Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πεδίον Άρεως, 38334 Βόλος
τηλ: 24210-74178, fax: 24210-74169, www.uth.gr

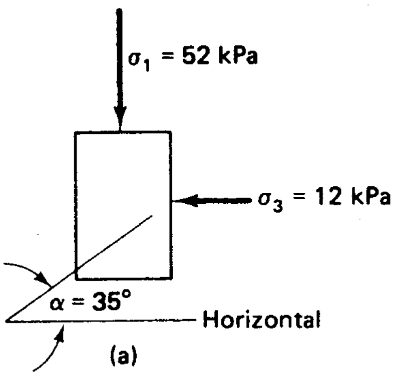
Μάθημα: Εδαφομηχανική Ι, 5^{o} εξάμηνο.

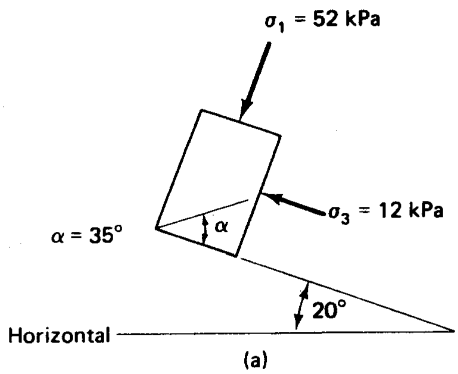
Διδάσκων: Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Θεματική περιοχή: Τάσεις & Παραμορφώσεις στο έδαφος.

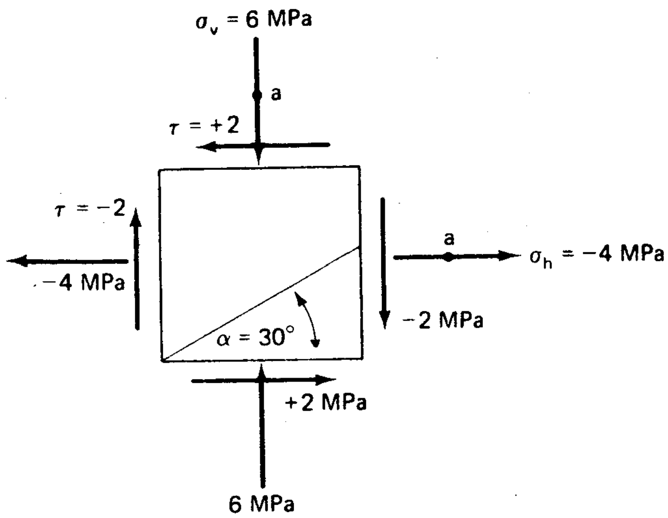
Ημερομηνία: Δευτέρα 25 Οκτωβρίου 2010.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Υπολογίστε την ορθή και διατμητική τάση, οι οποίες ασκούνται στα επίπεδα με κλίση α ως, όπως φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

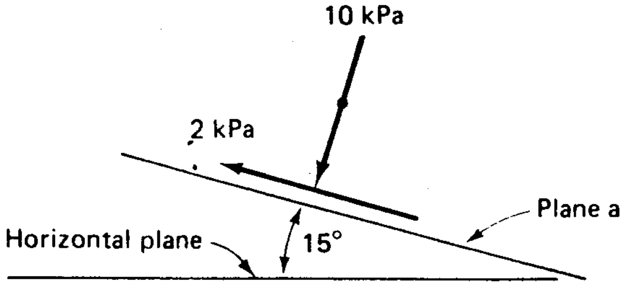




ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίστε την ορθή και διατμητική τάση καθώς και τις κύριες τάσεις και διευθύνσεις τους για την κάτωθι εντατική κατάσταση.



ΑΣΚΗΣΗ 3: Υπολογίστε το μέγεθος, τη διεύθυνση της μέγιστης και ελάχιστης κύριας τάσης και τη γωνία θ που σχηματίζει το επίπεδο (b) με το επίπεδο (α), για την κάτωθι εντατική κατάσταση.



On plane b: $\sigma_b = 9$ kPa, $\tau_b = -3$ kPa, $\theta° = ?$ from plane a

ΑΣΚΗΣΗ 4: Η εντατική κατάσταση σε ένα υλικό σημείο δίνεται από τον τανυστή των τάσεων $[\sigma]$,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τις τρείς αναλλοίωτες ποσότητες του τανυστή αυτού. Δώστε τις εκφράσεις των αναλλοιώτων αυτών στην περίπτωση κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 και σ_3.

Υπόδειξη: Οι αναλλοίωτες ποσότητες ενός τανυστή προκύπτουν από τη χαρακτηριστική κυβική εξίσωση,

$$det([\sigma] - \lambda[I]) = 0 \rightarrow \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

η επίλυση της οποίας δίνει τις τρείς διακριτές ιδιοτιμές λ του τανυστή $[\sigma]$, οι οποίες αντιστοιχούν στις κύριες τιμές των τάσεων στα κύρια επίπεδα (επίπεδα με μηδενικές διατμητικές τάσεις).

