Α σ κ ή σ ε ι ς

Διανυσματική Ανάλυση
και
Σειρές Φουριέ

Π Α Τ Ρ Α   2 0 0 1

Οι σημειώσεις αυτές διδάσκονται στο μάθημα Πραγματική Ανάλυση IV του Μαθηματικού Τμήματος. Είναι ασκήσεις που συμπληρώνουν το βιβλίο "Μαθηματική Ανάλυση" του L. Brand.

Για την επιλογή και την λύση των ασκήσεων εργάσθηκαν ο κ. Ε. Βλάχος και ο κ Α. Στρέκλας που είχε και την ευθύνη για την επεξεργασία του κειμένου.

This is plain TEX 3.01

Κεφάλαιο 1

Διανυσματική Ανάλυση

Τα διανύσματα: Ενα διάνυσμα παριστάνεται γεωμετρικά από ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Ενα διάνυσμα περιγράφεται αλγεβρικά από τρεις αριθμούς που ονομάζονται συνιστώσες.

$$\vec{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$$

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες.

Η πρόσθεση των διανυσμάτων: Το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ είναι ένα τρίτο διάνυσμα που έχει συνιστώσες το άθροισμα των αντίστοιχων συνιστωσών των δύο διανυσμάτων. Δηλαδή

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$$

Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Το γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ με έναν πραγματικό αριθμό ξ είναι ένα διάνυσμα που συμβολίζεται με $\xi\vec{\alpha}$. Η πράξη ορίζεται ως εξής

$$\xi\vec{\alpha} = \xi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\xi\alpha_1, \xi\alpha_2, \xi\alpha_3)$$

Το σύνολο των διανυσμάτων στον τριδιάστατο χώρο με τις δύο παραπάνω πράξεις, αποτελεί διανυσματικό χώρο που ονομάζεται τριδιάστατος Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος επί του $\Re$ και συμβολίζεται με $\Re^3$.

Το εσωτερικό γινόμενο: Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. Είναι ένας πραγματικός αριθμός και ορίζεται από την σχέση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

Το μήκος ή η νορμ ενός διανύσματος ορίζεται από την σχέση $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$.

Με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να βρούμε την γωνία φ δύο διανυσμάτων. Η σχέση είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$$

Το εξωτερικό γινόμενο: Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$. Είναι ένα διάνυσμα και ορίζεται από τις σχέσεις

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = \varepsilon_{ijk}\alpha_i\beta_j\vec{e}_k$$

όπου $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα. ε_{ijk} είναι ο τανυστής του Λεβί-Τσιβιτά με τιμή $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1$ και μηδέν σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Το μέτρο του διανύσματος αυτού είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το ημίτονο της γωνίας τους. $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\eta\mu\,\varphi$.

Το τριπλό γινόμενο: Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ορίζεται ο αριθμός $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$. Ενα ακόμα τριπλό γινόμενο είναι το γινόμενο $\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$ που είναι ένα διάνυσμα.

Οι βάσεις: Τρία διανύσματα $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ που δεν είναι παράλληλα στο ίδιο επίπεδο $(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\times\vec{e}_3 \neq 0)$ αποτελούν μια βάση. Κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών. Η εκλογή της βάσης δεν είναι μοναδική. Συμβολίζουμε συχνά την μοναδιαία βάση του $\Re^3$ με $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Οι αμοιβαίες βάσεις: Δύο βάσεις $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ και $(\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3})$ λέγονται αμοιβαίες βάσεις όταν ικανοποιούν τις ακόλουθες εννέα σχέσεις

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}^{\,j} = \delta_{ij} \qquad\qquad i, j = 1, 2, 3$$

όπου $\delta_{ij} = 1$ για $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ για $i \neq j$.

Τα διανύσματα της μιας βάσης δίνονται σαν συναρτήσεις των διανυσμάτων της άλλης βάσης. Οι σχέσεις είναι

$$\vec{e}^{\,1} = \frac{1}{A}\vec{e}_2\times\vec{e}_3 \qquad\qquad \vec{e}^{\,2} = \frac{1}{A}\vec{e}_3\times\vec{e}_1 \qquad\qquad \vec{e}^{\,3} = \frac{1}{A}\vec{e}_1\times\vec{e}_2$$

όπου

$$A = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \frac{1}{\vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}^{\,2}\times\vec{e}^{\,3}}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1.1

Να αποδειχτεί η ταυτότητα $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}$. Με την βοήθεια της ταυτότητας αυτής να αποδειχτεί η σχέση $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$ και η ταυτότητα Τζακόμπι $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα a, b, c και d έχουν συνιστώσες τους αριθμούς a_j, b_j, c_j και d_j, $j = 1, 2, 3$ αντιστοίχως. Το πρώτο μέλος της ταυτότητας γίνεται

$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{b}\times\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \vec{b}\times(\ c_2d_3-c_3d_2,\ c_3d_1-c_1d_3, c_1d_2-c_2d_1\ ) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_2d_3-c_3d_2 & c_3d_1-c_1d_3 & c_1d_2-c_2d_1 \end{vmatrix} = [b_2(c_1d_2-c_2d_1) - b_3(c_3d_1-$$

$$-c_1d_3)]\vec{i} + [b_3(c_2d_3-c_3d_2) - b_1(c_1d_2-c_2d_1)]\vec{j} + [b_1(c_3d_1-c_1d_3) - b_2(c_2d_3-$$

$$-c_3d_2)]\vec{k} = [b_2d_2c_1 - b_2c_2d_1 - b_3c_3d_1 + b_3d_3c_1]\vec{i} + [b_3d_3c_2 - b_3c_3d_2 - b_1c_1d_2+$$

$$+b_1d_1c_2]\vec{j} + [b_1d_1c_3 - b_1c_1d_3 - b_2c_2d_3 + b_2d_2c_3]\vec{k}$$

Αναλύουμε τώρα το δεύτερο σκέλος της ισότητας. Εχουμε

$$(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d} = \vec{b}\cdot\vec{d}(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}) - \vec{b}\cdot\vec{c}(d_1\vec{i}+d_2\vec{j}+d_3\vec{k}) =$$

$$[(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)c_1 - (b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)d_1]\vec{i} + [(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)c_2-$$

$$(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)d_2]\vec{j} + [(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)c_3 - (b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)d_3]\vec{k} =$$

$$[b_1d_1c_1 + b_2d_2c_1 + b_3d_3c_1 - b_1c_1d_1 - b_2c_2d_1 - b_3c_3d_1]\vec{i} + [b_1d_1c_2 + b_2d_2c_2+$$

$$b_3d_3c_2 - b_1c_1d_2 - b_2c_2d_2 - b_3c_3d_2]\vec{j} + [b_1d_1c_3 + b_2d_2c_3 + b_3d_3c_3 - b_1c_1d_3 - b_2c_2d_3-$$

$$b_3c_3d_3]\vec{k} = [b_2d_2c_1 + b_3d_3c_1 - b_2c_2d_1 - b_3c_3d_1]\vec{i} + [b_1d_1c_2 + b_3d_3c_2 - b_1c_1d_2-$$

$$b_3c_3d_2]\vec{j} + [b_1d_1c_3 + b_2d_2c_3 - b_1c_1d_3 - b_2c_2d_3]\vec{k}$$

Τα δύο μέλη της ισότητας είναι ίσα και άρα η ταυτότητα ισχύει.

Για να αποδείξουμε τις άλλες σχέσεις θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη ταυτότητα της άσκησης που ήδη αποδείξαμε. Πολλαπλασιάζουμε την σχέση αυτή εσωτερικά με το διάνυσμα $\vec{a}$ και βρίσκουμε

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}$$

Από την οποία προφανώς έπεται η προς απόδειξη.

Για την απόδειξη της ταυτότητας του Τζακόμπι θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την πρώτη ταυτότητα της άσκησης. Εχουμε

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} \qquad \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

Αν προσθέσουμε τις τρεις αυτές σχέσεις κατά μέλη προκύπτει προφανώς η ταυτότητα Τζακόμπι.

Άσκηση 1.2

Να αποδειχτεί η ανισότητα των Κοσύ-Σβάρτς $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$.

Πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση: Υποθέτουμε ότι ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικό διότι άλλως η σχέση είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\vec{b} \neq \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{b}\| \neq 0$ και θεωρούμε την προφανή ανισότητα $\|\vec{a}+\lambda\vec{b}\| \geq 0$ που ισχύει για κάθε λ. Εχουμε

$$\|\vec{a}+\lambda\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\lambda\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \lambda\vec{b}\cdot\vec{a} + \lambda^2\vec{b}\cdot\vec{b} \geq 0$$

Αντικαθιστούμε το λ με τον αριθμό $-\vec{a}\cdot\vec{b}/\vec{b}\cdot\vec{b}$ και παίρνουμε

$$\|\vec{a}+\lambda\vec{b}\|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

Είναι προφανές ότι η ανισότητα ισχύει με το ίσον αν η αρχική ανισότητα ισχύει με το ίσον δηλαδή αν $\|\vec{a}+\lambda\vec{b}\| = 0$. Η σχέση όμως αυτή συνεπάγεται ότι

$$\vec{a}+\lambda\vec{b} = 0$$

που σημαίνει ότι τα διανύσματα είναι συγραμμικά. Αρα ή ανισότητα ισχύει με το ίσον όταν τα διανύσματα είναι συγραμμικά.

Άσκηση 1.3

Να βρεθεί η αμοιβαία βάση της βάσης $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (1,1,0)$, $\vec{e}_3 = (1,1,1)$. Να βρεθούν επίσης οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$ ως προς βάση αυτή.

Λύση: Βρίσκουμε πρώτα την σταθερά λ που είναι το τριπλό γινόμενο των τριών διανυσμάτων. Εχουμε

$$\lambda = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Βρίσκουμε τώρα τα τρία διανύσματα τις αμοιβαίας βάσης από τους γνωστούς τύπους

$$\vec{e}^1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + (1-1)\vec{k} = (1,-1,0)$$

$$\vec{e}^2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k} = (0,1,-1)$$

$$\vec{e}^3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} = (0,0,1)$$

Για να βρούμε τις συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u}$ ως προς την καινούργια βάση εργαζόμαστε ως εξής

$$\begin{aligned} \vec{u} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma) =& c_1(1,-1,0) + c_2(0,1,-1) + \\ & c_3(0,0,1) = (c_1, -c_1+c_2, -c_2+c_3) \end{aligned}$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι άγνωστες σταθερές που θα προσδιορίσουμε. Από την παραπάνω εξίσωση συνάγουμε το παρακάτω σύστημα

$$c_1 = \alpha+\beta+\gamma \qquad -c_1 + c_2 = \beta+\gamma \qquad -c_2 + c_3 = \gamma$$

που λύνεται εύκολα και βρίσκουμε τελικά

$$c_1 = \alpha + \beta + \gamma \qquad c_2 = \alpha + 2\beta + 2\gamma \qquad c_3 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$$

Άσκηση 1.4

Να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα $\vec{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$, $\vec{\mathrm{B}} = (\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3)$ και $\vec{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν ισχύει η εξής αναγκαία και ικανή συνθήκη

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 \\ \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 & \mathrm{B}_3 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη: Τα διάνυσμα $\vec{\mathrm{A}}$, $\vec{\mathrm{B}}$ και $\vec{\Gamma}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν η διανυσματική ισότητα $\alpha\vec{\mathrm{A}} + \beta\vec{\mathrm{B}} + \gamma\vec{\Gamma} = \vec{0}$ συνεπάγεται ότι οι αριθμοί α, β και γ είναι όλοι μηδέν δηλαδή

$$\alpha\vec{\mathrm{A}} + \beta\vec{\mathrm{B}} + \gamma\vec{\Gamma} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Η ισότητα όμως αυτή είναι ισοδύναμη με το παρακάτω σύστημα

$$\alpha\mathrm{A}_1 + \beta\mathrm{B}_1 + \gamma\Gamma_1 = 0 \qquad \alpha\mathrm{A}_2 + \beta\mathrm{B}_2 + \gamma\Gamma_2 = 0 \qquad \alpha\mathrm{A}_3 + \beta\mathrm{B}_3 + \gamma\Gamma_3 = 0$$

Το σύστημα είναι ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, τους αριθμούς α, β, γ.

Αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε οι αριθμοί α, β, γ είναι όλοι μηδέν. Το σύστημα έχει μία λύση την μηδενική και επομένως η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη από το μηδέν δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 \\ \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 & \mathrm{B}_3 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Αντίστροφα αν η παραπάνω ορίζουσα είναι διάφορη από το μηδέν τότε το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση και η λύση αυτή είναι προφανώς η μηδενική. Αρα τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άλυτες Ασκήσεις

Άσκηση 1.5 Να αποδειχτεί ότι το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ιδιότητες: α) $(\alpha\vec{x} + b\vec{y}) \cdot \vec{z} = a\vec{x} \cdot \vec{z} + b\vec{y} \cdot \vec{z}$, β) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$, γ) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ και δ) $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Να αποδειχτεί ότι αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα I τότε η σχέση $f \cdot g = \int_I f(x)g(x)dx$ ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις (εκτός απο την δ)) και έτσι ορίζει ένα εσωτερικού γινομένου στον διανυσματικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων.

Άσκηση 1.6 Να αποδειχτεί ότι το διάνυσμα $\vec{v} = \|a\|\vec{b} + \|b\|\vec{a}$ διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Άσκηση 1.7 Να αποδειχτεί ότι η απόσταση ενός σημείου (x_1, y_1) από την ευθεία $ax + by - c = 0$ είναι $|ax_1 + by_1 - c|/\sqrt{a^2 + b^2}$. Να αποδειχτεί ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο μη παράλληλες ευθείες l_1 και l_2 με διευθύνσεις $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ αντιστοίχως είναι $d = |(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2|/\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|$ όπου $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ είναι τα διανύσματα θέσεως δύο τυχόντων σημείων των δύο ευθειών.

Άσκηση 1.8 Να αποδειχτεί ότι τα δύο επίπεδα που ορίζονται από τις εξισώσεις $ax + by + cz + d_1 = 0$ και $ax + by + cz + d_2 = 0$ είναι παράλληλα και ότι η απόσταση μεταξύ τους είναι $|d_1 - d_2|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Άσκηση 1.9 Να αποδειχτεί ότι το εξωτερικό γινόμενο έχει την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση. Δηλαδή να αποδειχτεί ότι ισχύει η σχέση $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Άσκηση 1.10 Να αποδειχτούν οι παρακάτω σχέσεις $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|$.

Άσκηση 1.11 Να αποδειχτεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2|\alpha||\beta|\,\text{συν}\,\Gamma$, $\text{ημ}\,\text{A}/\alpha = \text{ημ}\,\text{B}/\beta = \text{ημ}\,\Gamma/\gamma$ όπου α, β, γ είναι οι πλευρές του τριγώνου και Α, Β, Γ οι γωνίες απέναντι από τις πλευρές α, β και γ αντιστοίχως.

Άσκηση 1.12 Να αποδειχτεί ότι σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ο νόμος των ημιτόνων γίνεται $\text{ημ}\,\alpha/\,\text{ημ}\,\text{A} = \text{ημ}\,\beta/\,\text{ημ}\,\text{B} = \text{ημ}\,\gamma/\,\text{ημ}\,\Gamma$ και ο νόμος των συνημιτόνων γίνεται $\text{συν}\,\alpha = \text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma + \text{ημ}\,\beta\,\text{ημ}\,\gamma\,\text{συν}\,\text{A}$ και $\text{συν}\,\text{A} = -\,\text{συν}\,\text{B}\,\text{συν}\,\Gamma + \text{ημ}\,\text{B}\,\text{ημ}\,\Gamma\,\text{συν}\,\alpha$.

Άσκηση 1.13 Να αποδειχτεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του. Αν P και Q είναι τα μέσα των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου τότε να αποδειχτεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του συν $4(PQ)^2$.

Άσκηση 1.14 Να αποδειχτεί ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται σε ένα σημείο Δ που δίνεται από το $3\vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, και ότι το Δ διαιρεί κάθε διάμεσο σε λόγο 2/1.

Άσκηση 1.15 Να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από την σχέση $S = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου $\tau = (\alpha+\beta+\gamma)/2$. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(1,-1,0)$, $\mathrm{B}(2,1,-1)$ και $\Gamma(-1,1,2)$. **Απάντηση:** $3\sqrt{2}$.

Άσκηση 1.16 Αν ΑΒΓ είναι ένα τρίγωνο και Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του τότε να αποδειχτεί ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}$.

Άσκηση 1.17 Μια ευθεία τέμνει τις πλευρές BC, CA και AB ενός τριγώνου ABC στα σημεία P, Q, και R. Τα τμήματα που το σημείο P διαιρεί το BC έχουν λόγο ίσο με γ/β και τα τμήματα που το σημείο Q διαιρεί το CA έχουν λόγο ίσο με α/γ. Να αποδειχτεί ότι το σημείο R διαιρεί το AB σε δύο τμήματα που έχουν λόγο ίσο με $-\beta/\alpha$ έτσι ώστε το γινόμενο των τριών λόγων είναι ίσο με -1. Να αποδειχτεί και το αντίστροφο δηλαδή αν το γινόμενο των λόγων είναι ίσο με -1 τότε τα σημεία P, Q και R ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Άσκηση 1.18 Δίνονται τρία διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$. Υπολογίστε το τριπλό βαθμωτό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$. Παρατηρώντας ότι $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, δώσατε μία γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματός σας για το τριπλό βαθμωτό γινόμενο. Υπολογίστε επίσης τα διανύσματα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ και $\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})$.

Άσκηση 1.19 Να δειχτεί ότι τα διανύσματα $\vec{a} = (2,3,-1)$, $\vec{b} = (1,1,5)$, $\vec{c} = (16,-11,-1)$ αποτελούν ένα ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα.

Άσκηση 1.20 Τρία σημεία A, B, C βρίσκονται στην ίδια ευθεία εάν και μόνο εάν υπάρχουν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ τέτοιοι ώστε

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Τέσσερα σημεία A, B, C, D βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο εάν και μόνο εάν υπάρχουν τέσσερις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ, δ τέτοιοι ώστε $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

Άσκηση 1.21 Μια γραμμική σχέση της μορφής $\lambda_1\vec{\alpha}_1 + \lambda_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_\nu\vec{\alpha}_\nu$ όπου $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_\nu$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_\nu$ είναι ανεξάρτητη της αρχής Ο εάν και μόνο εάν ισχύει η σχέση $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu = 0$.

Άσκηση 1.22 Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Δείξατε με δύο τρόπους ότι τα διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -6\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k}$ είναι παράλληλα.

Άσκηση 1.23 Αποδείξατε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ ικανοποιεί την ακόλουθη ταυτότητα $\vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + \vec{j} \times (\vec{a} \times \vec{j}) + \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = 2\vec{a}$.

Άσκηση 1.24 Αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μοναδιαία διανύσματα στο $XY-$επίπεδο που σχηματίζουν γωνίες α και β με τον X$-$άξονα δείξτε ότι $\vec{a} = \text{συν}\,\alpha\vec{i} + \text{ημ}\,\alpha\vec{j}$, $\vec{b} = \text{συν}\,\beta\vec{i} + \text{ημ}\,\beta\vec{j}$. Με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου $\vec{a} \cdot \vec{b}$ αποδείξτε ότι $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta + \text{ημ}\,\alpha\,\text{ημ}\,\beta$

Άσκηση 1.25 Δείξατε ότι το διάνυσμα $\vec{N} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ είναι κάθετο προς την ευθεία $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ του XY-επιπέδου. Δείξατε επίσης ότι το διάνυσμα $\vec{n} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ είναι κάθετο προς το επίπεδο $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

Άσκηση 1.26 Να αποδειχτούν οι ακόλουθες σχέσεις

$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})(\vec{\beta} \cdot \vec{\delta}) - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta})(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$$
$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) + (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\delta}) + (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\delta}) = 0$$
$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \times \vec{\delta})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \times \vec{\delta})\vec{\alpha}$$
$$(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \times \vec{\gamma})^2$$

Άσκηση 1.27 Εκφράσατε το γινόμενο $\vec{R} = (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D})$ στη μορφή $\alpha\vec{C} + \beta\vec{D}$ με α, β βαθμωτά μεγέθη.

Άσκηση 1.28 Το διάνυσμα $\vec{D}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τριών μη ομοεπιπέδων (και μη ορθογωνίων) διανυσμάτων δηλαδή $\vec{D} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$. Δείξτε ότι οι συντελεστές α, β, γ δίνονται από τον λόγο των τριπλών βαθμωτών γινομένων

$$\alpha = \frac{\vec{D} \cdot \vec{B} \times \vec{C}}{\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}} \qquad \beta = \frac{\vec{D} \cdot \vec{C} \times \vec{A}}{\vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A}} \qquad \gamma = \frac{\vec{D} \cdot \vec{A} \times \vec{B}}{\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}}$$

Άσκηση 1.29 Αν τα διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ είναι ομοεπίπεδα δείξτε ότι $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=0$.

Άσκηση 1.30 Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τρία σημεία με διανύσματα θέσης $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ και $\vec{r}_3$ είναι

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Άσκηση 1.31 Αν τα διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ δεν είναι ομοεπίπεδα δείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{D}$ ισχύει

$$\vec{D}=\frac{\vec{C}\cdot\vec{D}}{\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}\vec{A}\times\vec{B}+\frac{\vec{A}\cdot\vec{D}}{\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}\vec{B}\times\vec{C}+\frac{\vec{B}\cdot\vec{D}}{\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}}\vec{C}\times\vec{A}$$

Άσκηση 1.32 Να αποδειχτεί ότι αν $\vec{v}\neq 0$ και ισχύουν και οι δύο σχέσεις $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{w}$ και $\vec{v}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{w}$ τότε $\vec{u}=\vec{w}$. Αν όμως ισχύει μία από τις παραπάνω σχέσεις τότε $\vec{u}\neq\vec{w}$.

Άσκηση 1.33 Να αποδειχτεί ότι υπάρχει μόνο ένα σύνολο τριών διανυσμάτων αμοιβαίων σε ένα δοθέν σύνολο τριών μη ομοεπιπέδων διανυσμάτων. Να αποδειχτεί επίσης ότι το μόνο αυτο - αμοιβαίο σύνολο διανυσμάτων είναι η μοναδιαία βάση $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ του $\Re^3$.

Άσκηση 1.34 Να βρεθεί σύνολο διανυσμάτων αμοιβαίων προς τα διανύσματα $\vec{e}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e}_2=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{e}_3=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.
Απάντηση: $\vec{e}^{\,1}=(2\vec{i}+\vec{k})/3$, $\vec{e}^{\,2}=(-8\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k})/3$, $\vec{e}^{\,3}=(-7\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k})/3$

Άσκηση 1.35 Η δύναμη του Λόρεντς σε ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ δίνεται από την σχέση $\vec{F}=e(\vec{v}\times\vec{H})$. Από τρία πειράματα βρήκαμε τα αποτελέσματα $\vec{v}=\vec{i}$, $\vec{F}/e=2\vec{k}-4\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{j}$, $\vec{F}/e=4\vec{i}-\vec{k}$ και $\vec{v}=\vec{k}$, $\vec{F}/e=\vec{j}-2\vec{i}$. Από τα αποτελέσματα αυτά να βρεθεί το πεδίο $\vec{H}$.

Κεφάλαιο 2

Διανυσματικές συναρτήσεις

Οι διανυσματικές συναρτήσεις: Ενα διάνυσμα που οι συνιστώσες του είναι συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών είναι μία διανυσματική συνάρτηση.

Το όριο: Εστω μια συνάρτηση $\vec{F}(t)$ ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το t_0 χωρίς να είναι απαραίτητο να είναι ορισμένη στο ίδιο το t_0. Το διάνυσμα $\vec{L}$ είναι το όριο της $\vec{F}(t)$ καθώς το t τείνει στο t_0 και γράφουμε $\text{ορ}_{t\to t_0}\vec{F}(t) = \vec{L}$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός θετικός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε εάν $0 < |t - t_0| < \delta$ να συνεπάγεται ότι $\|\vec{F}(t) - \vec{L}\| < \varepsilon$ ή διαφορετικά

$$\underset{t\to t_0}{\text{ορ}}\,\vec{F}(t) = \vec{L} \quad\Longleftrightarrow\quad \underset{t\to t_0}{\text{ορ}}\,\|\vec{F}(t) - \vec{L}\| = 0$$

Η συνέχεια: Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(t)$ είναι συνεχής σ'ένα σημείο t_0 του πεδίου ορισμού της εάν

$$\underset{t\to t_0}{\text{ορ}}\,\vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

Μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(t)$ είναι συνεχής σ'ένα σημείο t_0 εάν και μόνον εάν κάθε συνιστώσα της είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Με όμοιο τρόπο ορίζονται το όριο και η συνέχεια και για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών.

Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα: Θεωρούμε μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(t)$ και t_0 σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν υπάρχει το παρακάτω όριο και είναι πεπερασμένο,

$$\vec{F}\,'(t_0) = \underset{t\to t_0}{\text{ορ}}\,\frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0}$$

τότε το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της $\vec{F}(t)$ στο σημείο t_0. Το ολοκλήρωμα μιας διανυσματικής συνάρτησης ορίζεται από το ολοκλήρωμα των συνιστωσών της.

Με όμοιο τρόπο ορίζονται οι παράγωγοι και το ολοκλήρωμα και για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών.

Η μερική παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z)$ ως προς x ορίζεται από το παρακάτω όριο

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = F_x = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\vec{F}(x + \Delta x, y, z) - \vec{F}(x, y, z)}{\Delta x}$$

Με όμοιο τρόπο ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές y και z.

Θεωρία καμπύλων

Καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων του χώρου που έχουν διανύσματα θέσης $\vec{r}(t)$ που δίνονται από την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad t \in I \subset \Re$$

Μία καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(t)$, λέγεται ομαλή εάν η $\vec{r}(t)$ έχει συνεχή παράγωγο επί του I και ισχύει $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \mathrm{I}$.

Το μήκος τόξου μιας καμπύλης: Ορίζουμε σαν μήκος τόξου της καμπύλης C από το σημείο α έως το τυχαίο σημείο t του Ι την συνάρτηση

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \|\vec{r}\,'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

Οι τύποι Φρενέ - Σερέ: Αν $\vec{\varepsilon}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα, η πρώτη κάθετος και η δεύτερη κάθετος (συνοδεύον τρίεδρο) μιας καμπύλης τότε τα διανύσματα αυτά ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\varepsilon} \qquad \frac{d\vec{\varepsilon}}{ds} = \kappa\vec{n} \qquad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n} \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\vec{\varepsilon} + \tau\vec{b}$$

Τα επίπεδα που ορίζονται από τα διανύσματα $(\vec{\varepsilon}, \vec{n})$,$(\vec{n}, \vec{b})$, και $(\vec{b}, \vec{\varepsilon})$ ονομάζονται εγγύτατο, κάθετο, και ευθειοποιούν αντιστοίχως και έχουν αντίστοιχες εξισώσεις $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{b} = 0$, $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{\varepsilon} = 0$ και $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$.

Το $\varkappa = \|d\vec{\varepsilon}/ds\|$ ονομάζεται καμπυλότητα και το $\tau = \|d\vec{b}/ds\|$ στρέψη της καμπύλης ενώ τα αντίστροφά τους $R = 1/\varkappa$ και $\sigma = 1/\tau$ ονομάζονται ακτίνα καμπυλότητας και ακτίνα στρέψης αντιστοίχως.

Θεωρία Επιφανειών

Τμήμα επιφάνειας είναι το σύνολο των σημείων του χώρου με διανύσματα θέσης $\vec{r}(u, v)$ που δίνονται από την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \qquad (u, v) \in G \subset \Re^2$$

Ενα τμήμα επιφάνειας ονομάζεται ομαλό εάν ισχύει $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ για κάθε $(u, v) \in G$. Οι δείκτες σημαίνουν μερική παραγώγιση ως προς u και v. Τα διανύσματα $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$ σ' ένα σημείο P της επιφάνειας S ορίζουν ένα επίπεδο που είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια στο σημείο αυτό.

Το εμβαδόν τμήματος μιας επιφάνειας: Το εμβαδόν ενός τμήματος μιας επιφάνειας δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$S = \iint |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \iint \sqrt{EG - F^2} dudv$$

όπου $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u,\ \ G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v,\ \ F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$.

