*Υπόδειξη*: $\cos A \cos B = (1/2)[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$.)

20. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$

(*Υπόδειξη*: $\sin A \sin B = (1/2)[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$.)

21. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$ για κάθε m και n.

(*Υπόδειξη*: $\sin A \cos B = (1/2)[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$.)

22. *Μάθετε γράφοντας: Σειρές Fourier αθροισμάτων συναρτήσεων* Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ πληρούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 18, τότε θα ισούται η σειρά Fourier της $f(x) + g(x)$ στο $(-L, L)$ με το άθροισμα των σειρών Fourier των $f(x)$ και $g(x)$ στο διάστημα αυτό; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

23. *Παραγώγιση όρο προς όρο*

(α) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 18 για να επιβεβαιώσετε ότι η σειρά Fourier της $f(x) = x$ στην Άσκηση 3 συγκλίνει στην $f(x)$ για $-\pi < x < \pi$.

(β) Παρ' όλο που $f'(x) = 1$, δείξτε ότι η σειρά που προκύπτει παραγωγίζοντας όρο προς όρο τη σειρά του ερωτήματος (α) αποκλίνει.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Τι συμπεραίνετε από το ερώτημα (β); Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

24. *Ολοκλήρωση όρο προς όρο* Αποδεικνύεται στον προχωρημένο λογισμό ότι η σειρά Fourier μιας τμηματικά συνεχούς συνάρτησης στο $[-L, L]$ μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο. Χρησιμοποιήστε το γεγονός αυτό για να δείξετε ότι αν η $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $-\pi < x < \pi$, τότε

$$\int_{-\pi}^{x} f(s)\, ds = \frac{1}{2} a_0 (x + \pi)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n(\cos nx - \cos n\pi)) \text{ για } -\pi \leq x \leq \pi,$$

όπου a_0, a_n, και b_n είναι οι συντελεστές Fourier της f.

8.10 Σειρές Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων

CD-ROM Δικτυότοπος

Ολοκληρώματα άρτιων και περιττών συναρτήσεων • Άρτια επέκταση: Σειρές Fourier συνημιτόνων • Περιττή επέκταση: Σειρές Fourier ημιτόνων • Φαινόμενο Gibbs

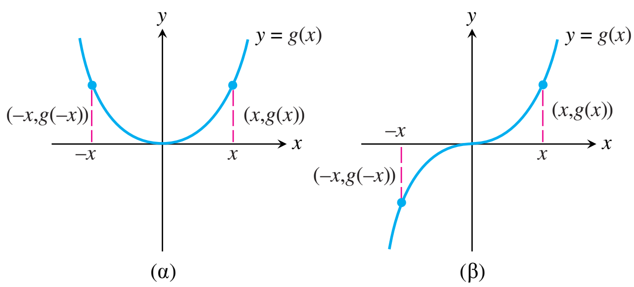
Έστω ότι θέλουμε να περιγράψουμε μαθηματικά την αγωγή θερμότητας κατά μήκος ενός μακρόστενου θερμικά μονωμένου σωλήνα ή καλωδίου. Έστω ακόμη ότι ο σωλήνας μήκους L ευθυγραμμίζεται με τον άξονα x στο διάστημα $0 < x < L$. Η συνάρτηση θερμοκρασίας $u(x, t)$ μεταβάλλεται συναρτήσει της θέσης x κατά μήκος του σωλήνα και του χρόνου t. (Στο Κεφάλαιο 12, θα μελετήσουμε τέτοιες συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών.) Το πρόβλημα που έχουμε λοιπόν να λύσουμε είναι ο προσδιορισμός του $u(x, t)$ για δεδομένη αρχική θερμοκρασία $u(x, 0) = f(x)$. Για παράδειγμα, το ένα άκρο του σωλήνα μπορεί να είναι θερμότερο του άλλου, οπότε η θερμότητα θα διαδοθεί από το θερμό στο ψυχρό άκρο, και μπορεί να μας ενδιαφέρει η κατανομή της θερμοκρασίας στον σωλήνα μετά από μία ώρα. Μία από τις μεθόδους λύσης του προβλήματος αυτού χρησιμοποιεί το ανάπτυγμα

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

επί του *μη συμμετρικού* διαστήματος $0 < x < L$. Πώς λοιπόν θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της f; Για τον σκοπό αυτόν επεκτείνουμε τη συνάρτηση, ώστε να ορίζεται στο συμμετρικό διάστημα $-L < x < L$. Το ερώτημα είναι, πώς ορίζουμε την επέκταση της f στο διάστημα $-L < x < 0$; Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε την επέκταση ως *οποιαδήποτε συνάρτηση* θέλουμε στο $-L < x < 0$, αρκεί η ίδια και η παράγωγός της να είναι τμηματικά συνεχείς (ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 18). Ανεξαρτήτως του ποια τμηματικά συνεχή συνάρτηση ορίζουμε ως την επέκταση της f στο $-L < x < 0$, η προκύπτουσα σειρά Fourier οφείλει να ισούται με την $f(x)$ σε κάθε σημείο συνέχειας του αρχικού διαστήματος $0 < x < L$. Ασφαλώς, η σειρά Fourier θα συγκλίνει επίσης σε οποιαδήποτε συνάρτηση επέκτασης επιλέξουμε στο διάστημα $-L < x < 0$. Υπάρχουν δύο ειδικές περιπτώσεις επεκτάσεων που έχουν ιδιαίτερη σημασία, και που ο υπολογισμός των αντίστοιχων συντελεστών Fourier γίνεται εύκολα· πρόκειται για την άρτια και την περιττή επέκταση της f.

Ολοκληρώματα άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Θυμίζουμε (βλ. Προκαταρκτικά, Ενότητα 2) ότι μια συνάρτηση $g(x)$ είναι άρτια συνάρτηση του x αν $g(-x) = g(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής g. Αν όμως είναι $g(-x) = -g(x)$, τότε η g είναι περιττή συνάρτηση του x. Η συνάρτηση $\cos x$ είναι άρτια, ενώ η $\sin x$ είναι περιττή. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y, ενώ μιας περιττής είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων (Σχήμα 8.25).



Σχημα 8.25 (α) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y. (β) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή.

Η παρατήρηση αυτή διευκολύνει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων άρτιων και περιττών συναρτήσεων σε διαστήματα ολοκλήρωσης συμμετρικά ως προς την αρχή. Παραδείγματος χάριν, για τις συναρτήσεις του Σχήματος 8.25, παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Περιττή συνάρτηση:

$$\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Άρτια συνάρτηση:

$$\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} g(x)\,dx. \tag{2}$$

Λόγω των κανόνων (1) και (2), οι άρτιες και οι περιττές επεκτάσεις μιας συνάρτησης παρουσιάζουν ευκολία χειρισμού. Ισχύουν επίσης οι ακόλουθες προτάσεις.

1. Το γινόμενο δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.
2. Το γινόμενο μιας άρτιας με μια περιττή συνάρτηση είναι περιττή συνάρτηση.
3. Το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
John William Strutt Rayleigh (1842-1909)

Άρτια επέκταση: Σειρές Fourier συνημιτόνων

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα $0 < x < L$. Ορίζουμε την **άρτια επέκταση της f** απαιτώντας ότι

$$f(-x) = f(x), \qquad -L < x < L.$$

Μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα της άρτιας επέκτασης αν κατοπτρίσουμε την καμπύλη $y = f(x)$ ως προς τον άξονα y. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο Σχήμα 8.26. Στην περίπτωση λοιπόν άρτιας επέκτασης, οι συντελεστές Fourier είναι

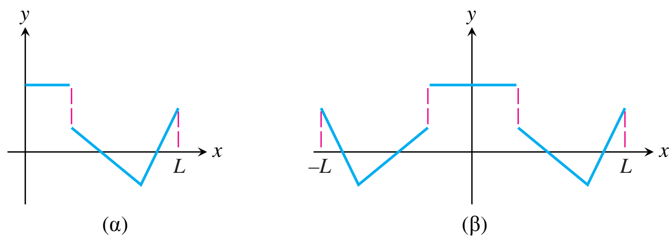
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0.$$

Η σειρά Fourier της f είναι τότε

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$



Σχημα 8.26 (α) Η αρχική τμηματικά συνεχής συνάρτηση f ορίζεται στο μη συμμετρικό διάστημα $0 < x < L$. (β) Η άρτια επέκταση της f στο διάστημα $-L < x < L$.

