



**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Φυσικά χαρακτηριστικά εδαφών (1<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 18 Οκτωβρίου 2010.

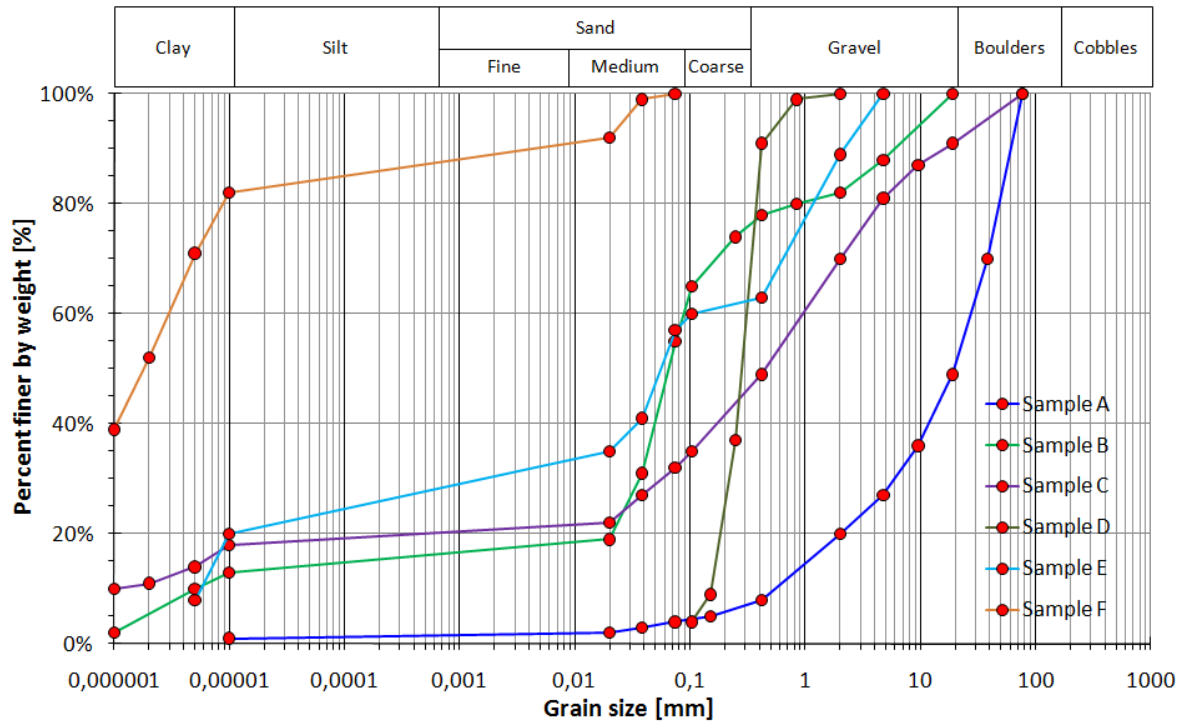
**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Σχεδιάστε τις κοκκομετρικές καμπύλες των παρακάτω δειγμάτων από εδαφικό υλικό. Υπολογίστε το συντελεστή ομοιομορφίας  $C_u$  και καμπυλότητα  $C_c$  για κάθε ένα από τα εδαφικά δείγματα. Υπολογίστε επίσης τα ποσοστά χαλίκων, άμμου, ιλύος και αργίλου κατά τα πρότυπα ASTM, AASHTO, USCS και British Standard. Εν συνεχεία, εκτιμήστε τους δείκτες πλαστιμότητας  $PI$  και υδαρότητας  $LI$  καθώς και χαρακτηρίστε τα ως προς την ενεργητικότητά τους (activity  $A$ ). Κατηγοριοποιήστε τα εδάφη σύμφωνα με το Ενοποιημένο Σύστημα Ταξινόμησης Εδαφών (USCS).

Κόσκινο κατά ASTM ή διάσταση κόκκου	% κατά βάρος διερχόμενο					
	Δείγμα Α	Δείγμα Β	Δείγμα C	Δείγμα D	Δείγμα Ε	Δείγμα F
3"	100	-	100	-	-	-
1 1/2"	70	-	-	-	-	-
3/4"	49	100	91	-	-	-
3/8"	36	-	87	-	-	-
No.4	27	88	81	-	100	-
No.10	20	82	70	100	89	-
No.20	-	80	-	99	-	-
No.40	8	78	49	91	63	-
No.60	-	74	-	37	-	-
No.100	5	-	-	9	-	-
No.140	-	65	35	4	60	-
No.200	4	55	32	-	57	100
No.400	3	31	27	-	41	99
No.635	2	19	22	-	35	92
10μm	1	13	18	-	20	82
5μm	<1	10	14	-	8	71
2μm	-	-	11	-	-	52
1μm	-	2	10	-	-	39
	Δείγμα Α	Δείγμα Β	Δείγμα C	Δείγμα D	Δείγμα Ε	Δείγμα F
$w_n$ [%]	27	14	14	11	8	72
LL	13	35	35	-	28	60
PL	8	29	18	NP	NP	28

(Με παύλα σημειώνονται οι τιμές που λείπουν, NP: μη πλαστιμο)



**Λύση:** Με τη βοήθεια φύλλου εργασίας Excel σχεδιάζουμε τις ανωτέρω κοκκομετρικές καμπύλες, οι οποίες παρουσιάζονται στο κάτωθι σχήμα.



Οι συντελεστές ομοιομορφίας  $C_u$  και καμπυλότητας  $C_c$  ορίζονται ως,

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$$

$$C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{10}D_{60}}$$

	Δείγμα Α	Δείγμα Β	Δείγμα C	Δείγμα D	Δείγμα Ε	Δείγμα F
$D_{10}[mm]$	0.68	0.000005	0.000001	0.154	0.0000058	0.0000003
$D_{30}[mm]$	6.34	0.037	0.060	0.224	0.013	0.0000008
$D_{50}[mm]$	19.96	0.067	0.494	0.290	0.058	0.0000018
$D_{60}[mm]$	29.03	0.089	1.247	0.321	0.104	0.0000033
$C_u$	42.54	17800	1246619	2.093	17829	12.726
$C_c$	2.03	2993.82	2849.44	1.019	293.19	0.707
PI	5%	6%	17%	NP	NP	32%
LI	3.80	-2.50	-0.24	-	-	1.38
$c_f$	1.10	0.44	18.40%	0.08%	21.49%	83.0%
A	4.55	1.25	0.92	-	-	0.39
USCS	GW	ML	SC	SP	ML	CH
ASTM						
AASHTO	A-1-a	A-4	A-2-6	A-3	A-4	A-7-6
BS						



Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα όρια των τιμών των διαμέτρων σε mm των κόκκων, ως προς το χαρακτηρισμό τους κατά ASTM, AASHTO, USCS και British Standard.

Εδαφικό υλικό/Πρότυπο	ASTM	AASHTO	USCS	British Standard
Χάλικας (χονδρόκοκκος)	4.75-75	2.0-75	19-75	20-60
Χάλικες (μεσόκοκκος)				6-20
Χάλικες (λεπτόκοκκος)			4.75-19	2.0-6
Άμμος (χονδρόκοκκος)	2.0-4.75	0.425-2.0	2.0-4.75	0.6-2.0
Άμμος (μεσόκοκκος)	0.425-2.0		0.425-2.0	0.2-0.6
Άμμος (λεπτόκοκκος)	0.075-0.425	0.075-0.425	0.075-0.425	0.06-0.2
Ιλύς (χονδρόκοκκος)	0.005-0.075	0.005-0.075	<0.075	0.02-0.06
Ιλύς (μεσόκοκκος)				0.006-0.02
Ιλύς (λεπτόκοκκος)				0.002-0.006
Άργιλος	0.001-0.005	0.001-0.005		<0.002

Ακολουθως, ο επόμενος πίνακας δίνει τις διαστάσεις των τετραγωνικών οπών της πλήρους σειράς των κοσκίνων κατά το πρότυπο ASTM (E11-01).

Κόσκινο	Άνοιγμα οπής σε mm	Κόσκινο	Άνοιγμα οπής σε mm
5,00"	127.000	No.8	2.380
4,24"	107.696	No.10	1.999
4"	101.600	No.12	1.679
3 ½"	88.900	No.14	1.410
3"	76.200	No.16	1.191
2½"	63.500	No.18	1.001
2.12"	53.848	No.20	0.841
2"	50.800	No.25	0.706
1¾"	44.450	No.30	0.594
1½"	38.100	No.35	0.500
1¼"	31.750	No.40	0.419
1.06"	26.924	No.45	0.353
1"	25.400	No.50	0.297
7/8"	22.225	No.60	0.249
¾"	19.050	No.70	0.211
5/8"	15.875	No.80	0.178
0.530"	13.462	No.100	0.150
½"	12.700	No.120	0.124
7/16"	11.125	No.140	0.104
3/8"	9.525	No.170	0.089
5/16"	7.925	No.200	0.074
0.265"	6.731	No.230	0.064
¼"	6.350	No.270	0.053
No.3½	5.664	No.325	0.043
No.4	4.750	No.400	0.038
No.5	3.988	No.450	0.030
No.6	3.353	No.500	0.025
No.7	2.794	No.635	0.020



Ενεργητικότητα (activity)  $A$  ενός λεπτοκόκκου υλικού ορίζεται η ποσότητα

$$A = \frac{PI}{c_f}$$

όπου  $PI$  είναι ο δείκτης πλαστιμότητας και  $c_f$  είναι το ποσοστό κατά βάρος του εδάφους το οποίο έχει διάμετρο μικρότερο του  $0.002\text{mm}$ . Ο παρακάτω πίνακας χαρακτηρίζει τα αργιλικά εδαφικά υλικά ως προς την ενεργητικότητά τους.

Αργιλικά εδαφικά υλικά	Τιμές παραμέτρου ενεργητικότητας $A$
Κανονικά (normal)	$0.75 < A < 1.25$
Ανενεργά (inactive)	$A < 0.75$
Ενεργά (active)	$A > 1.25$

Για την κατάταξη των εδαφών χρησιμοποιείστε τον Πίνακα του Ενιαίου Συστήματος Ταξινόμησης Εδαφών (USCS), το οποίο βρίσκεται στο τέλος των ασκήσεων.

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Τα κάτωθι αποτελέσματα προέκυψαν από πειράματα προσδιορισμού ορίου υδαρότητας  $LI$  σε εδαφικό δοκίμιο ιλυώδους αργίλου στη συσκευή Casagrande.

Αριθμός κτύπων	Ποσοστό υγρασίας %
35	41.1
29	41.8
21	43.5
15	44.9

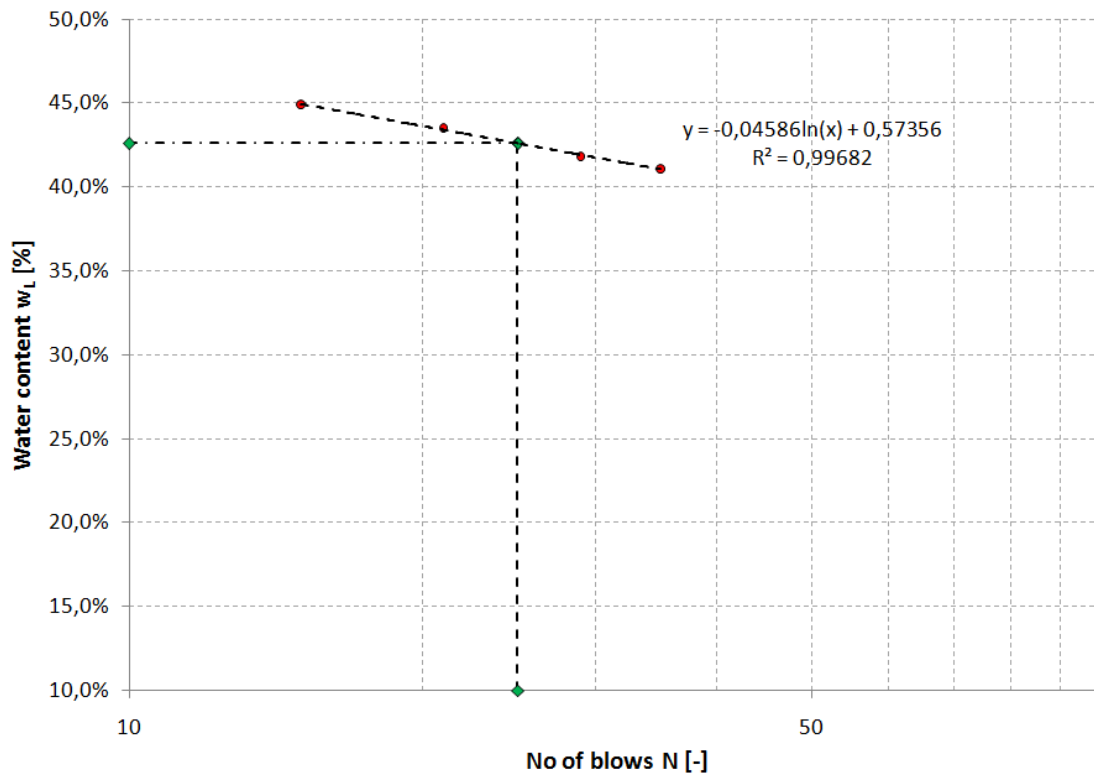
Οι αντίστοιχες δοκιμές για τον προσδιορισμό του ορίου πλαστιμότητας  $PL$  έδωσαν τιμές περιεκτικότητας σε ύδωρ 23.1% και 23.6%. Προσδιορίστε το όριο υδαρότητας  $LL$ , το δείκτη πλαστιμότητας  $PI$ , το δείκτη ρευστότητας (flow index) και τον δείκτη σκληρότητας (toughness index).