Τα Διανυσματικά και τα βαθμωτά πεδία

Ορίζουμε σαν διανυσματικό πεδίο μια περιοχή του χώρου που σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένα διάνυσμα. Γράφουμε το διανυσματικό πεδίο σαν συνάρτηση του διανύσματος θέσης $\vec{F}(\vec{r})$. Αν το διανυσματικό πεδίο παριστάνει μία δύναμη τότε ονομάζεται δυναμικό πεδίο.

Μια περιοχή που σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί μια βαθμωτή συνάρτηση είναι ένα βαθμωτό πεδίο. Η γενική έκφραση ενός βαθμωτού πεδίου είναι $V = V(\vec{r})$.

Η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης: Αν $f(x, y, z)$ είναι μία βαθμωτή συνάρτηση η οποία έχει πρώτες μερικές παραγώγους τότε κλίση της f στο σημείο (x, y, z) ονομάζεται το διάνυσμα

$$grad f(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}$$

Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου: Ορίζουμε σαν απόκλιση του $\vec{F}=(M,N,P)$ και την συμβολίζουμε με $div\vec{F}$ ή $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ την βαθμωτή συνάρτηση

$$div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathrm{M},\mathrm{N},P)=\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$$

Εάν η απόκλιση ενός πεδίου είναι μηδέν δηλαδή ισχύει $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$ τότε το πεδίο ονομάζεται **σωληνοειδές**.

Ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου: Ορίζουμε σαν στροβιλισμό του $\vec{F}=(M,N,P)$ και τον συμβολίζουμε με $Curl\vec{F}$ ή $rot\vec{F}$ ή $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ την διανυσματική συνάρτηση

$$Curl\vec{F}=rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j}+$$
$$\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \mathrm{M} & \mathrm{N} & P\end{vmatrix}$$

Εάν ο στροβιλισμός ενός πεδίου είναι μηδέν δηλαδή ισχύει $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ τότε το πεδίο ονομάζεται **αστρόβιλο**.

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Αν οι καρτεσιανές ορθογώνιες συντεταγμένες (x,y,z) ενός σημείου P μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των (u_1,u_2,u_3) έτσι ώστε η αντιστοιχία να είναι αμφιμονοσήμαντη τότε οι μεταβλητές (u_1,u_2,u_3) ονομάζονται καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του σημείου P. Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$x_1=x_1(u_1,u_2,u_3)\qquad x_2=x_2(u_1,u_2,u_3)\qquad x_3=x_3(u_1,u_2,u_3)$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι θετική $J=\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}>0$.

Οι συναρτήσεις x_i είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους σε κάποια περιοχή.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2.1

Να βρεθούν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\varepsilon}(t)$, $\vec{n}(t)$, $\vec{b}(t)$, η καμπυλότητα, η ακτίνα καμπυλότητας, η στρέψη και η ακτίνα στρέψης της καμπύλης

$$\vec{r}(t) = (\alpha \,\text{συν}\, \omega t, \alpha \,\text{ημ}\, \omega t, \beta t)$$

Η καμπύλη κείται στην επιφάνεια του κυλίνδρου με βάση την περιφέρεια $x^2 + y^2 = \alpha^2$. Εχει αρχή το σημείο $\vec{r}(0) = (\alpha, 0, 0)$ και κατευθύνεται ελικοειδώς προς το $z \to \infty$.

Λύση: Το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}$ βρίσκεται αν παραγωγίσουμε το διάνυσμα θέσης. Έχουμε

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-\alpha\omega \,\text{ημ}\, \omega t, \alpha\omega \,\text{συν}\, \omega t, \beta)$$

το μέτρο του παραπάνω διανύσματος είναι ίσο με την παράγωγο του τόξου ως προς τον χρόνο, Δηλαδή έχουμε

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \left[(-\alpha\omega \,\text{ημ}\, \omega t)^2 + (\alpha\omega \,\text{συν}\, \omega t)^2 + \beta^2\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\alpha^2\omega^2 \,\text{ημ}^2\, \omega t + \alpha^2\omega^2 \,\text{συν}^2\, \omega t + \beta^2\right]^{1/2} = \left[\alpha^2\omega^2 + \beta^2\right]^{1/2}$$

Επομένως το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της καμπύλης είναι

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\omega^2 + \beta^2}}(-\alpha\omega \,\text{ημ}\, \omega t, \alpha\omega \,\text{συν}\, \omega t, \beta)$$

Το διάνυσμα αυτό είναι μοναδιαίο και η γωνία που σχηματίζει με τον Z άξονα είναι σταθερή. Βρίσκουμε το συνημίτονο της γωνίας αυτής

$$\text{συν}\, \varphi = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2\omega^2 + \beta^2}}$$

Παραγωγίζουμε ακολούθως το διάνυσμα $\vec{\varepsilon}$ ως προς s

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{ds} = \frac{d\vec{\varepsilon}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\omega^2+\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2\omega^2+\beta^2}}\frac{d}{dt}(-\alpha\omega\,\eta\mu\,\omega t, \alpha\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t, \beta) =$$

$$\frac{1}{\alpha^2\omega^2+\beta^2}(-\alpha\omega^2\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t, -\alpha\omega^2\,\eta\mu\,\omega t, 0)$$

Η καμπυλότητα είναι το μέτρο του παραπάνω διανύσματος. Έχουμε

$$\varkappa = \left\|\frac{d\vec{\varepsilon}}{ds}\right\| = \frac{1}{\alpha^2\omega^2+\beta^2}\left[\alpha^2\omega^4\,\sigma\upsilon\nu^2\,\omega t + \alpha^2\omega^4\,\eta\mu^2\,\omega t\right]^{1/2} = \frac{\alpha\omega^2}{\alpha^2\omega^2+\beta^2}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας είναι το αντίστροφο της καμπυλότητας.

$$\rho = \frac{1}{\varkappa} = \frac{\alpha^2\omega^2+\beta^2}{\alpha\omega^2} = \alpha + \frac{\beta^2}{\alpha\omega^2}$$

Βρίσκουμε ακολούθως την πρώτη κάθετο της καμπύλης

$$\begin{aligned}\vec{n} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\vec{\varepsilon}}{ds} &= \frac{\alpha^2\omega^2+\beta^2}{\alpha\omega^2}\frac{1}{\alpha^2\omega^2+\beta^2}(-\alpha\omega^2\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t, -\alpha\omega^2\,\eta\mu\,\omega t, 0)\\ &= -(\sigma\upsilon\nu\,\omega t, \eta\mu\,\omega t, 0)\end{aligned}$$

Η πρώτη κάθετος της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο της είναι ένα διάνυσμα κάθετο στον άξονα Z.

Η δεύτερη κάθετος είναι το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\varepsilon}$ και $\vec{n}$.

$$\vec{b} = \vec{\varepsilon}\times\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\omega^2+\beta^2}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\alpha\omega\,\eta\mu\,\omega t & \alpha\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t & \beta\\ -\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t & -\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t & 0\end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2\omega^2+\beta^2}}(\beta\,\eta\mu\,\omega t, -\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t, \alpha\omega)$$

Η στρέψη της καμπύλης είναι το μέτρο της παραγώγου του διανύσματος $\vec{b}$ ως προς s. Έχουμε

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d\vec{b}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\omega^2+\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2\omega^2+\beta^2}}\frac{d}{dt}(\beta\,\eta\mu\,\omega t, -\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t, \alpha\omega) =$$

$$\frac{1}{\alpha^2\omega^2+\beta^2}(\beta\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t, \beta\omega\,\eta\mu\,\omega t, 0)$$

και επομένως η στρέψη και η ακτίνα στρέψης είναι αντιστοίχως

$$\sigma = \left\|\frac{d\vec{b}}{ds}\right\| = \frac{\beta\omega}{\alpha^2\omega^2 + \beta^2} \qquad\qquad \tau = \frac{1}{\sigma} = \frac{\alpha^2\omega^2 + \beta^2}{\beta^2\omega^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{1}{\omega^2}$$

Παρατηρούμε ότι η ακτίνα καμπυλότητας και η στρέψη ικανοποιούν την εξίσωση $\beta\kappa - \alpha\omega\sigma = 0$.

Άσκηση 2.2

Να αποδειχτεί ότι αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ είναι κάθετη στην παράγωγό της τότε έχει σταθερό μέτρο και αντιστρόφως. Επίσης να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση εάν και μόνο εάν είναι παράλληλη προς την παράγωγό της.

Λύση: Υποθέτουμε ότι η διανυσματική συνάρτηση έχει σταθερό μέτρο

$$\|\vec{r}(t)\| = r(t) = \text{σταθερό}$$

Παραγωγίζουμε το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος και έχουμε

$$\frac{d}{dt}\|\vec{r}\|^2 = \frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = 2\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\vec{r} = 0$$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ είναι κάθετο στην παράγωγό του.

Αντιστρόφως αν το διάνυσμα είναι κάθετο στην παραγωγό του τότε ισχύουν οι παραπάνω ισότητες και επομένως

$$\frac{d}{dt}\|\vec{r}\|^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{r}\|^2 = C \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{r}\| = \text{σταθερό}$$

Για το δεύτερο σκέλος της άσκησης υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση. Το διάνυσμα $\vec{r}(t)/r(t)$ είναι ανάλογο του $\vec{r}(t)$ άρα έχει και αυτό σταθερή διεύθυνση. Επί πλέον έχει μέτρο ίσο με την μονάδα. Αρα είναι σταθερό και επομένως η παράγωγός του είναι μηδέν. Εχουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\vec{r} = \frac{1}{r^2}\left(r\frac{d}{dt}\vec{r} - \vec{r}\frac{d}{dt}r\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad r\frac{d}{dt}\vec{r} - \vec{r}\frac{d}{dt}r = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία εξίσωση εξωτερικά με το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ και παίρνουμε

$$\vec{r}\times\left(r\frac{d}{dt}\vec{r}-\vec{r}\frac{d}{dt}r\right)=r\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}-\vec{r}\times\vec{r}\frac{d}{dt}r=r\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}=0$$

Αρα το $\vec{r}(t)$ είναι παράλληλο στην παράγωγό του.

Για το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}=0$$

Το διάνυσμα $\vec{r}(t)/r(t)$ έχει σταθερό μέτρο ίσο με την μονάδα αν αποδείξουμε ότι είναι σταθερό τότε έχει και σταθερή διεύθυνση και επομένως και το $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση.

Παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\vec{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\vec{r}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{1}{r^3}\left(r^2\frac{d}{dt}\vec{r}-r\frac{dr}{dt}\vec{r}\right) \tag{1}$$

Ομως ισχύει προφανώς η σχέση $r^2=\vec{r}\cdot\vec{r}$ την οποία παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\frac{d}{dt}r^2=\frac{d}{dt}\vec{r}\cdot\vec{r} \quad\Longrightarrow\quad 2r\frac{d}{dt}r=2\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}$$

Αντικαθιστούμε την σχέση αυτή στην (1) και έχουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\vec{r}=\frac{1}{r^3}\left((\vec{r}\cdot\vec{r})\frac{d}{dt}\vec{r}-\left(\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}\right)\vec{r}\right)=\frac{1}{r^3}\left(\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}\right)\times\vec{r}=0$$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση.

Παρατήρηση: Αν θεωρήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου σε μια περιφέρεια με ακτίνα r σταθερού μέτρου τότε η άσκηση μας λέει ότι η ταχύτητα είναι πάντα κάθετη στο διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου.

Άσκηση 2.3

Να αποδειχτεί ότι κάθε σωληνοειδές διάνυσμα $\vec{f}$ μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$\vec{f}=\vec{\nabla}\times\vec{g}$$

Στη φυσική και ιδιαίτερα στον ηλεκτρομαγνητισμό εμφανίζονται εξισώσεις τέτοιου είδους και το διάνυσμα $\vec{g}$ ονομάζεται διανυσματικό δυναμικό. Το διάνυσμα $\vec{f}$ είναι προφανώς ένα σωληνοειδές διάνυσμα.

Λύση: Συμβολίζουμε με f_i και με g_i $\; i = 1, 2, 3$ τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{f}$ και $\vec{g}$ αντιστοίχως. Η προς απόδειξη σχέση γράφεται αναλυτικά

$$\frac{\partial}{\partial y} g_3 - \frac{\partial}{\partial z} g_2 = f_1 \qquad \frac{\partial}{\partial z} g_1 - \frac{\partial}{\partial x} g_3 = f_2 \qquad \frac{\partial}{\partial x} g_2 - \frac{\partial}{\partial y} g_1 = f_3$$

Δηλαδή το πρόβλημα είναι να λυθεί το παραπάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

Ζητάμε στην αρχή μια μερική λύση $g_0 = (A, B, 0)$. Η λύση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) = \vec{\nabla} \times \vec{g}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A & B & 0 \end{vmatrix}$$

Αναλύουμε την παραπάνω εξίσωση και παίρνουμε τις εξισώσεις

$$-\frac{\partial}{\partial z} B = f_1(x, y, z) \qquad \frac{\partial}{\partial z} A = f_2(x, y, z) \qquad \frac{\partial}{\partial x} B - \frac{\partial}{\partial y} A = f_3(x, y, z)$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε αμέσως τις δύο πρώτες εξισώσεις. Το αποτέλεσμα είναι

$$A = \int_{z_0}^{z} f_2(x, y, t) dt + \alpha(x, y) \qquad B = -\int_{z_0}^{z} f_1(x, y, t) dt + \beta(x, y)$$

όπου α και β είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των μεταβλητών x και y.

Δεδομένου ότι ζητάμε μια μερική λύση και έχουμε μία ακόμα εξίσωση μπορούμε να μηδενίσουμε μια από τις δύο αυτές αυθαίρετες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\alpha(x, y) = 0$ και αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις A και B στην τρίτη εξίσωση του διαφορικού συστήματος. Βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_{z_0}^{z} f_1(x, y, t) dt + \beta(x, y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{z_0}^{z} f_2(x, y, t) dt\right) =$$

$$= -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}f_1(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial y}f_2(x,y,t)\right)dt+\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)=f_3(x,y,z)$$

Το διάνυσμα $\vec{f}$ όμως είναι σωληνοειδές δηλαδή $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=0$ και άρα ικανοποιείται η σχέση

$$\frac{\partial}{\partial x}f_1(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial y}f_2(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial t}f_3(x,y,t)=0$$

Επομένως η εξίσωση γράφεται

$$\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial}{\partial t}f_3(x,y,t)\right)dt+\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)=f(x,y,z)\quad\Longrightarrow f_3(x,y,z)-$$

$$f_3(x,y,z_0)+\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)=f_3(x,y,z)\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)=f_3(x,y,z_0)$$

Από την σχέση αυτή βρίσκουμε την άγνωστη συνάρτηση $\beta(x,y)$ με μία ολοκλήρωση

$$\beta(x,y)=\int f_3(x,y,z_0)dx$$

Αρα τελικά οι συνιστώσες A και B του διανύσματος $\vec{g}_0$ είναι

$$A=\int_{z_0}^{z}f_2(x,y,t)dt\qquad\qquad B=-\int_{z_0}^{z}f_1(x,y,t)dt+\int f_3(x,y,z_0)dx$$

Θα βρούμε τώρα την γενική λύση του προβλήματος. Αν $\vec{g}$ είναι μια άλλη λύση της εξίσωσης $\vec{f}=\vec{\nabla}\times\vec{g}$ τότε προφανώς πρέπει

$$\vec{\nabla}\times\vec{g}-\vec{\nabla}\times\vec{g}_0=\vec{\nabla}\times(\vec{g}-\vec{g}_0)=\vec{0}$$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{g}-\vec{g}_0$ είναι αστρόβιλο και άρα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(\vec{r})$ τέτοια ώστε $\vec{g}-\vec{g}_0=\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$. Αρα έχουμε

$$\vec{g}=\vec{g}_0+\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

όπου $\varphi(\vec{r})$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση που φυσικά πρέπει να έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Η συνάρτηση $\vec{g}$ είναι τελικά η γενική λύση του προβλήματος.

Άσκηση 2.4

Αν το διάνυσμα $\vec{f}$ έχει συνιστώσες τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, που έχουν συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους, να αποδειχτεί η ταυτότητα

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \vec{\nabla}^2 \vec{f}$$

Λύση: Οι συναρτήσεις Α, Β, Γ, έχουν συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους, αυτό σημαίνει ότι η σειρά των παραγωγίσεων δεν έχει σημασία. Δηλαδή οι παράγωγοι για παράδειγμα A_{xy} και A_{yx} είναι ίσες.

Βρίσκουμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης. Έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix} = (\Gamma_y - \mathrm{B}_z,\ \mathrm{A}_z - \Gamma_x,\ \mathrm{B}_x - \mathrm{A}_y)$$

και ο στροβιλισμός του παραπάνω διανύσματος είναι

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \Gamma_y - \mathrm{B}_z & \mathrm{A}_z - \Gamma_x & \mathrm{B}_x - \mathrm{A}_y \end{vmatrix} =$$

$$(\mathrm{B}_{xy} - \mathrm{A}_{yy} - \mathrm{A}_{zz} + \Gamma_{xz},\ \Gamma_{yz} - \mathrm{B}_{zz} - \mathrm{B}_{xx} + \mathrm{A}_{xy},\ \mathrm{A}_{zx} - \Gamma_{xx} - \Gamma_{yy} + \mathrm{B}_{zy})$$

Θα αναλύσουμε τώρα το δεύτερο μέλος της ταυτότητας. Έχουμε για τον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους της ταυτότητας

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \vec{\nabla}\,(\mathrm{A}_x + \mathrm{B}_y + \Gamma_z) = \\ (\mathrm{A}_{xx} + \mathrm{B}_{xy} + \Gamma_{xz}, \mathrm{A}_{xy} + \mathrm{B}_{yy} + \Gamma_{yz}, \mathrm{A}_{xz} + \mathrm{B}_{yz} + \Gamma_{zz}) \end{aligned}$$

Ενώ ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους της ταυτότητας είναι

$$\vec{\nabla}^2 \vec{f} = (A_{xx} + A_{yy} + A_{zz},\ \mathrm{B}_{xx} + \mathrm{B}_{yy} + \mathrm{B}_{zz},\ \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \Gamma_{zz})$$

Τελικά το δεύτερο μέλος της ταυτότητας γίνεται

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \vec{\nabla}^2 \vec{f} =& (-\mathrm{A}_{yy} - \mathrm{A}_{zz} + \mathrm{B}_{xy} + \Gamma_{xz}, \\ & \mathrm{A}_{xy} - \mathrm{B}_{xx} - \mathrm{B}_{zz} + \Gamma_{yz}, \mathrm{A}_{xz} + \mathrm{B}_{yz} - \Gamma_{xx} - \Gamma_{yy}) \end{aligned}$$

Επομένως τα δύο μέλη τις ταυτότητας είναι ίσα και άρα η ταυτότητα ισχύει.

Άσκηση 2.5

Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{f} = (x^2+y^2+z^2)^\nu (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = r^{2\nu}\vec{r}$$

Να βρεθεί επίσης βαθμωτή συνάρτηση $V(\vec{r})$ αν υπάρχει τέτοια ώστε $\vec{f} = \vec{\nabla}V$

Λύση: Βρίσκουμε πρώτα την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου. Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu + x\nu\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1}2x =$$

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu + 2\nu x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1}$$

Όμοια βρίσκουμε και τις άλλες παραγώγους

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu + 2\nu y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu + 2\nu z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1}$$

Προσθέτουμε τώρα τις τρεις παραπάνω εξισώσεις και βρίσκουμε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu + 2\nu\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1} =$$

$$(2\nu+3)\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu = (2\nu+3)r^{2\nu}$$

Προφανώς η απόκλιση είναι μηδέν όταν $\nu = -3/2$. Δηλαδή ισχύει

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{r^3}\vec{r} = 0$$

Θα βρούμε τώρα τον στροβιλισμό του διανυσματικού πεδίου.

$$\vec{\nabla}\times\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu & y\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu & z\left(x^2+y^2+z^2\right)^\nu \end{vmatrix} =$$

$$\left[z\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu}-y\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu}\right]\vec{e}_1+$$

$$\left[x\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu}-z\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu}\right]\vec{e}_2+$$

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu}-x\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu}\right]\vec{e}_3=$$

$$[z\nu 2y-y\nu 2z]\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1}\vec{e}_1+[x\nu 2z-z\nu 2x]\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1}\vec{e}_2+$$

$$[y\nu 2x-x\nu 2y]\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\nu-1}\vec{e}_3=\vec{0}$$

Ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν και άρα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $V(\vec{r})$ τέτοια ώστε $\vec{f}(x,y,z)=\vec{\nabla}V(x,y,z)$. Θα βρούμε παρακάτω την βαθμωτή συνάρτηση $V(x,y,z)$.

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με το παρακάτω διαφορικό σύστημα

$$\frac{\partial V}{\partial x}=x(x^2+y^2+z^2)^{\nu}\qquad \frac{\partial V}{\partial y}=y(x^2+y^2+z^2)^{\nu}\qquad \frac{\partial V}{\partial z}=z(x^2+y^2+z^2)^{\nu}$$

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που $\nu\neq -1$.

Ολοκληρώνουμε ως προς x την πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε

$$V(x,y,z)=\int x(x^2+y^2+z^2)^{\nu}dx+a(y,z)=\frac{1}{2}\frac{1}{\nu+1}(x^2+y^2+z^2)^{\nu+1}+a(y,z)$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω συνάρτηση ως προς y και αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}V(x,y,z)=y(x^2+y^2+z^2)^{\nu}+\frac{\partial a(y,z)}{\partial y}=y(x^2+y^2+z^2)^{\nu}\quad\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial a(y,z)}{\partial y}=0\quad\Longrightarrow\quad a(y,z)=b(z)$$

Αρα η ζητούμενη βαθμωτή συνάρτηση είναι

$$V(x,y,z)=\frac{1}{2(\nu+1)}(x^2+y^2+z^2)^{\nu+1}+b(z)$$

και μένει να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $b(z)$.

Παραγωγίζουμε την παραπάνω συνάρτηση ως προς z και αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση του συστήματος. Βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial z}V(x,y,z) = z(x^2+y^2+z^2)^\nu + \frac{\partial b(z)}{\partial z} = z(x^2+y^2+z^2)^\nu \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial b(z)}{\partial z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad b(z) = c$$

Αρα η ζητούμενη βαθμωτή συνάρτηση είναι

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2(\nu+1)}(x^2+y^2+z^2)^{\nu+1} + c = \frac{1}{2\nu+2}r^{2\nu+2} + c$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά.

Στην περίπτωση που $\nu = -1$ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και βρίσκουμε τελικά ότι

$$V(x,y,z) = \int \frac{x}{x^2+y^2+z^2}dx + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + c = lnr + c$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το δυναμικό απειρίζεται και στο άπειρο αλλά και στο μηδέν.

Άσκηση 2.6

Να βρείτε τις συντεταγμένες καμπύλες και επιφάνειες των κυλινδρικών συντεταγμένων και τις γωνίες των τριών συντεταγμένων καμπύλων. Οι συναρτησιακές σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z και τις κυλινδρικές ρ, φ, z είναι

$$\begin{aligned} x &= \rho\,\text{συν}\,\varphi & 0 &\le \rho < \infty \\ y &= \rho\,\text{ημ}\,\varphi & 0 &\le \varphi \le 2\pi \\ z &= z & -\infty &< z < \infty \end{aligned}$$

Λύση: Οι τρεις συντεταγμένες επιφάνειες περιγράφονται από τις εξισώσεις $\rho = c_1$, $\varphi = c_2$ και $z = c_3$ αντιστοίχως. Τα σημεία της πρώτης επιφάνειας έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x,y,z) = (c_1\,\text{συν}\,\varphi, c_1\,\text{ημ}\,\varphi, z) \qquad \rho = \text{σταθερό}$$

Οι επιφάνειες αυτές είναι οι παράπλευρες επιφάνειες ομοαξονικών κυλίνδρων με άξονα τον άξονα OZ. Τα σημεία της δεύτερης επιφάνειας έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(x, y, z) = (\rho\,\text{συν}\,c_2, \rho\,\text{ημ}\,c_2, z) \qquad \varphi = \text{σταθερό}$$

Οι επιφάνειες αυτές είναι επίπεδα που περιέχουν τον άξονα OZ. Τα σημεία της τρίτης επιφάνεια έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_3(x, y, z) = (\rho\,\text{συν}\,\varphi, \rho\,\text{ημ}\,\varphi, c_3) \qquad z = \text{σταθερό}$$

Οι επιφάνειες αυτές είναι επίπεδα κάθετα στον άξονα OZ.

Οι τρεις συντεταγμένες καμπύλες περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\rho = c_1, \varphi = c_2, \qquad \varphi = c_2, z = c_3 \qquad \text{και} \qquad \rho = c_1, z = c_3$$

Τα σημεία της πρώτης καμπύλης έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x, y, z) = (c_1\,\text{συν}\,c_2, c_1\,\text{ημ}\,c_2, z) \qquad \rho = \text{σταθερό},\ \varphi = \text{σταθερό}$$

Οι καμπύλες αυτές είναι ευθείες παράλληλοι προς τον άξονα OZ. Είναι οι τομές επιφανειών των ομοαξονικών κυλίνδρων με άξονα τον OZ και των επιπέδων που περιέχουν τον άξονα OZ. Τα σημεία της δεύτερης καμπύλης έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(x, y, z) = (\rho\,\text{συν}\,c_2, \rho\,\text{ημ}\,c_2, c_3) \qquad \varphi = \text{σταθερό},\ z = \text{σταθερό}$$

Οι καμπύλες αυτές είναι ευθείες κάθετες στον άξονα OZ. Είναι οι τομές των επιπέδων που είναι κάθετες στον άξονα OZ και των επιπέδων που περιέχουν τον άξονα OZ. Τα σημεία της τρίτης καμπύλης έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_3(x, y, z) = (c_1\,\text{συν}\,\varphi, c_1\,\text{ημ}\,\varphi, c_3) \qquad \rho = \text{σταθερό},\ z = \text{σταθερό}$$

Οι καμπύλες αυτές είναι οριζόντιες ομόκεντρες περιφέρειες με κέντρο πάνω στον άξονα OZ. Είναι οι τομές των επιφανειών των ομοαξονικών κυλίνδρων και των επιπέδων που είναι κάθετα στον άξονα OZ.

Τα εφαπτομενικά διανύσματα στις τρεις αυτές συντεταγμένες καμπύλες είναι αντιστοίχως

$$\vec{\varepsilon}_2 = \frac{d\vec{r}}{d\rho} = (\text{συν}\,\varphi, \text{ημ}\,\varphi, 0) \qquad \vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = (-\rho\,\text{ημ}\,\varphi, \rho\,\text{συν}\,\varphi, 0)$$

$$\vec{\varepsilon}_3 = \frac{d\vec{r}}{dz} = (0, 0, 1)$$

Φαίνεται αμέσως ότι $\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_3 = \vec{\varepsilon}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_1 = 0$. Δηλαδή οι συντεταγμένες καμπύλες τέμνονται καθέτως και το σύστημα είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Άλυτες Ασκήσεις

Άσκηση 2.7 Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής t τότε να αποδειχτούν οι ακόλουθες σχέσεις: $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{a}) = \frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{a} + \lambda(t)\frac{d\vec{a}}{dt}$, $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$ και $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$.

Άσκηση 2.8 Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{A} = (t, -3, 2t)$, $\vec{B} = (1, -2, 2)$ και $\vec{C} = (3, t, -1)$. Υπολογίσατε τα ολοκληρώματα: $\int_1^2(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C})dt$ και $\int_1^2(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C})dt$ **Απάντηση:** 0, $(-87/2, -41/2, 15/2)$.

Άσκηση 2.9 Βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων $\vec{F}(t) = \cosh t\vec{i} + \sinh t\vec{j} - \sqrt{t}\vec{k}$ και $\vec{G}(t) = e^t \,\text{συν}\, t\vec{i} - e^t \,\text{ημ}\, 2t\vec{j}$. Βρείτε επίσης την παράγωγο των $\vec{F}\cdot\vec{G}$ και $\vec{F}\times\vec{G}$

Άσκηση 2.10 Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού πού έχει διάνυσμα θέσης:
α) $\vec{r}(t) = \text{συν}\, t\vec{i} + \text{ημ}\, 3t\vec{j} - 16t^2\vec{k}$, β) $\vec{r}(t) = \left(t^3+1\right)\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \text{συν}\,(\pi t/2)\vec{k}$, γ) $\vec{r}(t) = \left(t^2-1\right)\vec{i} + t^4\vec{j} + \text{συν}\,(t^2)\vec{k}$ και δ) $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + \text{ημ}\,(\omega t)\vec{j} + \text{συν}\,(\omega t)\vec{k}$.