Επειδή οι συντελεστές Fourier b_n είναι όλοι μηδέν, δεν υπάρχουν καθόλου όροι ημιτόνων στο παραπάνω ανάπτυγμα σε σειρά Fourier, το οποίο κατά συνέπεια καλείται **σειρά Fourier συνημιτόνων** (ή **συνημιτονική σειρά Fourier**) της συνάρτησης f. Η σειρά αυτή θα συγκλίνει στην αρχική συνάρτηση f στο διάστημα $0 < x < L$, και στην περιοδική επέκταση της f στο $-L < x < 0$ (εξυπακούεται η τμηματική συνέχεια των f και f'). Συνοψίζουμε το αποτέλεσμα αυτό ως ακολούθως.

CD-ROM
Δικτυότοπος

Σειρές Fourier συνημιτόνων

Η σειρά Fourier μιας άρτιας συνάρτησης στο διάστημα $-L < x < L$ είναι η **σειρά συνημιτόνων** (ή **συνημιτονική σειρά**)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \tag{3}$$

όπου

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \tag{4}$$

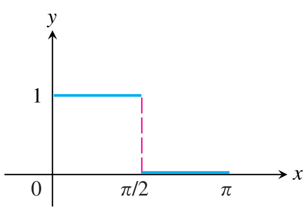
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{5}$$

Παράδειγμα 1 Εύρεση σειράς Fourier συνημιτόνων

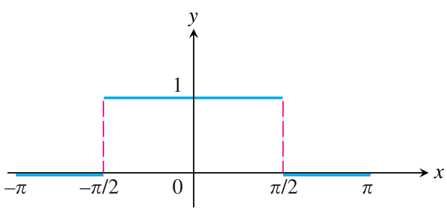
Να βρεθεί η σειρά Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

που παρατίθεται στο Σχήμα 8.27.



ΣΧΗΜΑ 8.27 Η συνάρτηση του Παραδείγματος 1.



ΣΧΗΜΑ 8.28 Η άρτια επέκταση της συνάρτησης του Παραδείγματος 1.

Λύση Προκειμένου να βρούμε τη σειρά Fourier συνημιτόνων, επιφέρουμε άρτια επέκταση της συνάρτησης στο $-\pi < x < \pi$, όπως δείχνει το Σχήμα 8.28. Οι συντελεστές Fourier είναι τότε

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad \text{Εξ. (4) για } L = \pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx \qquad f(x) = 0 \text{ για } \pi/2 < x < \pi$$

$$= \frac{2x}{\pi}\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi}\,dx \qquad \text{Εξ. (5) για } L = \pi$$

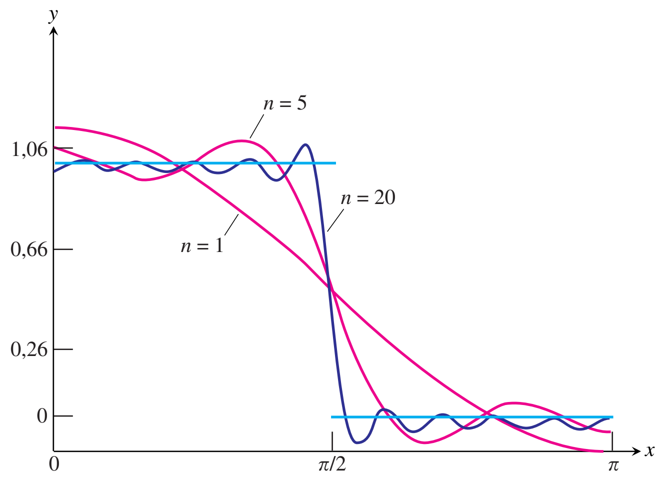
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Έχουμε λοιπόν τη σειρά Fourier συνημιτόνων

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nx.$$

Η συνημιτονική σειρά Fourier παίρνει ακριβώς τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ για $x \neq \pi/2$· στο σημείο $x = \pi/2$, η σειρά Fourier ισούται με $1/2$. Στο Σχήμα 8.29 παριστάνονται γραφικά οι συνημιτονικές προσεγγίσεις Fourier της $f(x)$ καθώς το πλήθος όρων n που μετέχουν στην εκάστοτε προσέγγιση μεταβάλλεται από 1 σε 5 και, τέλος, σε 20.



Σχημα 8.29 Προσεγγίσεις με σειρά Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης του Παραδείγματος 1 για n (πλήθος όρων) ίσο με 1, 5, και 20. Καθώς το n αυξάνεται, οι προσεγγίσεις Fourier τείνουν στις τιμές της $f(x)$. Στο σημείο ασυνέχειας $x = \pi/2$, όλες οι συνημιτονικές προσεγγίσεις Fourier διέρχονται από το μέσον της ασυνέχειας, παίρνοντας την τιμή $y = 0{,}5$.

Περιττή επέκταση: Σειρές Fourier ημιτόνων

Θεωρούμε και πάλι μια συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $0 < x < L$. Ορίζουμε την **περιττή επέκταση της f** απαιτώντας ότι

$$f(-x) = -f(x), \qquad -L < x < L.$$

Από γραφικής απόψεως, η περιττή επέκταση προκύπτει κατοπτρίζοντας την $y = f(x)$ ως προς την αρχή των αξόνων. Ένα παράδειγμα για μια τυχούσα συνάρτηση φαίνεται στο Σχήμα 8.30. Για την περιττή επέκταση της f, παίρνουμε τους συντελεστές Fourier

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

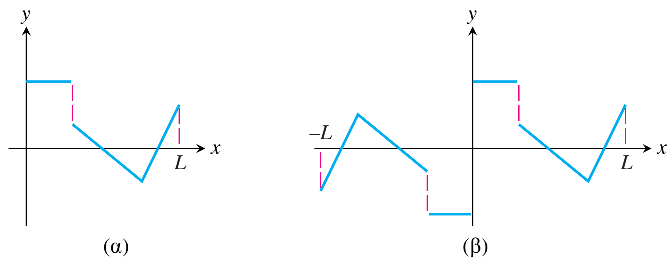
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\ \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0}_{\text{Περιττή}}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}}_{\text{Άρτια}}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Έτσι, η σειρά Fourier της f είναι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Εφόσον οι συντελεστές Fourier a_0 και a_n μηδενίζονται, δεν υπάρχουν όροι συνημιτόνων στη σειρά Fourier, η οποία επομένως καλείται **σειρά Fourier ημιτόνων** (ή **ημιτονική σειρά Fourier**) της συνάρτησης f. Η σειρά αυτή συγκλίνει στην αρχική συνάρτηση f στο διάστημα $0<x<L$, ενώ συγκλίνει στην *περιττή* επέκταση της f στο διάστημα $-L<x<0$ (δεδομένης της τμηματικής συνέχειας των f και f'). Συνοψίζουμε το αποτέλεσμα ως ακολούθως.



Σχημα 8.30 (α) Η αρχική τμηματικά συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη στο μη συμμετρικό διάστημα $0 < x < L$. (β) Η περιττή επέκταση της f στο διάστημα $-L < x < L$.

CD-ROM Δικτυότοπος

Σειρές Fourier ημιτόνων

Η σειρά Fourier μιας περιττής συνάρτησης στο διάστημα $-L < x < L$ είναι η **σειρά ημιτόνων (ή ημιτονική σειρά)**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{6}$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{7}$$

Παράδειγμα 2 Εύρεση σειράς Fourier ημιτόνων

Να βρεθεί η ημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

του Παραδείγματος 1.

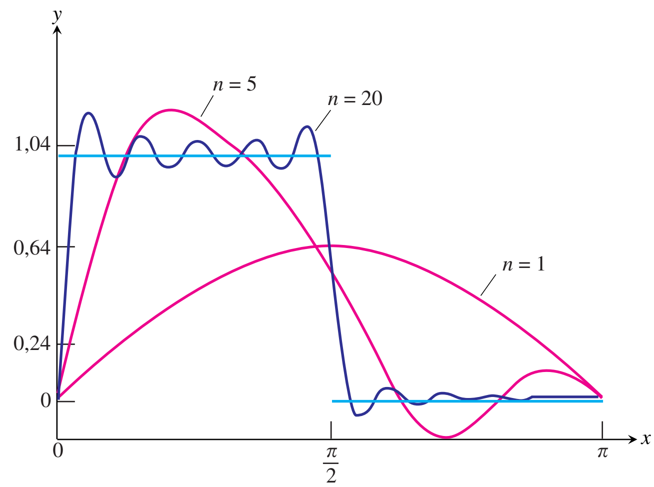
Λύση Επιλέγουμε την *περιττή* επέκταση της συνάρτησης $f(x)$. Οι συντελεστές Fourier είναι

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi}\, dx && \text{Εξ. (7) για } L = \pi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin nx\, dx && f(x) = 0 \text{ για } \pi/2 < x < \pi \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Η σειρά Fourier ημιτόνων, λοιπόν, είναι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \sin nx.$$

Στο Σχήμα 8.31 υπάρχει μια γραφική παράσταση των προσεγγίσεων της $f(x)$ με ημιτονική σειρά Fourier, για πλήθος όρων που μετέχουν στην εκάστοτε προσέγγιση ίσο με $n = 1, 5$, και 20.