**Λύση:** Αρχικώς δεχόμαστε ότι το όριο πλαστιμότητας  $PL$  του εδαφικού υλικού της αργίλου είναι,

$$PL = \frac{23.1\% + 23.6\%}{2} = 23.35\%$$

Το όριο υδαρότητας  $LL$  είναι το ποσοστό υγρασίας που έχει το εδαφικό υλικό ούτως ώστε μετά από  $N = 25$  κτύπους να κλείνει η χαραγή στην συσκευή Casagrande. Το ποσοστό αυτό προσδιορίζεται και από το διάγραμμα, στον οριζόντιο άξονα του οποίου τοποθετούμε τον αριθμό των κτύπων  $N$  σε λογαριθμική κλίμακα και στον κατακόρυφο το ποσοστό υγρασίας  $w$ .

$$w(\%) = -0.04586 \ln(N) + 0.57356$$



Επομένως,

$$LL = 42.6\%$$

και ο δείκτης πλαστιμότητας,

$$PI = LL - PL = 42.60\% - 23.35\% = 19.25\%$$

Ο δείκτης ρευστότητας (flow index) ορίζεται ως η κλίση της καμπύλης του διαγράμματος περιεκτικότητας ύδατος  $w$  και αριθμό κρούσεων  $N$  σε λογαριθμική κλίμακα στην δοκιμή προσδιορισμού του ορίου υδαρότητας  $LL$ , ήτοι

$$FI = 4.59\%$$

Ο δείκτης σκληρότητας (toughness index) είναι ο λόγος του δείκτη πλαστιμότητας προς το δείκτη ρευστότητας, ήτοι,

$$TI = \frac{PI}{FI} = \frac{19.25\%}{4.59\%} = 4.19$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Σχολιάστε την ορθότητα ή μη των παρακάτω πειραματικών αποτελεσμάτων, τα οποία προέκυψαν από δοκιμές στη συσκευή Casagrande, για δύο διαφορετικά εδαφικά υλικά.

Όρια Atterberg	Εδαφικό υλικό Α	Εδαφικό υλικό Β
LL	50	38
PL	20	42
SL	25	-



**Λύση:** Το όριο υδαρότητας πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το όριο πλαστιμότητας και το όριο πλαστιμότητας μεγαλύτερο από το όριο συρρικνώσεως, ήτοι,

$$LL > PL > SL > 0$$

Τα ανωτέρω πειραματικά αποτελέσματα για το εδαφικό δοκίμιο Α είναι εσφαλμένα καθώς  $SL > PL$ , καθώς και για το εδαφικό δοκίμιο Β,  $PL > LL$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις

$$\rho = \rho_s \frac{1+w}{1+e} = \frac{\rho_s + \rho_w Se}{1+e}$$

$$\rho = \rho_d(1+w)$$

$$Se\rho_w = \rho_s w$$

$$e = \frac{n}{1-n}$$

$$n = \frac{e}{1+e}$$

και γράψτε τις εκφράσεις που συνδέουν τη ξηρά πυκνότητα  $\rho_d$ , το δείκτη πόρων  $e$  και το βαθμό κορεσμού  $S$  συναρτήσει των ποσοτήτων  $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_w$  και  $w$ .

**Λύση:** Ο δείκτης πόρων ορίζεται ως ο λόγος του όγκου των κενών  $V_v$  προς τον όγκο των στερεών  $V_s$ ,

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{V_v}{V_t - V_v} = \frac{V_v/V_t}{1 - V_v/V_t} = \frac{n}{1-n} \Rightarrow n = \frac{e}{1+e}$$

όπου  $n$  το πορώδες (λόγος όγκου κενών  $V_v$  προς ολικό όγκο  $V_t$ ).

Η πυκνότητα του εδαφικού υλικού ισούται με,

$$\rho = \frac{m_t}{V_t} = \frac{m_s + m_w}{V_t} = \frac{\rho_s V_s + w\rho_s V_s}{V_t} = \rho_s \frac{1+w}{V_t/V_s} = \rho_s \frac{1+w}{\frac{V_s + V_v}{V_s}} = \rho_s \frac{1+w}{1+e}$$

Στην περίπτωση κατά την οποία το εδαφικό υλικό είναι ξηρό ( $w = 0$ ), η ξηρά πυκνότητα  $\rho_d$  ισούται με,

$$\rho_d = \rho_s \frac{1+w}{1+e} = \frac{\rho_s}{1+e} \Rightarrow \rho_s = \rho_d(1+e)$$

και η πυκνότητα θα δίνεται από,



$$\rho = \rho_s \frac{1+w}{1+e} = \rho_d(1+w)$$

Τέλος,

$$\rho_s w = \frac{m_s}{V_s} w = \frac{m_w}{V_s} = e \frac{m_w}{V_v} = e \frac{\rho_w V_w}{V_v} = S e \rho_w$$

**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Υπολογίστε τη μέγιστη (χαλαρή διάστρωση/συσκευασία) και ελάχιστη (πυκνή διάστρωση/ συσκευασία) τιμή που μπορεί να πάρει το πορώδες  $n$  και ο δείκτης πόρων  $e$  για μία συσκευασία από σφαίρες διαμέτρου  $D$ .

**Λύση:** Το πρόβλημα του υπολογισμού του μέγιστου  $n_{max}$  και ελάχιστου  $n_{min}$  πορώδους ή δείκτη πόρων ανάγεται στο πρόβλημα ευρέσεως της πιο χαλαρής ή πυκνής συσκευασίας. Στην περίπτωση ιδανικών σφαιρών διαμέτρου  $D$ , η πιο χαλαρή διάστρωση ή συσκευασία αντιστοιχεί στην τοποθέτηση των σφαιρών της μίας επάνω στην άλλη. Η απόσταση των κέντρων των σφαιρών είναι  $D$ , επομένως,

$$n_{max} = \frac{V_v}{V_t} = \frac{V_t - V_s}{V_t} = \frac{D^3 - \frac{1}{6}\pi D^3}{D^3} = \frac{6 - \pi}{6} = 0.4764 \Rightarrow e_{max} = \frac{n_{max}}{1 - n_{max}} = 0.910$$

Στην περίπτωση πυκνής διάστρωσης ή συσκευασίας, οι σφαίρες τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε οι σφαίρες του υπερκείμενου στρώματος να τοποθετούνται στα κενά που δημιουργούνται μεταξύ τριών σφαιρών. Τα τετράεδρα που δημιουργούνται από το κανονικό αυτό σχήμα έχουν πλευρές μήκους  $D$  ενώ το ύψος του τετραέδρου ισούται με  $\frac{\sqrt{6}}{3}D$ . Συνεπώς,

$$n_{min} = \frac{V_v}{V_t} = \frac{V_t - V_s}{V_t} = \frac{D \frac{\sqrt{6}}{3} D \frac{\sqrt{3}}{2} D - \frac{1}{6}\pi D^3}{D \frac{\sqrt{6}}{3} D \frac{\sqrt{3}}{2} D} = \frac{\sqrt{18} - \pi}{\sqrt{18}} = 0.2595 \Rightarrow e_{min} = \frac{n_{min}}{1 - n_{min}} = 0.350$$

**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Σχεδιάστε την κοκκομετρική καμπύλη ενός λεπτοκόκκου υλικού από τα κάτωθι αποτελέσματα από την δοκιμή του αραιομέτρου (hydrometer). Το ειδικό βάρος της στερεάς φάσης είναι  $2.70\text{gr/cm}^3$ . Θερμοκρασία αιωρήματος  $21.7^\circ\text{C}$ . Όγκος βολβού αραιομέτρου  $28.8\text{cm}^3$ . Θερμοκρασία βαθμονόμησης αραιομέτρου  $20^\circ\text{C}$ . Για το αραιομέτρου δεχθείτε:

$$z_r = 22.10\text{cm}, \rightarrow r = 0$$

$$z_r = 9.40\text{cm}, \rightarrow r = 30$$

Εμβαδόν ογκομετρικού σωλήνα  $28.8\text{cm}^2$ , όγκος αιωρήματος  $1000\text{cm}^3$ , μάζα ξηρού δείγματος  $99.1\text{gr}$ .



Χρόνος $t$ [min]	Μετρήσεις αραιομέτρου	
	Εν αιωρήσει	Εν ύδωρ
1/4	24.0	
1/2	20.6	
1	17.1	
2	13.3	-0.4
5	9.3	
10	6.7	
20	4.8	
48	3.1	
90	2.2	-0.4
180	1.5	
332	0.9	-0.4
1332	0.4	-0.5

**Λύση & Θεωρητικό υπόβαθρο:** Κατά την δοκιμή του αραιομέτρου, μία ποσότητα εδάφους διαλύεται σε ύδωρ και ανακατεύεται μέχρι το μείγμα να γίνει ομοιόμορφο. Στην αρχή της διαδικασίας εναπόθεσης το μείγμα έχει την ίδια περιεκτικότητα αιωρούμενου εδάφους σε οποιοδήποτε σημείο του. Το ειδικό βάρος του μείγματος  $\gamma_i$  δίνεται από την σχέση

$$\gamma_i = \gamma_w + \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_s} \frac{W}{V}$$

όπου  $\gamma_w$  είναι το ειδικό βάρος του ύδατος,  $\gamma_s$  είναι το ειδικό βάρος της στερεάς φάσης και  $\frac{W}{V}$  είναι το βάρος της στερεάς φάσης.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο σε ένα βάθος  $z$  από την ελεύθερη επιφάνεια και έστω  $t$  είναι ο χρόνος από την έναρξη της εναπόθεσης (καθίζησης). Η διάμετρος του κόκκου  $D$ , ο οποίος θα έχει μόλις περάσει από το βάθος  $z$  σε χρόνο  $t$ , μπορεί να υπολογιστεί από το Νόμο του Stokes,

$$u = \frac{z}{t} = CD^2 \rightarrow D = \sqrt{\frac{z}{Ct}}, C = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{18\mu}$$

Στο βάθος  $z$  δεν υπάρχουν κόκκοι με διάμετρο μεγαλύτερη από  $D$ , καθώς όλοι οι κόκκοι με μεγαλύτερες διαμέτρους θα έχουν διανύσει απόσταση μεγαλύτερη από  $z$ . Η διάμετρος  $D$  ονομάζεται και *οριακή διάμετρος*.

Σε οποιοδήποτε στοιχειώδες όγκο σε βάθος  $z$ , το βάρος των κόκκων με διάμετρο μικρότερη του  $D$  θα παραμένει αμετάβλητο, καθώς στο αρχικό ομοιογενές μείγμα οι κόκκοι αυτοί θα καθιζάνουν με σταθερή ταχύτητα, επομένως όσοι κόκκοι εισέρχονται στο στοιχειώδες όγκο, τόσοι άλλοι θα εξέρχονται από αυτόν. Μέσα στο στοιχειώδες όγκο, κόκκοι με διάμετρο μεγαλύτερη του  $D$  δεν θα υπάρχουν ενώ η περιεκτικότητα σε κόκκους μικρότερης διαμέτρου θα παραμένει αμετάβλητη. Ας θεωρήσουμε ότι  $N$  είναι ο λόγος του βάρους των κόκκων που έχουν διάμετρο μικρότερη του  $D$  προς το βάρος των κόκκων στο αρχικό μείγμα. Το βάρος των στερεών ανά μονάδα όγκου σε βάθος  $z$  και σε χρόνο  $t$  ισούται με  $NW/V$  και το ειδικό βάρος του μείγματος ισούται με





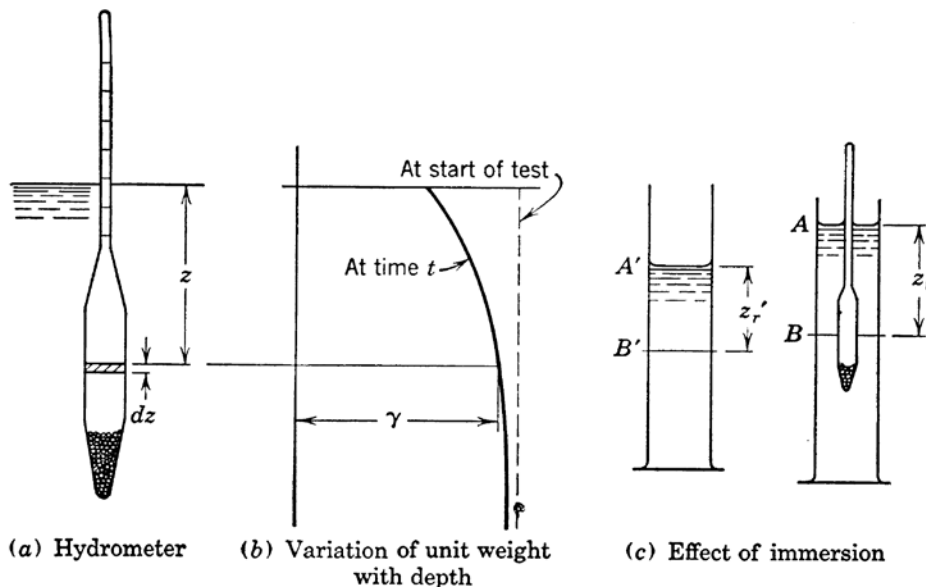
$$\gamma = \gamma_w + \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_s} \frac{NW}{V}$$

επομένως

$$N = \frac{\gamma_s}{\gamma_s - 1} \frac{V}{W} (\gamma - \gamma_w)$$

Ο λόγος  $N$  αντιπροσωπεύει το κλάσμα του εδαφικού υλικού που είναι λεπτότερο από την διάμετρο  $D$ . Συνεπώς, ο υπολογισμός του ειδικού βάρους σε οποιοδήποτε βάθος και σε οποιοδήποτε χρόνο επιτρέπει τον υπολογισμό ενός σημείου στην κοκκομετρική καμπύλη του εδαφικού υλικού.