Η πρώτη αναλλοίωτος I_1 ποσότητα ισούται με

$$I_1 = tr[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

Η δεύτερη I_2,

$$I_2 = \frac{1}{2}[(tr[\sigma])^2 - tr[\sigma]^2] = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}\right)$$

και η τρίτη I_3,

$$I_3 = det([\sigma])$$

ΑΣΚΗΣΗ 5: Στην Εδαφομηχανική συχνά η εντατική κατάσταση (τανυστής των τάσεων $[\sigma]$) σε ένα υλικό σημείο χωρίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο αντιστοιχεί σε μία ισότροπη ένταση $[p]$ ενώ το δεύτερο στην αποκλίνουσα, από την ισότροπη κατάσταση, ένταση $[s]$,

$$[\sigma] = [p] + [s]$$

Υπολογίστε τον ισότροπο $[p]$ και αποκλίνοντα $[s]$ τανυστή των τάσεων για μία τριδιάστατη εντατική κατάσταση $[\sigma]$. Έπειτα, υπολογίστε την πρώτη, δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτο ποσότητα τόσο για τον $[p]$ (I_1, I_2, και I_3) όσο και για τον $[s]$ (J_1, J_2, και J_3).

Υπόδειξη: Οι αναλλοίωτες ποσότητες για τον ισότροπο $[p]$ και αποκλίνοντα $[s]$ τανυστή των τάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathrm{I}_1 = tr[p] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}[(tr[p])^2 - tr[p]^2] = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}\right)$$

$$\mathrm{I}_3 = det([p])$$

και

$$J_1 = tr[s]$$

$$\mathrm{J}_2 = -\frac{1}{2}[(tr[s])^2 - tr[s]^2] = -\frac{1}{2}\left(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}\right) = \frac{\mathrm{I}_1^2}{3} - \mathrm{I}_2$$

$$\mathrm{J}_3 = det([s]) = \mathrm{I}_3 + \frac{\mathrm{I}_1\mathrm{J}_2}{3} - \frac{\mathrm{I}_1}{27}$$

Η κυβική χαρακτηριστική εξίσωση για τις ιδιοτιμές του αποκλίνοντα τανυστή $[s]$ είναι,

$$det([s] - \lambda[I]) = 0 \rightarrow \lambda^3 - J_1\lambda^2 - J_2\lambda - J_3 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 6: Η τριαξονική συσκευή, μία από τις συσκευές που χρησιμοποιούνται στην Πειραματική Εδαφομηχανική, μπορεί να επιβάλλει στις 6 πλευρές ενός κυβικού εδαφικού δοκιμίου τρείς ανεξάρτητες κύριες τάσεις (σ_1, σ_2, σ_3). Πειραματικά αποτελέσματα από τριαξονικές δοκιμές σε εδαφικό υλικό έδωσαν τις ακόλουθες τιμές για τις τρείς αναλλοίωτους του τανυστή των τάσεων $[\sigma]$,

$$I_1 = 600kPa, I_2 = 110.000kPa^2, I_3 = 6.000.000kPa^3$$

Υπολογίστε τις κύριες τάσεις στην αστοχία καθώς και την μέγιστη διατμητική τάση και το επίπεδο στο οποίο ασκείται.

ΑΣΚΗΣΗ 7: Τριαξονική δοκιμή θλίψεως σε δοκίμιο χαλαρής άμμου με αρχικό δείκτη πόρων $e_0 = 0.680$ έδωσε τις κάτωθι τιμές αναφορικά με τις τροπές ως προς τους τρείς κύριους άξονες,

$$\varepsilon_1 = 0.063, \varepsilon_2 = 0.015, \varepsilon_3 = -0.005$$

Υπολογίστε το δείκτη πόρων e και το πορώδες n μετά το πέρας της δοκιμής καθώς και την μέγιστη διατμητική παραμόρφωση και το επίπεδο στο οποίο εμφανίζεται.

Υπόδειξη: Η ογκομετρική τροπή ορίζεται ως,

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}$$

Επίσης, ο αρχικός δείκτης πόρων e δίνεται από,

$$e_0 = \frac{V_V}{V_s}$$

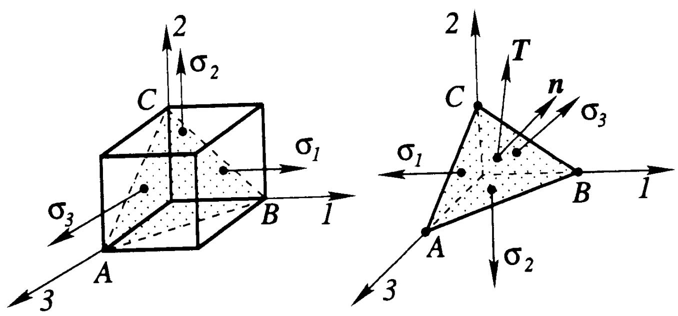
Συνεπώς, η μεταβολή του δείκτη πόρων Δe θα ισούται με,