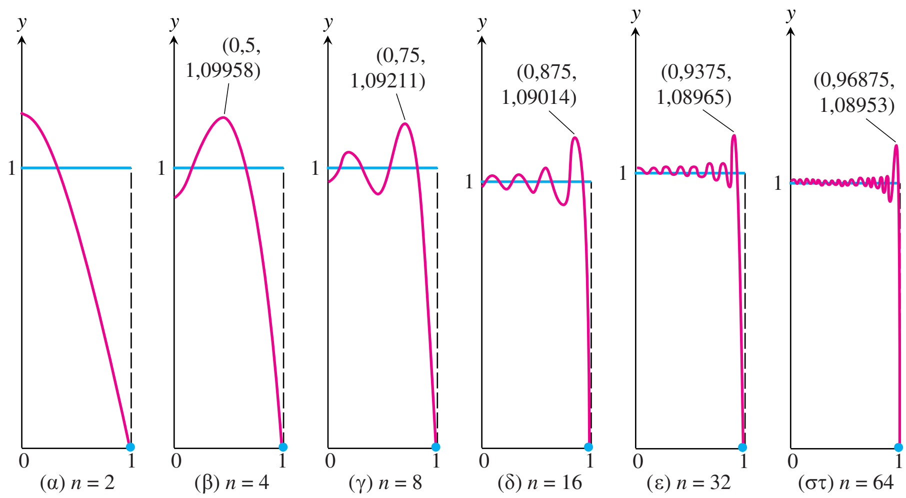


Σχημα 8.31 Προσεγγίσεις με σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης του Παραδείγματος 2, για n (πλήθος όρων) ίσο με 1, 5, και 20. Καθώς το n αυξάνεται, οι ημιτονικές προσεγγίσεις Fourier τείνουν στις τιμές της $f(x)$. Στο σημείο ασυνέχειας $x = \pi/2$, οι προσεγγίσεις Fourier συγκλίνουν στο μέσον της ασυνέχειας.

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Josiah Willard Gibbs
(1839-1903)

Φαινόμενο Gibbs

Στα Σχήματα 8.29 και 8.31, παρατηρούμε ότι η σειρά **υπερακοντίζει** τη συνάρτηση στο $x = \pi/2^-$, ενώ **υπερακοντίζεται** από αυτήν στο $x = \pi/2^+$. Τέτοια συμπεριφορά είναι χαρακτηριστική όταν αναπτύσσουμε μια συνάρτηση σε σειρά Fourier κοντά σε σημεία ασυνέχειας, ακόμη και όταν συμπεριλάβουμε μεγάλο αριθμό όρων της σειράς, και καλείται **φαινόμενο Gibbs,** προς τιμήν του Αμερικανού μαθηματικού φυσικού Josiah Willard Gibbs. Συνολικά, στο σημείο ασυνέχειας η σειρά «ξεφεύγει» από τη συνάρτηση κατά περίπου 18% της διαφοράς τιμών εκατέρωθεν της ασυνέχειας (Σ.τ.Μ. Δηλαδή η σειρά υπερακοντίζει τη συνάρτηση κατά 9% στο $\pi/2^-$ και υπερακοντίζεται από αυτήν πάλι κατά 9% στο $x = \pi/2^+$.). Το Σχήμα 8.32 δείχνει το φαινόμενο για τη συνάρτηση



Σχημα 8.32 Το φαινόμενο Gibbs για $n = 2, 4, 8, 16, 32$, και 64 όρους. Η κορυφή της καμπύλης μετατοπίζεται από το 0,5 στο 0,75, έπειτα στο 0,875, κ.ο.κ, πλησιάζοντας συνεχώς στο σημείο ασυνέχειας $x = 1$. Το μέγιστο της καμπύλης ισούται πάντα με 1,09 περίπου, δηλαδή με το 9% της απόστασης μεταξύ των $y = 0$ και $y = 1$ στο σημείο ασυνέχειας $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

και $n = 2, 4, 8, 16, 32$, και 64 όρους. Αν πάρουμε ακόμη περισσότερους όρους, τότε η κορυφή της προσεγγιστικής καμπύλης πλησιάζει μεν στο σημείο ασυνέχειας $x = 1$, αλλά διατηρεί το ύψος της, περίπου 1,09.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.10

Εύρεση συνημιτονικής σειράς Fourier

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 1-8 δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα $(0, L)$. Σχεδιάστε την f και την άρτια επέκτασή της στο $(-L, L)$. Κατόπιν βρείτε τη σειρά Fourier συνημιτόνων της f.

1. $f(x) = x, \quad 0 < x < \pi$

2. $f(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi$

3. $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1$

4. $f(x) = \cos x, \quad 0 < x < \pi$

5. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -x, & 1 < x < 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 0{,}5 \\ 1, & 0{,}5 < x < 1 \end{cases}$

7. $f(x) = |2x - 1|, \quad 0 < x < 1$

CD-ROM Δικτυότοπος

8. $f(x) = |2x - \pi|, \quad 0 < x < \pi$

Εύρεση ημιτονικής σειράς Fourier

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 9-16 δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα $(0, L)$. Σχεδιάστε την f και την περιττή επέκτασή της στο $(-L, L)$. Κατόπιν βρείτε τη σειρά Fourier ημιτόνων της f.

9. $f(x) = -x, \quad 0 < x < 1$

10. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < \pi$

11. $f(x) = \cos x, \quad 0 < x < \pi$

12. $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1$

13. $f(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi$

14. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$

16. $f(x) = |2x - \pi|, \quad 0 < x < \pi$

CD-ROM Δικτυότοπος

Θεωρία και παραδείγματα

17. *Χρήση σειράς για τον υπολογισμό του $\pi/4$*

(α) Να βρεθεί η ημιτονική σειρά Fourier της

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0 \text{ και } x = \pi. \end{cases}$$

(β) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα (α) για να δείξετε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

18. *Συνάρτηση με τριγωνικό γράφημα*

(α) Σχεδιάστε την «τριγωνική» συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ x - 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

(β) Βρείτε ένα ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της $f(x)$.

(γ) Βρείτε ένα ανάπτυγμα σε σειρά Fourier συνημιτόνων της $f(x)$.

19. *Υπολογισμός σειράς* Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 2 προκειμένου να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

20. *Σειρά Fourier ημιτόνων* Δοθείσας της συνάρτησης

$$f(x) = 2 - x, \qquad 0 < x < 2,$$

ορίστε μια συνάρτηση της οποίας η αναπαράσταση σε ημιτονική σειρά Fourier να συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε τιμή του x. (*Σημείωση*: Δεν υπάρχει μία μόνον απάντηση.)

Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Τι είναι μια άπειρη ακολουθία; Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει; Τι όταν αποκλίνει; Δώστε παραδείγματα.
2. Ποια θεωρήματα έχουμε στη διάθεσή μας για τον υπολογισμό ορίων ακολουθιών; Δώστε παραδείγματα.
3. Ποιο θεώρημα μας επιτρέπει ενίοτε να χρησιμοποιούμε τον κανόνα του l'Hôpital για να υπολογίζουμε το όριο ακολουθίας; Δώστε ένα παράδειγμα.
4. Ποια είναι τα έξι είδη ορίων ακολουθιών που πιθανόν να προκύψουν όταν μελετάμε τη σύγκλιση ακολουθιών και σειρών;
5. Τι είναι μια υποακολουθία; Ποια η σημασία της; Ποια χρησιμότητα έχουν οι υποακολουθίες; Δώστε παραδείγματα.
6. Τι είναι μια μη φθίνουσα ακολουθία; Τι μια μη αύξουσα ακολουθία; Τι μια μονότονη ακολουθία; Υπό ποιες συνθήκες έχουν όρια οι ακολουθίες αυτές; Δώστε παραδείγματα.
7. Ποια είναι η μέθοδος του Picard για την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$; Δώστε ένα παράδειγμα.
8. Τι είναι μια άπειρη σειρά; Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια τέτοια σειρά συγκλίνει; Ότι αποκλίνει; Δώστε παραδείγματα.
9. Τι είναι μια γεωμετρική σειρά; Πότε συγκλίνει μια τέτοια σειρά; Πότε αποκλίνει; Όταν συγκλίνει, τότε ποιο είναι το άθροισμά της; Δώστε παραδείγματα.
10. Ποιες συγκλίνουσες και ποιες αποκλίνουσες σειρές γνωρίζετε, πλην των γεωμετρικών σειρών;
11. Ποιο είναι το κριτήριο του n-οστού όρου σχετικά με την απόκλιση σειρών; Ποια η κεντρική ιδέα που κρύβεται πίσω από αυτό;
12. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα ή τη διαφορά συγκλινουσών σειρών όρο προς όρο; Τι για τα σταθερά πολλαπλάσια συγκλινουσών και αποκλινουσών σειρών;
13. Τι θα συμβεί αν προσθέσουμε πεπερασμένο πλήθος όρων σε μια συγκλίνουσα σειρά; Σε μια αποκλίνουσα σειρά; Τι θα συμβεί αν αφαιρέσουμε πεπερασμένο πλήθος όρων από μια συγκλίνουσα σειρά; Από μια αποκλίνουσα σειρά;
14. Υπό ποιες συνθήκες θα συγκλίνει μια άπειρη σειρά μη αρνητικών όρων; Υπό ποιες συνθήκες θα αποκλίνει; Γιατί έχουν ενδιαφέρον οι σειρές με μη αρνητικούς όρους;
15. Τι είναι το κριτήριο του ολοκληρώματος; Ποια η λογική που το διέπει; Δώστε ένα παράδειγμα της χρήσης του.
16. Πότε συγκλίνει μια p-σειρά; Πότε αποκλίνει; Πώς το ξέρουμε; Δώστε παραδείγματα συγκλινουσών και αποκλινουσών p-σειρών.
17. Ποιο είναι το κριτήριο άμεσης σύγκρισης και ποιο το κριτήριο οριακής σύγκρισης; Ποια η λογική που τα διέπει; Δώστε παραδείγματα της χρήσης τους.
18. Ποια είναι τα κριτήρια του λόγου και της ρίζας; Μας επιτρέπουν πάντοτε να αποφασίζουμε περί σύγκλισης ή απόκλισης; Δώστε παραδείγματα.
19. Τι είναι μια εναλλασσόμενη σειρά; Ποιο θεώρημα μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε τη σύγκλιση μιας τέτοιας σειράς;
20. Πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα όταν προσεγγίζουμε μια εναλλασσόμενη σειρά με κάποιο από τα μερικά της αθροίσματα; Ποια λογική διέπει την εκτίμηση αυτή;
21. Τι είναι η απόλυτη σύγκλιση; Τι η υπό συνθήκη σύγκλιση; Πώς συνδέονται αυτές μεταξύ τους;
22. Τι γνωρίζετε περί αναδιάταξης των όρων μιας απολύτως συγκλίνουσας σειράς; Το ίδιο ερώτημα για μια υπό συνθήκη συγκίνουσα σειρά. Δώστε παραδείγματα.
23. Τι είναι μια δυναμοσειρά; Πώς εξετάζουμε τη σύγκλισή της; Τι μπορεί να προκύψει στην περίπτωση αυτή;
24. Τι πρέπει να γνωρίζει κανείς σχετικά με
    (α) την παραγώγιση όρο προς όρο μιας δυναμοσειράς;
    (β) την ολοκλήρωση όρο προς όρο μιας δυναμοσειράς;
    (γ) τον πολλαπλασιασμό μιας δυναμοσειράς;
    Δώστε παραδείγματα.
25. Τι είναι η σειρά Taylor την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο $x = a$; Ποιες πληροφορίες σχετικά με την f χρειαζόμαστε για την κατασκευή τέτοιας σειράς; Δώστε ένα παράδειγμα.
26. Τι είναι η σειρά Maclaurin;
27. Συγκλίνει πάντοτε μια σειρά Taylor στη γεννήτρια συνάρτησή της; Εξηγήστε.
28. Τι είναι τα πολυώνυμα Taylor; Ποια η χρησιμότητά τους;
29. Τι είναι το θεώρημα Taylor; Τι μας λέει σχετικά με τα σφάλματα προσέγγισης συναρτήσεων με πολυώνυμα Taylor; Ειδικότερα, τι μας λέει το θεώρημα εκτίμησης υπολοίπου σχετικά με το σφάλμα γραμμικοποίησης; Σχετικά με το σφάλμα μιας δευτεροβάθμιας προσέγγισης;
30. Τι είναι η διωνυμική σειρά; Σε ποιο διάστημα συγκλίνει; Πώς χρησιμοποιείται;
31. Ποιες οι σειρές Maclaurin των $1/(1 - x)$, $1/(1 + x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$, και $\tan^{-1} x$;
32. Τι είναι η σειρά Fourier; Πώς υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο διάστημα $-L < x < L$; Υπό ποιες προϋποθέσεις συγκλίνει μια σειρά Fourier στη συνάρτηση που την παράγει; Τι συμβαίνει σε σημεία ασυνέχειας;
33. Τι είναι η περιοδική επέκταση σε όλον τον άξονα των πραγματικών αριθμών μιας συνάρτησης $f(x)$ που ορίζεται στο $-L < x < L$;
34. Τι είναι η άρτια επέκταση στο $-L < x < 0$ μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο $0 < x < L$; Τι είναι η σειρά Fourier συνημιτόνων; Πώς υπολογίζονται οι συντελεστές της;
35. Τι είναι η περιττή επέκταση στο $-L < x < 0$ μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο $0 < x < L$; Τι είναι η σειρά Fourier ημιτόνων; Πώς υπολογίζονται οι συντελεστές της;
36. Τι είναι το φαινόμενο Gibbs; Πώς επηρεάζεται όταν συμπεριλάβουμε όλο και περισσότερους όρους της σειράς Fourier;

Ασκήσεις κεφαλαίου

Συγκλίνουσες και αποκλίνουσες ακολουθίες

Ποιες από τις ακολουθίες των οποίων οι n-στοί όροι δίνονται στις Ασκήσεις 1-18 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Βρείτε το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας.

1. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. $a_n = \dfrac{1-2^n}{2^n}$

4. $a_n = 1 + (0{,}9)^n$

5. $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$

6. $a_n = \sin n\pi$

7. $a_n = \dfrac{\ln (n^2)}{n}$

8. $a_n = \dfrac{\ln (2n+1)}{n}$

9. $a_n = \dfrac{n + \ln n}{n}$

10. $a_n = \dfrac{\ln (2n^3+1)}{n}$

11. $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$

12. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

13. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$

14. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

15. $a_n = n(2^{1/n} - 1)$

16. $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

17. $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

18. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

Συγκλίνουσες σειρές

Βρείτε τα αθροίσματα των σειρών στις Ασκήσεις 19-24.

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n+1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

Συγκλίνουσες και αποκλίνουσες σειρές

Ποιες από τις σειρές των Ασκήσεων 25-40 συγκλίνουν απολύτως, ποιες υπό συνθήκη, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln (n+1)}$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

32. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln (\ln n)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{n^3+1}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{n^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

40. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

Δυναμοσειρές

Στις Ασκήσεις 41-50, (α) βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης κάθε σειράς. Έπειτα εντοπίστε τις τιμές x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει (β) απολύτως και (γ) υπό συνθήκη.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n3^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3x-1)^n}{n^2}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

47. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n-1}}{3^n}$

48. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{csch} n)\, x^n$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\coth n)\, x^n$

Σειρές Maclaurin

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 51-56 δίνεται η τιμή μιας σειράς Maclaurin της συνάρτησης $f(x)$ σε κάποιο σημείο. Ποια είναι η συνάρτηση και ποιο το σημείο; Με τι ισούται το άθροισμα της σειράς;

51. $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{4^n} + \cdots$

52. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{18} + \dfrac{8}{81} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{2^n}{n3^n} + \cdots$

53. $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

54. $1 - \dfrac{\pi^2}{9 \cdot 2!} + \dfrac{\pi^4}{81 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n}}{3^{2n}(2n)!} + \cdots$

55. $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(\ln 2)^n}{n!} + \cdots$

56.
$\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{9\sqrt{3}} + \dfrac{1}{45\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)(\sqrt{3})^{2n-1}} + \cdots$

Βρείτε σειρές Maclaurin για τις συναρτήσεις των Ασκήσεων 57-64.