Διαβαθμισμένα αραιόμετρα, όπως στο κάτωθι σχήμα, χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του ειδικού βάρους ρευστών.



Η ένδειξη του αραιόμετρου διαβάζεται στην επιφάνεια του ρευστού στην κλίμακα του στελέχους του, και όταν το αραιόμετρο βυθίζεται στο ρευστό η ένδειξη του ισούται με το ειδικό βάρος του ρευστού. Το αραιόμετρο συνήθως βαθμονομείται έτσι ώστε να δείχνει μονάδα σε καθαρό ύδωρ, σε συγκεκριμένη θερμοκρασία, ενώ σε άλλα ρευστά,

$$r = \frac{\gamma}{\gamma_c} \rightarrow \gamma = r\gamma_c$$

όπου  $\gamma$  το ειδικό βάρος του ρευστού και  $\gamma_c$  το ειδικό βάρος του ύδατος σε θερμοκρασία βαθμονόμησης.

Στην περίπτωση που το αραιόμετρο επιπλέει στο ρευστό, το βάρος του αραιόμετρου  $W_H$  εξισορροπείται από την άνωση η οποία ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού. Εάν το ρευστό έχει σταθερό ειδικό βάρος,

$$\gamma \int A dz = W_H$$



όπου  $A$  είναι το εμβαδόν σε βάθος  $z$  και η ολοκλήρωση περιλαμβάνει ολόκληρο το ύψος του αραιομέτρου που έχει βυθιστεί.

Με την πάροδο του χρόνου και καθώς η διαδικασία της καθίζησης προχωρά, το ειδικό βάρος μεταβάλλεται με το βάθος (βλ. ανωτέρω σχήμα, περίπτωση β). Σε αυτήν την περίπτωση η άνωση γράφεται ως,

$$\int \gamma A dz = W_H$$

Η μετρούμενη τιμή του  $r$  στην περίπτωση του αιωρήματος μεταβαλλόμενης πυκνότητας αποτελεί μία μέση τιμή του ειδικού βάρους. Στο εν λόγω σχήμα φαίνεται ότι το ειδικό βάρος είναι μικρότερο από  $r$  στο άνω μέρος του αραιομέτρου, μεγαλύτερο στο κάτω μέρος και κοντά στον βολβό του αραιομέτρου περίπου ίσο με  $r$ .

Ο Arthur Casagrande, μαθητής του Karl von Terzaghi, έδειξε ότι εφόσον το ειδικό βάρος μεταβάλλεται γραμμικά με το βάθος, οι ασάφειες οι οποίες εισάγονται είναι εν γένει μικρές και δεν υπερβαίνουν το 3%. Η έκφραση για την γραμμική μεταβολή του ειδικού βάρους μπορεί να γραφεί ως,

$$\gamma = C_1 + C_2 z$$

Στο βάθος κοντά στο μέσο του βολβού του αραιομέτρου, όπου το ειδικό βάρος  $\gamma$  ισούται με  $r\gamma_c$ , η τιμή του  $z$  θα δίνεται ως  $z_r$ , και

$$r\gamma_c = C_1 + C_2 z_r$$

Εξισώνοντας τις ανωτέρω δύο εξισώσεις της άνωσης, προκύπτει ότι

$$z_r = \frac{\int z A dz}{\int A dz}$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει την απόσταση από το κέντρο βάρους. Επίσης δηλώνει ότι το βάθος εκείνο στο οποίο το ειδικό βάρος του ρευστού ισούται με την μέτρηση  $r$  από το αραιόμετρο είναι το βάθος από το κέντρο του βυθισμένου όγκου, συχνά ονομαζόμενο κέντρο βύθισης. Συνεπώς, οι μετρήσεις από το αραιόμετρο δηλώνουν το ειδικό βάρος στο βάθος του κέντρου βύθισης.

Η βαθμονόμηση του αραιομέτρου επιτρέπει τον υπολογισμό της απόστασης  $z_r$  για όλες τις τιμές του  $r$ . Τυπικό παράδειγμα βαθμονόμησης αραιομέτρου που χρησιμοποιείται για κοκκομετρικές καμπύλες είναι:

$$z_r = 9.4cm, \rightarrow r = 1.030$$
$$z_r = 22.1cm, \rightarrow r = 1.000$$

Για τις ενδιάμεσες τιμές μία γραμμική παρεμβολή μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Συνεπώς, για κάθε παρατηρούμενη μέτρηση  $r$  το αντίστοιχο βάθος  $z_r$  υπολογίζεται από βαθμονόμηση, το ειδικό βάρος υπολογίζεται από την σχέση



$$r = \frac{\gamma}{\gamma_c} \rightarrow \gamma = r\gamma_c$$

και ο χρόνος  $t$  καταγράφεται. Οι μετρήσεις αυτές είναι αρκετές προκειμένου να υπολογιστούν η διάμετρος του κόκκου  $D$ ,

$$D = \sqrt{\frac{z}{Ct}}$$

και του ποσοστού κατά βάρος  $N$ ,

$$N = \frac{\gamma_s}{\gamma_s - 1} \frac{V}{W} (\gamma - \gamma_w)$$

Οι μετρήσεις του αραιόμετρου γίνονται συνήθως σε διαστήματα 1/4, 1/2, 1 και 2 λεπτών με το αραιόμετρο να παραμένει εν αιωρήσει στο διάλυμα για τα δύο πρώτα λεπτά. Οι τέσσερις μετρούμενες τιμές  $z_r$  αποτελούν και τις τιμές των  $z$  στην εξίσωση

$$D = \sqrt{\frac{z}{Ct}}$$

Διαδοχικές μετρήσεις λαμβάνονται σε 5, 10, 20 και 40 λεπτά, κ.ο.κ. Πριν από αυτές τις μετρήσεις το αραιόμετρο τοποθετείται σε αιώρηση και ευθύς μετά την λήψη της μέτρησης αφαιρείται. Συνεπώς πρέπει να εισαχθεί μία διόρθωση για την βύθιση (βλ. ανωτέρων σχήμα περίπτωση c). Η απόσταση από το κέντρο της βύθισης φαίνεται στα δεξιά. Ωστόσο, οι κόκκοι με οριακή διάμετρο  $D$ , οι οποίοι βρίσκονται στο επίπεδο B, δεν έχουν διανύσει την απόσταση  $z_r = (AB)$ , αλλά την απόσταση  $z'_r = (A'B')$ . Υπάρχει μία διαφορά καθώς η εισαγωγή του αραιόμετρου αυξάνει την απόσταση  $(A'B')$  σε  $(AB)$ . Η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών τιμών είναι σταθερή, περίπου ίση με το μισό του όγκου του αραιόμετρου  $V_H$  προς το εμβαδόν του ογκομετρικού σωλήνα  $A_j$ . Επομένως, για τις μετρήσεις από τα 5 λεπτά και έπειτα η τιμή του  $z$ , ισούται με την διορθωμένη τιμή,

$$z = z_r - \frac{V_H}{2A_j}$$

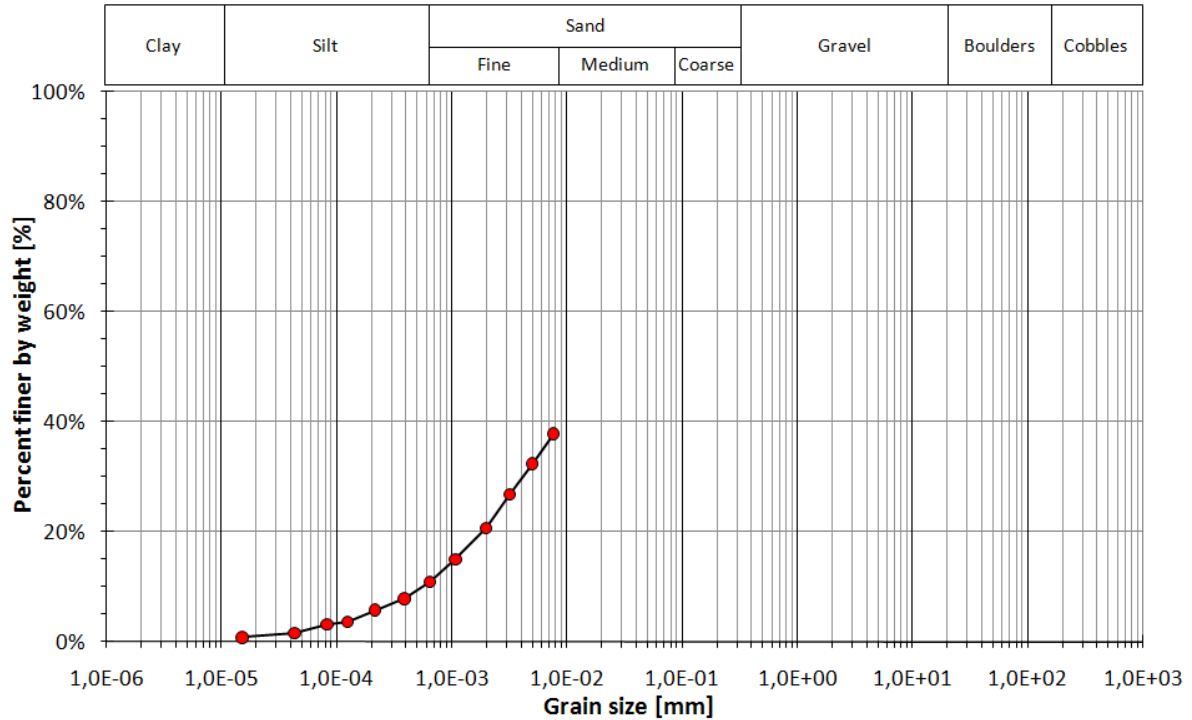
Μία σειρά από διορθώσεις μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας έναν επιπλέον ογκομετρικό σωλήνα, ο οποίος περιέχει καθαρό ύδωρ, και ο οποίος χρησιμοποιείται για να λαμβάνεται περιστασιακά η τιμή  $r_w$ . Ο όρος  $\gamma - \gamma_w$  τροποποιείται ως  $\gamma_c(r - r_w)$ , και περιλαμβάνει τις ακόλουθες τρεις διορθώσεις: (α) τη διόρθωση του μηνίσκου, καθώς οι μετρήσεις γίνονται μόνο στο άνω μέρος του μηνίσκου σε αδιαφανή αιώρηση, (β) τη διόρθωση για την διαστολή του βολβού του αραιόμετρου λόγω θερμοκρασίας, και (γ) τη διόρθωση εφόσον η κλίμακα στο στέλεχος του αραιόμετρου δεν είναι ακριβής. Το ποσοστό του υπολογιζόμενου κλάσματος τελικά ισούται με:

$$N = \frac{\gamma_s}{\gamma_s - 1} \frac{V}{W} \gamma_c (r - r_w)$$

Πολλές φορές λόγω αναταράξεων και μειωμένου εμβαδού εν αιωρήσει στην αρχή της βύθισης του αραιόμετρου, οι πρώτες μετρήσεις καλό είναι να ελέγχονται διεξοδικά και να αποκλείονται αν βρεθούν εσφαλμένες. Επίσης είναι επιθυμητό να λαμβάνονται οι τιμές μέχρι τα δύο πρώτα λεπτά,



έπειτα να αφαιρείται το αραιόμετρο και να ανακατεύεται το αιώρημα. Μετά το πέρας των δύο λεπτών μπορεί να τοποθετηθεί το αραιόμετρο για τις περεταίρω μετρήσεις. Σε κάθε περίπτωση το αραιόμετρο θα πρέπει να εισάγεται και να αφαιρείται αργά χωρίς μεγάλες αναταράξεις.





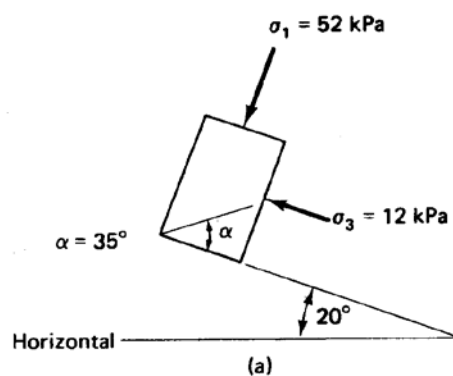
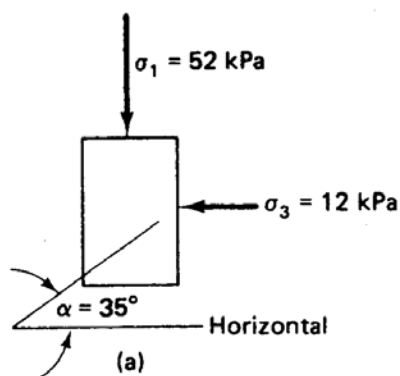
**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Τάσεις & Παραμορφώσεις στο έδαφος (2<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 25 Οκτωβρίου 2010.