Άσκηση 2.11 Δίνεται το διάνυσμα $\vec{F}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j}$. Να βρεθεί η αναγκαία σχέση ώστε να ισχύει $\vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t) = 0$. Αν $\vec{F}(t) = \left(4t/(1+4t^2)\right)\vec{i} + \left((1-4t^2)/(1+4t^2)\right)\vec{j}$ τότε να δείξετε ότι ισχύει $\vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t) = 0$.

Άσκηση 2.12 Ορίζουμε το διάνυσμα $\vec{\delta} = \tau\vec{\varepsilon} + \kappa\vec{b}$. Να αποδειχτεί ότι οι τύποι Φρενέ - Σερέ παίρνουν την μορφή $d\vec{\varepsilon}/ds = \vec{\delta}\times\vec{\varepsilon}$, $d\vec{n}/ds = \vec{\delta}\times\vec{n}$, $d\vec{b}/ds = \vec{\delta}\times\vec{b}$.

Άσκηση 2.13 Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $\vec{F}(t)$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{F}''(t)$ για κάθε τιμή του t. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{F}(t)\times\vec{F}'(t)$ είναι σταθερό.

Άσκηση 2.14 Να βρείτε το μήκος των καμπυλών $\vec{r}(t) = \text{συν}^3\, t\vec{i} + \text{ημ}^3\, t\vec{j}$ για $0 \le t \le \pi/2$ και $\vec{r}(t) = 2(t^2-1)^{3/2}\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ για $1 \le t \le \sqrt{8}$ **Απάντηση:** 6, $54 - 4\sqrt{2}$.

Άσκηση 2.15 Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, την πρώτη κάθετο καθώς και την δεύτερη κάθετο των καμπυλών:

$\vec{r}(t) = \text{συν}\, t\vec{i} + \text{συν}\, t\vec{j} + \sqrt{2}\,\text{ημ}\, t\vec{k} \quad$ και $\quad \vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + \ln t\vec{k}$.

Άσκηση 2.16 Δίνονται οι καμπύλες με διανυσματικές εξισώσεις $\vec{r}_1(t) = (e^t - 1)\vec{i} + 2\,\text{ημ}\, t\vec{j} + \ln(t+1)\vec{k}$ και $\vec{r}_2(t) = (t-1)\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$. Να βρεθεί το σημείο που τέμνονται καθώς και η γωνία τομής τους.

Άσκηση 2.17 Δείξατε ότι οι καμπύλες με παραμέτριση: $\vec{r}_1(t) = (t^2/2 - t)\vec{i} + (t+1)\vec{j} - t\vec{k}$ και $\vec{r}_2(t) = -\,\text{ημ}\, t\vec{i} + e^t\vec{j} - \text{εφ}\, t\vec{k}$, έχουν κοινό σημείο το $(0, 1, 0)$ και ότι τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπύλων στο σημείο αυτό είναι παράλληλα.

Άσκηση 2.18 Δίνεται η καμπύλη $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \left(2\sqrt{2}t^{3/2}/3\right)\vec{j} + \left(t^2/2\right)\vec{k}$. Καθορίσατε εάν η καμπύλη είναι ομαλή ή κατά τμήματα ομαλή ή τίποτα από τα δύο. Βρείτε το τμήμα της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ $\vec{r}(0)$ και $\vec{r}(1)$. Βρείτε την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης. Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{v}$ και την επιτάχυνση $\vec{a}$ ενός κινητού με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$.

Άσκηση 2.19 Εστω ότι η καμπύλη C είναι το γράφημα της εξίσωσης $xy = 1$ για $x > 0$. Βρείτε την καμπυλότητα της καμπύλης C. Βρείτε την μέγιστη τιμή της καμπυλότητας. Ορίσατε την ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης στο σημείο $(1, 1)$. **Απάντηση:** α) $\kappa = 2x^3/\left(x^4+1\right)^{3/2}$, β) $\kappa = \sqrt{2}/2$, γ) $\sqrt{2}$.

Άσκηση 2.20 Για την καμπύλη $x = \alpha(3t - t^3)$, $y = 3\alpha t^2$, $z = \alpha(3t + t^3)$ δείξατε ότι $\kappa = \tau = 1/(3\alpha(1+t^2)^2)$.

Άσκηση 2.21 Για μια επίπεδη καμπύλη η οποία δίνεται από τη εξίσωση $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ δείξατε ότι η καμπυλότητα κ δίνεται από την σχέση $\kappa = (x'y'' - y'x'')\ /\ \left([(x')^2 + (y')^2]^{3/2}\right)$.

Άσκηση 2.22 Αν η καμπύλη δίνεται από την σχέση $\vec{r} = \vec{r}(s)$, δείξατε ότι $\vec{r}\,'' \cdot \vec{r}\,''' \times \vec{r}\,'''' = \kappa^5 d(\tau/\kappa)/ds$ όπου κ και τ είναι η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης αντίστοιχα.

Άσκηση 2.23 Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = t$, $y = t^2$ και $z = 2t^3/3$. Να βρεθούν η καμπυλότητα ϰ και η στρέψη τ.

Απάντηση: $\varkappa = 2/(1+2t^2)^2$, $\quad \tau = 2/(1+2t^2)^2 = \varkappa$.

Άσκηση 2.24 Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης
$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15$ στο σημείο $P = (1, 1)$ στην κατεύθυνση

$\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$, της συνάρτησης $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ στο σημείο $P = (3,4)$ στην κατεύθυνση $\vec{u} = (\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})/2$ και τέλος της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^3y^2z$ στο σημείο $P = (2,-1,2)$ στην κατεύθυνση $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

Άσκηση 2.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = 2x + x^2y + y\,\eta\mu\, y$ και ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ είναι μοναδιαίο. Βρείτε την $D_{\vec{u}}f(1,0)$ σαν συνάρτηση των α και β. Βρείτε τις τιμές των α,και β για τις οποίες η $D_{\vec{u}}f(1,0)$ είναι μέγιστη.

Άσκηση 2.26 Βρείτε την κλίση των παρακάτω βαθμωτών συναρτήσεων στο δεδομένο σημείο. $f(x,y) = (x+3y)/(5x+2y)$ στο $(-1,3/2)$ και $f(x,y,z) = ze^{-x}\,\varepsilon\varphi\, y$ στο $(0,\pi,-2)$. **Απάντηση:** $(-39/8,-13/4)$, $(0,-2,0)$.

Άσκηση 2.27 Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο διάγραμμα κάθε μίας από τις παρακάτω συναρτήσεις και στο δεδομένο σημείο $f(x,y) = (2+x-y)^2$ στο $(3,-1,36)$ και $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$ στο $(-1,1,ln2)$ **Απάντηση:** $12x - 12y - z = 12$, $x - y + z = ln2 - 2$.

Άσκηση 2.28 Βρείτε την εξίσωση του καθέτου επιπέδου στις παρακάτω επιφάνειες και στο δεδομένο σημείο $x^2+y^2+z^2 = 1$ στο $(1/2,-1/2,-1/\sqrt{2})$ και $z = ln\sqrt{x^2+1}$ στο $(0,2,0)$. **Απάντηση:** $x - y - \sqrt{2}z = 2$, $z = 0$.

Άσκηση 2.29 Να εξετάσετε εάν υπάρχει μη μηδενική τιμή του c για την οποία η παραβολή $y = cx^2$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ να τέμνονται σε ορθές γωνίες.

Άσκηση 2.30 Θεωρούμε τις δύο επιφάνειες $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$ και $xyz = 1$. Δείξατε ότι σε κάθε σημείο τομής τους τα εφαπτόμενα επίπεδα σ' αυτές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Άσκηση 2.31 Βρείτε το σημείο του παραβολοειδούς $z = 9 - 4x^2 - y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς το επίπεδο $z = 4y$. **Απάντηση:** $(0,-2,5)$.

Άσκηση 2.32 Δείξατε ότι οι επιφάνειες $z = xy - 2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο.

Άσκηση 2.33 Αν $f(x,y,z) = xy+yz+zx$, να βρεθούν το $\vec{\nabla}f$ στο $(1,1,3)$, το df/ds στο $(1,1,3)$ στην κατεύθυνση $(1,1,1)$, η κάθετη παράγωγος df/dn στο $(1,1,3)$ και τέλος οι εξισώσεις του εφαπτομένου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια $xy+yz+zx = 7$ στο $(1,1,3)$. **Απάντηση:** α) $(4,4,2)$, β) $10/\sqrt{3}$, γ) 6, δ) $2x+2y+z=7$, $x-1=y-1=2z-6$.

Άσκηση 2.34 Αν u και v είναι βαθμωτές σημειακές συναρτήσεις, να αποδειχτεί ότι $div(\vec{\nabla}u \times \vec{\nabla}v)=0$. Αποδείξατε επίσης ότι $rot(f(u)\vec{\nabla}u)=\vec{0}$ και επομένως $rot\,(f(r)\vec{r})=\vec{0}$.

Άσκηση 2.35 Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός των παρακάτω διανυσματικών συναρτήσεων: $\vec{f}=\left(x^2+yx, y^2+zx, z^2+xy\right)$,
$\vec{f}=(x+y, \eta\mu\,(xy), \sigma\upsilon\nu\,(xyz))$, $\vec{f}=\left(x^2,y^2,z^2\right)$, $\vec{f}=\left(x^2+y^2+z^2\right)(x,y,z)$ και $\vec{f}=\left(1/(x^2+y^2+z^2)\right)(yz,zx,xy)$.

Άσκηση 2.36 Βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $grad f(x,y)=\left(y^2-y\,\eta\mu\,xy\right)\vec{i}+(2xy-x\,\eta\mu\,xy)\,\vec{j}$. **Απάντηση:** $f=xy^2+\sigma\upsilon\nu\,xy+c$.

Άσκηση 2.37 Ορίσατε τη μορφή της συνάρτησης $\phi(u)$ έτσι ώστε η κύρια κάθετος της καμπύλης $x=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,u$, $y=\alpha\,\eta\mu\,u$, $z=\phi(u)$, να είναι παράλληλη προς το επίπεδο ΧΟΥ. **Απάντηση:** $\phi(u)=c_1u+c_2$.

Άσκηση 2.38 Οι παρακάτω επιφάνειες δίνονται παραμετρικά:
α) $x=\alpha\,\eta\mu\,u\,\sigma\upsilon\nu\,v$, $y=\beta\,\eta\mu\,u\,\eta\mu\,v$, $z=c\,\sigma\upsilon\nu\,u$ Ελλειψοειδές,
β) $x=\alpha\sinh u\cosh v$, $y=\beta\sinh u\sinh v$, $z=c\cosh u$ Κώνος,
γ) $x=\alpha u\,\sigma\upsilon\nu\,v$, $y=\beta u\,\eta\mu\,v$, $z=u^2$ Ελλειπτικό παραβολοειδές.

Βρείτε τις εξισώσεις αυτών των επιφανειών στη μορφή $F(x,y,z)=0$. Ποιο είδος καμπύλης παριστάνουν οι συντεταγμένες καμπύλες $u=$ σταθερά, $v=$ σταθερά σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση 2.39 Θεωρούμε την διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}=\vec{r}(x,y,z)$. Να δειχτεί ότι $\vec{\nabla}|\vec{r}|^{\nu}=\nu|\vec{r}|^{\nu-2}\vec{r}$, $\nu=2,3,\cdots$.

Άσκηση 2.40 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$. Να αποδείξετε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $(x,y)=(0,0)$ υπάρχουν. Αν $\vec{r}(t)=(x,y)=(at,bt)$ όπου a, b σταθερές να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x(t),y(t))$ είναι παραγωγίσιμη ως προς t. Να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματα $f'(\vec{r}(t))=ab^2/(a^2+b^2)$ όμως $\vec{\nabla}f(0,0)\cdot\vec{r}'(0,0)=0$.

Άσκηση 2.41 Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = (x-z, y+z, x+y)$. Να αποδειχτεί: ότι $rot\vec{F} = 0$. Να βρεθεί μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $\vec{F} = gradf$. **Απάντηση:** $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2\right)/2 - xz + zy + 2xz$.

Άσκηση 2.42 Αν $\vec{F} = \phi(r)\vec{r}$ δείξατε ότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = r\phi(r)' + 3\phi(r)$. Βρείτε την $\phi(r)$ εάν $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$ όταν $r > 0$. Δείξατε ότι στη περίπτωση αυτή το $\vec{F}$ μπορεί να ερμηνευτή σαν απωστική ή ελκτική δύναμη σύμφωνα με τον νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου.

Άσκηση 2.43 Εάν $f = ax^2+by^2+cz^2$ βρείτε το $\vec{\nabla}^2 f$. Εάν f είναι γενικά ένα ομογενές πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x, y, z, ποια πρέπει να είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, για να ισχύει $\vec{\nabla}^2 f = 0$.

Άσκηση 2.44 Εάν $\vec{A}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα και $r = |\vec{r}|$ δείξατε ότι $\vec{\nabla}\times(r^\nu\vec{A}\times\vec{r} = (\nu+2)r^\nu\vec{A} - \nu r^{\nu-2}(\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{r}$ και $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r}/r^3) = -\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{r}/r^3)$. Βρείτε τα $\vec{\nabla}\cdot(r^\nu\vec{A})$, $\vec{\nabla}\times(r^\nu\vec{A})$ και $\vec{\nabla}\cdot(r^\nu\vec{A}\times\vec{r})$.

Άσκηση 2.45 Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f(x,y,z)$ ώστε τα παρακάτω πεδία να είναι συντηρητικά $\vec{F}(x,y,z) = e^{2x}\vec{i} + f(x,y,z)\vec{j} + e^z\vec{k}$ και $\vec{F}(x,y,z) = ye^x \text{συν}\, z\vec{i} + e^x\text{συν}\, z\vec{j} + f(x,y,z)\vec{k}$. Βρείτε την αντίστοιχη δυναμική συνάρτηση των διανυσματικών πεδίων. **Απάντηση:** $f(x,y,z) =$ σταθερά $V(x,y,z) = e^{2x}/2 + cy + e^z$ $f(x,y,z) = -ye^x\,\text{ημ}\, z + c$ $V(x,y,z) = ye^x\,\text{συν}\, z - cz$.

Άσκηση 2.46 Να βρεθούν οι τιμές των κ και λ για τις οποίες το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = x(\kappa y - \lambda z^2)\vec{i} + (\kappa-1)x^2\vec{j} + (2+\lambda)x^2 z$ είναι αστρόβιλο. Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = (\lambda x - 4z)\vec{i} + (z-2y)\vec{j} + (y+\lambda z)\vec{\kappa}$ είναι σωληνοειδές.
Απάντηση: $\kappa = 2$, $\lambda = 1$, $\quad \lambda = 1$.

Άσκηση 2.47 Να βρεθούν οι σταθερές α, β και γ ώστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$ να είναι αστρόβιλο. Να βρεθεί κατόπιν μια βαθμωτή συνάρτηση V ώστε το $\vec{F}$ να είναι η κλίση της V, $\vec{F} = \vec{\nabla}V$. **Απάντηση:** $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, $V = x^2/2 - 3y^2/2 + z^2 + 2xy + 4xz - yz$.

Άσκηση 2.48 Να δειχτεί ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{f} = (2x+2y, 2x - z^2, -2yz)$ είναι αστρόβιλο και να βρεθεί το δυναμικό του.

Απάντηση: $V = -x^2 - 2xy + yz^2$.

***Άσκηση* 2.49** Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός κινητού σε σφαιρικές συντεταγμένες $x = r\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi$, $y = r\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi$, $z = r\,\text{συν}\,\theta$.
Απάντηση: $\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\dot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta\vec{\varphi}_0$, $\quad \vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\,\text{ημ}^2\,\theta\right)\vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\theta\right)\vec{\theta}_0 + \left(2r\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta + r\ddot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta\right)\vec{\varphi}_0$.

***Άσκηση* 2.50** Να βρείτε τις σταθερές a, b, c ώστε το πεδίο των δυνάμεων $\vec{F} = (x+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}$ να είναι συντηρητικό. Να βρείτε το δυναμικό που παράγει αυτό το δυναμικό πεδίο.
Απάντηση: $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$, $\quad V = -x^2/2 + 3y^2/2 - z^2 - 2xy - 4xz + yz$.

***Άσκηση* 2.51** Αν φ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση του Λαπλάς τότε να αποδειχτεί ότι το $\vec{\nabla}\varphi$ είναι αστρόβιλο αλλά και σωληνοειδές.

***Άσκηση* 2.52** Να αποδειχτούν οι ακόλουθες διανυσματικές ταυτότητες

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{f}+\vec{g}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{f} + \vec{\nabla}\cdot\vec{g} \quad \vec{\nabla}\times(\vec{f}+\vec{g}) = \vec{\nabla}\times\vec{f} + \vec{\nabla}\times\vec{g}$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}) - \vec{\nabla}^2 f \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{g}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{g} + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{g}) \qquad \vec{\nabla}\times(f\vec{g}) = (\vec{\nabla}f)\times\vec{g} + f(\vec{\nabla}\times\vec{g})$$
$$\vec{\nabla}(\vec{f}\cdot\vec{g}) = (\vec{g}\cdot\vec{\nabla})\vec{f} + (\vec{f}\cdot\vec{\nabla})\vec{g} + \vec{g}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) + \vec{f}\times(\vec{\nabla}\times\vec{g})$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{f}\times\vec{g}) = (\vec{g}\cdot\vec{\nabla})\vec{f} - \vec{g}(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}) - (\vec{f}\cdot\vec{\nabla})\vec{g} + \vec{f}(\vec{\nabla}\cdot\vec{g})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{f}\times\vec{g}) = \vec{g}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f}) - \vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{g}).$$

***Άσκηση* 2.53** Να αποδειχτεί η ταυτότητα $\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(A^2) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$. Αν $\vec{B}$ και $\vec{\Gamma}$ είναι σταθερά διανύσματα να αποδειχτεί επίσης και η ταυτότητα $\vec{\nabla}(\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\Gamma}\times\vec{r}) = \vec{\mathrm{B}}\times\vec{\Gamma}$.

***Άσκηση* 2.54** Αν φ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση να αποδειχτεί ότι ισχύει $(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\varphi = r^2\vec{\nabla}^2\varphi - r^2(\partial^2\varphi/\partial r^2) - 2r(\partial\varphi/\partial r)$.

***Άσκηση* 2.55** Υποθέτουμε ότι συντεταγμένες u_1, u_2, u_3 είναι ορθογώνιες δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $\vec{r}_{u_1}\cdot\vec{r}_{u_2} = \vec{r}_{u_2}\cdot\vec{r}_{u_3} = \vec{r}_{u_3}\cdot\vec{r}_{u_1} = 0$. Να αποδειχτεί ότι ο τελεστής του Λαπλάς δίνεται από την σχέση $\vec{\nabla}^2 g = \frac{1}{U_1U_2U_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{U_2U_3}{U_1}\frac{\partial}{\partial u_1}g\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{U_3U_1}{U_2}\frac{\partial}{\partial u_2}g\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{U_1U_2}{U_3}\frac{\partial}{\partial u_3}g\right)\right]$ όπου $U_i = \|\vec{r}_{u_i}\| = \left((\partial x/\partial u_i)^2 + (\partial y/\partial u_i)^2 + (\partial z/\partial u_i)^2\right)^{1/2}$. Να εφαρμόσετε τον τύπο για τις κυλινδρικές και τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Απάντηση: $\vec{\nabla}^2 g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho g_\rho) + \frac{1}{\rho^2} g_{\varphi\varphi} + g_{zz}$,
$$\vec{\nabla}^2 g = \frac{1}{r^2\,\eta\mu\,\theta}\left[\eta\mu\,\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\eta\mu\,\theta g_\theta) + \frac{1}{\eta\mu\,\theta} g_{\varphi\varphi}\right].$$

Άσκηση 2.56 Να αποδείξετε ότι
α) $\vec{\nabla}^2(\ln r) = 1/r^2$, β) $\vec{\nabla}^2 r^\nu = \nu(\nu+1) r^{\nu-2}$, γ) $\vec{\nabla}\cdot(r^3\vec{r}) = 6r^3$.

Άσκηση 2.57 Να αποδειχτεί ότι κάθε διάνυσμα που είναι λύση της εξισώσεως $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} - k^2\vec{A} = 0$ ικανοποιεί επίσης την διανυσματική εξίσωση $\vec{\nabla}^2\vec{A} + k^2\vec{A} = 0$ και την συνθήκη $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$.

Άσκηση 2.58 Να αποδειχτεί ότι ισχύει $\vec{\nabla}^2 f(r) = f''(r) + 2f'(r)/r$. Βρείτε την $f(r)$ έτσι ώστε να ικανοποιεί τη εξίσωση $\vec{\nabla}^2 f(r) = 0$.
Απάντηση: $f(r) = A + B/r$.

Άσκηση 2.59 Δίνονται οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E},\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{H},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho,$$
του Μάξγουελ όπου ρ είναι μια συνάρτηση του $\vec{r} = (x, y, z)$ και c είναι η ταχύτητα του φωτός.

Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα τετραδιάστατο δυναμικό $(\vec{A}, \varphi)$ τέτοιο ώστε τα πεδία να δίνονται από τις σχέσεις $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Να αποδείξετε ότι τα πεδία $(\vec{A}, \varphi)$ δεν είναι μοναδικά. Αν $(\vec{A}\,', \varphi\,')$ δύο άλλα δυναμικά που δίνουν τις ίδιες εντάσεις $\vec{E}$ και $\vec{H}$ τότε ισχύουν οι σχέσεις $\varphi\,' = \varphi + \partial\chi(\vec{r}, t)/\partial t$ και $\vec{A}\,' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t)$ όπου $\chi(\vec{r}, t)$ μιά συνάρτηση που ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση $\vec{\nabla}^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi = 0$. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται μετασχηματισμοί βαθμίδας (gauge).

Να αποδείξετε ότι τα πεδία $(\vec{A}, \varphi)$. ικανοποιούν τις εξισώσεις
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0,\quad \vec{\nabla}^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -4\pi\rho,\quad \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0.$$
Τις ίδιες εξισώσεις ικανοποιούν και τα πεδία $(\vec{A}\,', \varphi\,')$.

Άσκηση 2.60 Η δύναμη σε ένα φορτίο e που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$. Να αποδείξετε ότι $\vec{F} = e[-\vec{\nabla}\varphi - (d\vec{A}/dt) + \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v})]$. Να αποδείξετε επίσης ότι η δύναμη αυτή μένει αμετάβλητη από του μετασχηματισμούς βαθμίδας της προηγουμένης ασκήσεως.

Κεφάλαιο 3

Επικαμπύλιο και επιφανειακό ολοκλήρωμα

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Ορίζουμε σαν **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄–είδους** της βαθμωτής συνάρτησης $f(\vec{r})$ κατά μήκος της ομαλής καμπύλης C με άκρα τα σημεία A και B, το όριο

$$\int_C f(\vec{r})ds = \underset{m\to\infty}{\text{ορ}} \sum_{j=1}^{m} f(\vec{r}_j)\delta S_j$$

Αν τα σημεία A και B ταυτίζονται δηλαδή η καμπύλη είναι κλειστή τότε συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα με το σύμβολο $\oint$.

Αν η καμπύλη C έχει την φυσική παραμέτρηση $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ή την παραμέτρηση $\vec{r} = \vec{r}(t)$ τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_C f(\vec{r})ds = \int_{s_1}^{s_2} f(\vec{r}(s))ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt$$

όπου $\mathrm{A} = \vec{r}(s_1) = \vec{r}(t_1)$ και $\mathrm{B} = \vec{r}(s_2) = \vec{r}(t_2)$.

Η μάζας μιας υλικής καμπύλης $m = \int_C \rho(\vec{r})ds$ όπου $\rho(\vec{r})$ η πυκνότητα της καμπύλης, το κέντρο μάζας και οι ροπές αδρανείας είναι παραδείγματα επικαμπύλιων ολοκληρώματων α΄–είδους.

Ορίζουμε σαν **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄–είδους** της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(\vec{r}) = (P, Q, R)$ κατά μήκος της καμπύλης C το παρακάτω όριο

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \underset{m\to\infty}{\text{ορ}} \sum_{j=1}^{m} P(\vec{r}_j)\Delta x_j + Q(\vec{r}_j)\Delta y_j + R(\vec{r}_j)\Delta z_j$$

Αν η καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(t)$ τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το ακόλουθο απλό ολοκλήρωμα Ρήμαν

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_2}^{t_1} \vec{F}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) dt$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄–είδους στην Φυσική είναι το έργο που παράγεται ή καταναλίσκετε από μία δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης C.

Αν το δυναμικό πεδίο είναι Νευτώνιο δηλαδή η δύναμη ορίζεται από νόμο του Νεύτωνα $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{\gamma} = md^2\vec{r}/dt^2$ τότε το έργο είναι ίσο με την διαφορά των κινητικών ενεργειών $W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t) - \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t_0)$

Υποθέτουμε ακολούθως ότι το δυναμικό πεδίο είναι αστρόβιλο και η δύναμη προέρχεται από κάποια βαθμωτή συνάρτηση $V(\vec{r})$. Στην φυσική συνήθως χρησιμοποιούμε το $V(\vec{r})$ με το αρνητικό πρόσημο και γράφουμε $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Η συνάρτηση $V(\vec{r})$ ονομάζεται δυναμικό του πεδίου $\vec{F}(\vec{r})$.

Στην περίπτωση αυτή το έργο της δύναμης είναι ανεξάρτητο του δρόμου. και είναι ίσο με την διαφορά του δυναμικού στα σημεία $\vec{r}(t_0)$ και $\vec{r}(t)$ δηλαδή $W = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r})$. Εξισώνουμε το έργο αυτό με το έργο ενός Νευτώνιου πεδίο και βρίσκουμε την σχέση

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t_0) + V(\vec{r}(t_0)) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t) + V(\vec{r}(t))$$

που είναι ο νόμος διατήρησης της ενέργειας. Ενα τέτοιο δυναμικό πεδίο ονομάζεται συντηρητικό πεδίο.

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα

Ορίζουμε σαν **επιφανειακό ολοκλήρωμα α΄–είδους** της βαθμωτής συνάρτησης $f(\vec{r})$ στην επιφάνεια S που φράσσεται από μία ομαλή καμπύλη C το όριο

$$\iint_S f(\vec{r}) dS = \underset{n\to\infty}{\text{ορ}} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}_i)\Delta S_i$$

Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια είναι διπλής όψης. Αν η επιφάνεια είναι κλειστή συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα με το σύμβολο $\oiint$.

Αν η επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad (u,v) \in D \subset \Re^2$ τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι ίσο με το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα Ρήμαν

$$\iint_S f(\vec{r})dS = \iint_D f\left(\vec{r}(u,v)\right) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv$$

Εάν η επιφάνεια περιγράφεται από την εξίσωση $z = z(x,y)$ τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\alpha'-$είδους είναι ίσο με το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_S f(\vec{r})dS = \iint_Z f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

όπου Z είναι η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο XOY. Εάν η επιφάνεια περιγράφεται από την εξίσωση $f(x,y,z) = 0$ τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\alpha'-$είδους είναι ίσο με το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_S f(\vec{r})dS = \iint_Z f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{|\vec{n}\cdot\vec{k}|} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{\nabla}F}{\|\vec{\nabla}F\|}$$

Είναι προφανές ότι έχουμε άλλες δύο δυνατότητες.

Ορίζουμε σαν **επιφανειακό ολοκλήρωμα β΄−είδους** της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F} = (P,Q,R)$ το ακόλουθο όριο

$$\iint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \underset{n\to\infty}{\text{ορ}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot\vec{n}\Delta S_i$$

όπου $d\vec{S} = \vec{n}dS$ και $\vec{n}$ είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S.

Αν η επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\beta'-$ είδους είναι ίσο με το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα Ρήμαν

$$\iint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r})\cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv$$

Αν η επιφάνεια S περιγράφεται από την εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \iint_X Pdydz + \iint_Y Qdzdx + \iint_Z Rdxdy +$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα βρίσκουμε συχνά στην φυσική. Παράδειγμα στον υπολογισμό της μαγνητικής ροής Φ ενός μαγνητικού πεδίου Β διά μέσου μιας επιφάνειας S.

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 3.1

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄–είδους $I = \int_C (x-y)ds$ όπου C η περιφέρεια $x^2 + y^2 = 2x$.