$$\Delta e = e - e_0 = -\frac{\Delta V_V}{V_s}$$

Επομένως, η μεταβολή του όγκου του δοκιμίου θα ισούται με,

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V_V}{V} = \frac{\Delta V_V}{V_s + V_V} = -\frac{\Delta e \cdot V_s}{V_s + V_V} = -\frac{\Delta e}{1 + e_0} = -\frac{e - e_0}{1 + e_0} = \frac{e_0 - e}{1 + e_0}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8: Να υπολογιστούν η ορθή οκταεδρική σ_{oct} και διατμητική οκταεδρική τ_{oct} τάση, οι οποίες ασκούνται στο επίπεδο το οποίο έχει κάθετο διάνυσμα τη χωροδιαγώνιο. Δώστε τις αντίστοιχες εκφράσεις των ανωτέρω τάσεων για την περίπτωση κυρίων τάσεων μόνο (σ_1, σ_2, σ_3).



Υπόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η εντατική κατάσταση σε ένα υλικό σημείο του χώρου δίνεται από τον τανυστή των τάσεων $[\sigma]$,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

όπου 1,2 και 3 είναι οι άξονες του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς.

Το διάνυσμα της έντασης $\widetilde{t_n}$, ή αλλιώς ο ελκυστής τάσεως, το οποίο δρα σε ένα επίπεδο, του οποίου το κάθετο διάνυσμα συμβολίζεται με $\tilde{n} = [n_1, n_2, n_3]$, υπολογίζεται από την κάτωθι σχέση,

$$\widetilde{t_n} = [\sigma]^T \tilde{n} = [\sigma]\tilde{n}$$

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πεδίον Άρεως, 38334 Βόλος
τηλ: 24210-74178, fax: 24210-74169, www.uth.gr

Η ορθή τάση σ_n επί του επιπέδου, με κάθετο διάνυσμα το διάνυσμα $\tilde{n} = [n_1, n_2, n_3]$, δίνεται από την προβολή του ελκυστή των τάσεων $\widetilde{t_n}$ στο κάθετο διάνυσμα $\tilde{n}$, ήτοι,

$$\sigma_n = \widetilde{t_n} \cdot \tilde{n} = ([\sigma] \cdot \tilde{n}) \cdot \tilde{n}$$

Η διατμητική τάση η οποία ασκείται επί του επιπέδου αυτού θα δίνεται από,

$$(\tau_n)^2 = \widetilde{t_n} \cdot \widetilde{t_n} - (\sigma_n)^2 = |\widetilde{t_n}|^2 - (\sigma_n)^2$$

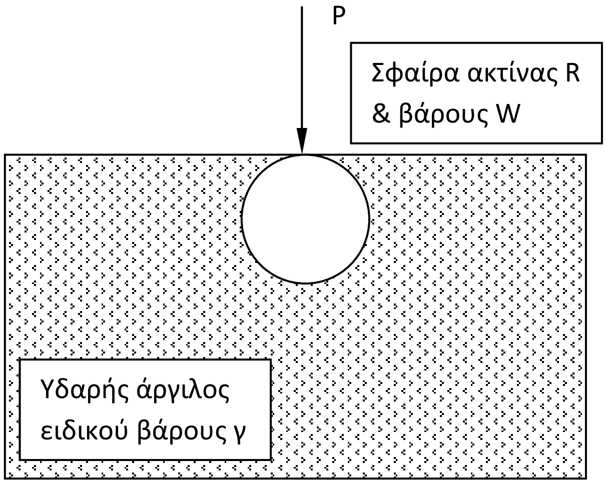
Το επίπεδο που είναι κάθετο στη χωροδιαγώνιο έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\tilde{n}$,

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \quad 1 \quad 1]$$

του οποίου το μέτρο ισούται με,

$$|\tilde{n}| = \sqrt{\tilde{n} \cdot \tilde{n}} = \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 9: Μία σφαίρα ακτίνας R και βάρους W τοποθετείται σε μία υδαρή θιξοτροπική άργιλο. Το υλικό μπορεί να προσομοιασθεί ως ένα ρευστό με μηδενικό ιξώδες. Χωρίς την χρήση της αρχής του Αρχιμήδη, υπολογίστε την δύναμη P που απαιτείται για να εισαχθεί η σφαίρα αυτή στο ρευστό, όπως στο σχήμα.



Υπόδειξη: Η επιφάνεια ενός στοιχείου μιας σφαίρας ακτίνας R από γωνία $\theta \to d\theta$ και από $\varphi \to d\varphi$ δίνεται από τη σχέση,

$$dS = R^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

με $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Η τάση η οποία ασκείται κάθετα στην επιφάνεια της σφαίρας από το ρευστό ισούται με,

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \gamma \cdot R \cdot (1 - \cos\theta)$$