57. $\dfrac{1}{1-2x}$

58. $\dfrac{1}{1+x^3}$

59. $\sin \pi x$

60. $\sin \dfrac{2x}{3}$

61. $\cos (x^{5/2})$

62. $\cos \sqrt{5x}$

63. $e^{(\pi x/2)}$

64. e^{-x^2}

Σειρές Taylor

Στις Ασκήσεις 65-68, βρείτε τους πρώτους τέσσερις μη μηδενικούς όρους της σειράς Taylor την οποία παράγει η f στο $x = a$.

65. $f(x) = \sqrt{3+x^2}$ στο $x = -1$

66. $f(x) = 1/(1 - x)$ στο $x = 2$

67. $f(x) = 1/(x + 1)$ στο $x = 3$

68. $f(x) = 1/x$ στο $x = a > 0$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Χρησιμοποιήστε δυναμοσειρές για να λύσετε τα προβλήματα αρχικών τιμών των Ασκήσεων 69-76.

69. $y' + y = 0, \quad y(0) = -1$

70. $y' - y = 0, \quad y(0) = -3$

71. $y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3$

72. $y' + y = 1, \quad y(0) = 0$

73. $y' - y = 3x, \quad y(0) = -1$

74. $y' + y = x, \quad y(0) = 0$

75. $y' - y = x, \quad y(0) = 1$

76. $y' - y = -x, \quad y(0) = 2$

Απροσδιόριστες μορφές

Στις Ασκήσεις 77-82:

(α) Υπολογίστε κάθε όριο με χρήση δυναμοσειρών.

T (β) Κατόπιν σχεδιάστε με υπολογιστή κάθε συνάρτηση για να υποστηρίξετε τον υπολογισμό σας.

77. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{7 \sin x}{e^{2x} - 1}$

78. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{e^{\theta} - e^{-\theta} - 2\theta}{\theta - \sin \theta}$

79. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2 - 2\cos t} - \frac{1}{t^2}\right)$

80. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(\sin h)/h - \cos h}{h^2}$

81. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos^2 z}{\ln(1 - z) + \sin z}$

82. $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\cos y - \cosh y}$

83. Αναπαραστήστε σε σειρά τη συνάρτηση $\sin 3x$ προκειμένου να βρείτε τις τιμές των r και s για τις οποίες ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{r}{x^2} + s\right) = 0.$$

84. (α) Δείξτε ότι η προσέγγιση $\csc x \approx 1/x + x/6$ στην Ενότητα 8.8, Παράδειγμα 6, οδηγεί στην προσέγγιση $\sin x \approx 6x/(6 + x^2)$.

T (β) *Μάθετε γράφοντας* Συγκρίνετε την ακρίβεια των προσεγγίσεων $\sin x \approx x$ και $\sin x \approx 6x/(6 + x^2)$ συγκρίνοντας τα γραφήματα των $f(x) = \sin x - x$ και $g(x) = \sin x - (6x/(6 + x^2))$. Περιγράψτε τι βλέπετε.

Σειρές Fourier

Στις Ασκήσεις 85-90, βρείτε τη σειρά Fourier της f στο δοθέν διάστημα.

85. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

86. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

87. $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$

88. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

89. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0 \\ 1 + x, & 0 < x < 2 \end{cases}$

90. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

Ημιτονικές και συνημιτονικές σειρές Fourier

Στις Ασκήσεις 91-96, βρείτε

(α) τη συνημιτονική σειρά Fourier

(β) την ημιτονική σειρά Fourier της f στο δοθέν διάστημα.

91. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$

92. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ x, & 1 < x < 2 \end{cases}$

93. $f(x) = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1$

94. $f(x) = \cos x, \quad 0 < x < \pi/2$

95. $f(x) = 2x + x^2, \quad 0 < x < 3$

96. $f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < 2$

Θεωρία και παραδείγματα

97. *Συγκλίνουσα σειρά*

(α) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n + 1}\right)$$

συγκλίνει.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Εκτιμήστε το μέγεθος του σφάλματος αν αθροίσουμε μέχρι 20 όρους της σειράς. Η προσεγγιστική τιμή που παίρνουμε είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την πραγματική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

98. (α) *Συγκλίνουσα σειρά* Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{2n + 1}\right)$$

συγκλίνει.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Εκτιμήστε το μέγεθος του σφάλματος αν αθροίσουμε μέχρι και τον όρο $-\tan(1/41)$ της σειράς. Η προσεγγιστική τιμή που παίρνουμε είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την πραγματική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

99. *Ακτίνα σύγκλισης* Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} x^n.$$

100. *Ακτίνα σύγκλισης* Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (5n - 1)} (x - 1)^n.$$

101. *n-οστό μερικό άθροισμα* Βρείτε μια κλειστή έκφραση για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - (1/n^2))$ και χρησιμοποιήστε τη για να προσδιορίσετε αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

102. *n-οστό μερικό άθροισμα* Υπολογίστε το $\sum_{k=2}^{\infty} (1/(k^2 - 1))$

βρίσκοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ του n-οστού μερικού αθροίσματος.

103. (α) *Διάστημα σύγκλισης* Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της σειράς

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{4}{720}x^6 + \cdots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \cdots.$$

(β) *Διαφορική εξίσωση* Δείξτε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη σειρά ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^a y + b$$

και βρείτε τις τιμές των σταθερών a και b.

104. (α) *Σειρά Maclaurin* Βρείτε τη σειρά Maclaurin της συνάρτησης $x^2/(1 + x)$.

(β) Συγκλίνει η σειρά στο $x = 1$; Εξηγήστε.

105. *Μάθετε γράφοντας* Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι συγκλίνουσες σειρές μη αρνητικών αριθμών, τότε τι συμπεραίνετε για την $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

106. *Μάθετε γράφοντας* Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι αποκλίνουσες σειρές μη αρνητικών αριθμών, τότε τι συμπεραίνετε για την $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

107. *Ακολουθία και σειρά* Δείξτε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$ συγκλίνουν ταυτόχρονα ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

108. *Σύγκλιση* Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/(1 + a_n))$ συγκλίνει εφόσον $a_n > 0$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

109. (α) *Απόκλιση* Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ θετικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

i. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

ii. η σειρά $a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} + \ldots$ αποκλίνει.

Δείξτε ότι η σειρά

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots$$

αποκλίνει.

(β) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμά σας στο (α) για να δείξετε ότι η σειρά

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

αποκλίνει.

110. *Εκτίμηση ολοκληρώματος* Έστω ότι θέλετε να βρείτε μια εύκολη και γρήγορη προσεγγιστική τιμή για το $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$. Υπάρχουν διάφοροι δυνατοί τρόποι για να το πράξετε.

(α) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του τραπεζίου με $n = 2$ για να εκτιμήσετε το $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$.

(β) Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους της σειράς Maclaurin του x^2e^x για να εξαγάγετε έτσι το τέταρτο πολυώνυμο Maclaurin $P(x)$ του x^2e^x. Έπειτα χρησιμοποιήστε το $\int_0^1 P(x)\, dx$ ως προσέγγιση του $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Η δεύτερη παράγωγος της $f(x) = x^2e^x$ είναι θετική για κάθε $x > 0$. Εξηγήστε γιατί αυτή η παρατήρηση συνεπάγεται ότι η εκτίμηση που κάνατε στο (α) είναι μεγαλύτερη της πραγματικής τιμής.

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Κάθε παράγωγος της $f(x) = x^2e^x$ είναι θετική για $x > 0$. Εξηγήστε γιατί αυτή η παρατήρηση συνεπάγεται ότι κάθε πολυωνυμική προσέγγιση Maclaurin της $f(x)$ για x στο διάστημα $[0, 1]$ θα δίνει τιμή μικρότερη της πραγματικής τιμής. (*Υπόδειξη*: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.)

(ε) Χρησιμοποιήστε παραγοντική ολοκλήρωση για να υπολογίσετε το $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$.

111. *Σειρά της* $\tan^{-1} x$

(α) Ολοκληρώστε κατά μέλη από $t = 0$ έως $t = x$ την εξίσωση

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

όπου ο τελευταίος προσθετέος είναι το υπόλοιπο μετά $(n + 1)$ όρους, και προέκυψε ως άθροισμα γεωμετρικής σειράς με αρχικό όρο $a = (-1)^{n+1}t^{2n+2}$ και λόγο $r = -t^2$.