Λύση: Η συναρτησιακή σχέση που μας δίνει την περιφέρεια γράφεται

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

Γράφουμε την περιφέρεια σε παραμετρική μορφή με παράμετρο την μεταβλητή t. Βρίσκουμε

$$x = 1 + \text{ημ}\, t \qquad y = \text{συν}\, t \qquad\qquad \vec{r}(t) = (1 + \text{ημ}\, t, \text{συν}\, t)$$

Υπολογίζουμε το ds

$$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = |(\text{συν}\, t, -\,\text{ημ}\, t)| dt = dt$$

Τέλος το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int_C (x-y)ds = \int_C (x(t) - y(t)) \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_0^{2\pi} (1 + \text{ημ}\, t - \text{συν}\, t) dt =$$

$$[t - \text{συν}\, t - \text{ημ}\, t]_0^{2\pi} = (2\pi - \text{συν}\, 2\pi - \text{ημ}\, 2\pi) - (0 - \text{συν}\, 0 - \text{ημ}\, 0) = 2\pi$$

Άσκηση 3.2

Να βρεθεί ο τύπος που δίνει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α'–είδους όταν η καμπύλη είναι επίπεδη και δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την εξίσωση $r = r(\theta)$. Σαν εφαρμογή υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $r = 1 + \text{συν}\,\theta$ από $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

Λύση: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′−είδους στο επίπεδο μιας συναρτήσεως $f(x,y)$ είναι $I=\int f(x,y)ds$. Θα βρούμε το ds αν οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης με παράμετρο το θ είναι

$$x(\theta)=r(\theta)\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \qquad\qquad y(\theta)=r(\theta)\,\eta\mu\,\theta$$

Το διάνυσμα θέσεως της επίπεδης αυτής καμπύλης είναι

$$\vec{r}(\theta)=(r(\theta)\,\sigma\upsilon\nu\,\theta, r(\theta)\,\eta\mu\,\theta)$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ και βρίσκουμε

$$\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}=\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\,\sigma\upsilon\nu\,\theta-r\,\eta\mu\,\theta, \frac{dr(\theta)}{d\theta}\,\eta\mu\,\theta+r\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\right)$$

Το μήκος του παραπάνω διανύσματος δίνεται από την σχέση

$$\left\|\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}\right\|^2=\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\,\sigma\upsilon\nu\,\theta-r\,\eta\mu\,\theta\right)^2+\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\,\eta\mu\,\theta+r\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\right)^2=$$

$$\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+r^2\,\eta\mu^2\theta-2r\frac{dr(\theta)}{d\theta}\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\eta\mu\,\theta+\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2\eta\mu^2\theta+$$

$$r^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta+2r\frac{dr(\theta)}{d\theta}\,\eta\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta=r^2+\left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2$$

Επομένως το στοιχειώδες τόξο ds είναι $ds=\|d\vec{r}/d\theta\|\,d\theta$, και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δίνεται από τον τύπο

$$I=\int f(x,y)ds=\int f(\theta)\left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\|d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\,\sigma\upsilon\nu\,\theta, r\,\eta\mu\,\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το μήκος της δοσμένης καμπύλης. Θέτουμε στον παραπάνω τύπο $f(\theta)=1$ και βρίσκουμε

$$S=\int ds=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu\,\theta)^2+(-\eta\mu\,\theta)^2}\,d\theta=$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{2+2\,\text{συν}\,\theta}\; d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{2\cdot 2\,\text{συν}^2\,\frac{\theta}{2}}\; d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\,\text{συν}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$4\left[\text{ημ}\,\frac{\theta}{2}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = 4\,\text{ημ}\,\frac{\theta_1}{2} - 4\,\text{ημ}\,\frac{\theta_2}{2}$$

Άσκηση 3.3

Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται από την δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = (ayz, bxz, cxy)$ κατά την μετακίνηση μιας μάζας από το σημείο $(1,1,1)$ στο σημείο $(2,4,8)$, α) Πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία και β) πάνω στην καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$. Να προσδιοριστούν οι σταθερές a, b και c ώστε τα δύο επικαμπύλια ολοκληρώματα να είναι ίσα. Πότε το πεδίο είναι αστρόβηλο;.

Λύση: Θα υπολογίσουμε το έργο πάνω στην ευθεία. Θα βρούμε πρώτα την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δοσμένα σημεία. Με παράμετρο το t η ευθεία έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$\vec{r}(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, a_3 t + b_3)$$

Θα προσδιορίσουμε τις σταθερές a_i και b_i ώστε η ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(1,1,1)$ και $(2,4,8)$ για $t=0$ και $t=1$ αντιστοίχως. Βρίσκουμε

$$\vec{r}(0) = (b_1, b_2, b_3) = (1,1,1)$$

$$\vec{r}(1) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a + 3 + b_3) = (2,4,8) \implies (a_1, a_2, a_3) = (1,3,7)$$

Αρα οι εξισώσεις της ζητούμενης ευθείας σε παραμετρική μορφή είναι

$$x(t) = t+1 \qquad y(t) = 3t+1 \qquad z(t) = 7t+1$$

Υπολογίζουμε τώρα το έργο

$$A = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt =$$

$$\int_0^1 (a(3t+1)(7t+1), b(t+1)(7t+1), c(t+1)(3t+1))\cdot(1,3,7)dt =$$

$$\int_0^1 dt\,[a(3t+1)(7t+1)+3b(t+1)(7t+1)+7c(t+1)(3t+1)]\,dt=$$

$$\int_0^1 dt\,\left[a(21t^2+10t+1)+b(21t^2+24t+3)+c(21t^2+28t+7)\right]dt=$$

$$\left[a(7t^3+5t^2+t)+b(7t^3+12t^2+3t)+c(7t^3+14t^2+7t)\right]_0^1=$$

$$a(7+5+1)+b(7+12+3)+c(7+14+7)=13a+22b+28c$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το έργο πάνω στον δεύτερο δρόμο. Βρίσκουμε

$$A=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2 \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\int_1^2 (at^5,bt^4,ct^3)\cdot(1,2t,3t^2)dt=$$

$$\int_1^2 \left[at^5+2bt^5+3ct^5\right]dt=\left[(a+2b+3c)t^6/6\right]_1^2=(a+2b+3c)(2^6-1)/6=$$

$$63(a+2b+3c)/6$$

Το ολοκλήρωμα είναι το ίδιο πάνω στους δύο αυτούς δρόμους αν οι σταθερές ικανοποιούν την σχέση

$$13a+22b+28c=63(a+2b+3c)/6 \qquad \Longrightarrow \qquad 15a+6b-21c=0$$

Παρατηρούμε ότι για $a=b=c$ η παραπάνω σχέση ικανοποιείται. Η λύση δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα $a=1$, $b=2$, $c=27/21$.

Θα βρούμε τώρα πότε το πεδίο είναι αστρόβιλο δηλαδή πότε $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$. Βρίσκουμε

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ ayz & bxz & cxy\end{vmatrix}=(cx-bx,ay-cy,bz-az)=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$a=b=c$$

Για την τιμή αυτή των σταθερών υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $V(x,y,z)$ τέτοια ώστε $\vec{F}=(P,Q,R)=a(yz,xz,xy)=\vec{\nabla}V(x,y,z)$.

Θα βρούμε την συνάρτηση αυτή με την βοήθεια του γενικού τύπου

$$V=\int_{x_0}^x P(t,y_0,z_0)dt+\int_{y_0}^y Q(x,t,z_0)dt+\int_{z_0}^z R(x,y,t)dt=$$

$$a\int_{x_0}^{x} y_0 z_0 dt + a\int_{y_0}^{y} x z_0 dt + a\int_{z_0}^{z} xy dt = a\left[y_0 z_0 t\right]_{x_0}^{x} + a\left[x z_0 t\right]_{y_0}^{y} + a\left[xyt\right]_{z_0}^{z} =$$

$$a y_0 z_0 x - a y_0 z_0 x_0 + a x z_0 y - a x z_0 y_0 + axyz - axyz_0 = axyz - a x_0 y_0 z_0$$

Στην περίπτωση αυτή το έργο εξαρτάται μόνο από την τιμή της συνάρτησης $V(\vec{r})$ στα σημεία $(1,1,1)$ και $(2,4,8)$. Πραγματικά βρίσκουμε

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot dt = A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = a2\cdot 4\cdot 8 - a = 63a$$

Για τις τιμές $a \neq b \neq c \neq a$ όπου

$$15a + 6b - 21c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{15a+6b}{21}$$

τα δύο έργα πάνω στις δύο δοσμένες τροχιές είναι ίσα όμως το πεδίο δεν είναι αστρόβιλο. Ο στροβιλισμός του είναι

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = (cx - bx, ay - cy, bz - az) = (15x, 6y, -21z)\frac{a-b}{21} \neq 0$$

Άσκηση 3.4

Ενα σπειροειδές ελατήριο έχει την μορφή κυκλικής έλικας με παραμετρική εξίσωση $\vec{r}(t) = (a\,\text{συν}\,t, a\,\text{ημ}\,t, ct)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Εάν η πυκνότητά του είναι $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας του ελατηρίου.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα την μάζα του ελατηρίου που είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α− είδους $M = \int_c f ds$. Βρίσκουμε το μήκους του στοιχειώδους τόξου ds

$$ds = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt = \sqrt{\left(\frac{da\,\text{συν}\,t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da\,\text{ημ}\,t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dct}{dt}\right)^2} dt =$$

$$\sqrt{a^2\,\text{ημ}^2\,t + a^2\,\text{συν}^2\,t + c^2} dt = \sqrt{a^2 + c^2} dt$$

Αντικαθιστούμε τα x, y, z στην συνάρτηση f και βρίσκουμε

$$f = (a\,\text{συν}\,t)^2 + (a\,\text{ημ}\,t)^2 + (ct)^2 = a^2\,\text{συν}^2\,t + a^2\,\text{ημ}^2\,t + c^2 t^2 = a^2 + c^2 t^2$$

Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που δίνει την μάζα είναι

$$M = \int_c f ds = \int_0^{2\pi} \left(a^2 + c^2t^2\right) \sqrt{a^2 + c^2} dt =$$

$$\sqrt{a^2 + c^2} \left[a^2 t + c^2 t^3/3\right]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2} \left(a^2 + 4c^2\pi^2/3\right)$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$X = \frac{1}{M}\int_c xf ds \qquad Y = \frac{1}{M}\int_c yf ds \qquad Z = \frac{1}{M}\int_c zf ds$$

Θα υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά

$$X = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\,\text{συν}\,t(a^2+c^2t^2)\sqrt{a^2+c^2}dt = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+c^2t^2)\,\text{συν}\,t dt$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\,\text{ημ}\,t(a^2+c^2t^2)\sqrt{a^2+c^2}dt = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+c^2t^2)\,\text{ημ}\,t dt$$

$$Z = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} ct(a^2+c^2t^2)\sqrt{a^2+c^2}dt = \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+c^2t^2)t dt$$

Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Βρίσκουμε

$$\int (a^2+c^2t^2) \begin{matrix}\text{ημ}\,t\\ \text{συν}\,t\end{matrix} dt = \left(a^2+c^2t^2\right) \begin{matrix}-\,\text{συν}\,t\\ \text{ημ}\,t\end{matrix} - \int 2c^2t \begin{matrix}-\,\text{συν}\,t\\ \text{ημ}\,t\end{matrix} dt =$$

$$\left(a^2+c^2t^2\right) \begin{matrix}-\,\text{συν}\,t\\ \text{ημ}\,t\end{matrix} - 2c^2t \begin{matrix}-\,\text{ημ}\,t\\ -\,\text{συν}\,t\end{matrix} + 2c^2 \int \begin{matrix}-\,\text{ημ}\,t\\ -\,\text{συν}\,t\end{matrix} dt =$$

$$\left(a^2+c^2t^2\right) \begin{matrix}-\,\text{συν}\,t\\ \text{ημ}\,t\end{matrix} - 2c^2t \begin{matrix}-\,\text{ημ}\,t\\ -\,\text{συν}\,t\end{matrix} + 2c^2 \begin{matrix}\text{συν}\,t\\ -\,\text{ημ}\,t\end{matrix}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίζουμε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

$$X = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{M}\left[\left(a^2+c^2t^2\right)\text{ημ}\,t - 2c^2t(-\,\text{συν}\,t) + 2c^2(-\,\text{ημ}\,t)\right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{M}\left(2c^2 2\pi\right) = \frac{4\pi a c^2\sqrt{a^2+c^2}}{M} = \frac{2ac^2}{a^2+4c^2\pi^2/3}$$

$$Y = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{M}\left[\left(a^2+c^2t^2\right)\left(-\,\text{συν}\, t\right) - 2c^2 t(-\,\text{ημ}\, t) + 2c^2\,\text{συν}\, t\right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{M}\left(-\left(a^2+4c^2\pi^2\right)+2c^2+a^2-2c^2\right) = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{M}\left(-4c^2\pi^2\right) =$$

$$\frac{-4\pi^2 a c^2\sqrt{a^2+c^2}}{M} = \frac{-2\pi a c^2}{a^2+4c^2\pi^2/3}$$

Το ολοκλήρωμα για την τρίτη συνιστώσα του κέντρου μάζας είναι απλό.

$$Z = \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{M}\left[a^2\frac{t^2}{2}+c^2\frac{t^4}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{M}\left(a^2 2\pi^2 + c^2 4\pi^4\right) =$$

$$\frac{c\left(2a^2\pi^2+4c^2\pi^4\right)\sqrt{a^2+c^2}}{2\pi\sqrt{a^2+c^2}\left(a^2+4c^2\pi^2/3\right)} = \frac{c\pi\left(a^2+2c^2\pi^2\right)}{a^2+4c^2\pi^2/3}$$

Άσκηση 3.5

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα α′−είδους $I = \iint (x^2 + y^2)dS$ όπου S η επιφάνεια του κώνου $z^2 = 3(x^2+y^2)$ που περιορίζεται από τα επίπεδα $z=0$ και $z=3$.

Λύση: Γράφουμε την επιφάνεια σε παραμετρική μορφή με παραμέτρους τις ανεξάρτητες μεταβλητές ρ, θ.

$$x = \rho\,\text{συν}\,\theta \qquad y = \rho\,\text{ημ}\,\theta \qquad z = \sqrt{3(x^2+y^2)} = \sqrt{3\rho^2} = \sqrt{3}\rho$$

όπου οι παράμετροι ρ και θ μεταβάλλονται στις περιοχές

$$0 \le \rho \le 3/\sqrt{3} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Θα βρούμε το στοιχειώδες εμβαδόν dS της επιφάνειας. Το διάνυσμα θέσεως της επιφάνειας είναι

$$\vec{r} = (\rho\,\text{συν}\,\theta, \rho\,\text{ημ}\,\theta, \sqrt{3}\rho)$$

Παραγωγίζουμε ως προς τις παραμέτρους και βρίσκουμε

$$\vec{r}_\rho = (\text{συν}\,\theta, \text{ημ}\,\theta, \sqrt{3}) \qquad \vec{r}_\theta = (-\rho\,\text{ημ}\,\theta, \rho\,\text{συν}\,\theta, 0) \qquad \Longrightarrow$$

$$\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\theta & \sqrt{3} \\ -\rho\,\text{ημ}\,\theta & \rho\,\text{συν}\,\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{3}\rho\,\text{συν}\,\theta, -\sqrt{3}\rho\,\text{ημ}\,\theta, \rho)$$

Επομένως το στοιχειώδες εμβαδόν dS είναι

$$dS = \|\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta\| = \sqrt{3\rho^2\,\text{συν}^2\,\theta + 3\rho^2\,\text{ημ}^2\,\theta + \rho^2} = \sqrt{3\rho^2 + \rho^2} = 2\rho$$

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\iint (x^2+y^2)dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3/\sqrt{3}} \rho^2 2\rho d\rho = 2\pi\left[\rho^4/2\right]_0^{3/\sqrt{3}} = \pi(3/\sqrt{3})^4 = 9\pi$$

Άσκηση 3.6

Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα β΄–είδους για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2x^2y, y^2, 4xz^2)$ και την επιφάνεια του κυλίνδρου $y^2+z^2=9$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο δηλαδή $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ και φράσσεται από το επίπεδο $x=2$.

Λύση: Η εξίσωση της επιφάνειας του κυλίνδρου σε παραμετρική μορφή με παραμέτρους θ και x από τα δεδομένα του προβλήματος είναι

$$x = x, \quad y = 3\,\text{συν}\,\theta \quad z = 3\,\text{ημ}\,\theta \quad \longrightarrow \quad \vec{r}(x,\theta) = (x, 3\,\text{συν}\,\theta, 3\,\text{ημ}\,\theta)$$

όπου η παράμετρος θ μεταβάλλεται στην περιοχή $\pi/2 \geq \theta \geq 0$. Το κάθετο διάνυσμα $d\vec{S}$ στην επιφάνεια είναι

$$d\vec{S} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_x d\theta dx = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3\,\text{ημ}\,\theta & 3\,\text{συν}\,\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} dxd\theta = (0, 3\,\text{συν}\,\theta, 3\,\text{ημ}\,\theta)dxd\theta$$

Το διανυσματικό πεδίο πάνω στην δεδομένη επιφάνεια παίρνει τώρα την μορφή

$$\vec{F} = \left(2x^2y, y^2, 4xz^2\right) = \left(6x^2\,\text{συν}\,\theta, 9\,\text{συν}^2\,\theta, 36x\,\text{ημ}^2\,\theta\right)$$

και επομένως έχουμε

$$\vec{F}\cdot d\vec{S} = \left(6x^2\,\sigma\upsilon\nu\,\theta, 9\,\sigma\upsilon\nu^2\,\theta, 36x\,\eta\mu^2\,\theta\right)\cdot(0{,}3\,\sigma\upsilon\nu\,\theta, 3\,\eta\mu\,\theta)$$
$$=27\,\sigma\upsilon\nu^3\,\theta + 108x\,\eta\mu^3\,\theta$$

Υπολογίζουμε παρακάτω το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Βρίσκουμε

$$\iint \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 dx\left(27\,\sigma\upsilon\nu^3\,\theta + 108x\,\eta\mu^3\,\theta\right) = 27\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sigma\upsilon\nu^3\,\theta\,[x]_0^2$$
$$+108\int_0^{\pi/2} d\theta\,\eta\mu^3\,\theta\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 54\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sigma\upsilon\nu^3\,\theta + 216\int_0^{\pi/2} d\theta\,\eta\mu^3\,\theta =$$
$$54\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta + 216\int_0^{\pi/2} d\theta\,\eta\mu^2\,\theta\,\eta\mu\,\theta = 54\int_0^{\pi/2}\left(1-\eta\mu^2\,\theta\right)d\,\eta\mu\,\theta -$$
$$216\int_0^{\pi/2}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\,\theta\right)d\,\sigma\upsilon\nu\,\theta = 54\left[\eta\mu\,\theta - \frac{1}{3}\,\eta\mu^3\,\theta\right]_0^{\pi/2} -$$
$$216\left[\sigma\upsilon\nu\,\theta - \frac{1}{3}\,\sigma\upsilon\nu^3\,\theta\right]_0^{\pi/2} = 54(1-1/3) - 216(-1+1/3) = 36+144 = 180$$

Άσκηση 3.7

Ενα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h χωρίς αρχική ταχύτητα. Να βρεθεί η ταχύτητα του όταν φθάσει στο έδαφος.

Λύση: Είναι πειραματικό δεδομένο ότι η δύναμη που ασκεί το πεδίο βαρύτητας σε ένα σώμα είναι $\vec{F} = (0,0,-mg)$ όπου $g = 9,8\ m/sec^2$ και m η μάζα του σώματος. Ο άξονας των z έχει την διεύθυνση της κατακορύφου.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το δυναμικό πεδίο είναι αστρόβιλο δηλαδή $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$. Συνεπώς υπάρχει δυναμική συνάρτηση $V(\vec{r})$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$. Η λύση του διαφορικού αυτού συστήματος είναι

$$V(\vec{r}) = mgz$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας, έχουμε μηδενίσει τις σταθερές.

Το δυναμικό πεδίο είναι συντηρητικό και η ενέργεια του πεδίου είναι μια σταθερά. Αν v είναι η ταχύτητα του σώματος κατά την $z-$διεύθυνση την στιγμή που θα πέσει στο έδαφος, τότε ισχύει

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα δεν εξαρτάται από την μάζα του σώματος.

Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 3.8 Υπολογίσατε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα α΄–είδους:

1) $\int_C (9+8y^{1/2})ds$ όπου C η καμπύλη $\vec{r}(t) = 2t^{3/2}\vec{i} + t^2\vec{j}$ για $0 \leq t \leq 1$. **Απάντηση:** $26\sqrt{13}/3$

2) $\int_C (1+(9/4)z^{2/3})^{1/4}ds$ όπου C η καμπύλη $\vec{r}(t) = \text{συν}\, t\vec{i} + \text{ημ}\, t\vec{j} + t^{3/2}\vec{k}$. **Απάντηση:** $2032/63$

3) $\int_C (y+2z)ds$ όπου C η τριγωνική διαδρομή $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(-1,0,0)$. **Απάντηση:** $3\sqrt{2}$

Άσκηση 3.9 Υπολογίσατε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα β΄–είδους:

1) $\int_C ydx + xydy + z^3dz$ όπου C η καμπύλη $\vec{r}(t) = \text{συν}\, t\vec{i} + \text{ημ}\, t\vec{j} + 2t\vec{k}$ για $0 \leq t \leq 2\pi$. **Απάντηση:** $-\pi/4 + \pi^4/4 + 1/3$

2) $\int_C 5e^{\text{ημ}\, \pi x}dx - 4e^{\text{συν}\, \pi x}dy$ όπου C η καμπύλη $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} - ln(\cosh t)\vec{k}$ για $0 \leq t \leq \pi/6$. **Απάντηση:** 0

3) $\int_C ydx - xdy + xyz^2dz$ όπου C η καμπύλη $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^t\vec{j} + t\vec{k}$ για $0 \leq t \leq 1$. **Απάντηση:** $-5/3$

4) $\int_C xydx + (x+z)dy + z^2dz$ όπου C η καμπύλη $\vec{r}(t) = (t+1)\vec{i} + (t-1)\vec{j} + t^2\vec{k}$ για $-1 \leq t \leq 2$. **Απάντηση:** $57/2$

5) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x+y^2)dx + 2xydy$ α) κατά μήκος της ευθείας $y = 2x$ και β) κατά μήκος της παραβολής $y^2 = 4x$. Τι παρατηρείτε;

6) $\oint (\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x})$ πάνω στο τρίγωνο που περικλείεται από τις ευθείες $y = 1$, $x = 4$, $y = x$. **Απάντηση:** $3,75 - 2ln4$

7) $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ α) πάνω στον κύκλο $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = 2 + \text{ημ}\, t$ και β) πάνω στον κύκλο $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = \text{ημ}\, t$. **Απάντηση:** α) 0, β) π

8) $\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ α) Εάν C είναι το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ που διαγράφεται κατά φορά αντίθετο των δεικτών του ωρολογίου από το σημείο $(1,1)$ έως το σημείο $(-\sqrt{2}, 0)$. β) Εάν C είναι γραμμή $x = 1$ από το σημείο $(1,0)$ έως το σημείο $(1,\sqrt{3})$. γ) Εάν C είναι γραμμή $x+y = 1$ από

το σημείο $(0,1)$ έως το σημείο $(1,0)$. **Απάντηση:** α) $3\pi/4$, β) $\pi/3$, γ) $-\pi/2$

9) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} x^2ydx + y^3dy$ α) Πάνω στον κλιμακωτό δρόμο $(1,2)-(1,4)-(3,4)$ β) Πάνω στη γραμμή $x-y+1=0$. **Απάντηση:** α) $188/3$, β) $176/3$

10) $\int_C x(\frac{1-y^2}{y^2+z^2})^{1/2}dx$ κατά μήκος του πρώτου ογδοημορίου της καμπύλης που ορίζεται από τη τομή του επιπέδου $x=y$ και του κυλίνδρου $2y^2+z^2=1$ από το σημείο $(0,0,1)$ έως το σημείο $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0)$. **Απάντηση:** $1/2$

11) $\int_C ydx - y(x-1)dy + y^2zdz$ κατά μήκος του πρώτου ογδοημορίου της καμπύλης που ορίζεται από τη τομή των επιφανειών $x^2+y^2+z^2=4$, $(x-1)^2+y^2=1$ από το $(2,0,0)$ έως $(0,0,2)$. **Απάντηση:** $2/3-\pi/2$

12) $\int_C 2xydx - 3xydy$ όπου C είναι η περίμετρος του τετραγώνου που ορίζεται από τις εξισώσεις $x=3$, $x=5$, $y=1$, $y=3$ και διαγράφεται κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. **Απάντηση:** 56

Άσκηση 3.10 Υπολογίσατε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\oint_C \vec{F}\times d\vec{r}$ και $\oint_C \vec{F}\times\vec{r}\cdot d\vec{r}$ όταν $\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ και C είναι ο κύκλος $x^2+y^2=1$, $z=2$. **Απάντηση:** -2π, $\pi(\vec{j}-\vec{i})$, 0

Άσκηση 3.11 Υπολογίσατε τα ολοκληρώματα $\int_{C_1}(xy+z)ds$ και $\int_{C_2}(xy+z)ds$ όπου C_1 είναι η καμπύλη με παραμέτρηση $\vec{r}_1(t)=t\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k}$ για $0\le t\le 1/2$ και C_2 η καμπύλη με παραμέτρηση $\vec{r}_2(t)=\text{ημ}\,t\vec{i}+\text{ημ}\,t\vec{j}+\text{ημ}\,t\vec{k}$ για $0\le t\le \pi/6$. Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια; Εξηγήσατε γιατί ναι ή γιατί όχι;

Άσκηση 3.12 Δείξατε ότι τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα της διαδρομής και κατόπιν να τα υπολογίσετε

1) $\int_C(e^x+y)dx+(x+2y)dy$ όπου C είναι μία κατά τμήματα ομαλή καμπύλη στο XY επίπεδο από το σημείο $(0,1)$ έως το σημείο $(2,3)$.

2) $\int_C \frac{xdx+ydy+zdz}{1+x^2+y^2+z^2}$ όπου C η καμπύλη με παραμέτρηση $\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^4\vec{k}$ για $0\le t\le 1$. **Απάντηση:** 1) e^2+13, 2) $ln2$

Άσκηση 3.13 Υποθέτουμε ότι f, g και h είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξατε ότι το ολοκλήρωμα $\int_C f(x)dx+g(y)dy+h(z)dz$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

Άσκηση 3.14 Δίνεται η συνάρτηση $\vec{F}(x,y) = \frac{y\vec{i}-x\vec{j}}{x^2+y^2}$. Να αποδείξετε ότι $Curl\vec{F} = 0$. Αν R είναι οποιαδήποτε περιοχή του επιπέδου που περιέχει τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ αλλά δεν περιλαμβάνει την αρχή, να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ εξαρτάται από την διαδρομή στο R και κατά συνέπεια το $\vec{F}$ δεν είναι συντηρητικό.

Υπόδειξη: Υπολογίσατε το $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ στις καμπύλες C_1 και C_2 όπου C_1 είναι το ημικύκλιο με παραμέτρηση $\vec{r}_1(t) = \text{συν}\, t\vec{i} + \text{ημ}\, t\vec{j}$ για $0 \leq t \leq \pi$ και C_2 είναι το ημικύκλιο με παραμέτρηση $\vec{r}_2(t) = \text{συν}\, t\vec{i} - \text{ημ}\, t\vec{j}$ για $0 \leq t \leq \pi$.

Άσκηση 3.15 Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = g(u)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ όπου $u = x^2 + y^2 + z^2$ και g είναι μία συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής. Δείξατε ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό. Δείξατε ότι το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο.

Υπόδειξη: Δείξατε ότι $\vec{F} = gradf$ όπου $f(x,y,z) = \frac{1}{2}h(x^2 + y^2 + z^2)$ και $h(u) = \int g(u)du$.

Άσκηση 3.16 Να δείξετε ότι το πεδίο των δυνάμεων $\vec{F} = -kr^3\vec{r}$ είναι συντηρητικό. Γράψτε την δυναμική ενέργεια και την ολική σταθερή κινητική ενέργεια. **Απάντηση:** $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m(dr/dt)^2 + \frac{1}{5}kr^5$

Άσκηση 3.17 Βρείτε ποιες από τις παρακάτω μορφές είναι ολικά διαφορικά και ποιες όχι. Για τις μορφές που είναι ολικά διαφορικά βρείτε την συνάρτηση από την οποία προέρχονται α) $xdy + (y-7)dx$, β) $(2y^2 - 3x)dx - 4xydy$, γ) $(2xy + x^2)dx + x^2dy$ και δ) $xe^{xy}\text{ημ}\, ydx + (e^{xy}\,\text{συν}\, y + y)dx$.
Απάντηση: Οι β και δ δεν είναι.