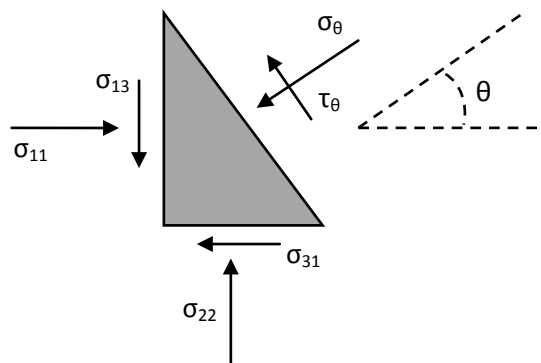
**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Υπολογίστε την ορθή και διατμητική τάση, οι οποίες ασκούνται στα επίπεδα με κλίση  $\alpha$  ως, όπως φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



**Λύση:** Η εντατική κατάσταση σε ένα επίπεδο του οποίου το κάθετο διάνυσμα σχηματίζει γωνία  $\theta$  ως προς την διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης, δίνεται από τις σχέσεις,

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{13} \sin 2\theta \\ \tau_{\theta} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{13} \cos 2\theta \end{cases}$$

όπου  $\sigma_{\theta}, \tau_{\theta}$  η δρώσα ορθή και διατμητική τάση αντίστοιχα. Θετικές ορθές τάσεις λαμβάνονται οι θλιπτικές ενώ θετικές διατμητικές τάσεις αυτές που έχουν αντι-ωρολογιακή φορά.





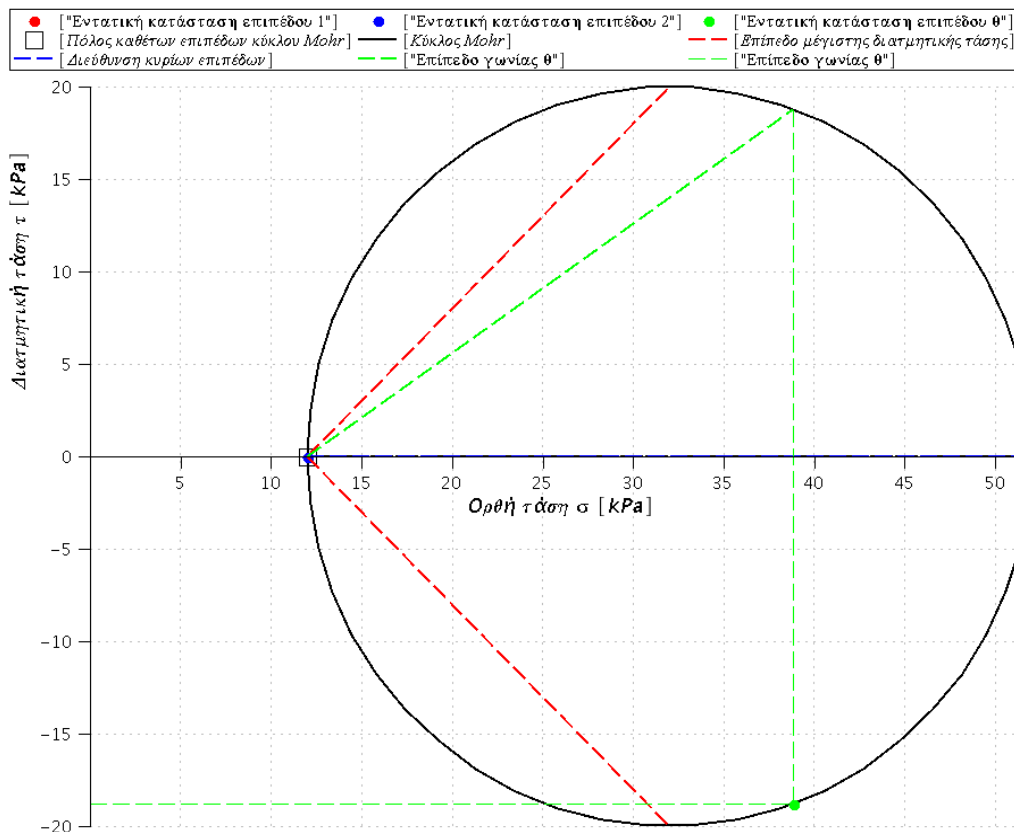
(α) Για γωνία  $\theta = 35^\circ$  επομένως,

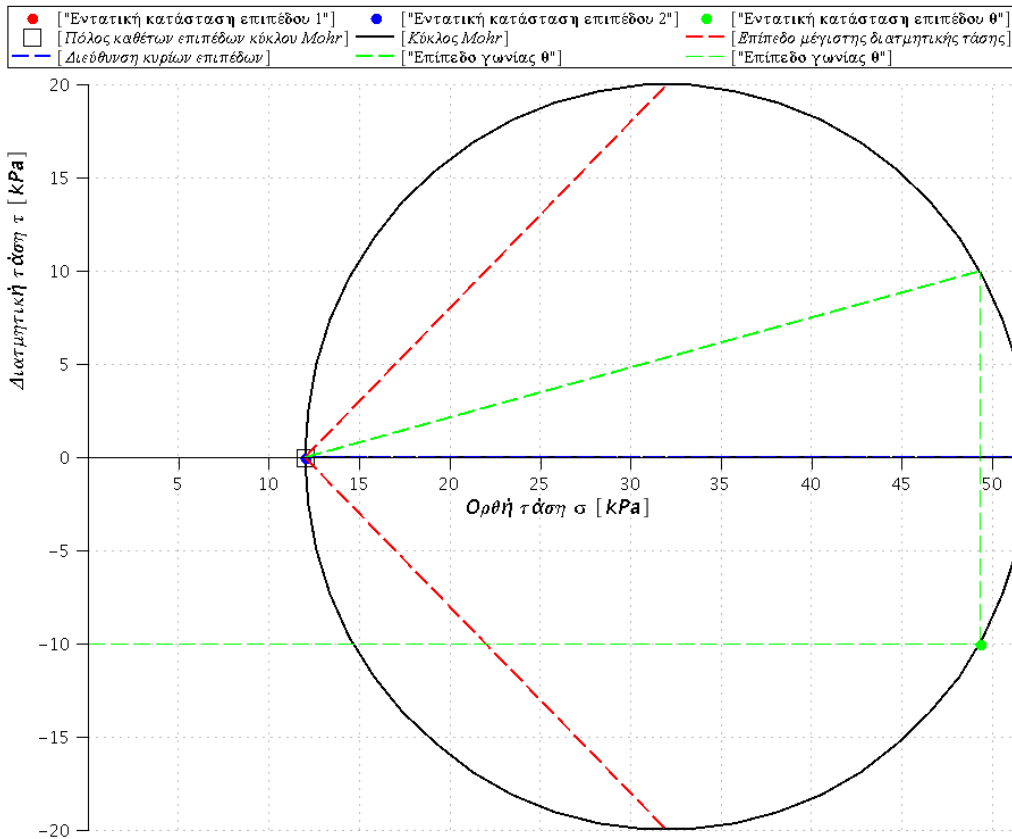
$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{52 + 12}{2} + \frac{52 - 12}{2} \cos 70^\circ = 38.84 \text{ kPa} \\ \tau_\theta = -\frac{52 - 12}{2} \sin 70^\circ = -18.79 \text{ kPa} \end{cases}$$

(β) Για γωνία  $\theta = 35^\circ - 20^\circ = 15^\circ$  επομένως,

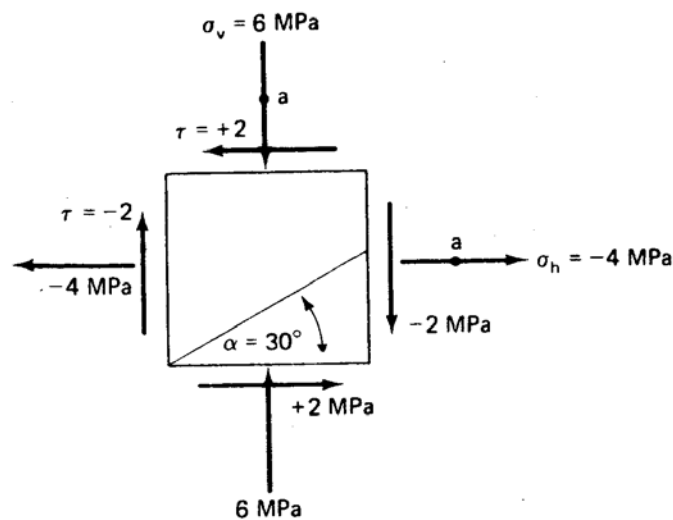
$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{52 + 12}{2} + \frac{52 - 12}{2} \cos 30^\circ = 49.32 \text{ kPa} \\ \tau_\theta = -\frac{52 - 12}{2} \sin 30^\circ = 10.00 \text{ kPa} \end{cases}$$

Ο Πόλος των Καθέτων του κύκλου του Mohr βρίσκεται ως εξής: Έστω σημείο επί του κύκλου με εντατική κατάσταση  $(\sigma, \tau)$ . Από το σημείο αυτό φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα των τετμημένων μέχρι να ξανατμήσει τον κύκλο, ή αλλιώς βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων  $(\sigma)$ . Από το σημείο αυτό φέρουμε ευθεία παράλληλη προς το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου στο οποίο δρα η ορθή και διατμητική τάση  $(\sigma, \tau)$ . Στο σημείο που ξανατέμνει το κύκλο του Mohr η ευθεία αυτή ορίζεται ο Πόλος των Καθέτων των επιπέδων. Συνεπώς, αν φέρουμε τώρα ευθεία η οποία να διέρχεται από τον Πόλο των Καθέτων των επιπέδων και η οποία να είναι παράλληλη προς το κάθετο διάνυσμα ενός επιπέδου, τότε το συμμετρικό σημείο ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων, στο οποίο τέμνει η ευθεία αυτή τον κύκλο του Mohr, είναι η εντατική κατάσταση του επιπέδου αυτού. Η εντατική κατάσταση για τις περιπτώσεις (α) και (β) παρουσιάζονται στα κάτωθι σχήματα,





**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Υπολογίστε την ορθή και διατμητική τάση στο επίπεδο που σχηματίζει γωνία  $\alpha$  με το οριζόντιο καθώς και τις κύριες τάσεις και διευθύνσεις τους για την κάτωθι εντατική κατάσταση.





**Λύση:** Βάσει των ανωτέρω, για  $\theta = \alpha = 30^\circ$

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{6 + (-4)}{2} + \frac{6 - (-4)}{2} \cos 60^\circ + 2 \sin 60^\circ = 5.23 \text{ kPa} \\ \tau_\theta = -\frac{6 - (-4)}{2} \sin 60^\circ + (-2) \cos 60^\circ = -3.33 \text{ kPa} \end{cases}$$

Οι κύριες τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + \sigma_{13}^2} = 6.39 \text{ kPa} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + \sigma_{13}^2} = -4.39 \text{ kPa} \end{cases}$$

και οι διευθύνσεις τους είναι,

$$\tan 2\varphi = \frac{2\sigma_{13}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} \Rightarrow \varphi_1 = 10.9^\circ, \varphi_2 = 100.9^\circ$$

Τα επίπεδα με την μέγιστη διατμητική τάση σχηματίζουν γωνία  $\theta$  ίση με,

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{max} - \tau_p}{\sigma_m - \sigma_p} \Rightarrow \theta_1 = 55.90^\circ, \theta_2 = -34.10^\circ$$

όπου η μέγιστη διατμητική τάση ισούται με,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 5.39 \text{ kPa}$$

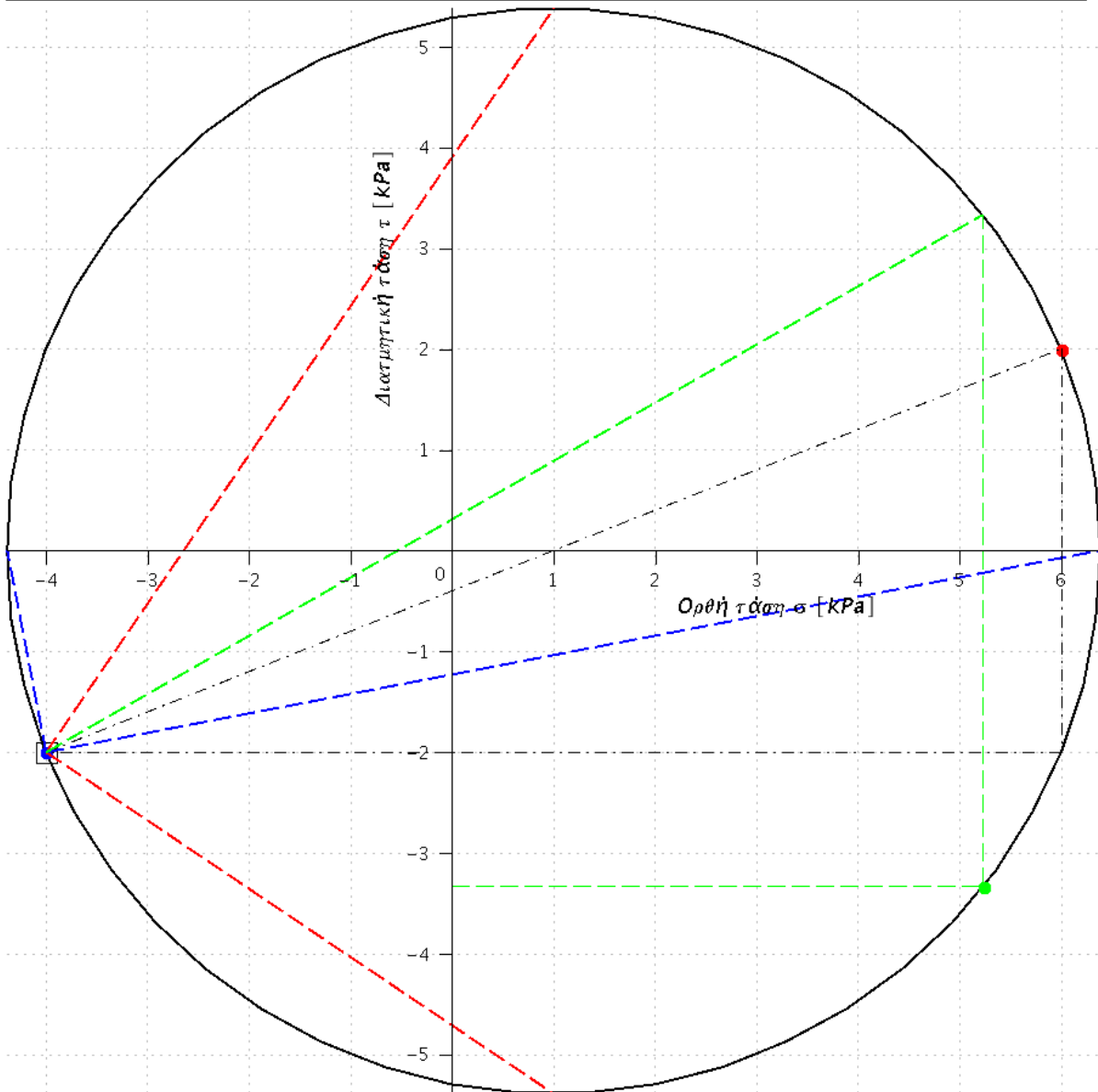
και  $(\sigma_p, \tau_p)$  είναι οι συντεταγμένες του Πόλου των καθέτων των επιπέδων στον κύκλο του Mohr. Με  $\sigma_m$  συμβολίζεται η συντεταγμένη του κέντρου του κύκλου του Mohr,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