(β) Δείξτε ότι ο όρος υπολοίπου του ερωτήματος (α) ισούται με

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

και βρείτε το $\lim_{n \to \infty} R_n(x)$ για $|x| \leq 1$.

(γ) Βάσει του αποτελέσματός σας στο (β), βρείτε μια δυναμοσειρά της συνάρτησης $\tan^{-1} x$.

(δ) Θέστε $x = 1$ στη σειρά της $\tan^{-1} x$ ώστε να εξαγάγετε τον **τύπο του Leibniz**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots.$$

112. *Υπολογισμός μη στοιχειωδών ολοκληρωμάτων* Όπως έχουμε δει, οι σειρές Maclaurin μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουμε μη στοιχειώδη ολοκληρώματα σε μορφή σειρών.

(α) Εκφράστε το $\int_0^x \sin t^2\, dt$ σε μορφή δυναμοσειράς.

(β) Σύμφωνα με το θεώρημα εκτίμησης εναλλασσόμενης σειράς, πόσους όρους της σειράς (α) χρειαζόμαστε για να εκτιμήσουμε το $\int_0^1 \sin x^2\, dx$ με σφάλμα μικρότερο του 0,001;

113. *Η μέθοδος του Picard για κλίσεις μεγαλύτερες του 1* Στο Παράδειγμα 9 της Ενότητας 8.2 είδαμε ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Picard για να βρούμε ένα σταθερό σημείο της $g(x) = 4x - 12$, αλλά μπορούμε να βρούμε ένα σταθερό σημείο της $g^{-1}(x) = (1/4)x + 3$ διότι η παράγωγος της g^{-1} είναι πάντα μικρότερη της μονάδας (κατ' απόλυτη τιμή)· για την ακρίβεια, ισούται με 1/4. Στο Παράδειγμα 7 της Ενότητας 8.2, βρήκαμε ότι το σταθερό σημείο της g^{-1} είναι το $x = 4$. Παρατηρήστε τώρα ότι το 4 είναι επίσης σταθερό σημείο της g, δεδομένου ότι

$$g(4) = 4(4) - 12 = 4.$$

Δηλαδή, βρίσκοντας το σταθερό σημείο της g^{-1}, βρήκαμε και της g.

Μια συνάρτηση έχει πάντοτε τα ίδια σταθερά σημεία με την αντίστροφή της. Τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ την οποία και τέμνουν στα ίδια σημεία.

Βλέπουμε λοιπόν τώρα ότι η μέθοδος του Picard έχει ευρεία εφαρμογή. Έστω ότι η g είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1), με συνεχή πρώτη παράγωγο μεγαλύτερη της μονάδας (κατ' απόλυτη τιμή) σε κλειστό διάστημα I, *στο εσωτερικό* του οποίου κείται ένα σταθερό σημείο τής g. Στην περίπτωση αυτή η παράγωγος της g^{-1}, όντας ίση με την αντίστροφη τής g', είναι μικρότερη του 1 στο I. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Picard στην g^{-1} στο I θα μας δώσει το σταθερό σημείο της g. Για να εξασκηθείτε στην ιδέα αυτή, βρείτε τα σταθερά σημεία των ακόλουθων συναρτήσεων.

(α) $g(x) = 2x + 3$

(β) $g(x) = 1 - 4x$

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

Σύγκλιση και απόκλιση

Ποιες από τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ τις οποίες ορίζουν οι τύποι των Ασκήσεων 1-4 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan^{-1} n)^2}{n^2+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n (n!)}{n^3}$

Ποιες από τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ που ορίζουν οι τύποι των Ασκήσεων 5-8 συγκλίνουν, και ποιες αποκλίνουν; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

5. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}\, a_n$ (*Υπόδειξη*: Γράψτε μερικούς όρους, δείτε ποιοι παράγοντες διαγράφονται, και κατόπιν γενικεύστε.)

6. $a_1 = a_2 = 7, \quad a_{n+1} = \dfrac{n}{(n-1)(n+1)}\, a_n$ αν $n \geq 2$

7. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ αν $n \geq 2$

8. $a_n = 1/3^n$ αν n περιττός, $\quad a_n = n/3^n$ αν n άρτιος

Επιλογή κέντρου της σειράς Taylor

Ο τύπος του Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

εκφράζει την τιμή της f στο x συναρτήσει των τιμών της f και των παραγώγων της στο $x = a$. Κατά την εκτέλεση λοιπόν αριθμητικών υπολογισμών, το a πρέπει να είναι σημείο όπου τόσο η f όσο και οι παράγωγοί της να μας είναι γνωστές. Πρέπει επίσης να βρίσκεται αρκετά κοντά στις τιμές της f που μας ενδιαφέρουν, ώστε η ποσότητα $(x-a)^{n+1}$ να είναι μικρή και να μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο του υπολοίπου.

Στις Ασκήσεις 9-14, ποια σειρά Taylor θα επιλέγατε για να αναπαραστήσετε τη συνάρτηση κοντά στη δοθείσα τιμή του x; (Ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες της μίας αποδεκτές απαντήσεις.) Για τη σειρά που επιλέξατε, γράψτε τους πρώτους τέσσερις μη μηδενικούς όρους.

9. $\cos x$ κοντά στο $x = 1$

10. $\sin x$ κοντά στο $x = 6{,}3$

11. e^x κοντά στο $x = 0{,}4$

12. $\ln x$ κοντά στο $x = 1{,}3$

13. $\cos x$ κοντά στο $x = 69$

14. $\tan^{-1} x$ κοντά στο $x = 2$

Θεωρία και παραδείγματα

15. *n-στή ρίζα του* $a^n + b^n$ Έστω a και b σταθερές με $0 < a < b$. Συγκλίνει η ακολουθία $\{(a^n + b^n)^{1/n}\}$; Αν ναι, σε ποιο όριο;

16. *Επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία* Να βρεθεί το άθροισμα της άπειρης σειράς

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \frac{3}{10^8} + \frac{7}{10^9} + \dots.$$

17. *Άθροιση ολοκληρωμάτων* Υπολογίστε το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

18. *Απόλυτη σύγκλιση* Να βρεθούν όλες οι τιμές x για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

συγκλίνει απολύτως.

19. *Σταθερά του Euler* Γραφικές παραστάσεις όπως αυτή στο Σχήμα 8.13, μας δείχνουν ότι καθώς το n αυξάνεται, ολοένα και μικραίνει η διαφορά μεταξύ του αθροίσματος

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

και του ολοκληρώματος

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Διερευνήστε την παραπάνω πρόταση, εκτελώντας τα ακόλουθα βήματα.

(α) Θέστε $f(x) = 1/x$ στο Σχήμα 8.13, και δείξτε ότι

$$\ln\,(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln n$$

δηλαδή ότι

$$0 < \ln\,(n+1) - \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \le 1.$$

Συνεπώς, η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

είναι άνω και κάτω φραγμένη.

(β) Δείξτε ότι

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln\,(n+1) - \ln n$$

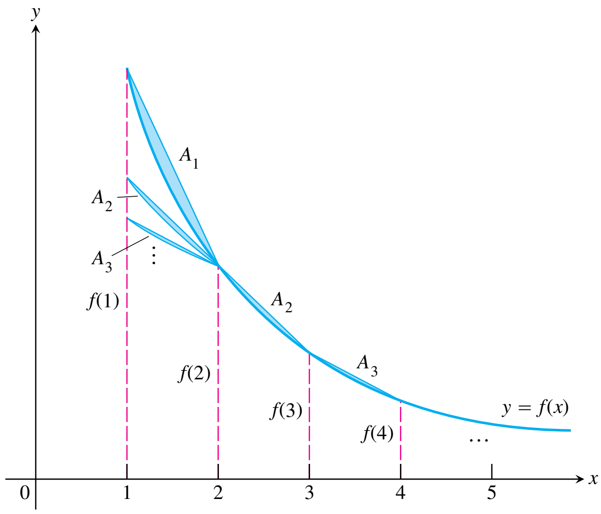
και χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αυτό για να δείξετε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ του ερωτήματος (α) είναι μη αύξουσα.

Εφόσον μια κάτω φραγμένη μη αύξουσα ακολουθία συγκλίνει, τα a_n όπως ορίζονται στο (α) θα συγκλίνουν:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma.$$

Ο αριθμός γ, που ισούται με 0,5772 . . . , καλείται *σταθερά του Euler*. Εν αντιθέσει με άλλους ειδικούς αριθμούς όπως το π και το e, δεν έχει βρεθεί κάποια απλούστερη μαθηματική έκφραση του γ.