Άσκηση 3.18 Να βρείτε μία συνάρτηση u τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $du = \frac{1+y^2}{x^3}dx - \frac{y+x^2y}{x^2}dy$. Να βρείτε κατόπιν την τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος $\int_C du$ α) από το $(1,0)$ στο $(5,2)$ και β) από το $(-3,0)$ στο $(-1,4)$. Σε κάθε περίπτωση ορίσατε οποιουσδήποτε ουσιαστικούς περιορισμούς στη διαδρομή C. **Απάντηση:** $-8/5$, $-148/9$

Άσκηση 3.19 Βρείτε μία συνάρτηση που να εξαρτάται μόνο από το x, $w = \phi(x)$ τέτοια ώστε η μορφή $w(x\,\text{ημ}\, y + y\,\text{συν}\, y)dx + w(x\,\text{συν}\, y - y\,\text{ημ}\, y)dy$ να είναι ολικό διαφορικό. Κατόπιν βρείτε τη συνάρτηση της οποίας η παραπάνω μορφή είναι διαφορικό. Δίνεται ότι η συνάρτηση είναι ίση με 0 στο σημείο $(0,0)$. **Απάντηση:** $w = e^x$, $e^x(x\,\text{ημ}\, y - \text{ημ}\, y + y\,\text{συν}\, y)$

Άσκηση 3.20 Εστω C μια οποιαδήποτε καμπύλη, που συνδέει ένα οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ με ένα τυχαίο σημείο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\beta^2$. Δείξατε ότι αν $\vec{F}=5r^3\vec{r}$ τότε $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\beta^5-\alpha^5$.

Άσκηση 3.21 Υπολογίσατε τα επιφανειακά ολοκληρώματα α΄–είδους:

1) $\iint_S (x^2+y^2)dS$ α) όπου S είναι η σφαίρα $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ και β) όπου S είναι η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου $x^2/\alpha^2+y^2/\alpha^2-z^2/\beta^2=0$, $0\le z\le\beta$. **Απάντηση:** α) $8\pi\alpha^4/3$, β) $2\pi\alpha^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}/3$

2) $\iint_S \sqrt{4x^2+4y^2+1}dS$ όπου S είναι το μέρος της επιφάνειας του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$ το οποίο βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $y=z$. **Απάντηση:** $5\pi/8$

3) $\iint_S (x+y)dS$ όπου S είναι ο κύβος με κορυφές τα σημεία $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ και $(0,1,1)$. **Απάντηση:** 6

4) $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{2\alpha z-z^2}}$ όπου S είναι το μέρος της επιφανείας $x^2+y^2+(z-\alpha)^2=\alpha^2$ που βρίσκεται μέσα στο κύλινδρο $x^2+y^2=\alpha y$ και κάτω από το επίπεδο $z=\alpha$. **Απάντηση:** $\pi^2\alpha/2$

5) $\iint_S xyzdS$ όπου S είναι το μέρος του $x^2+y^2=4$ στο πρώτο όγδοο και μεταξύ των $z=0$, $z=1$. **Απάντηση:** 2

Άσκηση 3.22 Υπολογίσατε τα επιφανειακά ολοκληρώματα β΄–είδους:

1) $\iint_S (x\vec{i}+y\vec{j})\cdot d\vec{S}$ πάνω στο τμήμα της επιφανείας της μοναδιαίας σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ και πάνω από το XY επίπεδο, $z\ge 0$. **Απάντηση:** $4\pi/3$

2) $\iint_S (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot d\vec{S}$ πάνω στη κλειστή επιφάνεια του κύβου ο οποίος περιορίζεται από τα επίπεδα $x=\pm1$, $y=\pm1$, $z=\pm1$. **Απάντηση:** 2

3) $\iint_S (yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k})\cdot d\vec{S}$ πάνω στο κλειστό σύνορο της περιοχής που ορίζεται κάτω από τη $z=x^2+y^2$ και πάνω με τη $z=1$. **Απάντηση:** 0

4) $\iint_S (18z\vec{i}-12\vec{j}+3y\vec{k})\cdot d\vec{S}$ όπου S είναι το τμήμα του επιπέδου $2x+3y+6z=12$ το οποίο ευρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο. **Απάντηση:** 24

5) $\iint_S (y\vec{i}-x\vec{j}+z^2\vec{k})\cdot\vec{n}dS$ όπου S είναι το μέρος του παραβολοειδούς $z=9-x^2-y^2$ πάνω από το XY επίπεδο. Το διάνυσμα $\vec{n}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό μέρος της επιφάνειας. **Απάντηση:** 72π

6) $\iint_S (-y\vec{i}+x\vec{j}+z^4\vec{k})\cdot\vec{n}dS$ όπου S είναι η σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4$. Το $\vec{n}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό μέρος της σφαίρας. **Απάντηση:** 0

7) $\iint_S (x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}) \cdot d\vec{S}$ όπου S είναι η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **Απάντηση:** $-12\pi/5$.

8) $\iint_S \nabla\times(y\vec{i}+(x-2xz)\vec{j}-xy\vec{k})\cdot d\vec{S}$ όπου S είναι η σφαίρα $x^2+y^2+z^2 = \alpha^2$. **Απάντηση:** 0

Άσκηση 3.23 Υπολογίσατε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου $\vec{F} = (2x+3z, -xz-y, y^2+2z)$ στην επιφάνεια της σφαίρας με κέντρο το σημείο $(3,-1,2)$ και ακτίνα $r = 3$.

Άσκηση 3.24 Υπολογίσατε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \frac{dS}{r}$ όπου S είναι το μέρος της επιφάνειας του υπερβολικού παραβολοειδούς $z = xy$ που κόβεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = R^2$ και r είναι η απόσταση του τυχαίου σημείου της επιφάνειας από τον άξονα OZ.

Άσκηση 3.25 Υπολογίσατε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \frac{dS}{r^2}$ όπου S ο κύλινδρος $x^2+y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = h$ και r είναι η απόσταση του τυχαίου σημείου της επιφάνειας από την αρχή. **Απάντηση:** $2\pi\,\text{τοξεφ}\,(h/R)$.

Άσκηση 3.26 Υπολογίσατε τη τιμή των επιφανειακών ολοκληρωμάτων

1) $\iint_S yzdydz+xzdzdx+xydxdy$ όπου S είναι η επιφάνεια των εξωτερικών πλευρών του τετραέδρου που ορίζεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = \alpha$. **Απάντηση:** 0

2) $\iint_S zdxdy$ όπου S είναι η εξωτερική επιφάνεια του ελλειψοειδούς $x^2/\alpha^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. **Απάντηση:** $4\pi\alpha bc/3$

3) $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$ όπου S είναι η εξωτερική επιφάνεια του ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2 = \alpha^2$, $z \leq 0$. **Απάντηση:** $\pi\alpha^4/2$

4) $\iint_S x^2y^2z^2dS$ όπου S είναι η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου $x^2+y^2 = z^2$ η οποία κείται μεταξύ των παραλλήλων επιπέδων $z = 0$ και $z = 1$. **Απάντηση:** $\pi\sqrt{2}/32$

5) $\iint_S (x^3 - yz)dydz - 2x^2ydzdx + zdxdy$ πάνω στη παράπλευρη επιφάνεια του κύβου ο οποίος ορίζεται από τα συντεταγμένα επίπεδα και τα επίπεδα $x = y = z = \alpha$. **Απάντηση:** $\alpha^5/3 + \alpha^3$

Άσκηση 3.27 Αν μία επιφάνεια έχει εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες την $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$ να αποδειχτεί ότι, το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x,y,z)$ δίνεται από τον τύπο $\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\frac{1}{\text{συν}\,\theta}dxdy$ όπου $\theta = \theta(x,y)$ είναι η γωνία του καθέτου διανύσματος $\vec{n}$ στο σημείο $(x,y,g(x,y))$ της επιφανείας, με το διάνυσμα $\vec{k}$.

Άσκηση 3.28 Υποθέτουμε ότι ένα ρευστό έχει σταθερή πυκνότητα $\rho = 50$ και ρέει με ταχύτητα $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ορίσατε το ρυθμό ροής μάζας διαμέσου της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ κατά τη κατεύθυνση της καθέτου προς το εξωτερικό της σφαίρας. **Απάντηση:** $2000\pi\sqrt{10}$

Άσκηση 3.29 Να βρεθεί το εμβαδόν του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = a^2$ στο πρώτο όγδοο που περικλείεται μεταξύ των επιπέδων $z = 0$ και $z = mx$.

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ που περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2 = a^2$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = ay$ όπου $a > 0$.

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που αποκόπτει ο κύλινδρος $z^2 = 4ax$ και το επίπεδο $x = 3a$, από τον κύλινδρο $y^2 = 4ax$ στο πρώτο όγδοο.

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του τόρου με παραμετρική εξίσωση $\vec{r}(\theta, \varphi) = (\beta + \alpha\,\text{ημ}\,\varphi)\,\text{συν}\,\theta\vec{i} + (\beta + \alpha\,\text{ημ}\,\varphi)\,\text{ημ}\,\theta\vec{j} + \alpha\,\text{συν}\,\varphi\vec{k}$, με $0 \le \theta < 2\pi$ και $0 \le \varphi < 2\pi$.

Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας $5z = xy$ που περιέχεται μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$.

Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος του παραβολοειδούς $z = x^2/8 + y^2/10$ που περιέχεται μέσα στον κύλινδρο $x^2/16 + y^2/25 = 1$.

Άσκηση 3.30 Βρείτε το εμβαδόν του τμήματος της μοναδιαίας σφαίρας που αποκόπτεται από τον κώνο $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τις $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \le 1$. Βρείτε τέλος το εμβαδόν της επιφάνειας $\vec{r}(r, \theta) = (r\,\text{συν}\,\theta, 2r\,\text{συν}\,\theta, \theta)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Άσκηση 3.31 Υποθέτουμε ότι η καμπύλη $y = f(x)$, $a \le x \le b$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα των y. Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που διαγράφεται είναι $E = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}|x|dx$. Χρησιμοποιείστε τον τύπο για να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ γύρω από τον άξονα y.

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρωτικά Θεωρήματα

Το Θεώρημα του Γκρήν (Green)

Αν D είναι μια κλειστή περιοχή του $XY-$επιπέδου της οποίας το σύνορο είναι μία κλειστή ομαλή κατά τμήματα καμπύλη και $\mathrm{M}(x,y)$ και $\mathrm{N}(x,y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους επί του D τότε ισχύει η σχέση

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdx$$

Το θεώρημα του Γκρήν μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που η περιοχή είναι απλά ή και πολλαπλά συνεκτική.

Ενα πεδίο είναι **απλά συνεκτικό** αν κάθε κλειστή καμπύλη στην περιοχή αυτή μπορεί να συσταλεί συνεχώς ώστε να γίνει ένα σημείο χωρίς να φεύγει έξω από την περιοχή. Μια τέτοια καμπύλη ονομάζεται αναγώγιμη σε ένα σημείο.

Αν $\vec{F} = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ τότε

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{k}dxdy$$

Ο τύπος αυτός είναι μερική περίπτωση του τύπου του Στόουκς.

Αν η καμπύλη C έχει τη φυσική παραμέτρηση $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ και το διανυσματικό πεδίο δίνεται από την σχέση $\vec{F}(x,y) = N(x,y)\vec{i} - M(x,y)\vec{j}$

τότε ο τύπος του Γκρήν παίρνει την μορφή

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}ds = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_D \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dxdy$$

Ο τύπος αυτός είναι μερική περίπτωση του τύπου του Γκάους.

Θεώρημα Στόουκς (Stokes)

Υποθέτουμε ότι S είναι μία ομαλή (λεία) και προσανατολισμένη επιφάνεια η οποία φράσσεται από μία ομαλή κατά τμήματα κλειστή καμπύλη C. Αν επί πλέον $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$ είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο επί του S και του οποίου οι συνιστώσες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, στο χώρο που περιορίζεται από την επιφάνεια S, τότε ισχύει

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C Mdx + Ndy + Pdz = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$$

Το θεώρημα του Στόουκς είναι γενίκευση του θεωρήματος Γκρήν.

4.1 Το θεώρημα της απόκλισης του Γκάους (Gauss)

Αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(\vec{r}) = (M,N,P)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο χωρίο V με σύνορο μία ομαλή ή κατά τμήματα ομαλή κλειστή και προσανατολισμένη επιφάνεια S τότε το ολοκλήρωμα όγκου της $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ μέσα στην επιφάνεια S ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\vec{F}$ επί της S.

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dxdydz = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

Με την βοήθεια των παραπάνω ολοκληρωτικών θεωρημάτων μπορούμε να βρούμε τις ολοκληρωτικές εκφράσεις για την απόκλιση και τον στροβιλισμό ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ και την βάθμωση ενός βαθμωτού πεδίου f. Οι σχέσεις είναι

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \underset{\Delta V\to 0}{\text{ορ}} \frac{1}{\Delta V}\oiint_{\Delta S} d\vec{S}\cdot\vec{F} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{F} = \underset{\Delta V\to 0}{\text{ορ}} \frac{1}{\Delta V}\oiint_{\Delta S} d\vec{S}\times\vec{F}$$

$$\vec{\nabla}f = \underset{\Delta V\to 0}{\text{ορ}} \frac{1}{\Delta V}\oiint_{\Delta S} d\vec{S}f$$

και μπορούν να θεωρηθούν και σαν ο ορισμός τους.

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 4.1

Να επαληθευτεί το θεώρημα του Γκρήν για την συνάρτηση

$$\vec{F} = \left(2xy - x^2, x + y^2\right)$$

και για την κλειστή καμπύλη C που ορίζεται από τις συναρτήσεις

$$y = x^2 \qquad\qquad x = y^2$$

Λύση: Θα βρούμε πρώτα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στην κλειστή καμπύλη C. Εχουμε

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Η καμπύλη C_1 δίνεται από την εξίσωση $y = x^2$. Οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης αυτής είναι

$$y = t \qquad\qquad x = t^2 \qquad\qquad 1 \le t \le 0$$

Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^0 \left(2t^2t - t^4, t^2 + t^2\right)\cdot(2tdt, dt) =$$

$$\int_1^0 \left(4t^4 - 2t^5 + 2t^2\right)dt = \left[\frac{4t^5}{5} - \frac{2t^6}{6} + 2\frac{t^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{17}{15}$$

Η καμπύλη C_2 δίνεται από την εξίσωση $x = y^2$. Οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης αυτής είναι

$$x = t \qquad\qquad y = t^2 \qquad\qquad 0 \le t \le 1$$

Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(2tt^2 - t^2, t + t^4\right) \cdot (dt, 2tdt) =$$

$$\int_0^1 \left(2t^3 + t^2 + 2t^5\right) dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{6}$$

Αρα τελικά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης του Γκρήν. Εχουμε

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x + y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy - x^2\right)\right] dxdy =$$

$$\iint_R (1 - 2x)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, (1 - 2x) = \int_0^1 dx\, [y - 2xy]_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$\int_0^1 dx \left(\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3\right) = \int_0^1 dx \left(x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3\right) =$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{4}x^4 = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

Επομένως τα δύο μέλη της εξίσωσης του Γκρήν είναι ίσα και το θεώρημα ισχύει.

Άσκηση 4.2

Να επαληθευτεί το θεώρημα του Στόουκς για την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{f} = (x + y, 2x - z, y + z)$$

Η επιφάνεια S είναι το επίπεδο με εξίσωση

$$3x + y + 2z = 6 \qquad\qquad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$$

Λύση: Θα υπολογίσουμε πρώτα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Εχουμε

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

Η καμπύλη C_1 είναι η τομή των επιπέδων

$$3x + y + 2z = 6 \qquad\qquad z = 0$$

και άρα περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t \qquad y = 6 - 3t \qquad z = 0 \qquad\qquad 0 \le t \le 2$$

Τα σημεία της καμπύλης αυτής έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = (t, 6-3t, 0) \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, -3, 0)$$

Η διανυσματική συνάρτηση πάνω στην καμπύλη αυτή είναι

$$\vec{f} = (t + 6 - 3t, 2t, 6 - 3t) = (6 - 2t, 2t, 6 - 3t)$$

και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{C_1} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 (6-2t, 2t, 6-3t)\cdot(1,-3,0)\,dt = \int_0^2 (6 - 2t - 6t)\,dt =$$

$$\int_0^2 (6-8t)\,dt = \left[6t - 4t^2\right]_0^2 = 12 - 16 = -4$$

Η καμπύλη C_2 είναι η τομή των επιπέδων

$$3x + y + 2z = 6 \qquad\qquad x = 0$$

και άρα περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$z = t \qquad y = 6 - 2t \qquad x = 0 \qquad\qquad 3 \le t \le 0$$

Τα σημεία της καμπύλης αυτής έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = (0, 6-2t, t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = (0, -2, 1)$$

Η διανυσματική συνάρτηση πάνω στην καμπύλη αυτή είναι

$$\vec{f} = (0+6-3t, -t, 6-2t+t) = (6-2t, -t, 6-t)$$

και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_3^0 (6-2t, -t, 6-t) \cdot (0, -2, 1)\, dt = \int_3^0 (2t+6-t)\, dt =$$

$$\int_3^0 (6+t)\, dt = \left[6t - \frac{1}{2}t^2\right]_3^0 = -18 - \frac{9}{2}$$

Η καμπύλη C_3 είναι η τομή των επιπέδων

$$3x + y + 2z = 6 \qquad\qquad y = 0$$

και άρα περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t \qquad z = 3 - \frac{3}{2}t \qquad y = 0 \qquad\qquad 2 \leq t \leq 0$$

Τα σημεία της καμπύλης αυτής έχουν διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = \left(t, 0, 3 - \frac{3}{2}t\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(1, 0, -\frac{3}{2}\right)$$

Η διανυσματική συνάρτηση πάνω στην καμπύλη αυτή είναι

$$\vec{f} = \left(t, 2t-3+\frac{3}{2}t, -3-\frac{3}{2}t\right) = \left(t, -3+\frac{7}{2}t, 3-\frac{3}{2}t\right)$$

και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{C_3} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_2^0 \left(t, -3+\frac{7}{2}t, 3-\frac{3}{2}t\right) \cdot \left(1, 0, -\frac{3}{2}\right) dt = \int_2^0 \left(t - \frac{9}{2} + \frac{9}{4}t\right) dt$$

$$= \int_2^0 \left(-\frac{9}{2} + \frac{13}{4}t\right) dt = \left[-\frac{9}{2}t + \frac{13}{8}t^2\right]_2^0 = \frac{9}{2}2 - \frac{13}{8}4 = 9 - \frac{13}{2}$$

Προσθέτουμε τέλος τα τρία παραπάνω ολοκληρώματα και βρίσκουμε

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = -4 - 18 - \frac{9}{2} + 9 - \frac{13}{2} = -24$$

Θα υπολογίσουμε ακολούθως το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Οι παραμετρικές εξισώσεις του δεδομένου επιπέδου είναι

$$x = u \qquad z = v \qquad 3x + y + 2z = 6 \quad \Longrightarrow \quad y = 6 - 3u - 2v$$

Επομένως βρίσκουμε

$$\vec{r} = (u, 6 - 3u - 2v, v) \qquad 0 \leq u \leq 2 \qquad 0 \leq v \leq 3$$

και οι μερικές παράγωγοι του διανύσματος αυτού ως προς u και v είναι

$$\vec{r}_u = (1, -3, 0) \qquad \vec{r}_v = (0, -2, 1)$$

Βρίσκουμε ακολούθως το κάθετο διάνυσμα $d\vec{S}$.

$$d\vec{S} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} dudv = (-3, -1, -2)dudv = -(3, 1, 2)dudv$$

Ο στροβιλισμός του διανύσματος $\vec{f}$ είναι

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x + y & 2x - z & y + z \end{vmatrix} = (1 - (-1), 0 - 0, 2 - 1) = (2, 0, 1)$$

Υπολογίζουμε τέλος το επιφανειακό ολοκλήρωμα του θεωρήματος του Στόουκς

$$\iint_D \vec{\nabla} \times \vec{f} \cdot d\vec{S} = -\iint (2, 0, 1) \cdot (3, 1, 2) dudv = -8 \iint_D dudv =$$

$$-8\int_0^2 du\int_0^{3-3/2u}dv = -8\int_0^2 du(3-3/2u) = -8\left[3u-3/4u^2\right]_0^2 =$$

$$-8(3\cdot 2 - 3/4\ 2^2) = -8(6-3) = -24$$

Αποδείξαμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το επιφανειακό ολοκλήρωμα και άρα το θεώρημα του Στόουκς ισχύει.

Άσκηση 4.3

Να επαληθευτεί το θεώρημα του Στόουκς για την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{f} = \left(2y, 3x, -z^2\right)$$

πάνω στην επιφάνεια S του ημισφαιρίου με εξίσωση

$$x^2+y^2+z^2 = 9 \qquad\qquad z\geq 0$$

Λύση: Θα υπολογίσουμε πρώτα το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Οι παραμετρικές εξισώσεις της δεδομένης επιφάνειας με παραμέτρους τις ανεξάρτητες μεταβλητές θ και φ είναι

$$x = 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi \qquad y = 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi \qquad z = 3\,\text{συν}\,\theta$$

η παράμετροι μεταβάλλονται ως εξής

$$0\leq\varphi\leq 2\pi \quad \text{και} \quad z\geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$$

Το διάνυσμα θέσης των σημείων της επιφάνειας είναι

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = (3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, 3\,\text{συν}\,\theta)$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους του παραπάνω διανύσματος ως προς τις παραμέτρους και το διάνυσμα $d\vec{S}$. Βρίσκουμε

$$\vec{r}_\theta = (3\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 3\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, -3\,\text{ημ}\,\theta) \quad \vec{r}_\varphi = (-3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 0)$$

$$d\vec{S} = \vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi d\theta d\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi & 3\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi & -3\,\text{ημ}\,\theta \\ -3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi & 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi & 0 \end{vmatrix} = 9(\text{ημ}^2\,\theta\,\text{συν}\,\varphi,$$

$$\eta\mu^2\theta\,\eta\mu\,\varphi, \eta\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta(\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi)) = 9\left(\eta\mu^2\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi, \eta\mu^2\theta\,\eta\mu\,\varphi, \frac{1}{2}\eta\mu\,2\theta\right)$$

Ο στροβιλισμός του δεδομένου διανύσματος $\vec{f}$ είναι

$$\vec{\nabla}\times\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = (0,0,3-2) = (0,0,1)$$

Υπολογίζουμε τέλος το επιφανειακό ολοκλήρωμα του θεωρήματος Στόουκς

$$\iint_D \vec{\nabla}\times\vec{f}\cdot d\vec{S} = \iint_D \frac{9}{2}\eta\mu\,2\theta d\theta d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \eta\mu\,2\theta d\theta =$$

$$\frac{9}{2}2\pi\left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\,2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 9\pi\left(-\frac{1}{2}(-1-1)\right) = 9\pi$$

Θα υπολογίσουμε ακολούθως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Η καμπύλη C είναι η περιφέρεια του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=9$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 3\,\sigma\upsilon\nu\,t \qquad y = 3\,\eta\mu\,t \quad \Longrightarrow \quad dx = -3\,\eta\mu\,tdt \qquad dy = 3\,\sigma\upsilon\nu\,tdt$$

Η συνάρτηση $\vec{f}$ πάνω στην καμπύλη αυτή έχει τιμή $\vec{f} = (2y, 3x, 0)$. Το ολοκλήρωμα είναι

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = \oint_C (2y,3x,0)\cdot(dx,dy,dz) = \oint_C 2ydx + 3xdy =$$

$$\int_0^{2\pi} 2\cdot 3\cdot\eta\mu\,t(-3)\,\eta\mu\,tdt + 3\cdot 3\cdot\sigma\upsilon\nu\,t\cdot 3\,\sigma\upsilon\nu\,tdt = \int_0^{2\pi}(-18\,\eta\mu^2 t + 27\,\sigma\upsilon\nu^2 t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{18}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\,2t) + \frac{27}{2}(1+\sigma\upsilon\nu\,2t)\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(9+45\,\sigma\upsilon\nu\,2t)dt =$$

$$\left[\frac{9}{2} + \frac{45}{4}\eta\mu\,2t\right]_0^{2\pi} = 9\pi$$

Τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα με 9π και άρα το θεώρημα επαληθεύτηκε.

Άσκηση 4.4

Να επαληθευτεί το θεώρημα του Γκάους για την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{f} = (x^2, y^2, z^2)$$

και για τον κύβο

$$0 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq y \leq 1 \qquad 0 \leq z \leq 1$$

Λύση: Η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\vec{f}$ είναι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^2 + \frac{\partial}{\partial z} z^2 = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$$

Βρίσκουμε τώρα το πρώτο μέλος της εξίσωσης του Γκάους. Εχουμε

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 2 \iiint_V (x+y+z) dxdydz = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz(x+y+z) =$$

$$2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[xz + yz + \frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy(x + y + \frac{1}{2}) =$$

$$2 \int_0^1 dx \left[xy + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y \right]_0^1 = 2 \int_0^1 dx \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2 \int_0^1 dx \, (x + 1) =$$

$$2 \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 3$$

Θα υπολογίσουμε ακολούθως το δεύτερο μέλος της ταυτότητας του Γκάους. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια του κύβου είναι ίσο με το άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων πάνω στις έξι έδρες του κύβου. Αν συμβολίσουμε με S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 και S_6 τις επιφάνειες αυτές έχουμε

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=0}^{6} \iint_{S_i} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

Η έδρα S_1 που βρίσκεται πάνω στο συντεταγμένο επίπεδο XOY, έχει τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις

$$S_1: \quad \vec{r}(u,v) = (u,v,0) \qquad 0 \le u \le 1 \qquad 0 \le v \le 1$$

Επομένως έχουμε

$$\vec{r}_u = (1,0,0) \quad \vec{r}_v = (0,1,0) \quad \Longrightarrow \quad d\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} dudv = (0,0,1)dudv$$

Η δεδομένη συνάρτηση πάνω στην έδρα αυτή παίρνει την τιμή

$$\vec{f}(\vec{r}) = (u^2, v^2, 0)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια S_1 είναι ίσο με το μηδέν. Πράγματι

$$\iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (u^2, v^2, 0) \cdot (0,0,1)dudv = 0$$

Η έδρα S_4 που βρίσκεται απέναντι από την παραπάνω έδρα S_1 πάνω στο, έχει τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις

$$S_4: \quad \vec{r}(u,v) = (u,v,1) \qquad 0 \le u \le 1 \qquad 0 \le v \le 1$$

Επομένως έχουμε

$$\vec{r}_u = (1,0,0) \quad \vec{r}_v = (0,1,0) \quad \Longrightarrow \quad d\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} dudv = (0,0,1)dudv$$

Η δεδομένη συνάρτηση πάνω στην έδρα αυτή παίρνει την τιμή

$$\vec{f}(\vec{r}) = (u^2, v^2, 1)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια S_4 είναι

$$\iint_{S_4} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_4} (u^2, v^2, 1) \cdot (0,0,1)dudv = \iint_{S_4} dudv =$$

$$\int_0^1 du \int_0^1 dv = [u]_0^1 \, [v]_0^1 = 1$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε εύκολα ότι το επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στις έδρες S_2, S_3 που βρίσκονται πάνω στα συντεταγμένα επίπεδα YOZ, ZOX αντιστοίχως είναι ίσα με μηδέν ενώ τα επιφανειακά ολοκληρώματα στις έδρες S_5 και S_6 που βρίσκονται απέναντι από τα παραπάνω συντεταγμένα επίπεδα είναι ίσα με 1. Ετσι έχουμε

$$\oiint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=0}^{6} \iint_{S_i} \vec{f} \cdot d\vec{S} = 0+0+0+1+1+1 = 3$$

Επομένως τα δύο μέλη της εξίσωσης του Γκάους είναι ίσα με το 3 και άρα το θεώρημα ισχύει.

Άσκηση 4.5

Εστω $\rho(\vec{r}, t)$ η πυκνότητα ενός ρευστού μέσα σε ένα όγκο V που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S. Εάν $v(\vec{r}, t)$ είναι το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού τότε να αποδειχτεί ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \qquad \text{όπου} \qquad \vec{j} = \rho\vec{v}$$

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν περιοχές που παράγεται ή εξαφανίζεται μάζα. Γενικά για κάθε μέγεθος που διατηρείται υπάρχει και μια αντίστοιχη εξίσωση συνεχείας.