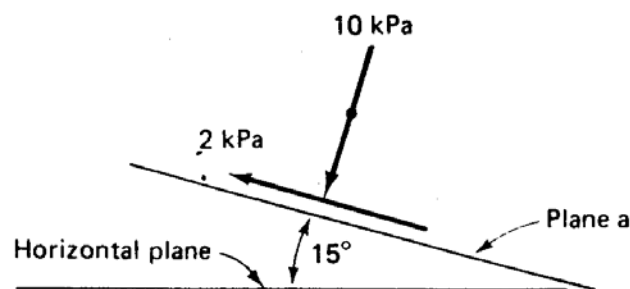




●	["Εντατική κατάσταση επιπέδου 1°"]	●	["Εντατική κατάσταση επιπέδου 2°"]	●	["Εντατική κατάσταση επιπέδου θ°"]
□	[Πόλος καθέτων επιπέδων κύκλου Mohr]	—	[Κύκλος Mohr]	—	[Επίπεδο μέγιστης διατμητικής τάσης]
—	[Διεύθυνση κυρίων επιπέδων]	—	[Επίπεδο γωνίας θ°]	—	[Επίπεδο γωνίας θ°]



**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Υπολογίστε το μέγεθος, τη διεύθυνση της μέγιστης και ελάχιστης κύριας τάσης και τη γωνία  $\theta$  που σχηματίζει το επίπεδο (b) με το επίπεδο (α), για την κάτωθι εντατική κατάσταση.



On plane b:  $\sigma_b = 9 \text{ kPa}$ ,  $\tau_b = -3 \text{ kPa}$ ,  $\theta^\circ = ?$  from plane a



**Λύση:** Οι δύο εντατικές καταστάσεις αποτελούν σημεία ενός κύκλου. Συνεπώς, αν ενώσουμε τα δύο σημεία με μία ευθεία και φέρουμε την μεσοκάθετο στην ευθεία αυτή, τότε το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στην τομή της μεσοκαθέτου με τον οριζόντιο άξονα. Αναλυτικά, η εξίσωση της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία είναι,

$$y = ax + b$$

όπου  $a$  η κλίση της ευθείας ίση με,

$$a = \tan^{-1} \left( \frac{\tau_\alpha - \tau_b}{\sigma_\alpha - \sigma_b} \right)$$

και  $b = \tau_\alpha - a\sigma_\alpha$

Η μεσοκάθετος έχει εξίσωση,

$$y = a'x + b'$$

όπου  $a'$  η κλίση της μεσοκαθέτου ίση με,

$$a' = -\frac{1}{a}$$

και

$$b' = \frac{\tau_\alpha - \tau_b}{2} - a' \frac{\sigma_\alpha - \sigma_b}{2}$$

Το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με τον οριζόντιο άξονα είναι το κέντρο του κύκλου, ήτοι,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -\frac{b'}{a'}$$

Επίσης, η ακτίνα του κύκλου ισούται με,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{(\sigma_m - \sigma_\alpha)^2 + \tau_\alpha^2}$$

Από τις ανωτέρω δύο σχέσεις προσδιορίζουμε τις κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_3$ , ήτοι,

$$\begin{cases} \sigma_1 = 10.61 \text{ kPa} \\ \sigma_3 = 3.39 \text{ kPa} \end{cases}$$

Από την διεύθυνση του επιπέδου ( $\alpha$ ) μπορούμε να προσδιορίσουμε στον κύκλο του Mohr τον πόλο των καθέτων των επιπέδων (ή τον πόλο των επιπέδων), καθώς γνωρίζουμε την κλίση του επιπέδου ( $\alpha$ ) ως προς το οριζόντιο, ήτοι,  $\theta_\alpha = 75^\circ$ . Ο πόλος των καθέτων επιπέδων θα βρίσκεται στην τομή του κύκλου του Mohr και στην η οποία έχει κλίση  $\theta_\alpha = 75^\circ$  ως προς την οριζόντιο και διέρχεται από το συμμετρικό, ως προς τον οριζόντιο άξονα, του σημείου  $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ . Οι συντεταγμένες του πόλου των καθέτων των επιπέδων προσδιορίζονται ως,



$$\begin{cases} \sigma_p = 10.60 \text{ kPa} \\ \tau_p = 0.23 \text{ kPa} \end{cases}$$

και επομένως οι διευθύνσεις των κυρίων επιπέδων ισούνται με

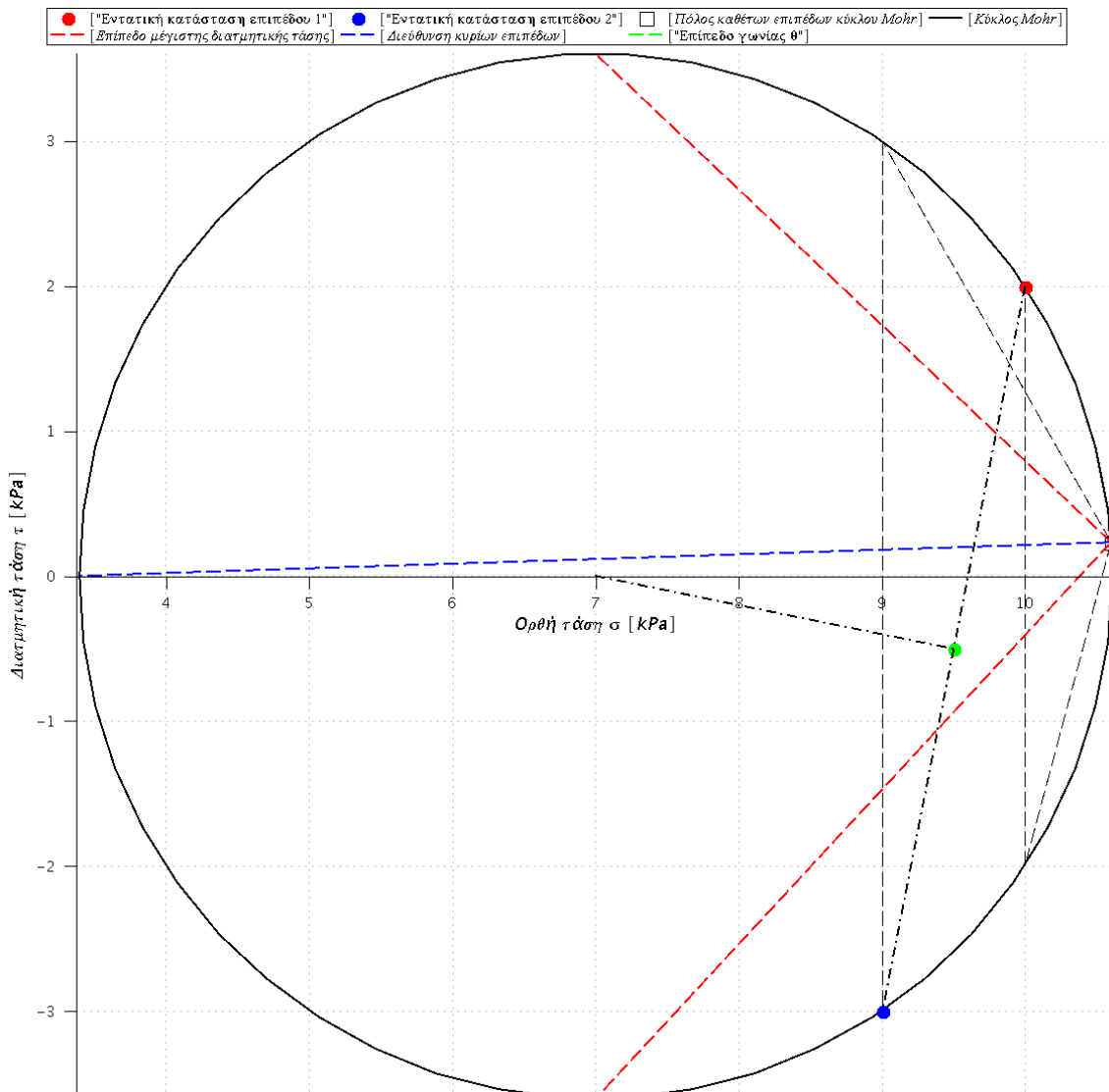
$$\tan \varphi_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_p}{\tau_p} \Rightarrow \varphi_1 = 271.85^\circ$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_p}{\tau_p} \Rightarrow \varphi_2 = 181.85^\circ$$

Τέλος, η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο (β) με το οριζόντιο υπολογίζεται από την σχέση

$$\tan \theta_b = \frac{-\tau_b - \tau_p}{\sigma_b - \sigma_p} \Rightarrow \theta_b = 120.00^\circ$$

και επομένως η γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων είναι  $\theta = \theta_\alpha - \theta_b = 105.00^\circ$ . Τα ανωτέρω παρουσιάζονται στο επίπεδο Mohr.





**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Η εντατική κατάσταση σε ένα υλικό σημείο δίνεται από τον ταυυστή των τάσεων  $[\sigma]$ ,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τις τρεις αναλλοίωτες ποσότητες του ταυυστή αυτού. Δώστε τις εκφράσεις των αναλλοίωτων αυτών στην περίπτωση κυρίων τάσεων  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  και  $\sigma_3$ .

**Λύση:** Οι αναλλοίωτες ποσότητες ενός ταυυστή προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$\det([\sigma] - \lambda[I]) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(\sigma_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} - \sigma_{12} \begin{vmatrix} \sigma_{21} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \sigma_{13} \begin{vmatrix} \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11} - \lambda)[(\sigma_{22} - \lambda)(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}\sigma_{32}] - \sigma_{12}[\sigma_{21}(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}\sigma_{31}] + \sigma_{13}[\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{31}(\sigma_{22} - \lambda)] = 0 \Rightarrow$$

$$(\sigma_{11} - \lambda)(\sigma_{22} - \lambda)(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}\sigma_{32}(\sigma_{11} - \lambda) - \sigma_{12}\sigma_{21}(\sigma_{33} - \lambda) + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{13}\sigma_{31}(\sigma_{22} - \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \lambda\sigma_{11}\sigma_{22} - \lambda\sigma_{11}\sigma_{33} - \lambda\sigma_{22}\sigma_{33} + \lambda^2\sigma_{11} + \lambda^2\sigma_{22} + \lambda^2\sigma_{33} - \lambda^3 + \lambda\sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{23}\sigma_{32}\sigma_{11} + \lambda\sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32} + \lambda\sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{22}\sigma_{13}\sigma_{31} = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda^3 + (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\lambda^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{12}\sigma_{21})\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{22}\sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32} = 0$$

Το ίχνος του ταυυστή  $[\sigma_{ij}]$  είναι

$$I_1 = \text{tr}[\sigma_{ij}] = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

ενώ το ίχνος του ταυυστή  $[\sigma_{ij}]^2$  είναι

$$\text{tr}[\sigma_{ij}]^2 = \text{tr} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^2 \Rightarrow$$

$$\text{tr}[\sigma_{ij}]^2 = \text{tr} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{13}\sigma_{31} & \sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{12}\sigma_{22} + \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{11}\sigma_{13} + \sigma_{12}\sigma_{23} + \sigma_{13}\sigma_{33} \\ \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{21}\sigma_{22} + \sigma_{31}\sigma_{23} & \sigma_{22}^2 + \sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{23}\sigma_{32} & \sigma_{21}\sigma_{13} + \sigma_{22}\sigma_{23} + \sigma_{23}\sigma_{33} \\ \sigma_{11}\sigma_{31} + \sigma_{21}\sigma_{32} + \sigma_{31}\sigma_{33} & \sigma_{31}\sigma_{12} + \sigma_{22}\sigma_{32} + \sigma_{32}\sigma_{33} & \sigma_{33}^2 + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{23}\sigma_{32} \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}[\sigma_{ij}]^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{22}^2 + \sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{23}\sigma_{32} + \sigma_{33}^2 + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{23}\sigma_{32} \Rightarrow$$

$$\text{tr}[\sigma_{ij}]^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{21} + 2\sigma_{13}\sigma_{31} + 2\sigma_{23}\sigma_{32}$$



και η ποσότητα

$$I_2 = \frac{1}{2} [(tr[\sigma_{ij}])^2 - tr[\sigma_{ij}^2]] \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{21} + 2\sigma_{13}\sigma_{31} + 2\sigma_{23}\sigma_{32})] \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2 - 2\sigma_{12}\sigma_{21} - 2\sigma_{13}\sigma_{31} - 2\sigma_{23}\sigma_{32}) \Rightarrow$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{23}\sigma_{32}$$

Τέλος, η ορίζουσα του τανυστή  $[\sigma_{ij}]$  είναι,

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{11} \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} - \sigma_{12} \begin{vmatrix} \sigma_{21} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \sigma_{13} \begin{vmatrix} \sigma_{21} & \sigma_{22} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}] = \sigma_{11}(\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{32}\sigma_{23}) - \sigma_{12}(\sigma_{21}\sigma_{33} - \sigma_{31}\sigma_{23}) + \sigma_{13}(\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{31}\sigma_{22}) \Rightarrow$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}] = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{32}\sigma_{23} - \sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{31}\sigma_{23} + \sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{13}\sigma_{31}\sigma_{22}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η χαρακτηριστική κυβική εξίσωση,

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

η επίλυση της οποίας δίνει τις τρεις διακριτές ιδιοτιμές  $\lambda$  του τανυστή  $[\sigma]$ , οι οποίες αντιστοιχούν στις κύριες τιμές των τάσεων στα κύρια επίπεδα (επίπεδα με μηδενικές διατμητικές τάσεις).