20. *Γενίκευση της σταθεράς του Euler* Το ακόλουθο σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση μιας θετικής διπλά διαφορίσιμης φθίνουσας συνάρτησης f η οποία έχει θετική δεύτερη παράγωγο στο $(0, \infty)$. Για κάθε n, ο αριθμός A_n είναι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της καμπύλης και του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία $(n, f(n))$ και $(n+1,\ f(n+1))$.



(α) Χρησιμοποιώντας το σχήμα, δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < (1/2)(f(1) - f(2))$.

(β) Κατόπιν αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2}\,(f(1) + f(n)) - \int_1^n f(x)\,dx\right].$$

(γ) Δείξτε, τέλος, ότι υπάρχει και το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx\right].$$

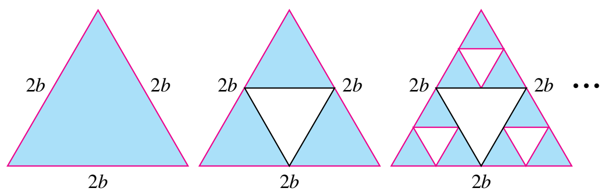
Για $f(x) = 1/x$, το όριο (γ) είναι η σταθερά του Euler. (*Πηγή*: "Convergence with Pictures" άρθρο του P. J. Rippon, *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 6 (1986), pp. 476–478.)

21. *«Αποκόπτοντας» τρίγωνα* Θεωρήστε το ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $2b$ του σχήματος. Από αυτό αποκόπτουμε ισόπλευρα τρίγωνα όπως δείχνει η ακολουθία των παρακάτω σχημάτων. Το άθροισμα των εμβαδών που αφαιρούνται έτσι από το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου σχηματίζει μια άπειρη σειρά.

(α) Να βρεθεί η σειρά αυτή.

(β) Να βρεθεί το άθροισμα της άπειρης σειράς και ακολούθως το ολικό εμβαδόν που αφαιρείται από αυτό του αρχικού τριγώνου.

(γ) Καθώς η διαδικασία αποκοπής συνεχίζεται επ' άπειρον, θα απομείνει τελικά κανένα σημείο του αρχικού τριγωνικού χωρίου; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι.

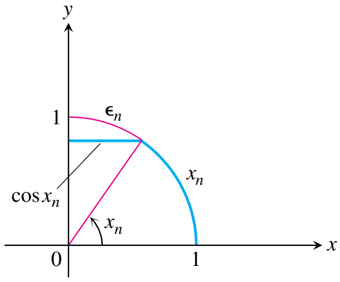


22. *Μια γρήγορη εκτίμηση του $\pi/2$* Όπως θα είδατε στην Άσκηση 10 της Ενότητας 8.2, η ακολουθία που παράγεται από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_n + \cos x_n$ με τιμή εκκίνησης $x_0 = 1$ συγκλίνει ταχύτατα στο $\pi/2$. Προκειμένου να εξηγήσετε την ταχύτητα της σύγκλισης, έστω $\epsilon_n = (\pi/2) - x_n$. (Δείτε το σχήμα.) Στην περίπτωση αυτή

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1} &= \frac{\pi}{2} - x_n - \cos x_n \\
&= \epsilon_n - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon_n\right) \\
&= \epsilon_n - \sin \epsilon_n \\
&= \frac{1}{3!}(\epsilon_n)^3 - \frac{1}{5!}(\epsilon_n)^5 + \cdots.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήστε την ισότητα αυτή για να δείξετε ότι

$$0 < \epsilon_{n+1} < \frac{1}{6}(\epsilon_n)^3.$$



23. *Υπολογιστική διερεύνηση*

(α) *Μάθετε γράφοντας* Φαίνεται να εξαρτάται από το a η τιμή του ορίου

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\cos\,(a/n)}{n}\right)^n, \qquad \text{όπου } a \text{ σταθερά;}$$

Αν ναι, ποια είναι η εξάρτηση αυτή;

(β) *Μάθετε γράφοντας* Φαίνεται να εξαρτάται από το b η τιμή του ορίου

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\cos\,(a/n)}{bn}\right)^n, \text{ όπου } a \text{ και } b \text{ σταθερές, και } b \neq 0;$$

Αν ναι, ποια είναι η εξάρτηση αυτή;

(γ) Εφαρμόζοντας μεθόδους του απειροστικού λογισμού, επαληθεύστε ό,τι βρήκατε στα (α) και (β).

24. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sin\,(a_n)}{2}\right)^n$$

θα συγκλίνει.

25. *Ακτίνα σύγκλισης* Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς b για την οποία η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n x^n}{\ln\, n}$$

ισούται με 5.

26. *Μάθετε γράφοντας: Υπερβατικές συναρτήσεις* Πώς γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $\sin x$, $\ln x$, και e^x δεν είναι πολυώνυμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

27. *Κριτήριο του Raabe (ή του Gauss)* Το ακόλουθο κριτήριο, που παραθέτουμε άνευ αποδείξεως, αποτελεί επέκταση του κριτηρίου του λόγου.

Κριτήριο του Raabe: Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ είναι σειρά θετικών αριθμών και υπάρχουν σταθερές C, K, και N τέτοιες ώστε

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{C}{n} + \frac{f(n)}{n^2},$$

όπου $|f(n)| < K$ για $n \geq N$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ συγκλίνει για $C > 1$ και αποκλίνει για $C \leq 1$.

Δείξτε ότι τα αποτελέσματα του κριτηρίου του Raabe συμφωνούν με όσα ήδη γνωρίζετε για τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$.

28. *Χρήση του κριτηρίου του Raabe* Έστω ότι οι όροι της $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ορίζονται αναδρομικά μέσω των τύπων

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{(2n-1)^2}{(2n)(2n+1)}u_n.$$

Εφαρμόστε το κριτήριο του Raabe για να προσδιορίσετε αν η σειρά συγκλίνει.

29. Υποθέστε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, ότι $a_n \neq 1$, και ότι $a_n > 0$ για κάθε n.

(α) *Ύψωση στο τετράγωνο* Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1-a_n)$; Εξηγήστε.

30. (*Συνέχεια της Άσκησης 29*) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και αν $1 > a_n > 0$ για κάθε n, δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\,(1-a_n)$ συγκλίνει. (*Υπόδειξη*: Δείξτε πρώτα ότι $|\ln\,(1-a_n)| \leq a_n/(1-a_n)$.)

31. *Θεώρημα της Nicole Oresme* Αποδείξτε το θεώρημα της Nicole Oresme, ότι

$$1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4.$$

(*Υπόδειξη*: παραγωγίστε κατά μέλη την εξίσωση $1/(1-x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.)

32. **(α)** *Παραγώγιση όρο προς όρο* Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{x^n} = \frac{2x^2}{(x-1)^3}$$

για $|x| > 1$, παραγωγίζοντας δύο φορές την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x},$$

πολλαπλασιάζοντας αυτό που βρήκατε με x, και αντικαθιστώντας, τέλος, το x με το $1/x$.

(β) Χρησιμοποιήστε το (α) για να βρείτε την πραγματική και μεγαλύτερη της μονάδας λύση της εξίσωσης

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{x^n}.$$

33. *Άθροιση εκθετικών δυνάμεων* Εφαρμόστε το κριτήριο του ολοκληρώματος για να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

συγκλίνει.

34. *Μάθετε γράφοντας* Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα σειρά θετικών αριθμών, τότε τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\,(1+a_n)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

35. *Ποιοτικός έλεγχος*

(α) Παραγωγίστε τη σειρά

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

ώστε να προκύψει η σειρά της συνάρτησης $1/(1-x)^2$.

(β) *Ζάρια* Ρίχνοντας δύο ζάρια μία φορά, η πιθανότητα να βγει άθροισμα 7 είναι $p = 1/6$. Ρίχνοντας τα ζάρια κατ' εξακολούθηση, η πιθανότητα εμφάνισης του 7 για πρώτη φορά στη n-στή ρίψη ισούται με $q^{n-1}p$, όπου $q = 1 - p = 5/6$. Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί το 7 είναι $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p$. Να βρεθεί το άθροισμα της σειράς.