Λύση: Το μέγεθος ρdV είναι η μάζα του ρευστού που βρίσκεται στον στοιχειώδη όγκο dV. Η μάζα του ρευστού που καταλαμβάνει τον όγκο V είναι

$$\int_V \rho dV$$

Η μεταβολή ως προς τον χρόνο της μάζας αυτής είναι

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Εστω dS ένα στοιχείο της επιφάνειας γύρω από το σημείο P και $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S με φορά από το εσωτερικό προς το εξωτερικό της επιφάνειας. Εάν $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο P τότε η προβολή του διανύσματος αυτού κατά την κάθετο διεύθυνση είναι ίση με $\vec{v} \cdot \vec{n}$. Το ποσό της μάζας του ρευστού που βγαίνει από την επιφάνεια dS είναι $\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$. Η συνολική εκροή του ρευστού από την επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο V είναι

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Επειδή δεν παράγεται ούτε εξαφανίζεται μάζα έπεται ότι η μεταβολή της μάζας μέσα στον όγκο V οφείλεται στην εκροή (ή στην εισροή) της μάζας από την επιφάνεια S. Επομένως ισχύει η ισότητα

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Γκάους στο δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης και έχουμε

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})\, dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε όγκο V άρα η ποσότητα κάτω από το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως έχουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

η οποία είναι η εξίσωση συνεχείας.

Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 4.6 Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Γκρήν για να υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1) $\int_C xy^2dx + 2x^2ydy$ γύρω από την έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$ και κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου. **Απάντηση:** 0

2) $\int_C e^y \,\text{συν}\, xdx + e^y \,\text{ημ}\, xdy$ γύρω από το σύνορο οποιασδήποτε ομαλής περιοχής. **Απάντηση:** 0

3) $\int_C (y\vec{i} + 3x\vec{j}) \cdot d\vec{r}$ όπου C είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου. **Απάντηση:** 8π

4) $\int_C (y \,\text{ημ}\, x\vec{i} - \text{συν}\, x\vec{j}) \cdot d\vec{r}$ όπου C αποτελείται από το ημικύκλιο $x^2+y^2 = 9$ για $y \geq 0$ και τη γραμμή $y = 0$ για $-3 \leq x \leq 3$. **Απάντηση:** 0

Άσκηση 4.7 Με τη βοήθεια του θεωρήματος Γκρήν βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται, πάνω από τον άξονα των X και κάτω από ένα τόξο του κυκλοειδούς με παραμέτρηση $\vec{r}(t) = (t - \text{ημ}\, t)\vec{i} + (1 - \text{συν}\, t)\vec{j}$, για $0 \leq t \leq 2\pi$. **Απάντηση:** 3π

Άσκηση 4.8 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_C (y - \text{ημ}\, x)dx + \text{συν}\, xdy$ όπου C είναι η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 1)$, α) κατ'ευθείαν και β) χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Γκρήν.

Άσκηση 4.9 Να επαληθευτεί το θεώρημα του Γκρήν για τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία

1) $\vec{F} = (2x - y^3)\vec{i} - xy\vec{j}$ για τη καμπύλη C, η οποία είναι το σύνορο της περιοχής που περικλείεται από τους κύκλους: $x^2+y^2 = 4$ και $x^2+y^2 = 9$.

2) $\vec{F} = (xy - x^2)\vec{i} + x^2y\vec{j}$ πάνω στο τρίγωνο που ορίζεται από τις γραμμές $y = 0$, $x = 1$, $y = x$. **Απάντηση:** $-1/12$

3) $\vec{F} = (xy + y^2)\vec{i} + x^2\vec{j}$ όπου C είναι η κλειστή καμπύλη της περιοχής που ορίζεται από τις $y = x^2$ και $y = x$. **Απάντηση:** $-1/20$

4) $\vec{F} = (x^3 + y^2)\vec{i} + (x + y)^2\vec{j}$ όπου C είναι η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία Α$(1, 1)$, Β$(2, 2)$ και $C(1, 3)$. **Απάντηση:** $-8/3$

Άσκηση 4.10 Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Γκρήν για να μετασχηματίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα σε απλούστερο $\oint_C \sqrt{x^2+y^2}dx + y[xy + ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$ όπου το σύνορο C ορίζει την περιοχή S. **Απάντηση:** $\iint_S y^2 dxdy$

Άσκηση 4.11 Εκτιμήσατε το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. Θεωρήσατε δύο περιπτώσεις α) όταν η αρχή του συστήματος των συντεταγμένων είναι έξω από τη καμπύλη C και β) όταν η καμπύλη C περιβάλλει την αρχή n φορές. **Απάντηση:** α) 0, β) $2n\pi$

Άσκηση 4.12 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{dx-dy}{x+y}$ όπου C είναι η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ και $D(0,-1)$ και διαγράφεται κατά φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ωρολογίου. Το θεώρημα Γκρήν δεν εφαρμόζεται. **Απάντηση:** -4.

Άσκηση 4.13 Εφαρμόσατε το θεώρημα του Στόουκς για να υπολογίστε τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα και στη συνέχεια επαληθεύσατε το αποτέλεσμα με απ'ευθείας υπολογισμούς

1) $\oint_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ όπου C είναι ο κύκλος $x^2+y^2+z^2 = \alpha^2$, $x+y+z=0$. **Απάντηση:** 0

2) $\oint_C xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$ όπου C είναι η καμπύλη $x = \alpha\,\text{ημ}\,t$, $y = \alpha\,\text{συν}\,t$, $z = \alpha(\text{ημ}\,t + \text{συν}\,t)$, $0 \le t \le 2\pi$. **Απάντηση:** $-\pi\alpha^2$

3) $\oint_C (x^2+z)dx+(y^2+x)dy+(z^2+y)dz$ όπου C είναι η τομή της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = 1$ και του κώνου $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Η C έχει προσανατολισμό αντίθετο των δεικτών του ωρολογίου. **Απάντηση:** $\pi/2$

Άσκηση 4.14 Επαληθεύσατε το θεώρημα Στόουκς για τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία

1) $\vec{F} = (2x-y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$ όπου S είναι το πάνω μισό της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = 1$ και C είναι το σύνορό της. **Απάντηση:** π

2) $\vec{F} = (2y+z)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k}$ όπου S είναι το τρίγωνο ΑΒΓ που σχηματίζεται από το επίπεδο $x+y+z = 1$ και τα συντεταγμένα επίπεδα.

Άσκηση 4.15 Υπολογίσατε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}dS$ για $\vec{F} = (y-z+2)\vec{i} + (yz+4)\vec{j} - xz\vec{k}$ όπου S είναι η παράπλευρη επιφάνεια του κύβου ο οποίος ορίζεται από τις $x = y = z = 0$, $x = y = z = 2$ πάνω από το $XY-$επίπεδο. **Απάντηση:** -4

Άσκηση 4.16 Αποδείξατε ότι $\oint_C \vec{r}\times d\vec{r} = \iint_S d\vec{S}$ όπου S είναι μία επιφάνεια η οποία περικλείει ένα κύκλο C.

Άσκηση 4.17 Με χρήση του θεωρήματος Στόουκς υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C (1+y)zdx + (1+z)xdy + (1+x)ydz$ για τον καθένα από τους παρακάτω ορισμούς της καμπύλης C.

α) Ο κύκλος $x = \text{συν}\,\theta$, $y = \text{ημ}\,\theta$, $z = 1$ στον οποίο έχει οριστεί σαν θετική φορά η διεύθυνση αύξησης του θ.

β) Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ και $P_3(0,0,1)$ θεωρώντας σαν θετική φορά διαγραφής από το P_1 στο P_2.

γ) Μία οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη στο επίπεδο $x - 2y + z = 1$.

Απάντηση: α) π, β) $3/2$, γ) 0

Άσκηση 4.18 Υπολογίστε τα παρακάτω επιφανεικά ολοκληρώματα αν είναι δυνατόν με τη βοήθεια του θεωρήματος Στόουκς

1) $\iint_S \vec{n}\cdot\nabla\times\vec{G}dS$ όπου $\vec{G} = y\vec{i}$ πάνω στο τμήμα της μοναδιαίας σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το $XY-$επίπεδο.
Απάντηση: $-\pi$

2) $\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ όπου $\vec{F}(x,y,z) = xz^2\vec{i} + x^3\vec{j} + \text{συν}\,xz\vec{k}$ όπου S είναι το μέρος του ελλειψοειδούς $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, που βρίσκεται κάτω από το $XY-$επίπεδο και το διάνυσμα $\vec{n}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό μέρος του ελλειψοειδούς. **Απάντηση:** $-3\pi/4$

3) $\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ όπου $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + (x^2+y^2+z^2)\vec{j} + z(y^4-1)\vec{k}$ όπου S αποτελείται από τις τέσσερις πλευρές της πυραμίδας με κορυφή το σημείο $(0,0,6)$ και η βάση της είναι τετράγωνο στο ΧΥ−επίπεδο με κορυφές τα σημεία $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ και $(-1,1)$. Το διάνυσμα $\vec{n}$ κατευθύνεται προς τα πάνω. **Απάντηση:** 0

Άσκηση 4.19 Με απ'ευθείας υπολογισμό δείξατε ότι $\int_C (zdx + xdy + ydz) = \pi\sqrt{3}$ όπου C είναι ο κύκλος $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Να βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Στόουκς.

Άσκηση 4.20 Αποδείξατε ότι εάν $\oint_C \vec{F}\times d\vec{r} = 0$ τότε διάνυσμα $\vec{F}$ πρέπει να είναι σταθερό .

Άσκηση 4.21 Υπολογίστε την τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ για τις ακόλουθες περιπτώσεις

1) $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$ όπου S είναι η σφαιρική επι-

φάνεια $x^2+y^2+z^2=1$. **Απάντηση:** 4π

2) $\vec{F}(x,y,z)=4xz\vec{i}-y^2\vec{j}+2xz\vec{k}$ όπου S είναι η επιφάνεια του κύβου, που ορίζεται από τις εξισώσεις $x=y=z=0$, $x=y=z=1$. **Απάντηση:** 2

3) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ όπου S αποτελείται από το ημισφαίριο $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ και τον δίσκο που ορίζεται από τον κύκλο $x^2+y^2=1$ πάνω στο ΧΥ επίπεδο. **Απάντηση:** 2π

Άσκηση 4.22 Να επαληθευτεί το θεώρημα της απόκλισης για τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία

1) $\vec{f}(x,y,z)=\left(x^2,y^2,z^2\right)$ για τον κύβο $0\le x,\ y,\ z\le 1$. **Απάντηση:** 3

2) $\vec{f}(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)$ για την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=9$. **Απάντηση:** 648π

3) $\vec{f}(x,y,z)=2x^2y\vec{i}-y^2\vec{j}+4xz^2\vec{k}$ για την στερεά περιοχή που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και ορίζεται από το επίπεδο $z=2$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=9$. **Απάντηση:** -72

4) $\vec{f}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ για το σύνορο της στερεάς περιοχής εντός του κυλίνδρου $x^2+y^2=4$ και μεταξύ των επιπέδων $z=0$ και $z=2$. **Απάντηση:** 0

Άσκηση 4.23 Υπολογίσατε το ακόλουθο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης, $\iiint_D div\vec{F}(x,y,z)dV$, $\vec{F}(x,y,z)=x^3y^2z^2\vec{i}-x^4yz^2\vec{j}$ όταν D είναι η σφαίρα $x^2+y^2+z^2\le 1$.

Άσκηση 4.24 Να βρεθεί το $\iiint div\vec{f}dV$ για το διάνυσμα $\vec{f}=(x,-y,2z)$ στην σφαίρα $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Άσκηση 4.25 Χρησιμοποιείστε το θεώρημα της απόκλισης για να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ για τις ακόλουθες περιπτώσεις

1) $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+xy\vec{j}-2xz\vec{k}$ όπου S είναι το τετράεδρο με κορυφές τα σημεία $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ και το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι η κάθετος στην S η οποία κατευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας. **Απάντηση:** $1/24$

2) $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+xy\vec{j}-2xz\vec{k}$ όπου S είναι το σύνορο της στερεάς περιοχής η οποία είναι το πρώτο όγδοο εσωτερικά του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ και μεταξύ των επιπέδων $z=0$ και $z=1$. **Απάντηση:** $1/3$

3) $\vec{F}(x,y,z) = y(x^2+y^2)^{3/2}\vec{i} - x(x^2+y^2)^{3/2}\vec{j} + (z+1)\vec{k}$ όπου S είναι το σύνορο της στερεάς περιοχής που ορίζεται επάνω από το επίπεδο $z = 2x$ και κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2+y^2$. **Απάντηση:** $\pi/2$

4) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i}+y\vec{j}-2z^2\vec{k}$ όπου S είναι το σύνορο της στερεάς περιοχής που ορίζεται πάνω από το επίπεδο ΧΥ κάτω από το $z = x$ και πλευρικά από το παραβολικό φύλλο $y^2 = 2-x$. **Απάντηση:** $32\sqrt{2}/15$

Άσκηση 4.26 Να αποδειχτεί ότι $div\vec{A} = \text{ορ}_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS$. όπου ο όγκος V περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S. Το διάνυσμα $d\vec{S} = \vec{n}dS$ είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια και έχει διεύθυνση προς τα έξω.

Άσκηση 4.27 Να υπολογιστεί το $\iiint xyz\,dxdydz$ στο τετράεδρο με σύνορο τα συντεταγμένα επίπεδα και το επίπεδο $x/a+y/b+z/c = 1$, $a,b,c > 0$. Να υπολογιστεί το ίδιο ολοκλήρωμα στο ελλειψοειδές $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 \leq 1$.

Άσκηση 4.28 Να βρεθεί ο όγκος του κυλίνδρου $x^2+y^2 = ay$ που περικλείεται από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2-2ax = 0$, το παραβολοειδές $x^2+y^2-az = 0$ και το επίπεδο $z = 0$.

Ενα επίπεδο αποκόπτει από μια σφαίρα ακτίνας r ένα στερεό ύψους h. Να αποδειχτεί ότι ο όγκος του είναι $\pi h^2(3r-h)/3$.

Άσκηση 4.29 Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{f} = g(r)\vec{r}$ τέτοιο ώστε $div\vec{f} = r^\mu$ $\mu \neq -3$. Να αποδειχτεί ότι $\iiint r^\mu dV = \frac{1}{\mu+3}\oiint r^\mu\vec{r}\cdot d\vec{S}$.

Άσκηση 4.30 Να αποδειχτεί ότι αν $\mu \neq -1$ τότε ισχύει η σχέση $\iiint r^{\mu-1}\vec{r}dV = \frac{1}{\mu+1}\oiint r^{\mu+1}\vec{n}dS$.

Άσκηση 4.31 Αν οι βαθμωτές συναρτήσεις φ και ψ έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, να αποδειχτούν οι ακόλουθες ταυτότητες του Γκρήν. $\iiint\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi dV + \iiint\varphi\vec{\nabla}^2\psi dV = \oiint\varphi(d\psi/dn)dS$ και $\iiint(\varphi\vec{\nabla}^2\psi-\psi\vec{\nabla}^2\varphi)dV = \oiint(\varphi(d\psi/dn)-\psi(d\varphi/dn))dS$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα της απόκλισης για το διάνυσμα $\vec{f} = \varphi\vec{\nabla}\psi$).

Άσκηση 4.32 Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός φορτίου q που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων είναι $\vec{E} = q\vec{r}/r^3$. Αποδείξτε ότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα Φ του $\vec{E}$ (ροή της ηλεκτρική έντασης) σε μιά κλειστή επιφάνεια S α) που περιέχει το φορτίο q και β) που δεν περιέχει το φορτίο q. **Απάντηση:** α) $\Phi = 4\pi q$, β) $\Phi = 0$.

Κεφάλαιο 5

Σειρές Fourier

Ο διανυσματικός χώρος: Ενα σύνολο V ονομάζεται διανυσματικός ή γραμμικός χώρος επί ενός σώματος $F(= \Re$ ή $C)$, όταν είναι δυνατόν να οριστούν δύο πράξεις συνθέσεως, η πρόσθεση και ο (εξωτερικός) πολλαπλασιασμός.

Τα διανύσματα $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητα, αν η σχέση $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i = 0$ συνεπάγεται ότι $a_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$. Ενα άπειρο σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Ενα σύνολο διανυσμάτων $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων, αν κάθε διάνυσμα x του χώρου μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των φ_i, $x = \sum_i a_i \varphi_i$. Ενα σύνολο Β ονομάζεται βάση του χώρου, αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και σύνολο γεννητόρων. Το πλήθος των στοιχείων του Β ονομάζεται διάσταση του χώρου. Ενας γραμμικός χώρος που δεν έχει πεπερασμένη διάσταση, ονομάζεται απείρων διαστάσεων.

Εσωτερικό γινόμενο: Ενας μιγαδικός διανυσματικός χώρος V ονομάζεται χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε και μόνο τότε όταν είναι εφοδιασμένος με μια απεικόνιση $(,) : V \times V \longrightarrow C$ με τις ιδιότητες:

1) $(x, \psi) = (\psi, x)^* \qquad \forall x \ , \ \psi \in V$

2) $(ax + b\psi, \varphi) = a^*(x, \varphi) + b^*(\psi, \varphi) \qquad \forall x \ , \ \psi \in V \quad \forall a \ , \ b \in F$

3) $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in V \quad$ και $\quad (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Με αστερίσκο συμβολίζουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού.

Ενα σύνολο διανυσμάτων $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ονομάζεται ορθοκανονικό σύνολο, τότε και μόνο τότε όταν:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{για } \ i \neq j \\ 1 & \text{για } \ i = j \end{cases}$$

Μια **ορθοκανονική βάση** ενός διανυσματικού χώρου εσωτερικού γινομένου, είναι μια βάση που περιέχει ορθοκανονικά διανύσματα. Σε κάθε $n-$ διάστατο χώρο μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση με την μέθοδο Gram - Schmidt.

Παράδειγμα: Το σύνολο F όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f(x)$ που είναι ολοκληρώσιμες σε ένα διάστημα $a \leq x \leq b$ λέμε ότι αποτελούν ένα συναρτησιακό χώρο. Το εσωτερικό γινόμενο και η στάθμη ορίζονται αντιστοίχως από τις σχέσεις

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f^*(x)g(x)dx \qquad \|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

Το σύνολο των συναρτήσεων μιας μεταβλητής t, για τις οποίες το ολοκλήρωμα κατά Lebesgue $\int_{\Re} |\psi(t)|^2 dt$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο είναι ένας διανυσματικός χώρος με άπειρη διάσταση. Ο χώρος αυτός συμβολίζεται με $L^2(\Re)$ και αναφέρεται συνήθως σαν ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων. Οι συναρτησιακοί χώροι ορίζονται και για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.

Σειρές Φουριέ: Σε ένα πεπερασμένο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο, ένα διάνυσμα f αναλύεται σαν γραμμικός συνδυασμός των ορθοκανονικών διανυσμάτων $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, της βάσεως.

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_i \varphi_i \quad \text{όπου} \quad a_j = (\varphi_j, f)$$

Οι συντελεστές a_j ονομάζονται συντελεστές Fourier.

Για να γράψουμε τις σχέσεις αυτές για χώρους άπειρων διαστάσεων είναι φανερό ότι χρειαζόμαστε κάποια κριτήρια συγκλίσεως.

Για τον συναρτησιακό χώρο $L^2([a, b])$ που είναι απείρων διαστάσεων ισχύει

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \qquad \Longrightarrow \qquad c_j = (\varphi_j, f) = \int_a^b f(x)\varphi_j^*(x)dx$$

μόνο όταν το παραπάνω άπειρο άθροισμα συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f(x) στο διάστημα $[a, b]$. Αντίστροφα το άπειρο άθροισμα συγκλίνει στην συνάρτηση $f(x)$ με την έννοια της στάθμης του χώρου δηλαδή ισχύει

$$\underset{k\to\infty}{\text{ορ}} \|f - \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j\| = 0$$

Παράδειγμα: Για το χώρο $L^2[-\pi,\pi]$ το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{συν}\, nx, \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{ημ}\, nx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

είναι μία ορθοκανονική βάση του χώρου. Κάθε συνάρτηση του χώρου είναι ένα άπειρο άθροισμα συνεχών συναρτήσεων της μορφής:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\text{συν}\, nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{ημ}\, nx$$

Οι συντελεστές Fourier a_n και b_n δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{συν}\, nx dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{ημ}\, nx dx$$

Στο χώρο αυτό ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα του Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

και το θεώρημα του Riemann

$$\underset{n\to\infty}{\text{ορ}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{συν}\, nx = \underset{n\to\infty}{\text{ορ}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{ημ}\, nx = 0$$

Για τον ίδιο χώρο, το σύνολο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ είναι επίσης μια ορθοκανονική βάση του χώρου. Κάθε συνάρτηση του χώρου είναι ένα άπειρο άθροισμα της μορφής:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \qquad c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_k^*(x) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Παράδειγμα: Μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[-L, L]$ μπορεί επίσης να αναλυθεί σε σειρά Fourier. Στον χώρο $L^2[-L, L]$ η σειρά Fourier μιας συναρτήσεως $f(x)$ είναι:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\text{συν}\, \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{ημ}\, \frac{n\pi x}{L}$$

Οι συντελεστές Fourier a_n και b_n δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \,\text{συν}\, \frac{n\pi x}{L} dx \qquad\qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \,\text{ημ}\, \frac{n\pi x}{L} dx$$

Μια σειρά Fourier συγκλίνει πάντα με την έννοια του norm του χώρου. Στο ερώτημα για την σημειακή σύγκλιση της σειράς Fourier και μάλιστα στα σημεία ασυνεχείας την απάντηση δίνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα: (Dirichlet). Υποθέτουμε ότι:

α) Η $f(x)$ ορίζεται στο διάστημα $-L \leq x \leq L$, εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος σημείων. Εκτός του διαστήματος αυτού ορίζεται έτσι ώστε να είναι περιοδική, περιόδου $2L$ δηλαδή $f(x) = f(x + 2L)$.

β) Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $f'(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχείς. δηλαδή το πεδίο ορισμού μπορεί να διαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό υποδιαστημάτων όπου οι συναρτήσεις $f(x)$ και $f'(x)$ είναι συνεχείς, ενώ στα άκρα τείνουν σε πεπερασμένα όρια.

Τότε η σειρά Fourier συγκλίνει στην τιμή $f(x)$, αν το σημείο x είναι σημείο συνεχείας και στην τιμή:

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

αν το σημείο x είναι σημείο ασυνεχείας, όπου

$$f(x+) = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{ορ}}\, f(x + \varepsilon) \qquad\qquad f(x-) = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{ορ}}\, f(x - \varepsilon)$$

Οι συνθήκες του θεωρήματος είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες. Είναι δηλαδή δυνατόν να μην ικανοποιούνται αλλά όμως η σειρά να συγκλίνει.

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 5.1

Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η περιττή συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{h}{2} & -\pi < x < 0 \\ \frac{h}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Λύση: Η συνάρτηση είναι περιττή και αντιστοιχεί σε μια σειρά ημιτόνων.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{h}{2}\,\text{ημ}\, nx dx = \left[\frac{h}{2}\frac{2}{n\pi}\,\text{συν}\, nx\right]_0^{\pi} = \frac{h}{2}\frac{2}{n\pi}\,(1 - \text{συν}\, n\pi)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2h}{n\pi} & \text{για n περιττό} \\ 0 & \text{για n άρτιο} \end{cases}$$

οπότε στο διάστημα $-\pi < x < \pi$ η σειρά Fourier είναι

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{ημ}\,(2k+1)x}{2k+1} = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\text{ημ}\, x}{1} + \frac{\text{ημ}\, 3x}{3} + \frac{\text{ημ}\, 5x}{5} + \cdots\cdots\right)$$

Άσκηση 5.2

Να βρεθεί η σειρά Fourier της περιττής συναρτήσεως:

$$f(x) = x \qquad\qquad -\pi < x < \pi$$

Λύση: Η συνάρτηση f(x) ορίζεται $\forall x \in [-\pi, \pi]$ και επεκτείνεται περιοδικά ορίζοντας $f(x) = f(x + 2\pi)$. Επίσης οι συναρτήσεις $f(x)$ και $f'(x)$ είναι συνεχείς. Αρα η σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2} + b_n\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2}\right)$$

συγκλίνει. Για τους συντελεστές αναπτύξεως βρίσκουμε $a_n = 0$ και

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{ημ}\,nxdx = \frac{2}{\pi}\left(-\left[\frac{x\,\text{συν}\,nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\text{συν}\,nxdx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\,\text{συν}\,n\pi - \left[\frac{1}{n^2}\,\text{ημ}\,nx\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

οπότε στο διάστημα $-\pi < x < \pi$ έχουμε

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\,\text{ημ}\,nx = \text{ημ}\,x - \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}\,\text{ημ}\,3x - \cdots$$

Άσκηση 5.3

Να βρεθεί η σειρά Fourier της άρτιας συναρτήσεως:

$$f(x) = |x| \qquad\qquad -\pi < x < \pi$$

Να εφαρμόσετε την ταυτότητα του Parseval για να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Λύση: Υπολογίζουμε τους συντελεστές αναπτύξεως. Βρίσκουμε $b_n = 0$ και

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{συν}\,nxdx = \frac{2}{\pi}\left(-\left[\frac{x\,\text{ημ}\,nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\text{ημ}\,nxdx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\,\text{συν}\,nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(\text{συν}\,n\pi - 1\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & \text{n περιττό,} \\ 0 & \text{n άρτιο.} \end{cases}$$

Επομένως, στο διάστημα $-\pi < x < \pi$ έχουμε,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\,\text{συν}\,(2k+1)x}{\pi(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\text{συν}\,x + \frac{\text{συν}\,3x}{3^2} + \frac{\text{συν}\,5x}{5^2} + \cdots\right)$$

Παρατήρηση: Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Parseval στην σειρά αυτή.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|x|)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{(2k+1)^4\pi^2}$$

Επομένως έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Αλλα όμως έχουμε

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \frac{1}{16}S \qquad \Longrightarrow$$

$$S = \frac{16}{15}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{16}{15}\,\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

Άσκηση 5.4

Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

Λύση: Η συνάρτηση είναι άρτια και επομένως οι συντελεστές $b_n = 0$. Βρίσκουμε τους συντελεστές a_n.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{συν}\,nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\text{συν}\,nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2 \,\text{ημ}\, nx + \frac{2}{n^2}x \,\text{συν}\, nx - \frac{2}{n^3}\,\text{ημ}\, nx\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi n^2}\pi \,\text{συν}\, n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Αρα η σειρά Fourier της συναρτήσεως αυτής είναι

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\,\text{συν}\, nx$$

Για $x = \pi$ η σειρά Fourier δίνει

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\,\text{συν}\, n\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$. Πράγματι έχουμε

$$\left|\frac{4(-1)^n}{n^2}\,\text{συν}\, nx\right| \leq \frac{4}{n^2} = M_n$$

Επειδή η σειρά

$$S = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

συγκλίνει, από το θεώρημα του Weierstrass, έπεται ότι η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα.

Αν ολοκληρώσουμε μια σειρά Fourier προστίθεται ένας ακόμα παράγοντας n στον παρανομαστή κάθε όρου της σειράς. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά που θα προκύψει συγκλίνει ακόμα γρηγορότερα από την αρχική σειρά. Μπορούμε επομένως να ολοκληρώσουμε πάντα μια σειρά Fourier όρο προς όρο και μάλιστα, η προκύπτουσα σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο ολοκλήρωμα της αρχικής συναρτήσεως.

Ολοκληρώνουμε την σειρά της ασκήσεως και έχουμε

$$\int_{-\pi}^{x} x^2 dx = \int_{-\pi}^{x} \frac{\pi^2}{3} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{x} \frac{4(-1)^n}{n^2}\,\text{συν}\, nx dx \qquad \Longrightarrow$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{x} = \left[\frac{\pi^2}{3}x\right]_{-\pi}^{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^n}{n^3}\,\text{ημ}\, nx\right]_{-\pi}^{x} \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}x+\frac{\pi^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\,\text{ημ}\,nx \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{12}x\left(x^2-\pi\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\,\text{ημ}\,nx$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα στην σειρά αυτή το θεώρημα του Parseval. Εχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x\left(x^2-\pi^2\right)\right]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x^2\left(x^4-2x^2\pi^2+\pi^4\right)\right]dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^7}{7}-\frac{2x^5}{5}\pi^2+\frac{x^3}{3}\pi^4\right]_{-\pi}^{\pi}=2\pi^6\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{8\pi^6}{105} \qquad \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^6}{945}$$

Οταν παραγωγίζουμε μια σειρά όρο προς όρο προστίθεται ένα n στον αριθμητή και είναι δυνατόν η προκύπτουσα σειρά να μην συγκλίνει. Πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί όταν παραγωγίζουμε μια σειρά Fourier όρο προς όρο. Για να παραγωγίσουμε μια σειρά Fourier μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γενικό θεώρημα που ισχύει για κάθε σειρά. Ομως το θεώρημα αυτό περιέχει αναγκαίες συνθήκες που δεν είναι απαραίτητες για την παραγώγιση των σειρών Fourier.