Στην περίπτωση κύριων τάσεων ( $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$ ), οι τρεις αναλλοίωτες ποσότητες είναι,

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Στην Εδαφομηχανική συχνά η εντατική κατάσταση (τανυστής των τάσεων  $[\sigma_{ij}]$ ) σε ένα υλικό σημείο χωρίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο αντιστοιχεί σε μία ισότροπη ένταση  $[p_{ij}]$  ενώ το δεύτερο στην αποκλίνουσα, από την ισότροπη κατάσταση, ένταση  $[s_{ij}]$ ,

$$[\sigma_{ij}] = [p_{ij}] + [s_{ij}]$$

Υπολογίστε τον ισότροπο  $[p_{ij}]$  και αποκλίνοντα  $[s_{ij}]$  τανυστή των τάσεων για μία τριδιάστατη εντατική κατάσταση  $[\sigma_{ij}]$ . Έπειτα, υπολογίστε την πρώτη, δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτο ποσότητα τόσο για τον  $[\sigma_{ij}]$  ( $I_1, I_2$ , και  $I_3$ ) όσο και για τον  $[s_{ij}]$  ( $J_1, J_2$ , και  $J_3$ ).



**Λύση:** Ο διαχωρισμός μιας εντατικής κατάστασης  $[\sigma_{ij}]$  σε μία ισότροπη  $[p_{ij}]$  και μία αποκλίνουσα  $[s_{ij}]$  ακολουθείται συχνά στην Εδαφομηχανική. Έστω ότι,

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ο ισότροπος τανυστής θα ισούται με,

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \end{bmatrix}$$

και τότε ο αποκλίνων θα ισούται με,

$$[s_{ij}] = [\sigma_{ij}] - [p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{bmatrix}$$

Για τον τανυστή των τάσεων  $[\sigma_{ij}]$  ισχύουν,

$$I_1 = \text{tr}[\sigma_{ij}] = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}[\sigma_{ij}])^2 - \text{tr}[\sigma_{ij}]^2] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \Rightarrow$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{23}\sigma_{32}$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}] = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{22}\sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{32} + \sigma_{31}\sigma_{12}\sigma_{23}$$

και για τον αποκλίνοντα  $[s_{ij}]$  αντίστοιχα ισχύουν,

$$J_1 = \text{tr}[s_{ij}] = 0$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} [(\text{tr}[s_{ij}])^2 - \text{tr}[s_{ij}]^2] = -\frac{1}{2} (s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}) \Rightarrow$$

$$J_2 = -\frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} \cdot \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} - \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} \cdot \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \\ + \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} \cdot \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} + \sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{23}\sigma_{32} \Rightarrow$$

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_{11}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{22}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{33}^2 - \frac{1}{3}\sigma_{11}\sigma_{22} - \frac{1}{3}\sigma_{11}\sigma_{33} - \frac{1}{3}\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{23}\sigma_{32} \Rightarrow$$



$$J_2 = \frac{I_1^2}{3} - I_2$$

$$J_3 = \det([s_{ij}]) = \frac{1}{27} [(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33})(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ - (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})\sigma_{32}\sigma_{23} - \sigma_{12}\sigma_{21}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) + \sigma_{12}\sigma_{31}\sigma_{23} \\ + \sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{13}\sigma_{31}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33})] \Rightarrow$$

$$J_3 = I_3 + \frac{I_1 J_2}{3} - \frac{I_1^3}{27}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Η τριαξονική συσκευή, μία από τις συσκευές που χρησιμοποιούνται στην Πειραματική Εδαφομηχανική, μπορεί να επιβάλλει στις 6 πλευρές ενός κυβικού εδαφικού δοκιμίου τρεις ανεξάρτητες κύριες τάσεις ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ). Πειραματικά αποτελέσματα από τριαξονικές δοκιμές σε εδαφικό υλικό έδωσαν τις ακόλουθες τιμές για τις τρεις αναλλοίωτους του τανυστή των τάσεων  $[\sigma]$ ,

$$I_1 = 600kPa, I_2 = 110.000kPa^2, I_3 = 6.000.000kPa^3$$

Υπολογίστε τις κύριες τάσεις στην αστοχία καθώς και την μέγιστη διατμητική τάση και το επίπεδο στο οποίο ασκείται.

**Λύση:** Βάσει των ανωτέρω ισχύει,

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 600kPa$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = 110.000kPa$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} = 6.000.000kPa$$

Η επίλυση του ανωτέρω συστήματος δίνει τις τιμές των κυρίων τάσεων,

$$\begin{cases} \sigma_1 = 100kPa \\ \sigma_2 = 200kPa \\ \sigma_3 = 300kPa \end{cases}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 7:** Τριαξονική δοκιμή θλίψεως σε δοκίμιο χαλαρής άμμου με αρχικό δείκτη πόρων  $e_0 = 0.680$  έδωσε τις κάτωθι τιμές αναφορικά με τις τροπές ως προς τους τρεις κύριους άξονες,

$$\varepsilon_1 = 0.063, \varepsilon_2 = 0.015, \varepsilon_3 = -0.005$$

Υπολογίστε το δείκτη πόρων  $e$  και το πορώδες  $n$  μετά το πέρας της δοκιμής καθώς και την μέγιστη διατμητική παραμόρφωση και το επίπεδο στο οποίο εμφανίζεται.

**Λύση:** Η ογκομετρική τροπή είναι,

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\Delta V}{V} = 0.063 + 0.015 - 0.005 = 0.073$$



Επίσης, ο αρχικός δείκτης πόρων  $e_0$  δίνεται από,

$$e_0 = \frac{V_V}{V_s}$$

Συνεπώς, η μεταβολή του δείκτη πόρων  $\Delta e$  θα ισούται με,

$$\Delta e = e - e_0 = -\frac{\Delta V_V}{V_s}$$

αφού η μείωση του όγκου των κενών  $\Delta V_V > 0$  οδηγεί σε μείωση του πορώδους  $\Delta e < 0$ . Επομένως, η μεταβολή του όγκου του δοκιμίου θα ισούται με,

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V_V}{V} = \frac{\Delta V_V}{V_s + V_V} = -\frac{\Delta e \cdot V_s}{V_s + V_V} = -\frac{\Delta e}{1 + e_0} = -\frac{e - e_0}{1 + e_0} = \frac{e_0 - e}{1 + e_0} = -\frac{\Delta e}{1 + e_0} \Rightarrow$$

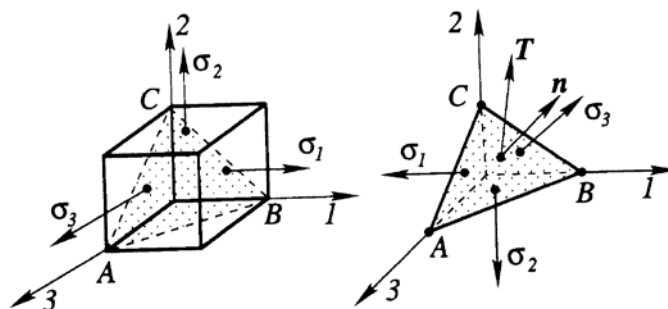
$$e = e_0 - \varepsilon_V(1 + e_0) = 0.680 - 0.073(1 + 0.680) = 0.557 \Rightarrow n = \frac{e}{1 + e} = \frac{0.557}{1 + 0.557} = 0.358$$

Η μέγιστη διατμητική παραμόρφωση ισούται με,

$$\begin{aligned} \max\{\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\} &= \max\left\{\left|\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\right|, \left|\frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{2}\right|, \left|\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}}{2}\right|\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{0.063 - 0.015}{2}\right|, \left|\frac{0.015 + 0.005}{2}\right|, \left|\frac{0.063 + 0.005}{2}\right|\right\} = 0.034 \end{aligned}$$

και ασκείται στο επίπεδο που σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  μεταξύ των επιπέδων 1 και 3.

**ΑΣΚΗΣΗ 8:** Να υπολογιστούν η ορθή οκταεδρική  $\sigma_{oct}$  και διατμητική οκταεδρική  $\tau_{oct}$  τάση, οι οποίες ασκούνται στο επίπεδο το οποίο έχει κάθετο διάνυσμα τη χωροδιαγώνιο. Δώστε τις αντίστοιχες εκφράσεις των ανωτέρω τάσεων και για την περίπτωση κυρίων τάσεων ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ).



**Λύση:** Υποθέτουμε ότι η εντατική κατάσταση σε ένα υλικό σημείο του χώρου δίνεται από τον ταυστή των τάσεων  $[\sigma]$ ,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$





όπου 1,2 και 3 είναι οι άξονες του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Το επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στη χωροδιαγώνιο έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\tilde{n}$ ,

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα της έντασης  $\tilde{\epsilon}_n$ , ή αλλιώς ο ελκυστής τάσεως, το οποίο δρα σε ένα επίπεδο, του οποίου το κάθετο διάνυσμα συμβολίζεται με  $\tilde{n} = [n_1, n_2, n_3]$ , υπολογίζεται από την κάτωθι σχέση,

$$\tilde{\epsilon}_n = [\sigma]^T \tilde{n} = [\sigma] \tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Η ορθή τάση  $\sigma_{oct}$  επί του επιπέδου, με κάθετο διάνυσμα το διάνυσμα  $\tilde{n}$ , δίνεται από την προβολή του ελκυστή των τάσεων  $\tilde{\epsilon}_n$  στο κάθετο διάνυσμα  $\tilde{n}$ , ήτοι,

$$\sigma_{oct} = \tilde{\epsilon}_n \cdot \tilde{n} = ([\sigma] \cdot \tilde{n}) \cdot \tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \quad 1 \quad 1] \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} \\ \sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23} \\ \sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{12} + \sigma_{21} + \sigma_{13} + \sigma_{31} + \sigma_{23} + \sigma_{32}) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1$$

Η διατμητική τάση η οποία ασκείται επί του επιπέδου αυτού θα δίνεται από,

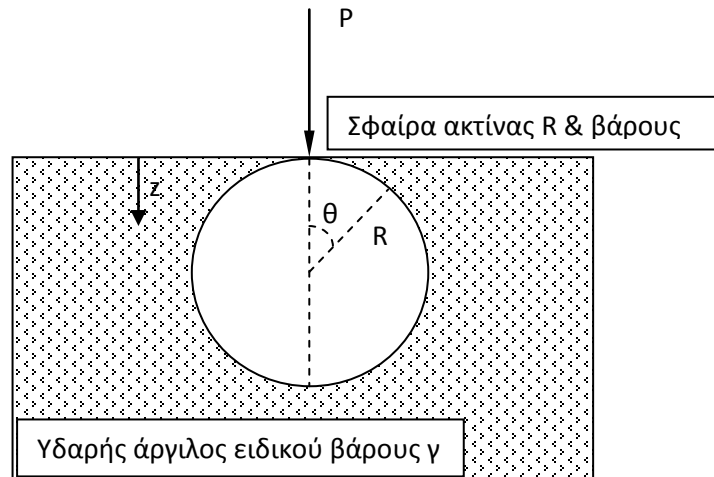
$$(\tau_{oct})^2 = \tilde{\epsilon}_n \cdot \tilde{\epsilon}_n - (\sigma_{oct})^2 = |\tilde{\epsilon}_n|^2 - (\sigma_{oct})^2$$

$$(\tau_{oct})^2 = \frac{2}{9} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{33} + 3\sigma_{12}\sigma_{21} + 3\sigma_{13}\sigma_{31} + 3\sigma_{23}\sigma_{32}) \Rightarrow$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{9} I_1^2 - \frac{2}{3} I_2} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$



**ΑΣΚΗΣΗ 9:** Μία σφαίρα ακτίνας  $R$  και βάρους  $W$  τοποθετείται σε μία υδαρή θιξοτροπική άργιλο. Το υλικό μπορεί να προσομοιαστεί ως ένα ρευστό με μηδενικό ιξώδες. Χωρίς την χρήση της αρχής του Αρχιμήδη, υπολογίστε την δύναμη  $P$  που απαιτείται για να εισαχθεί η σφαίρα αυτή στο ρευστό, όπως στο σχήμα.