(γ) Είστε μηχανικός και εφαρμόζετε στατιστικό έλεγχο στη διαδικασία βιομηχανικής παραγωγής της εταιρείας σας. Από τον ιμάντα συναρμολόγησης διαλέγετε τυχαία κάποια προϊόντα. Χαρακτηρίζετε κάθε προϊόν που εξετάζετε ως «καλό» ή «ελαττωματικό». Έστω p η πιθανότητα να είναι καλό ένα προϊόν, οπότε $q = 1 - p$ η πιθανότητα ελαττωματικού προϊόντος. Η πιθανότητα να βρείτε το πρώτο ελαττωματικό προϊόν κατά τη n-οστή διαλογή ισούται με $p^{n-1}q$. Ο μέσος αριθμός προϊόντων που ελέγχθησαν μέχρι και το πρώτο ελαττωματικό προϊόν, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$. Υπολογίστε το άθροισμα αυτό, υποθέτοντας ότι $0 < p < 1$.

36. *Αναμενόμενη τιμή* Έστω ότι μια τυχαία μεταβλητή X μπορεί να πάρει τις τιμές 1, 2, 3, . . . , με αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, p_2, p_3, \ldots$, όπου p_k είναι η πιθανότητα να ισούται το X με k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Έστω ακόμη ότι $p_k \geq 0$ και ότι $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Η **αναμενόμενη τιμή** του X, που συμβολίζεται ως $E(X)$, είναι $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$, δεδομένου ότι η σειρά συγκλίνει. Σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις, δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ και βρείτε την $E(X)$ αν υπάρχει τέτοια. (*Υπόδειξη*: Δείτε την Άσκηση 35.)

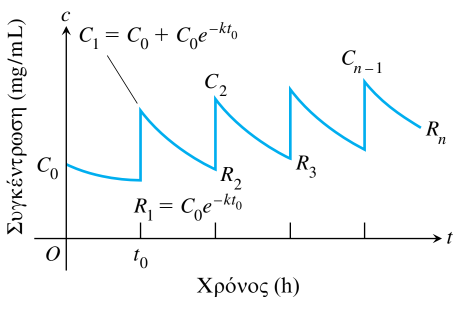
(α) $p_k = 2^{-k}$ **(β)** $p_k = \dfrac{5^{k-1}}{6^k}$

(γ) $p_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

37. *Αποτελεσματική δόση και ασφαλής δόση* Μια φαρμακευτική ουσία χορηγείται ενδοφλεβίως σε ασθενή. Η συγκέντρωση της ουσίας στο αίμα μειώνεται με τον χρόνο καθώς αυτή εξαλείφεται από το σώμα του ασθενούς. Έτσι οι δόσεις πρέπει να επαναλαμβάνονται ανά τακτά διαστήματα, ώστε ανά πάσα στιγμή η συγκέντρωση της ουσίας στο αίμα να διατηρείται πάνω από κάποιο ελάχιστο όριο. Σύμφωνα με ένα μοντέλο περιγραφής του αποτελέσματος των χορηγούμενων δόσεων, η συγκέντρωση της ουσίας στο αίμα μόλις πριν τη $(n + 1)$-στή δόση ισούται με

$$R_n = C_0e^{-kt_0} + C_0e^{-2kt_0} + \cdots + C_0e^{-nkt_0},$$

όπου C_0 = η μεταβολή της συγκέντρωσης ανά δόση (σε milligram ανά milliliter), k = η *σταθερά εξάλειψης* του φαρμάκου από το σώμα (ανά ώρα), και t_0 = ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο δόσεων (σε ώρες). Δείτε το σχήμα που ακολουθεί.



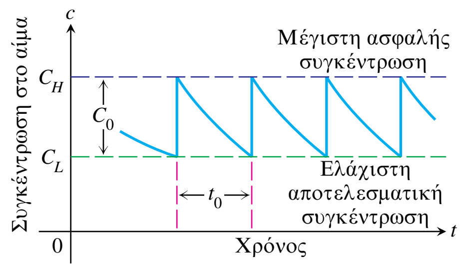
(α) Γράψτε το R_n σε κλειστή μορφή ως κλάσμα και βρείτε το $R = \lim_{n \to \infty} R_n$.

(β) Υπολογίστε τα R_1 και R_{10} για $C_0 = 1$ mg/mL, $k = 0{,}1\ \mathrm{h}^{-1}$, και $t_0 = 10$ h. Πόσο καλή εκτίμηση του R αποτελεί το R_{10};

(γ) Αν $k = 0{,}01\ \mathrm{h}^{-1}$ και $t_0 = 10$ h, βρείτε το ελάχιστο n έτσι ώστε $R_n > (1/2)R$.

(*Πηγή*: *Prescribing Safe and Effective Dosage* των B. Horelick και S. Koont (Lexington, MA: COMAP, Inc., 1979).)

38. *Χρόνος μεταξύ χορηγήσεων (συνέχεια της Άσκησης 37)* Έστω ότι κάποιο φάρμακο είναι αναποτελεσματικό σε συγκεντρώσεις χαμηλότερες της C_L, ενώ καθίσταται επιβλαβές σε συγκεντρώσεις μεγαλύτερες της C_H. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τιμές των C_0 και t_0 τέτοιες ώστε η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα να παραμένει ασφαλής (μικρότερη από C_H) αλλά και αποτελεσματική (μεγαλύτερη από C_L). Δείτε το σχήμα που ακολουθεί.



Ζητούμε δηλαδή τιμές των C_0 και t_0 τέτοιες ώστε

$$R = C_L \qquad \text{και} \qquad C_0 + R = C_H.$$

Δηλαδή, $C_0 = C_H - C_L$. Όταν αντικατασταθούν οι τιμές αυτές στην εξίσωση για το R στο ερώτημα (α) της Άσκησης 37, η εξίσωση παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{C_H}{C_L}.$$

Προκειμένου να καταστεί ταχύτερα αποτελεσματικό το φάρμακο, χορηγείται μια μεγάλη πρώτη δόση στον ασθενή, ώστε η συγκέντρωση του φαρμάκου να φθάσει τα C_H mg ανά mL. Κάθε επόμενη δόση χορηγείται ανά t_0 ώρες και αυξάνει κάθε φορά τη συγκέντρωση κατά $C_0 = C_H - C_L$ mg ανά mL.

(α) Επαληθεύστε την παραπάνω εξίσωση για το t_0.

(β) Αν $k = 0{,}05\ \mathrm{h}^{-1}$ και η μέγιστη ασφαλής συγκέντρωση ισούται με το γινόμενο του e επί την ελάχιστη αποτελεσματική συγκέντρωση, να βρεθεί το χρονικό διάστημα μεταξύ δόσεων που μας εγγυάται ότι η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς θα είναι πάντα ασφαλής και ταυτόχρονα αποτελεσματική.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Δεδομένου ότι $C_H = 2$ mg/mL, $C_L = 0{,}5$ mg/mL, και $k = 0{,}02\ \mathrm{h}^{-1}$, προτείνετε ένα χρονοδιάγραμμα χορηγήσεων του φαρμάκου.

(δ) Έστω ότι $k = 0{,}2\ \mathrm{h}^{-1}$ και ότι η ελάχιστη αποτελεσματική συγκέντρωση είναι 0,03 mg/mL. Στον ασθενή χορηγείται μία δόση του φαρμάκου που δημιουργεί συγκέντρωση 0,1 mg/mL. Για πόσο διάστημα περίπου θα δράσει το φάρμακο;

39. *Ένα άπειρο γινόμενο* Το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots$$

θα συγκλίνει, αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\,(1+a_n),$$

που προκύπτει παίρνοντας τον φυσικό λογάριθμο του γινομένου. Δείξτε ότι το γινόμενο συγκλίνει αν $a_n > -1$ για κάθε n και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει. (*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι

$$|\ln\,(1+a_n)|\le\frac{|a_n|}{1-|a_n|}\le 2\,|a_n|$$

για $|a_n|<1/2$.)

40. *Επεκτεταμένη λογαριθμική p-σειρά* Αν p είναι σταθερά, δείξτε ότι η σειρά

$$1+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln\,n\cdot[\ln\,(\ln\,n)]^p}$$

(α) συγκλίνει για $p>1$

(β) αποκλίνει για $p\le 1$.

Εν γένει, αν $f_1(x)=x$, $f_{n+1}(x)=\ln\,(f_n(x))$ και το n παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, . . . , βρίσκουμε ότι $f_2(x)=\ln x$, $f_3(x)=\ln\,(\ln x)$, κ.ο.κ. Αν $f_n(a)>1$, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\,(f_{n+1}(x))^p}$$

συγκλίνει για $p>1$ και αποκλίνει για $p\le 1$.