Παραγωγίζουμε την σειρά fourier της συναρτήσεως x^2 όρο προς όρο και έχουμε

$$2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\left(-n\,\text{ημ}\,nx\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{ημ}\,nx$$

Το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό από προηγούμενη άσκηση. Μία ακόμα παραγώγιση της σειράς αυτής όρο προς όρο δίνει

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\text{συν}\,nx$$

η οποία προφανώς δεν συγκλίνει εφόσον ο τελευταίος όρος της δεν μηδενίζεται.

Άσκηση 5.5

Να αποδειχτεί ότι για $-\pi < x < \pi$ η σειρά Fourier των συναρτήσεων $x\,\text{συν}\,x$ και $x\,\text{ημ}\,x$ είναι

$$x\,\text{συν}\,x = -\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n-1)(n+1)}\,\text{ημ}\,nx$$

$$x\,\text{ημ}\,x = 1 - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n+1)}\,\text{συν}\,nx$$

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = x\,\text{ημ}\,x$ είναι άρτια διότι

$$f(-x) = (-x)\,\text{ημ}\,(-x) = x\,\text{ημ}\,x = f(x)$$

Αρα $b_n = 0$ και οι συντελεστές a_n δίνονται από την σχέση

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{συν}\,nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{ημ}\,x\,\text{συν}\,nx dx$$

Για $n = 0$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{ημ}\,x dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\,\text{συν}\,x + \text{ημ}\,x\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\pi\,\text{συν}\,\pi = 2$$

Για $n = 1$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{ημ}\,x\,\text{συν}\,x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{ημ}\,2x dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}x\,\text{συν}\,2x + \frac{1}{2^2}\,\text{ημ}\,2x\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\pi\,\text{συν}\,2\pi = -\frac{1}{2}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα όταν $n \neq 1$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{ημ}\,x\,\text{συν}\,nx dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,\text{ημ}\,(n+1)x dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,\text{ημ}\,(n-1)x dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}x\,\text{συν}\,(n+1)x + \frac{1}{(n+1)^2}\,\text{ημ}\,(n+1)x\right]_0^\pi +$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-1}x\,\text{συν}\,(n-1)x - \frac{1}{(n-1)^2}\,\text{ημ}\,(n-1)x\right]_0^\pi =$$

$$-\frac{1}{n+1}\,\text{συν}\,(n+1)\pi + \frac{1}{n-1}\,\text{συν}\,(n-1)\pi = -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1}\left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)(n-1)} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}$$

Επομένως το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier είναι

$$x\,\text{ημ}\,x = 1 - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx$$

Η σειρά αυτή λόγω του M−κριτηρίου συγκλίνει ομοιόμορφα διότι

$$\left|\frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx\right| < \frac{1}{n^2} = M_n$$

και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} M_n$ συγκλίνει.

Παραγωγίζουμε την σειρά και βρίσκουμε

$$x\,\text{συν}\,x + \text{ημ}\,x = \frac{1}{2}\,\text{ημ}\,x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^{n+1}}{(n+1)(n-1)}\,\text{ημ}\,nx \quad \Longrightarrow$$

$$x\,\text{συν}\,x = -\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^{n+1}}{(n+1)(n-1)}\,\text{ημ}\,nx$$

Άσκηση 5.6

Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -2 \le x \le 0 \\ \text{x} & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

στο διάστημα $-2 \leq x \leq 2$.

Λύση: Βρίσκουμε

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left([2x]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\right) = \frac{1}{2}(4+2) = 3$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$\left[\frac{2}{n\pi}\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{n\pi}x\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n^2\pi^2}\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{αν n=2k} \quad \text{άρτιο} \\ -\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} & \text{αν n=2k+1} \quad \text{περιττό} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$\left[-\frac{2}{n\pi}\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{1}{n\pi}x\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n^2\pi^2}\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = -\frac{2}{n\pi}$$

Για $x \neq 0$ η συνάρτηση είναι συνεχής και άρα η σειρά Fourier συγκλίνει στην τιμή $f(x)$.

$$f(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\,\text{συν}\,\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n\pi}\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{2}\right]$$

Το σημείο $x = 0$ είναι σημείο ασυνεχείας και η σειρά Fourier συγκλίνει στην τιμή

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right]_{x=0} = \frac{1}{2}\left[\underset{\varepsilon\to 0^+}{\text{ορ}} f(\varepsilon) + \underset{\varepsilon\to 0^+}{\text{ορ}} f(-\varepsilon)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\underset{\varepsilon\to 0^+}{\text{ορ}}\ \varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0^+}{\text{ορ}}\ 2\right] = 1$$

Για $x = 0$ η σειρά Fourier δίνει την σχέση

$$1 = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \Longrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θέσουμε $x = 2$ στην σειρά Fourier όπου η συνάρτηση είναι συνεχής.

Άσκηση 5.7

Να αναλυθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

και να αποδειχτεί ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Λύση: Επεκτείνουμε την συνάρτηση στο διάστημα $[-\pi, 0]$ έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι περιττή

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ -f(x) & 0 \ge x \ge -\pi \end{cases}$$

Βρίσκουμε τους συντελεστές αναπτύξεως. Εχουμε $a_n = 0$ και

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{ημ}\,nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\text{ημ}\,nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\text{ημ}\,nx dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\text{ημ}\,nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\,\text{ημ}\,nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\,\text{συν}\,nx + \frac{1}{n^2}\,\text{ημ}\,nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\,\text{συν}\,nx + \frac{1}{n^2}\,\text{ημ}\,nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\,\text{συν}\,nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\,\text{συν}\,\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\,\text{ημ}\,\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\,\text{συν}\,n\pi+\frac{\pi}{2n}\,\text{συν}\,\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\,\text{ημ}\,\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{2}{n}\left(\text{συν}\,n\pi-\text{συν}\,\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi n^2}\,\text{ημ}\,\frac{n\pi}{2}$$

Επομένως

$$a_{2k}=\frac{4}{\pi(2k)^2}\,\text{ημ}\,k\pi=0$$

και

$$a_{2k+1}=\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\,\text{ημ}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}$$

και η σειρά Fourier είναι

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\,\text{ημ}\,((2k+1)x)$$

Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Parseval στην σειρά Fourier και έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^2dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{(\pi-x)^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi^3}{24}\right]=\frac{\pi^2}{6}$$

και η ταυτότητα του Parseval γράφεται

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\pi^4}{96}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

Άσκηση 5.8

Να υπολογιστεί το άθροισμα των $r-$πρώτων όρων της σειράς Fourier. Να εφαρμόσετε το αποτέλεσμα στην άσκηση 1 και να μελετηθεί η σύγκλιση της σειράς στο σημείο ασυνεχείας $x=0$ (φαινόμενο Gibbs).

Λύση: Ο όρος της σειράς

$$a_n\,\text{συν}\,nx+b_n\,\text{ημ}\,nx\qquad\qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

αν αντικαταστήσουμε της σταθερές a_n και b_n, γράφεται

$$a_n \,συν\, nx + b_n \,ημ\, nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,συν\, nt dt \,συν\, nx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,ημ\, nt dt \,ημ\, nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(συν\, nt \,συν\, nx + ημ\, nt \,ημ\, nx)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,συν\, n(t-x)dt$$

Οι r πρώτοι όροι της σειράς Fourier είναι

$$S_r(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{r}(a_n \,συν\, nx + b_n \,ημ\, nx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{r} συν\, n(t-x)\right)dt$$

θα υπολογίσουμε τώρα το άθροισμα των συνημιτόνων μέσα στο ολοκλήρωμα. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{r} συν\, n(t-x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{r}\left(e^{in(t-x)} + e^{-in(t-x)}\right)$$

Η σειρές αυτές είναι γεωμετρικές πρόοδοι και το άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου είναι

$$\sum = \frac{τω - α}{ω - 1}$$

όπου τ και α είναι ο τελευταίος και ο πρώτος όρος αντιστοίχως της προόδου και ω ο λόγος της. Αρα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{r} συν\, n(t-x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(r+1)(t-x)} - e^{i(t-x)}}{e^{i(t-x)} - 1} + \frac{e^{-i(r+1)(t-x)} - e^{-i(t-x)}}{e^{-i(t-x)} - 1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(r+\frac{1}{2})(t-x)} - e^{\frac{1}{2}i(t-x)}}{e^{\frac{1}{2}i(t-x)} - e^{-\frac{1}{2}i(t-x)}} + \frac{e^{-i(r+\frac{1}{2})(t-x)} - e^{-\frac{1}{2}i(t-x)}}{e^{-\frac{1}{2}i(t-x)} - e^{\frac{1}{2}i(t-x)}}\right) =$$

$$\frac{ημ\,(r+\frac{1}{2})(t-x) - ημ\,\frac{1}{2}(t-x)}{2\,ημ\,\frac{1}{2}(t-x)}$$

Επομένως το άθροισμα των r πρώτων όρων της σειράς είναι

$$S_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})(t-x)}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}(t-x)} dt$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το άθροισμα των r πρώτων όρων της σειράς της ασκήσεως 1. Απο την άσκηση αυτή έχουμε

$$S_r(x) = \frac{h}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})(t-x)}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}(t-x)} dt - \frac{h}{4\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})(t-x)}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}(t-x)} dt$$

$$\frac{h}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})(t-x)}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}(t-x)} dt - \frac{h}{4\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})(t+x)}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}(t+x)} dt$$

όπου έχουμε κάνει τον μετασχηματισμό $t = -t$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα. Κάνουμε τον μετασχηματισμό $t - x = s$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και τον μετασχηματισμό $t + x = s$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα και έχουμε

$$S_r(x) = \frac{h}{4\pi} \int_{-x}^{\pi-x} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})s}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}s} ds - \frac{h}{4\pi} \int_{x}^{\pi+x} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})s}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}s} ds =$$

$$\frac{h}{4\pi} \int_{-x}^{x} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})s}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}s} ds - \frac{h}{4\pi} \int_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\text{ημ}\,(r+\frac{1}{2})s}{\text{ημ}\,\frac{1}{2}s} ds$$

Θα θεωρήσουμε το παραπάνω μερικό άθροισμα στην περιοχή του μηδενός όπου η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια. Για $x \to 0$ το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται ενώ το πρώτο περιέχει την ασυνέχεια στο σημείο $x = 0$. Με τον μετασχηματισμό $(r + \frac{1}{2}) = p$ και $ps = \xi$ το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται

$$S_r(x) = \frac{h}{2\pi} \int_{0}^{px} \frac{\text{ημ}\,\xi}{\text{ημ}\,\xi/2p} \frac{d\xi}{p}$$

Το μερικό άθροισμα $S_r(x)$ αρχίζει από το 0 στο σημείο $x = 0$, στο σημείο αυτό το άθροισμα της σειράς είναι πραγματικά $\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right] = 0$ και αυξάνει μέχρι το σημείο $px = \pi$ όπου γίνεται μέγιστο. Στο σημείο αυτό ο αριθμητής $\text{ημ}\,\xi$ γίνεται αρνητικός. Για μεγάλα r και άρα για μεγάλα p, ο παρανομαστής παραμένει θετικός. Επομένως η μεγαλύτερη τιμή του μερικού αθροίσματος $S_r(x)$ είναι

$$S_r(x)_{max} = \frac{h}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{ημ}\,\xi}{\text{ημ}\,\frac{\xi}{2p}}\frac{d\xi}{p} = \frac{h}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\text{ημ}\,\xi}{\xi}d\xi = \frac{h}{2}\ 1,1789798...$$

Η τιμή του ολοκληρώματος έχει υπολογιστεί με προσεγγιστηκές μεθόδους.

Συμπέρασμα: Η συνάρτηση $S_r(x)$ αρχίζει από το 0 στο σημείο $x = 0$. Οσο το x απομακρύνεται από το σημείο ασυνεχείας το $S_r(x)$ φθάνει στην τιμή $\frac{h}{2}$ και την ξεπερνά κατά 17,89%. Αν αυξήσουμε το r, δηλαδή αν συμπεριλάβουμε περισσότερους όρους στο μερικό άθροισμα, δεν επιτυγχάνετε καλύτερη προσέγγιση αλλά αυτό το ξεπέρασμα πλησιάζει περισσότερο στο σημείο ασυνεχείας $x = 0$ της συναρτήσεως. Αυτό το πρώτο ξεπέρασμα της πραγματικής τιμής της συναρτήσεως από την σειρά Fourier, που δεν είναι δυνατόν να το αποφύγουμε, ονομάζεται φαινόμενο Gibbs. Οταν το x απομακρύνετε απο το σημείο 0 το σημείο ασυνεχείας $x \to \infty$ τόσο η προσέγγιση προς την τιμή $\frac{h}{2}$ της σειράς Fourier είναι καλύτερη.

Παρατήρηση: Για την σειρά Fourier της ασκήσεως το φαινόμενο Gibbs μπορεί να περιοριστεί δραστικά αν προσθέσουμε στην σειρά τον παράγοντα Lanczos. Η σειρά τώρα είναι

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{m} \frac{\text{ημ}\,[(2n-1)\pi]/2m}{[(2n-1)\pi]/2m}\frac{\text{ημ}\,(2n-1)x}{(2n-1)x}$$

Αλυτες ασκήσεις

Άσκηση 5.9 Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2L}}\,\text{ημ}\, n\frac{\pi x}{L} \qquad \frac{1}{\sqrt{2L}}\,\text{συν}\, n\frac{\pi x}{L} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων στον χώρο $L_2(-L, L)$, και οι συναρτήσεις

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \qquad\qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

στον χώρο $L_2(-\pi, \pi)$.

Άσκηση 5.10 Να αναπτύξετε την συνάρτηση

$$x(x - \pi) \qquad\qquad 0 < x < \pi$$

σε σειρά ημιτόνων και σε σειρά συνημιτόνων. Χρησιμοποιήστε τις αναπτύξεις αυτές για να αποδείξετε τις σχέσεις

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

Τέλος με την βοήθεια της ταυτότητας του Parseval να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Απάντηση:

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1^3}\,\text{ημ}\, x + \frac{1}{3^3}\,\text{ημ}\, 3x + \frac{1}{5^3}\,\text{ημ}\, 5x + \cdots\cdots\right)$$

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1}{1^2}\,\text{συν}\,2x + \frac{1}{2^2}\,\text{συν}\,4x + \frac{1}{3^2}\,\text{συν}\,6x \cdots\cdots \right)$$

Άσκηση 5.11 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier
α) η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \le \omega\, t \le 0 \\ \text{ημ}\,\omega\, t & 0 \le \omega\, t \le \pi \end{cases}$$

β) η άρτια συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} -\,\text{ημ}\,\omega\, t & -\pi \le \omega\, t \le 0 \\ \text{ημ}\,\omega\, t & 0 \le \omega\, t \le \pi \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις έχουν περίοδο $L = 2\pi/\omega$. **Απάντηση:**

α) $$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\,\text{ημ}\,\omega\, t - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}\,\text{συν}\,(2k\omega\, t)$$

β) $$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}\,\text{συν}\,(2k\omega\, t)$$

Άσκηση 5.12 Να αναπτυχθεί η συνάρτηση

$$f(x) = \text{ημ}\,x \qquad\qquad 0 \le x \le 2$$

α) Σε σειρά ημιτόνων β) Σε σειρά συνημιτόνων

Άσκηση 5.13 Σε πολλά προβλήματα φυσικής είναι προτιμότερο να αναλύουμε μια συνάρτηση σε σειρά Fourier της μορφής

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\text{συν}\,(nx - \theta_n)$$

Να αποδείξετε ότι η έκφραση αυτή είναι ισοδύναμη με την γνωστή ανάλυση, όπου

$$a_n = A_n\,\text{συν}\,\theta_n \qquad\qquad b_n = A_n\,\text{ημ}\,\theta_n$$

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \qquad\qquad \varepsilon\varphi\,\theta_n = b_n/a_n$$

Άσκηση 5.14 Να αποδειχτεί ότι η εκθετική συνάρτηση $e^{\mu x}$ για $\pi < x < \pi$ δέχεται την ακόλουθη ανάπτυξη Fourier

$$e^x = \frac{2\,sinh\mu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\mu^2}\left(\mu\,\sigma\upsilon\nu\,nx - n\,\eta\mu\,nx\right)\right]$$

θέσατε $x \;\to\; -x$ στην παραπάνω σχέση και αποδείξτε τις σχέσεις

$$sinh\mu x\; = \frac{1}{2}\left(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\right) = -\frac{2\,sinh\mu\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\mu^2}\,\eta\mu\,nx \qquad -\pi < x < \pi$$

$$cosh\mu x\; = \frac{1}{2}\left(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\right) = \frac{2\mu\,sinh\pi}{\pi}2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\mu^2}\,\sigma\upsilon\nu\,nx \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

Να θέσετε τέλος $\gamma = 1$ και $x = 0$ και $x = \pi$ στην τελευταία σχέση για να αποδείξετε τις ταυτότητες

$$\frac{\pi}{sinh\pi} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad\qquad \frac{\pi}{tanh\pi} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

Άσκηση 5.15 Να αποδείξετε την ακόλουθη ανάπτυξη σε σειρά Fourier της συναρτήσεως $\sigma\upsilon\nu\,\gamma x$ όπου η σταθερά γ δεν είναι ακέραιος αριθμός.

$$\sigma\upsilon\nu\,\gamma x = \frac{2\gamma\,\eta\mu\,\gamma\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu\,x}{\gamma^2-1} + \frac{\sigma\upsilon\nu\,2x}{\gamma^2-2^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu\,3x}{\gamma^2-3^2} + \cdots\cdots\right] \qquad \gamma \notin \mathrm{A}$$

Από την σχέση αυτή, να θέσετε $x = \pi$ και $\gamma = x$, για να αποδείξετε την σχέση

$$\sigma\varphi\,x\pi = \frac{2x}{\pi}\left[\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2-1^2} + \frac{1}{x^2-2^2} + \frac{1}{x^2-3^2} + \frac{1}{x^2-4^2}\cdots\cdots\right]$$

Να αποδείξετε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα για $0 \leq x \leq b < 1$. και να την ολοκληρώσετε όρο προς όρο για να αποδείξετε την σχέση

$$\eta\mu\,\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Να θέσετε τέλος $x = \frac{1}{2}$ για να αποδείξετε την ισότητα

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}$$

Άσκηση 5.16 Να αποδειχτούν οι παρακάτω σειρές Fourier για $0 \le x \le 2\pi$.

Υπόδειξη: Να αποδείξετε την πρώτη και μετά τις υπόλοιπες με διαδοχικές ολοκληρώσεις ή να αποδείξετε την τελευταία και μετά τις υπόλοιπες με διαδοχικές παραγωγίσεις.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{συν}\, kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ημ}\, kx}{k^3} = \frac{\pi^2 x}{6} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{συν}\, kx}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 x^2}{12} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{x^4}{48} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ημ}\, kx}{k^5} = \frac{\pi^4 x}{90} - \frac{\pi^2 x^3}{36} + \frac{\pi x^4}{48} - \frac{x^5}{240}$$

Άσκηση 5.17 Να αποδειχτεί η σχέση

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, \text{συν}\,(2k+1)x}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{\pi}{8}\, \text{συν}^2 x - \frac{1}{3}\, \text{συν}\, x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Άσκηση 5.18 Μια χορδή μήκους L είναι δεμένη στα σημεία 0 και L του χ−άξονα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ έχει αρχική θέση και αρχική ταχύτητα που δίνονται από τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ Αντιστοίχως. Να βρεθεί το πλάτος ταλαντώσεως $y(x,t)$ της χορδής. Το πλάτος ταλαντώσεως ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του κύματος. Το πρόβλημα είναι το ακόλουθο.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

με οριακές συνθήκες

$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

και αρχικές συνθήκες

$$y(x,0) = f(x) \qquad y_t(x,0) = g(x)$$

Απάντηση:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \text{ημ}\,\frac{n\pi x}{L}\left[A_n\,\text{συν}\,\frac{n\pi v t}{L}+B_n\,\text{ημ}\,\frac{n\pi v t}{L}\right]$$

όπου οι σταθερές A_n και B_n είναι οι συντελεστές Fourier των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, δηλαδή

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{L}dx \qquad\qquad B_n=\frac{L}{n\pi v}\,\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\text{ημ}\,\frac{n\pi x}{L}dx$$

Άσκηση 5.19 Δίνονται τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, x_2, \cdots$. Από τα διανύσματα αυτά κατασκευάζουμε τα διανύσματα:

$$\begin{array}{ll}
\psi_1=x_1 & \varphi_1=\psi_1/\|\psi_1\| \\
\psi_2=x_2-<\varphi_1|x_2>\varphi_1 & \varphi_2=\psi_2/\|\psi_2\| \\
\quad\cdots\cdots & \quad\cdots\cdots \\
\psi_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}<\varphi_k|x_n>\varphi_k & \varphi_n=\psi_n/\|\psi_n\|
\end{array}$$

Να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο με την ιδιότητα ότι για κάθε m τα διανύσματα $x_1, x_2, \cdots, x_m$ και $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ είναι δύο σύνολα γεννητόρων του ίδιου χώρου. Μέθοδος ορθοκανονικοποιήσεως Gram - Schmidt.

Να εφαρμόσετε την μέθοδο για τις συναρτήσεις:

$$x_n(t)=t^{n-1} \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad t\in(-1,1)$$

Απάντηση: Τα πολυώνυμα του Legendre

$$\varphi_1(t)=1, \qquad \varphi_2(t)=t, \qquad \varphi_3(t)=\frac{3t^2-1}{2}, \qquad \varphi_4(t)=\frac{3t^3-3t}{2}$$

$$\varphi_5=\frac{35t^4-30t^2+3}{8}, \qquad \cdots$$

Θέματα εξετάσεων

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικό Β
9 - 9 - 1996

Πραγματική Ανάλυση IV
Α. Στρέκλας
Φ. Ζαφειροπούλου

Θ Ε Μ Α Τ Α

1) (μον.2) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (x + y + \lambda z)\vec{x}_0 + (\mu x - 3y - z)\vec{y}_0 + (4x + \nu y + z^2)\vec{z}_0$$

α) Να προσδιοριστούν οι σταθερές λ, μ, ν, ώστε το πεδίο $\vec{F}$ να είναι αστρόβιλο $(\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0)$.

β) Να βρεθεί βαθμωτή συνάρτηση f τέτοια ώστε το $\vec{F}$ να μπορεί να εκφραστεί σαν η κλίση της f $(\vec{F} = \vec{\nabla} f)$.

2) (μον.1,5) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_c xy(x^2 dx + y^2 dy)$$

όπου c το πρώτο τέταρτο του τόξου της ελλείψεως $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

3) (μον.1,5) Υπολογίστε το εμβαδόν του μέρους της κωνικής επιφάνειας $x^2 + y^2 = z^2$ που βρίσκεται πάνω από το $xy-$ επίπεδο και μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2\alpha x$.

4) (μον.2,5) Να επιβεβαιωθεί ο τύπος του Stokes για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (3y, -xz, yz^2)$$

S η επιφάνεια του παραβολοειδούς $2z = x^2 + y^2$ που περιορίζεται από το επίπεδο $z = 2$ και c η καμπύλη τομής της S με το επίπεδο αυτό.

5) (μον.2,5) Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$.

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικό Β
7 - 3 - 1997

Πραγματική Ανάλυση IV
Α. Στρέκλας
Φ. Ζαφειροπούλου

Θ Ε Μ Α Τ Α

1) (μον.2)
   α) Δείξτε ότι εάν $\vec{v} \neq \vec{0}$ και ισχύουν οι σχέσεις $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ και $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ τότε $\vec{u} = \vec{w}$. Εάν όμως ισχύει μια μόνο από τις παραπάνω σχέσεις, τότε $\vec{u} \neq \vec{w}$.
   β) Να βρείτε όλους τους ακέραιους n για τους οποίους ισχύει η σχέση $div\ (r^n \vec{r}) = 0$, όπου $r = \|\vec{r}\|$.
2) (μον.1,5) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint \left(\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} \right)$$

   πάνω στο τρίγωνο που περικλείεται από τις ευθείες $y = 1,\ \ x = 4,\ \ y = x$.
3) (μον.1,5) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$I = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS$$

   όπου S είναι το τμήμα της επιφάνειας του κώνου $z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$ που περιλαμβάνεται μεταξύ των επιπέδων $z = 0$ και $z = 4$.
4) (μον.2,5) Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Γκάους για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (4x, -2y^2, z^2)$ και για τον τόπο V, που ορίζεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 3$.
5) (μον.2,5) Να αναλυθεί σε σειρά Φουριέ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ \text{συν}\, x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

   στο διάστημα $-\pi \leq x \leq \pi$.

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικό Β
23 - 2 - 1997

Πραγματική Ανάλυση IV
Α. Στρέκλας
Φ. Ζαφειροπούλου

Θ Ε Μ Α Τ Α

1) (μον.2) Να βρεθεί η γενική μορφή της συναρτήσεως $f(r)$ για την οποία το διανυσματικό πεδίο $f(r)\vec{r}$ να είναι σωληνοειδές. Να αποδείξετε επίσης ότι
$$\nabla^2(ln\, r) = \frac{1}{r^2}$$

2) (μον.1,5) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
$$\oint \left(y^2 dx - x^2 dy\right)$$
πάνω στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

3) (μον.2) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο
$$\vec{F} = (x + 2y + \lambda z)\vec{e}_1 + (\mu x - 3y - z)\vec{e}_2 + (x + \nu y + 2z)\vec{e}_3$$
Να υπολογιστούν οι σταθερές λ, μ, ν ώστε το πεδίο $\vec{F}$ να είναι αστρόβιλο. Να βρεθεί μια βαθμωτή συνάρτηση V ώστε το $\vec{F}$ να μπορεί να γραφεί ως η κλίση της V.

4) (μον.2) Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2x - y)\vec{e}_1 - yz^2\vec{e}_2 - y^2 z\vec{e}_3$ και για την επιφάνεια S που είναι το άνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5) (μον.2,5) Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση
$$f(x) = |x| \qquad\qquad -\pi < x < \pi$$
Να εφαρμόσετε την ταυτότητα του Parseval για να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς
$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικό Β
16 - 2 - 1999

Πραγματική Ανάλυση IV
Α. Στρέκλας
Φ. Καρατζόγλου-Ζαφειροπούλου

Θ Ε Μ Α Τ Α

1) (μον.2) α) Να βρεθεί η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{f} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\nu} (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = r^{2\nu}\vec{r}$$

όπου $r = \|\vec{r}\|$. Για ποια τιμή του ν η απόκλιση είναι μηδέν.
β) Να αποδειχτεί ότι

$$\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \oiint_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2} dS$$

2) (μον.2) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα β΄–είδους για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2x^2y, y^2, 4xz^2)$ και την επιφάνεια του κυλίνδρου $y^2 + z^2 = 9$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και φράσσεται από το επίπεδο $x = 2$ δηλαδή $2 \geq x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

3) (μον.2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = \alpha^2$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο δηλαδή $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ και φράσσεται από το επίπεδο $z = mx$.

4) (μον.1,5) Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Γκρήν στο επίπεδο για το πεδίο $\vec{f} = \left(xy + y^2, x^2\right)$ και για την κλειστή καμπύλη που ορίζεται από τις εξισώσεις $y = x$, $y = x^2$.

5) (μον.2,5) Να αναλυθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \pi - x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

δίνεται ότι συν$(\pi/4) =$ ημ$(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικό Β
2 - 7 - 1999

Πραγματική Ανάλυση IV
Α. Στρέκλας
Φ. Ζαφειροπούλου

Θ Ε Μ Α Τ Α

1) (μον.1,5) Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{E} = \vec{r}/r^2$ είναι αστρόβιλο. Να βρείτε βαθμωτή συνάρτηση φ τέτοια ώστε $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ και $\varphi(\vec{\alpha}) = 0$ όπου $|\vec{\alpha}| \neq 0$.

2) (μον.2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

πάνω στους κύκλους α) $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = 2 + \text{ημ}\, t$, β) $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = \text{ημ}\, t$ και γ) $x = 1 + 2\,\text{συν}\, t$, $y = 2\,\text{ημ}\, t$. Να δικαιολογήσετε γιατί τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά ή γιατί δεν είναι διαφορετικά.