**Λύση:** Η υδαρής θιξοτροπική άργιλος, με μηδενικό ιξώδες, ασκεί στην επιφάνεια της σφαίρας μόνο ορθή τάση, η οποία αυξάνεται με το βάθος  $z$  από την ελεύθερη επιφάνεια βάσει της γραμμικής σχέσεως,

$$\sigma(z) = \sigma_{rr}(z) = \sigma_{zz}(z) = \gamma z = \gamma R(1 - \cos \theta)$$

όπου  $\gamma$  είναι το ειδικό βάρος της άργιλος,  $R$  η ακτίνα της σφαίρας και  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Η επιφάνεια ενός στοιχείου της σφαίρας ακτίνας  $R$  από γωνία  $\theta \rightarrow d\theta$  και από  $\varphi \rightarrow d\varphi$  δίνεται από τη σχέση,

$$dS = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

με  $0 \leq \theta \leq \pi$  και  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Η δύναμη που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια της σφαίρας ισούται με,

$$dF_n = \sigma(z)dS$$

ενώ η προβολή της στον κατακόρυφο άξονα  $z$  είναι,

$$dF_{n,z} = \sigma(z) \cos \theta dS$$

Συνεπώς, η απαιτούμενη δύναμη για να βυθιστεί η σφαίρα μέσα στην άργιλο ισούται με,

$$P + \iint dF_{n,z} + W = 0 \Rightarrow P = - \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi dF_{n,z} + W \right) \Rightarrow$$
$$P = - \left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \gamma R(1 - \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi + W \right) = \frac{4}{3} \pi \gamma R^3 - W$$



**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων στο έδαφος (3<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 25 Οκτωβρίου 2010.

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Υπολογίστε το μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης  $D$  θεωρώντας ότι το υλικό είναι γραμμικώς ελαστικό και ισότροπο. Συγκρίνετε το μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης με το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και σχολιάστε τις τιμές τους. Βρείτε τον συντελεστή οριζόντιας ώθησης  $K_0$ , για την ανωτέρω περίπτωση.

**Λύση:** Στην ισότροπη γραμμική ελαστικότητα, οι τάσεις με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις συνδέονται μέσω των κάτωθι σχέσεων:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

Στη μονοδιάστατη συμπίεση ισχύει,

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$$

και

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0 \Rightarrow \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) = 0 \Rightarrow \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}$$

Ο συντελεστής οριζόντιας ώθησης για πλευρική παρεμπόδιση (συνθήκες  $K_0$ ) ισούται με,

$$K_0 = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{zz}} = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Ο συντελεστής μονοδιάστατης συμπίεσης  $D$  ισούται με,

$$D = \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}} = E \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})} = E \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{zz} - 2\nu \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}} = \frac{E}{1 - 2\nu \frac{\nu}{1 - \nu}} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} > E$$

Το μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης  $D$  είναι μεγαλύτερο από το μέτρο ελαστικότητας  $E$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Κάτω από τον πυθμένα μιας λίμνης βρίσκεται οριζόντιο εδαφικό στρώμα αργίλου πάχους 10m. Υπολογίστε την ολική κατακόρυφη  $\sigma_v$  και οριζόντια  $\sigma_h$  τάση, την πίεση των πόρων  $u$ , και την ενεργό κατακόρυφη  $\sigma'_v$  και οριζόντια  $\sigma'_h$  τάση σε εδαφικό στοιχείο που βρίσκεται 5m κάτω από τον πυθμένα της λίμνης, για τις εξής κάτωθι τέσσερις περιπτώσεις:

(α) Το αρχικό ύψος του ύδατος της λίμνης ανέρχεται σε 15m.

(β) Η στάθμη της λίμνης καταβιβάζεται κατά 10m από την αρχική στάθμη (α).

(γ) Η λίμνη αποξηραίνεται (η στάθμη του ύδατος της λίμνης ταυτίζεται με τον πυθμένα της)

(δ) Ο υπόγειος υδροφόρος ορίζοντας καταβιβάζεται λόγω άντλησης υδάτων 3m κάτω από τον πυθμένα της λίμνης.

Δεχθείτε ότι το ειδικό βάρος της αργίλου σε πλήρως κορεσμένη κατάσταση είναι  $\gamma_s = 21 \text{ kN/m}^3$ , εν ξηρώ  $\gamma_d = 18 \text{ kN/m}^3$  και αυτό του ύδατος  $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$ . Υποθέστε τιμή του συντελεστή πλευρικής ωθήσεως  $K_0 = 0.35$ . Σχολιάστε τα αποτελέσματα και εκτιμήστε σε ποιά από τις ανωτέρω περιπτώσεις θα προκληθεί καθίζηση στο αργιλικό στρώμα. Δώστε μία εκτίμηση της καθίζησης, υποθέτοντας ότι η άργιλος είναι γραμμικώς ελαστικό και ισότροπο υλικό, με μέτρο ελαστικότητας  $E = 25 \text{ MPa}$ .

**Λύση:** Η ολική τάση, η πίεση των πόρων και η ενεργός τάση τόσο στην κατακόρυφη όσο και στην οριζόντια διεύθυνση, υπολογίζονται για τις περιπτώσεις (α), (β), (γ) και (δ),

#### Περίπτωση (α)

$$\sigma_v = \gamma_w h_w + \gamma_s h_s = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 15\text{m} + 21 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 5\text{m} = 255 \text{ kPa}$$

$$u = \gamma_w (h_w + h_s) = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} (15\text{m} + 5\text{m}) = 200 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = 255 \text{ kPa} - 200 \text{ kPa} = 55 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.35 \cdot 55 \text{ kPa} = 19.25 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u = 19.25 \text{ kPa} + 200 \text{ kPa} = 219.25 \text{ kPa}$$

#### Περίπτωση (β)

$$\sigma_v = \gamma_w h_w + \gamma_s h_s = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 5\text{m} + 21 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 5\text{m} = 155 \text{ kPa}$$

$$u = \gamma_w (h_w + h_s) = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} (5\text{m} + 5\text{m}) = 100 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = 155 \text{ kPa} - 100 \text{ kPa} = 55 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.35 \cdot 55 \text{ kPa} = 19.25 \text{ kPa}$$



$$\sigma_h = \sigma'_h + u = 19.25kPa + 100kPa = 119.25kPa$$

#### Περίπτωση (γ)

$$\sigma_v = \gamma_w h_w + \gamma_s h_s = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 0m + 21 \frac{kN}{m^3} \cdot 5m = 105kPa$$

$$u = \gamma_w (h_w + h_s) = 10 \frac{kN}{m^3} (0m + 5m) = 50kPa$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = 105kPa - 50kPa = 55kPa$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.35 \cdot 55kPa = 19.25kPa$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u = 19.25kPa + 50kPa = 69.25kPa$$

#### Περίπτωση (δ)

$$\sigma_v = \gamma_w h_w + \gamma_s h_s = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 0m + 18 \frac{kN}{m^3} \cdot 3m + 21 \frac{kN}{m^3} \cdot 2m = 96kPa$$

$$u = \gamma_w (h_w + h_s) = 10 \frac{kN}{m^3} (0m + 2m) = 20kPa$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = 96kPa - 20kPa = 76kPa$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.35 \cdot 76kPa = 26.6kPa$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u = 26.6kPa + 20kPa = 46.6kPa$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε πως η ενεργός τάση (κατακόρυφος ή οριζόντιος) μεταβάλλεται και δη αυξάνεται στην περίπτωση κατά την οποία ο υδροφόρος ορίζοντας καταβιβάζεται κάτω από τον πυθμένα της λίμνης, ήτοι στην περίπτωση (δ). Αύξηση της κατακόρυφου ενεργού τάσης προκαλεί μείωση του όγκου του εδαφικού στοιχείου (θλίψη) και επομένως καθίζηση του στρώματος της αργίλου. Προσεγγιστικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μέση παραμόρφωση του στρώματος της αργίλου θα ισούται,

$$\delta = \varepsilon_{zz} \cdot h_s = \frac{\Delta \sigma'_v}{D} h_s = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu) \Delta \sigma'_v}{E(1 - \nu)} h_s = \frac{(1 + 0.26)(1 - 0.52)(76 - 55)kPa}{25MPa(1 - 0.26)} 10m \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{(1 + 0.26)(1 - 0.52)(76 - 55)kPa}{25MPa(1 - 0.26)} 10m = 6.86mm$$

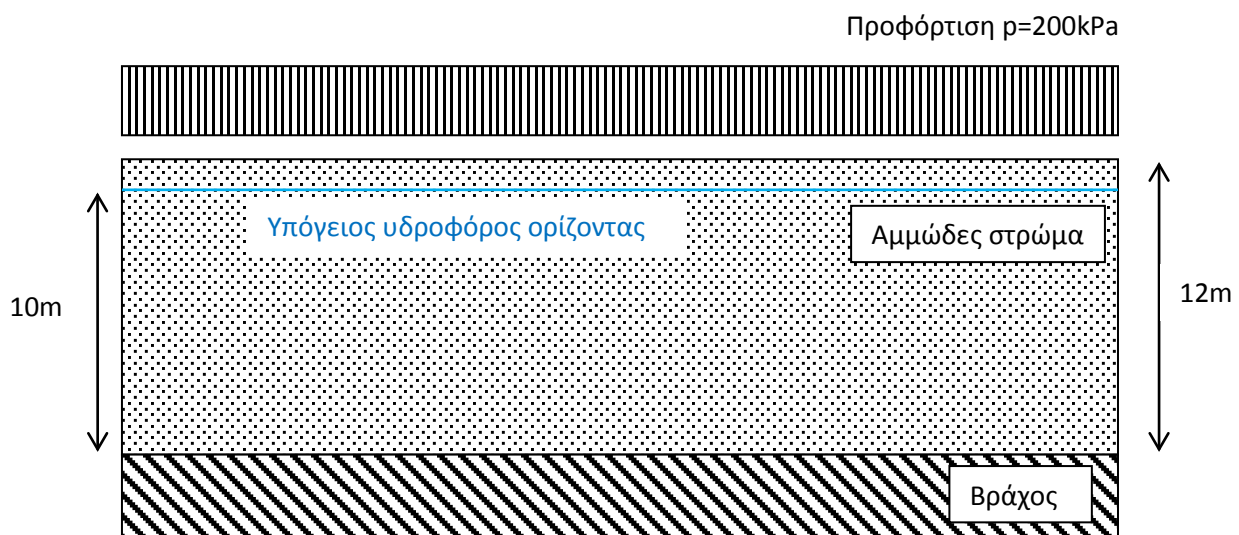
**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Οριζόντιο εδαφικό στρώμα άμμου σε χαλαρή απόθεση πάχους 12m υπέρκειται σταθερού σκληρού σχηματισμού (βράχου). Στο έργο πρόκειται να κατασκευαστεί δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμου. Για τον περιορισμό των καθιζήσεων και βελτίωση του εδάφους, η γεωτεχνική μελέτη προβλέπει την προφόρτιση του αμμώδους εδαφικού στρώματος με ομοιόμορφο φορτίο  $p = 200kPa$ . Αντιπροσωπευτικά δείγματα από το αμμώδες στρώμα ελέχθηκαν στη συσκευή



μονοδιάστατης συμπίεσης. Τα πειραματικά αποτελέσματα μπορούν να εκφραστούν μέσω της σχέσεως,

$$\varepsilon_v = \frac{C_c}{1 + e_0} \log \left( \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}} \right)$$

όπου  $\varepsilon_v$  είναι η ογκομετρική τροπή,  $C_c = 0.118$  ο συντελεστής συμπίεστότητας,  $e_0 = 0.96$  ο δείκτης πόρων ο οποίος αντιστοιχεί στην αρχική ενεργό τάση  $\sigma'_{v0} = 10 \text{ kPa}$  και  $\sigma'_v$  η εκάστοτε ενεργός τάση. Υπολογίστε την καθίζηση του εδαφικού στρώματος μετά την εφαρμογή της προφόρτισης, δεχόμενοι ότι το φορτίο  $p = 200 \text{ kPa}$  εκτείνεται απείρως και η τιμή του με το βάθος δεν αλλάζει. Δεχθείτε επίσης ότι ο υδροφόρος ορίζοντας παραμένει σταθερός σε βάθος 2m από την επιφάνεια του αμμώδους στρώματος ενώ η πυκνότητα του εδαφικού υλικού πάνω από τον υδροφόρο ορίζοντα είναι  $\rho_d = 1.7 \frac{\text{tn}}{\text{m}^3}$  και κάτω από αυτόν είναι  $\rho_s = 2.0 \frac{\text{tn}}{\text{m}^3}$ . Για τον υπολογισμό των καθιζήσεων χωρίστε το αμμώδες στρώμα σε τρία υποστρώματα και θεωρείστε ως αντιπροσωπευτικό εδαφικό στοιχείο το μέσο κάθε υποστρώματος.