3) (μον.2) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$. Να επαληθευτεί το θεώρημα της απόκλισης του Γκάους για την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

4) (μον.2) Το εμβαδόν μιας επιφάνειας που δίνεται από την διανυσματική εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ ορίζεται από το διπλό ολοκλήρωμα $S = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν S είναι ανεξάρτητο της εκλογής των παραμέτρων (u, v). Να αποδείξετε επίσης ότι αν η επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Z$ τότε ο τύπος του εμβαδού γράφεται

$$S = \iint_Z \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dxdy \quad \text{όπου} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

5) (μον.2,5) Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{ημ}\, x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικό
9 - 9 - 999

Πραγματική Ανάλυση IV
Α. Στρέκλας
Φ. Ζαφειροπούλου

Θ Ε Μ Α Τ Α

1) (μον.1,5) Να βρεθεί βαθμωτή συνάρτηση $f(x,y,z)$ ώστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{G} = \left(e^{2x}, f(x,y,z), e^{z}\right)$ να είναι συντηρητικό. Να βρεθεί το δυναμικό του $V(x,y,z)$ ώστε $V(0,0,0) = 0$.

2) (μον.2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

πάνω στους κύκλους α) $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = 2 + \text{ημ}\, t$, β) $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = \text{ημ}\, t$ και γ) $x = 1 + 2\,\text{συν}\, t$, $y = 2\,\text{ημ}\, t$. Να δικαιολογήσετε γιατί τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά ή γιατί δεν είναι διαφορετικά.

3) (μον.2) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$. Να επαληθευτεί το θεώρημα της απόκλισης του Γκάους για την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

4) (μον.2) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας $z = 2\left(x^2 + y^2\right)$ που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z = 2$ και $z = 4$.

5) (μον.2,5) Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x\,\text{συν}\, x$ στο διάστημα $-\pi \leq x \leq \pi$. Με την βοήθεια της αναπτύξεως αυτής να αποδειχτεί ότι

$$x\,\text{ημ}\, x = 1 - \frac{1}{2}\,\text{συν}\, x - 2\left(\frac{\text{συν}\, 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\text{συν}\, 3x}{2 \cdot 4} + \frac{\text{συν}\, 4x}{3 \cdot 5} - \cdots\right)$$

Λύση θέματος 1

Να βρεθεί βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z)$ ώστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{G} = \left(e^{2x}, f(x, y, z), e^{z}\right)$ να είναι συντηρητικό. Να βρεθεί το δυναμικό του $V(x, y, z)$ ώστε $V(0, 0, 0) = 0$.

Λύση: Για να είναι το διανυσματικό πεδίο G συντηρητικό πρέπει να ισχύει η σχέση $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0}$. Βρίσκουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^{2x} & f(x,y,z) & e^{z} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_3 = \vec{0}$$

Από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε το ακόλουθο διαφορικό σύστημα

$$-\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$f(x, y, z) = a(y)$$

Δηλαδή η ζητούμενη συνάρτηση $f(x, y, z)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του y, ανεξάρτητη από τις μεταβλητές x και z.

Για να βρούμε το δυναμικό πρέπει να λύσουμε την διαφορική εξίσωση $\vec{G} = \vec{\nabla} V$. Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο διαφορικό σύστημα.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^{2x} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = a(y) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = e^{z}$$

Λύνουμε την πρώτη και βρίσκουμε

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1(y, z)$$

Αντικαθιστούμε την λύση αυτή στην δεύτερη και βρίσκουμε

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial c_1(y, z)}{\partial y} = a(y) \qquad \Longrightarrow \qquad c_1(y, z) = \int_{y_0}^{y} a(y')dy' + c_2(z)$$

Επομένως η συνάρτηση $V(x,y,z)$ που ικανοποιεί τις δύο πρώτες διαφορικές εξισώσεις είναι $V = \frac{1}{2}e^{2x} + \int_{y_0}^{y} a(y')dy' + c_2(z)$. Αντικαθιστούμε την λύση αυτή στην τρίτη και βρίσκουμε

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial c_2(z)}{\partial z} = e^z \qquad \Longrightarrow \qquad c_2(z) = e^z + c_3$$

Αρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι $V = \frac{1}{2}e^{2x} + \int_{y_0}^{y} a(y')dy' + e^z + c_3$. Θα προσδιορίσουμε τέλος τις σταθερές ώστε να ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη. Εχουμε

$$V(0,0,0) = \frac{1}{2} + \int_{y_0}^{0} a(y')dy' + 1 + c_3 = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$c_3 = -\frac{3}{2} - \int_{y_0}^{0} a(y')dy' = -\frac{3}{2} + \int_{0}^{y_0} a(y')dy'$$

Αρα το ζητούμενο δυναμικό είναι

$$V = \frac{1}{2}e^{2x} + \int_{y_0}^{y} a(y')dy' + e^z - \frac{3}{2} + \int_{0}^{y_0} a(y')dy' = \frac{1}{2}e^{2x} + \int_{0}^{y} a(y')dy' + e^z - \frac{3}{2}$$

Λύση θέματος 2

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = \oint \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

πάνω στους κύκλους α) $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = 2 + \text{ημ}\, t$, β) $x = 1 + \text{συν}\, t$, $y = \text{ημ}\, t$ και γ) $x = 1 + 2\,\text{συν}\, t$, $y = 2\,\text{ημ}\, t$. Να δικαιολογήσετε γιατί τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά ή γιατί δεν είναι διαφορετικά.

Λύση: Παρατήρηση 1: Αποδεικνύεται εύκολα ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{f}$ είναι αστρόβιλο δηλαδή $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0}$. Ομως η διανυσματική συνάρτηση

$\vec{f}$ δεν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο σημείο (0,0). Επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Γκρην στις περιπτώσεις β) και γ).

Παρατήρηση 2: Κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή στις ανεξάρτητες μεταβλητές

$x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \;\Rightarrow\; dx = \sigma\upsilon\nu\,\varphi d\rho - \rho\,\eta\mu\,\varphi d\varphi$

$y = \rho\,\eta\mu\,\varphi \;\Rightarrow\; dy = \eta\mu\,\varphi d\rho + \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi d\varphi$

Θα χρησιμοποιήσουμε δηλαδή πολικές συντεταγμένες. Βρίσκουμε

$$I = \int \frac{\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi(\eta\mu\,\varphi d\rho + \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi d\varphi) - \rho\,\eta\mu\,\varphi(\sigma\upsilon\nu\,\varphi d\rho - \rho\,\eta\mu\,\varphi d\varphi)}{\rho^2\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi^2 + \rho^2\,\eta\mu\,\varphi^2}$$

$$= \int \frac{(\rho^2\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi^2 + \rho^2\,\eta\mu\,\varphi^2)d\varphi}{\rho^2} = \int d\varphi = \int d\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\frac{y}{x}\right)$$

<u>Περίπτωση α)</u> Πρώτος τρόπος. Ο κύκλος δεν περιέχει το σημείο μηδέν και επομένως μόνο στην περίπτωση αυτή ισχύει το θεώρημα του Γκρην. Το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από το δρόμο και άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη είναι μηδέν. Πράγματι από το θεώρημα του Γκρην επειδή $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0}$ βρίσκουμε προφανώς

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{f} \cdot \vec{k}\, dxdy = 0$$

Δεύτερος τρόπος. Θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση 2. Βρίσκουμε

$$I = \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi = (\ \varphi\ )_{\varphi_0}^{\varphi_0} = \varphi_0 - \varphi_0 = 0$$

Τρίτος τρόπος. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά.

$x = 1 + \sigma\upsilon\nu\,t \;\Rightarrow\; dx = -\,\eta\mu\,tdt \quad \text{και} \quad y = 2 + \eta\mu\,t \;\Rightarrow\; dy = \sigma\upsilon\nu\,tdt.$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\sigma\upsilon\nu\,t)\,\sigma\upsilon\nu\,t + \eta\mu\,t(2+\eta\mu\,t)}{(1+\sigma\upsilon\nu\,t)^2 + (2+\eta\mu\,t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\sigma\upsilon\nu\,t + 2\,\eta\mu\,t}{6 + 2\,\sigma\upsilon\nu\,t + 4\,\eta\mu\,t} dt =$$

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\frac{y}{x} = \left[\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\frac{2+\eta\mu\,t}{\sigma\upsilon\nu\,t+1}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

<u>Περίπτωση β)</u> Δεν ισχύει το θεώρημα του Γκρην και θα βρούμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά.

$$x = 1 + \text{συν}\, t \;\Rightarrow\; dx = -\,\text{ημ}\, t dt \quad \text{και} \quad y = \text{ημ}\, t \;\Rightarrow\; dy = \text{συν}\, t dt.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \text{συν}\, t)\,\text{συν}\, t + \text{ημ}\, t\, \text{ημ}\, t}{(1 + \text{συν}\, t)^2 + (\text{ημ}\, t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\text{συν}\, t + \text{συν}^2\, t + \text{ημ}^2\, t}{1 + 2\,\text{συν}\, t + \text{συν}^2\, t + \text{ημ}^2\, t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \text{συν}\, t}{2 + 2\,\text{συν}\, t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2} = \left[\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

<u>Περίπτωση γ)</u> Πρώτος τρόπος. Με την βοήθεια του θεωρήματος Γκρην μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα (σαν άσκηση) ότι το ολοκλήρωμα είναι το ίδιο πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περιέχει το μηδέν. Αντί για τον δοσμένο κύκλο διαλέγουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ με παραμετρικές εξισώσεις $x = \varepsilon\,\text{συν}\, t$, $y = \varepsilon\,\text{ημ}\, t$ που περικλείει προφανώς το σημείο $(0, 0)$. Βρίσκουμε

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\text{συν}\, t\, \text{συν}\, t + \text{ημ}\, t\, \text{ημ}\, t}{\text{συν}^2\, t + \text{ημ}^2\, t} dt = \int_0^{2\pi} dt = \left[\ t\ \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Ο τρόπος αυτός μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής. Θεωρούμε μια μικρή περιφέρεια c_ε με κέντρο το 0 και ακτίνα ε. Στην επιφάνεια που περικλείεται ανάμεσα στην δοσμένη περιφέρεια και την περιφέρεια του παραπάνω μικρού κύκλου η συνάρτηση $\vec{f}$ είναι συνεχής και επομένως ισχύει το θεώρημα του Γκρήν. Μετά τους υπολογισμούς πέρνουμε το όριο $\varepsilon \to 0$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι μηδέν και βρίσκουμε

$$\oint_{c_\varepsilon} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \oint_{c} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \oint_{c} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\oint_{c_\varepsilon} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

Δεύτερος τρόπος. Με την βοήθεια πάλι της παρατηρήσεως 2 βρίσκουμε

$$I = \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\ \varphi\ \right]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Μπορούμε τέλος να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά
$x = 1 + 2\,\text{συν}\, t \;\Rightarrow\; dx = -2\,\text{ημ}\, t dt$ και $y = 2\,\text{ημ}\, t \;\Rightarrow\; dy = 2\,\text{συν}\, t dt$.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2\,\text{συν}\, t) 2\,\text{συν}\, t + 2\,\text{ημ}\, t 2\,\text{ημ}\, t}{(1 + 2\,\text{συν}\, t)^2 + 4\,\text{ημ}\, t^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{4 + 2\,\text{συν}\, t}{5 + 4\,\text{συν}\, t} dt =$$

$$\left[t - \text{τοξεφ}\,\frac{\text{ημ}\,t}{\text{συν}\,t+1} + \text{τοξεφ}\,\frac{\text{ημ}\,t}{3(\text{συν}\,t+1)}\right]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Σημείωση: Το αποτέλεσμα δεν θα μπορούσε να ήταν

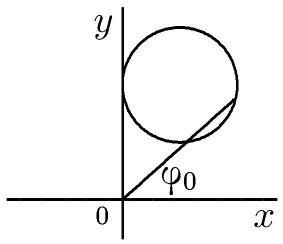
$$\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x} = \text{τοξεφ}\,\frac{2\,\text{ημ}\,t}{1+2\,\text{συν}\,t}$$

διότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Στα σημεία $\text{συν}\,t = -1/2 \Rightarrow t = 2\pi/3$ και $t = 4\pi/3$ παρουσιάζει ασυνέχειες. Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\text{ημ}\,t, \text{συν}\,t)dt$ υπολογίζονται με την βοήθεια του μετασχηματισμού

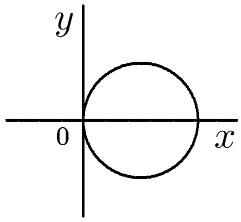
$$x = \text{εφ}\,\frac{t}{2} \quad\Longrightarrow\quad \text{ημ}\,t = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{συν}\,t = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad dt = \frac{2dx}{1+x^2}$$

Ο αναλυτικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων αυτών δεν είναι απαραίτητος για την λύση του θέματος.

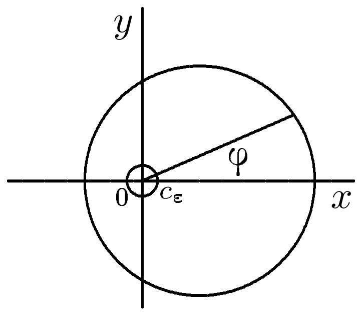
Συμπέρασμα: Τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά διότι η υπό ολοκλήρωση διανυσματική συνάρτηση δεν έχει συνεχείς α′ μερικές παραγώγους στο μηδέν και επομένως το ολοκλήρωμα εξαρτάται από τον δρόμο. Πραγματικά η α) περιφέρεια δεν περικλείει το μηδέν η β) περνάει πάνω από το μηδέν και η γ) περικλείει το μηδέν. Το αποτελέσματα στις τρεις περιπτώσεις είναι 0, π και 2π αντιστοίχως.



Περίπτωση α)



Περίπτωση β)



Περίπτωση γ)

Λύση θέματος 3

Να επαληθευτεί το θεώρημα της αποκλίσεως του Γκάους για την διανυσματική συνάρτηση $\vec{f} = (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j})$ και για την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Λύση: Το θεώρημα του Γκάους είναι

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{f}\,dxdydz = \oiint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$$

α) Θα υπολογίσουμε πρώτα το τριπλό ολοκλήρωμα. Θα εργαστούμε σε σφαιρικές συντεταγμένες δηλαδή

$$\begin{array}{ll} x = \rho\,\eta\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi & 0 \le \rho \le 3 \\ y = \rho\,\eta\mu\,\theta\,\eta\mu\,\varphi & 0 \le \theta \le \pi \\ z = \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι γνωστή $J = \rho^2\,\eta\mu\,\theta$ οπότε βρίσκουμε $dxdydz = \rho^2\,\eta\mu\,\theta d\rho d\theta d\varphi$. Η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου της ασκήσεως είναι

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = div\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x(x^2+y^2+z^2),y(x^2+y^2+z^2),0\ \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)+\frac{\partial}{\partial y}y(x^2+y^2+z^2) = x^2+y^2+z^2+x2x+x^2+y^2+z^2+y2y =$$

$$4x^2+4y^2+2z^2 = 4(x^2+y^2+z^2)-2z^2$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$div\vec{f} = 4(\rho^2\,\eta\mu^2\,\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\,\varphi+\rho^2\,\eta\mu^2\,\theta\,\eta\mu^2\,\varphi+\rho^2\,\sigma\upsilon\nu^2\,\theta)-2\rho^2\,\sigma\upsilon\nu^2\,\theta =$$

$$4\rho^2-2\rho^2\,\sigma\upsilon\nu^2\,\theta = 2\rho^2(2-\sigma\upsilon\nu\,\theta)$$

Υπολογίζουμε τέλος το ολοκλήρωμα

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{f}\,dxdydz = \iiint_V 2\rho^2(2-\sigma\upsilon\nu^2\,\theta)\rho^2\,\eta\mu\,\theta d\rho d\theta d\varphi = 2\int_0^3 \rho^4 d\rho$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}(2-\sigma\upsilon\nu^2\,\theta)\,\eta\mu\,\theta d\theta = 2\left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^3 [\varphi]_0^{2\pi}\left[-2\,\sigma\upsilon\nu\,\theta+\frac{1}{3}\,\sigma\upsilon\nu^3\,\theta\right]_0^{\pi} =$$

$$2\frac{3^5}{5}2\pi\left(-2(-2)+\frac{1}{3}(-2)\right) = \frac{2^3 3^5}{5}\pi\left(2-\frac{1}{3}\right) = \frac{2^3 3^5}{5}\pi\frac{5}{3} = 2^3 3^4\pi = 648\pi$$

β) Θα υπολογίσουμε τώρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Η επιφάνεια της σφαίρας με παραμέτρους τις γωνίες θ και φ δίνεται από τις εξισώσεις $\vec{r}(\theta,\varphi) = (3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, 3\,\text{συν}\,\theta)$ όπου $0 \le \theta \le \pi$ και $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Υπολογίζουμε το στοιχειώδες διάνυσμα $d\vec{S}$. Εχουμε

$$\vec{r}_\theta = (3\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 3\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, -3\,\text{ημ}\,\theta) \quad \vec{r}_\varphi = (-3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 0)$$

οπότε βρίσκουμε

$$d\vec{S} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi d\theta d\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi & 3\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi & -3\,\text{ημ}\,\theta \\ -3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi & 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi & 0 \end{vmatrix} d\theta d\varphi =$$

$$(9\,\text{ημ}^2\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 9\,\text{ημ}^2\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, 9\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta(\text{συν}^2\,\varphi + \text{ημ}^2\,\varphi))d\theta d\varphi =$$

$$9(\text{ημ}^2\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, \text{ημ}^2\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, \text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta)d\theta d\varphi$$

Το δοσμένο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια της σφαίρας γίνεται

$$\vec{f} = 3^2(3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi\vec{i} + 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi\vec{j})$$

Υπολογίζουμε τέλος το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Βρίσκουμε

$$\oiint_S \vec{f}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{f}\cdot \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi d\theta d\varphi =$$

$$\oiint_S 3^2(3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, 3\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, 0)\cdot 9(\text{ημ}^2\,\theta\,\text{συν}\,\varphi, \text{ημ}^2\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi, \text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta)d\theta d\varphi =$$

$$\oiint_S 3^5\left(\text{ημ}^3\,\theta\,\text{συν}^2\,\varphi + \text{ημ}^3\,\theta\,\text{ημ}^2\,\varphi\right)\,d\theta d\varphi = 3^5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \text{ημ}^3\,\theta d\theta =$$

$$3^5 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \text{συν}^2\,\theta)\,\text{ημ}\,\theta d\theta = 3^5 2\pi \left[-\text{συν}\,\theta + \frac{1}{3}\,\text{συν}^3\,\theta\right]_0^{\pi} =$$

$$3^5 2\pi\left(2 - \frac{2}{3}\right) = 3^5 2\frac{4}{3}\pi = 2^3 3^4\pi = 648\pi$$

Το ίδιο αποτέλεσμα βρήκαμε και για το πρώτο ολοκλήρωμα. Συνεπώς τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα και άρα επαληθεύτηκε το θεώρημα Γκάους.

Λύση θέματος 4

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας $z = 2\left(x^2 + y^2\right)$ που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $z = 2$ και $z = 4$.

Λύση: Θα γράψουμε την επιφάνεια σε παραμετρική μορφή με παραμέτρους τις ανεξάρτητες μεταβλητές u, v. Θέτουμε

$$x = u\,\text{συν}\,v \qquad\qquad y = u\,\text{ημ}\,v$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις αυτές στην εξίσωση της επιφάνειας και βρίσκουμε

$$z = 2\left((u\,\text{συν}\,v)^2 + (u\,\text{ημ}\,v)^2\right) = 2u^2$$

Από την παραπάνω εξίσωση είναι φανερό ότι επειδή το z μεταβάλλεται μεταξύ του 2 και του 4, το u μεταβάλλεται μεταξύ του 1 και του $\sqrt{2}$. Αρα η δοσμένη επιφάνεια σε παραμετρική μορφή γράφεται

$$\vec{r}(u,v) = \left(u\,\text{συν}\,v, u\,\text{ημ}\,v, 2u^2\right) \qquad\qquad 1 \le u \le \sqrt{2} \quad 0 \le v \le 2\pi$$

Για τον υπολογισμό του εμβαδού χρειαζόμαστε το μέτρο του διανύσματος $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Βρίσκουμε

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (\text{συν}\,v, \text{ημ}\,v, 4u) \qquad\qquad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-u\,\text{ημ}\,v, u\,\text{συν}\,v, 0)$$

Επομένως

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \text{συν}\,v & \text{ημ}\,v & 4u \\ -u\,\text{ημ}\,v & u\,\text{συν}\,v & 0 \end{vmatrix} = \left(-4u^2\,\text{συν}\,v, -4u^2\,\text{ημ}\,v, u\right)$$

Το μέτρο του διανύσματος αυτού είναι

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \left[\left(-4u^2\,\text{συν}\,v\right)^2 + \left(-4u^2\,\text{ημ}\,v\right)^2 + u^2\right]^{1/2} = \left[16u^4 + u^2\right]^{1/2}$$

Βρίσκουμε τέλος το εμβαδόν της δοσμένης επιφάνειας

$$S = \int_0^{2\pi} dv \int_1^{\sqrt{2}} \left[16u^4 + u^2\right]^{1/2} du = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} u \left[16u^2 + 1\right]^{1/2} du =$$

$$2\pi \frac{2}{3} \frac{1}{32} \left(\left[16u^2 + 1\right)^{3/2} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi \left(33^{3/2} - 17^{3/2}\right)}{24} = \frac{\pi(33\sqrt{33} - 17\sqrt{17})}{24}$$

Λύση θέματος 5

Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x \,\text{συν}\, x$ στο διάστημα $-\pi \leq x \leq \pi$. Με την βοήθεια της αναπτύξεως αυτής να αποδειχτεί ότι

$$x \,\text{ημ}\, x = 1 - \frac{1}{2} \,\text{συν}\, x - 2 \left(\frac{\text{συν}\, 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\text{συν}\, 3x}{2 \cdot 4} + \frac{\text{συν}\, 4x}{3 \cdot 5} - \cdots \right)$$

Λύση: Το αντίστροφο του θέματος αυτού βρίσκεται λυμένο στις σημειώσεις αυτές. Στην άσκηση (5.5) έχει υπολογιστεί το ανάπτυγμα της συναρτήσεως $x \,\text{ημ}\, x$ και μετά με παραγώγιση βρέθηκε το ανάπτυγμα της $x \,\text{συν}\, x$.

Η συνάρτηση $f(x) = x \,\text{συν}\, x$ είναι περιττή διότι

$$f(-x) = (-x) \,\text{συν}\, (-x) = -x \,\text{συν}\, x = -f(x)$$

Αρα $a_n = 0$ και οι συντελεστές b_n δίνονται από την σχέση

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \,\text{ημ}\, nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \,\text{συν}\, x \,\text{ημ}\, nx dx$$

Το ολοκλήρωμα πρέπει να υπολογιστεί χωριστά για $n = 1$ και για $n \neq 1$.

Για $n = 1$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \,\text{συν}\, x \,\text{ημ}\, x dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \,\text{ημ}\, 2x dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} x \,\text{συν}\, 2x + \frac{1}{4} \,\text{ημ}\, 2x \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \pi \,\text{συν}\, 2\pi = -\frac{1}{2}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα για $n \neq 1$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\text{συν}\,x\,\text{ημ}\,nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,\text{ημ}\,(n+1)x dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,\text{ημ}\,(n-1)x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}x\,\text{συν}\,(n+1)x + \frac{1}{(n+1)^2}\,\text{ημ}\,(n+1)x\right]_0^\pi -$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-1}x\,\text{συν}\,(n-1)x - \frac{1}{(n-1)^2}\,\text{ημ}\,(n-1)x\right]_0^\pi =$$

$$-\frac{1}{n+1}\,\text{συν}\,(n+1)\pi - \frac{1}{n-1}\,\text{συν}\,(n-1)\pi = -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1}\left[-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right] = \frac{2n(-1)^n}{(n+1)(n-1)}$$

Επομένως το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier είναι

$$x\,\text{συν}\,x = -\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\,\text{ημ}\,nx$$

Ολοκληρώνουμε την σειρά αυτή όρο προς όρο και βρίσκουμε

$$\int x\,\text{συν}\,x dx = c - \frac{1}{2}\int \text{ημ}\,x dx + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\int \text{ημ}\,nx dx$$

Βρίσκουμε τα ολοκληρώματα

$$x\,\text{ημ}\,x + \text{συν}\,x = c + \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx \qquad \Longrightarrow$$

$$x\,\text{ημ}\,x = c - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx$$

Η σταθερά c είναι ίση με $a_0/2$. Υπολογίζουμε το a_0

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\text{ημ}\,x dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\,\text{συν}\,x + \text{ημ}\,x\right]_0^\pi = -\frac{2}{\pi}\pi\,\text{συν}\,\pi = 2$$

και άρα τελικά

$$x\,\text{ημ}\,x = 1 - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx$$

Παρατήρηση: Δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε όρο προς όρο τη σειρά Fourier της συναρτήσεως $x\,\text{συν}\,x$ διότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα. Αν δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε το M−κριτήριο βρίσκουμε

$$\left|\frac{2n(-1)^{n+1}}{(n+1)(n-1)}\,\text{ημ}\,nx\right| < \frac{1}{n} = M_n$$

Ομως η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} M_n$ δεν συγκλίνει και επομένως το κριτήριο δεν εφαρμόζεται.

Αν όμως κάνουμε το λάθος και παραγωγίσουμε την σειρά όρο προς όρο βρίσκουμε

$$\text{συν}\,x - x\,\text{ημ}\,x = -\frac{1}{2}\,\text{συν}\,x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx \qquad \Longrightarrow$$

$$x\,\text{ημ}\,x = +\frac{3}{2}\,\text{συν}\,x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\left[(n+1)(n-1)+1\right](-1)^n}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx \qquad \Longrightarrow$$

$$x\,\text{ημ}\,x = 1 - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\,\text{συν}\,nx + \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n\,\text{συν}\,nx\right)$$

Προφανώς, παρά το λάθος που κάναμε, βρίσκουμε πάλι το σωστό αποτέλεσμα αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι η τελευταία παρένθεση συγκλίνει στο μηδέν. Ομως η σειρά αυτή δεν συγκλίνει με καμία κλασική έννοια διότι ο τελευταίος όρος της δεν μηδενίζεται ($\text{ορ}_{n\to\infty}\,\text{συν}\,nx \neq 0$) αλλά ταλαντώνεται συνεχώς μεταξύ των τιμών -1 και $+1$.

Αν θεωρήσουμε όλες τις παραπάνω συναρτήσεις σαν συναρτησιακά το άθροισμα αυτό συγκλίνει (με την έννοια της κατανομής) σε μια κατανομή γνωστή σαν δ− κατανομή ή συναρτησιακό του Dirac. Η ανάλυση σε σειρά Fourier της κατανομής αυτής είναι

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(x-\xi)}$$

Σαν άσκηση να βρείτε με την βοήθεια της παραπάνω σχέσεως το συναρτησιακό $\delta(x-\pi)$.

Βιβλιογραφία

1) Διανυσματική Ανάλυση, Δ. Σουρλάς
Πανεπιστήμιο Πατρών 1997
2) Mathematical methods for physicists, G. Arfken
Academic press 1971
3) α) Σειρές Φουριέ, Murray Spigel
β) Vector Analysis, Murray Spigel
Schaum's outline series McGraw-Hill
4) Methods of theoretical physics part I, part II
P. Morse and H. Feshbach
Mc Graw Hill B.C. 1950
5) Calculus with analytic Geometry
Rombert Ellis and Denny Gulik
Saunders College Pub. int. edition 1994
6) Advanced Calculus, Angus E Taylor
Blaisdell publishing company 1955
7) Vector and tensor Analysis, Harry Lass
International student edition Company 1955
8) Μαθηματική Ανάλυση, Louis Brand
Ελληνική Μαθηματική εταιρεία 1984
9) Advanced Calculus for Applications, F.B.Hildebrand
Prentice - Hall, inc 1976
10) Calculus and analytic Geometry, G.B. Thomas
Addison Wesley 1983
11) Συναρτήσεις πολλών Μεταβλητών, Β.Παπαντωνίου
Εκδόσεις Γαργαράκη Θεσσαλονίκη 1986
12) Διανυσματικός Λογισμός, J. Marsden - A. Tromba
Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
13) Table of integrals Series end Products
I. Gradshteyn end I. Ryzhik, A. Jeffrey, Editor
Academic Press Inc.

Περιεχόμενα