**Λύση:** Η εντατική κατάσταση των χαρακτηριστικών εδαφικών στοιχείων, τα οποία λαμβάνουν μέρος στον υπολογισμό των καθιζήσεων, πριν την επιβολή της προφόρτισης είναι,

Μέσο υποστρώματος (1)

$$\sigma_v^{(1)} = 17 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 2\text{m} = 34 \text{ kPa}$$

$$u^{(1)} = 0 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_v^{(1)} = \sigma_v^{(1)} - u = 34 \text{ kPa}$$

Μέσο υποστρώματος (2)

$$\sigma_v^{(2)} = 17 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 2\text{m} + 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 4\text{m} = 114 \text{ kPa}$$



$$u^{(2)} = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 4m = 40kPa$$

$$\sigma'_v^{(2)} = \sigma_v^{(2)} - u = 74kPa$$

### Μέσο υποστρώματος (3)

$$\sigma_v^{(3)} = 17 \frac{kN}{m^3} \cdot 2m + 20 \frac{kN}{m^3} \cdot 8m = 194kPa$$

$$u^{(3)} = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 8m = 80kPa$$

$$\sigma'_v^{(3)} = \sigma_v^{(3)} - u = 114kPa$$

Μετά την εφαρμογή της προφόρτισης, η εντατική κατάσταση των μέσων των τριών υποστρωμάτων γίνεται με τις αντίστοιχες ογκομετρικές παραμορφώσεις είναι,

	Μέσο υποστρώματος (1)	Μέσο υποστρώματος (2)	Μέσο υποστρώματος (3)
Αρχική κατακόρυφη τάση $\sigma'_v$ [kPa]	34	74	114
Αρχική ογκομετρική τροπή $\epsilon_v$ [-]	0.032	0.052	0.064
Τελική κατακόρυφη τάση $\sigma'_v$ [kPa]	234	274	314
Τελική ογκομετρική τροπή $\epsilon_v$ [-]	0.082	0.087	0.090
Ογκομετρική τροπή $\Delta\epsilon_v$ [-]	0.050	0.034	0.026

Τέλος, η συνολική καθίζηση, μετά την εφαρμογή της προφόρτισης είναι,

$$\Delta h = \Delta\epsilon_v^{(1)} h_1 + \Delta\epsilon_v^{(2)} h_2 + \Delta\epsilon_v^{(3)} h_3 = (0.050 + 0.034 + 0.026) \cdot 4m = 0.445m$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Σχεδιάστε τις διαδρομές των τάσεων (τασικές οδεύσεις) σε διάγραμμα με οριζόντιο άξονα την μέση ορθή τάση  $p$  και κατακόρυφο την αποκλίνουσα τάση  $q$  για τις δοκιμές ισότροπης συμπίεσης και μονοδιάστατης συμπίεσης, θεωρώντας ότι το υλικό είναι γραμμικώς ελαστικό και ισότροπο ( $E, \nu$ ).

**Λύση:** Η αποκλίνουσα τάση  $q$  και η μέση ορθή τάση  $p$  ισούνται με,

$$q = \sigma_1 - \sigma_3$$
$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

όπου  $\sigma_1$  είναι η μέγιστη κύρια τάση,  $\sigma_3$  η ελάχιστη κύρια τάση και  $\sigma_2$  η ενδιάμεση κύρια τάση.



Στη δοκιμή ισότροπης συμπίεσης  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$ , επομένως

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_c$$

και

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = 0$$

Συνεπώς, η τασική όδευση είναι μία ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα της μέσης ορθής τάσης  $p$ .

Στη δοκιμή μονοδιάστατης συμπίεσης, θεωρώντας ότι το υλικό είναι γραμμικώς ελαστικό και ισότροπο, ισχύει βάσει της Άσκησης 1,

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_1$$

άρα

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1 + 2\frac{\nu}{1 - \nu}}{3} \sigma_1 = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \sigma_1$$

και

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_1 = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \sigma_1$$

Συνεπώς, η τασική όδευση είναι μία ευθεία γραμμή με κλίση ως προς τον άξονα της μέσης ορθής τάσης  $p$  ίση με  $\frac{3(1 - 2\nu)}{1 + \nu}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Εργαστηριακή δοκιμή ισότροπης συμπίεσης σε ξηρή πυκνή άμμο, με αρχικό δείκτη πόρων  $e_0 = 0.609$  από τον ποταμό Sacramento έδωσε τα κάτωθι αποτελέσματα,

Πίεση $p$ [kPa]	Ογκομετρική τροπή $\epsilon_v$ [%]	Πίεση $p$ [kPa]	Ογκομετρική τροπή $\epsilon_v$ [%]
78	0.06	11925	6.40
196	0.31	9081	6.22
392	0.56	7708	6.09
588	0.81	5531	5.97
1069	1.18	4119	5.66
2167	1.74	3285	5.47
3285	2.30	2157	5.28
4021	2.67	1079	5.10
2216	2.30	588	4.72
981	1.99	392	4.47



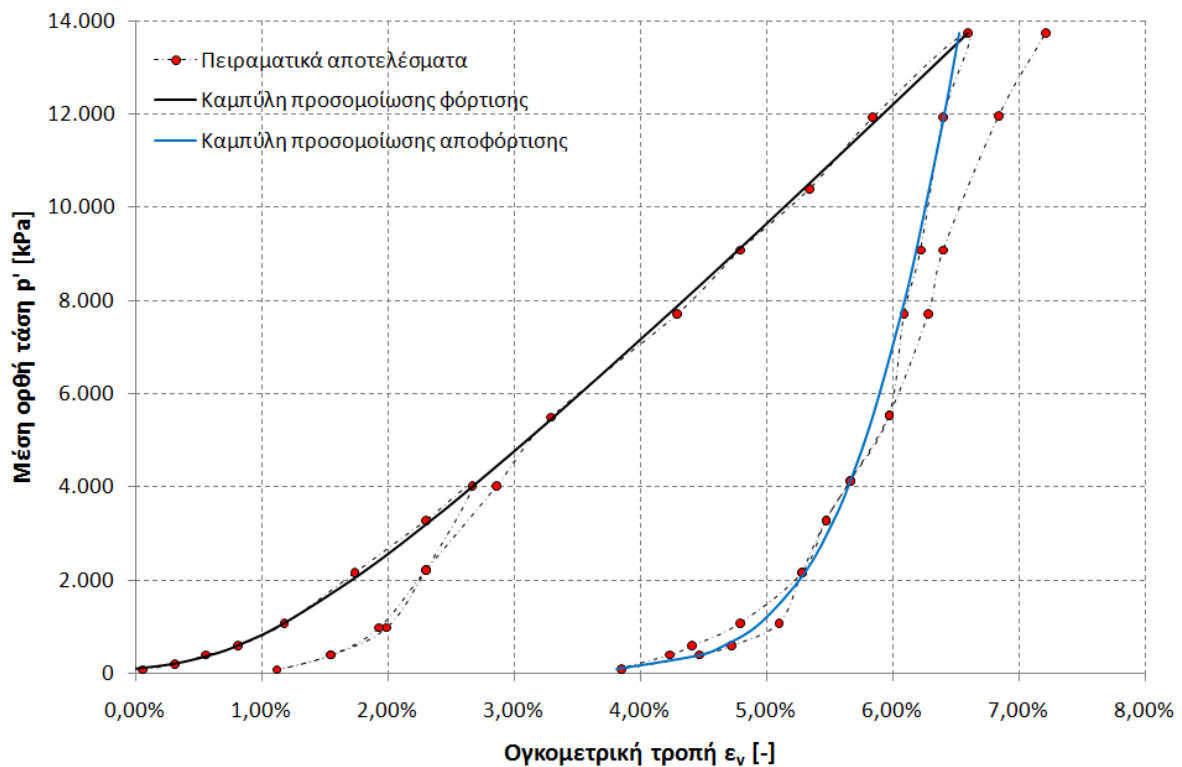


392	1.55	98	3.85
78	1.12	392	4.23
392	1.55	588	4.41
981	1.93	1079	4.79
2216	2.30	2157	5.28
4021	2.86	3285	5.47
5492	3.29	4119	5.66
7708	4.29	5531	5.97
9081	4.79	7708	6.28
10395	5.34	9081	6.40
11925	5.84	11964	6.84
13729	6.59	13729	7.21

Σχεδιάστε τις καμπύλες του δείκτη πόρων  $e$  και της ογκομετρικής τροπής  $\varepsilon_v$  με τη μέση ορθή ενεργό τάση  $p'$ . Σχεδιάστε τη μεταβολή του επαπτομενικού μέτρου ισότροπης συμπίεσης  $K_{sec}$  συναρτήσει της μέσης ορθής ενεργού τάσης  $p'$ . Υπολογίστε το ελαστικό μέτρο ισότροπης συμπίεσης  $K_{el}$ .

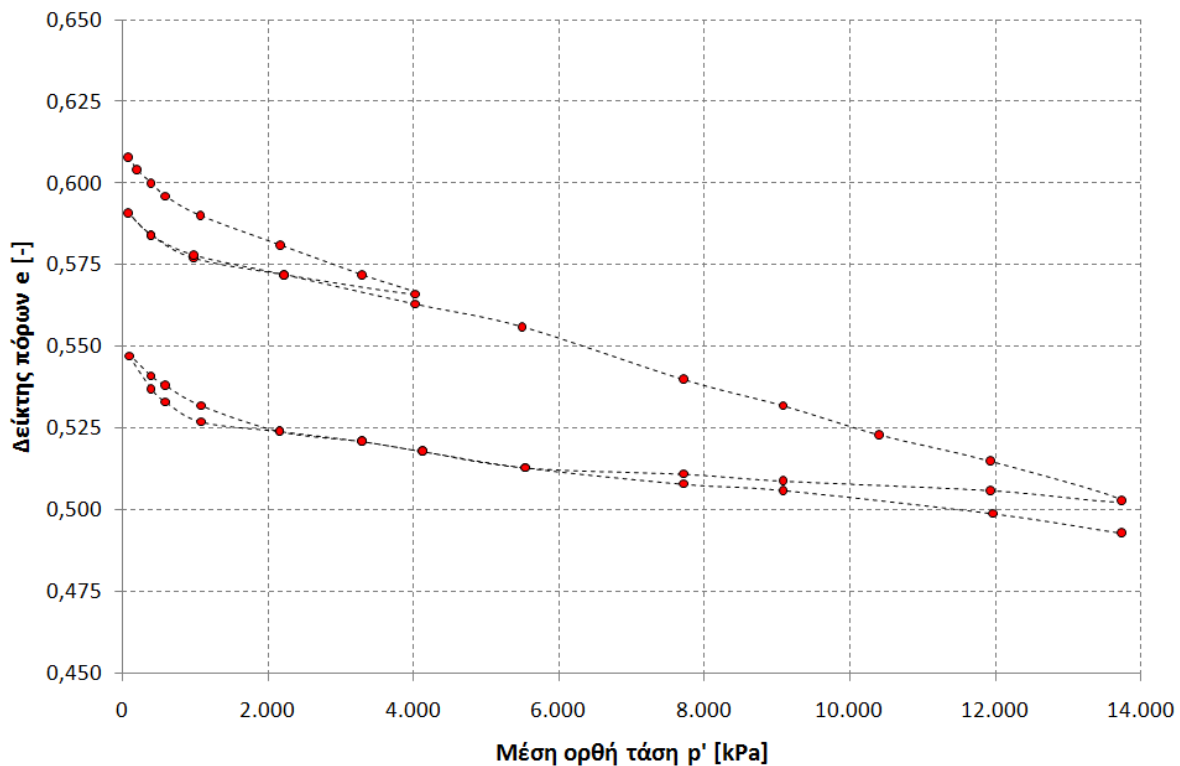
**Λύση:** Με τη βοήθεια υπολογιστικού φύλλου εργασίας (π.χ. Excel) επεξεργαζόμαστε τα ανωτέρω πειραματικά αποτελέσματα.

Η καμπύλη της ογκομετρικής τροπής συναρτήσει της μέσης ενεργού ορθής τάσης  $p'$  παρουσιάζεται στο κάτωθι σχήμα.





Η καμπύλη του δείκτη πόρων συναρτήσει της μέσης ενεργού ορθής τάσης  $p'$  παρουσιάζεται στο κάτωθι σχήμα.



Η παραγωγή αριθμητικών δεδομένων οδηγεί σε μεγάλα σφάλματα ως προς την εκτίμηση των μηχανικών χαρακτηριστικών των υλικών, ιδίως όταν τα πειραματικά αποτελέσματα έχουν διασπορά. Για το λόγο αυτό, επιλέγουμε μία συνάρτηση (τα πολυώνυμα δεν είναι πάντα οι καλύτερες συναρτήσεις) η οποία "προσαρμόζεται" στα πειραματικά αποτελέσματα και με βάση αυτή υπολογίζονται τα ζητούμενα του προβλήματος.

Στην περίπτωση της ισότροπης συμπίεσης, μία συνάρτηση η οποία προσομοιώνει καλά τα πειραματικά αποτελέσματα είναι η λογαριθμική,

$$\varepsilon_v^{fit} = c_1 \ln\left(\frac{p'}{p'_0}\right) + c_2(p' - p'_0) + c_3$$

όπου  $\varepsilon_v$  είναι η ογκομετρική τροπή,  $p'$  η μέση ενεργός τάση και  $c_1, c_2, c_3, p'_0$  σταθερές. Οι σταθερές αυτές, ή αλλιώς συντελεστές βαθμονόμησης, προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος  $\sum_{i=1}^n |\varepsilon_v - \varepsilon_v^{fit}|$ , όπου  $\varepsilon_v$  είναι τα πειραματικά αποτελέσματα και  $\varepsilon_v^{fit} = f(p', c_1, c_2, c_3, p'_0)$  είναι η συνάρτηση με την οποία τα προσομοιώνουμε τα πειραματικά αποτελέσματα. Με τη βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων  $c_1, c_2, c_3, p'_0$ .

Από την ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων προκύπτει ότι,

$$\varepsilon_v^{fit} = 3.25 \cdot 10^{-3} \ln\left(\frac{p'}{1.09}\right) + 3.62 \cdot 10^{-6}(p' - 1.09) - 1.45 \cdot 10^{-2}$$



Το εφαπτομενικό μέτρο ισότροπης συμπίεσης  $K_{sec}$  ορίζεται ως,

$$K_{sec} = \frac{dp'}{d\varepsilon_v}$$

ενώ το εφαπτομενικό μέτρο ισότροπης συμπίεσότητας  $C_{sec}$  ως,

$$C_{sec} = \frac{d\varepsilon_v}{dp'} = \frac{1}{K_{sec}}$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση

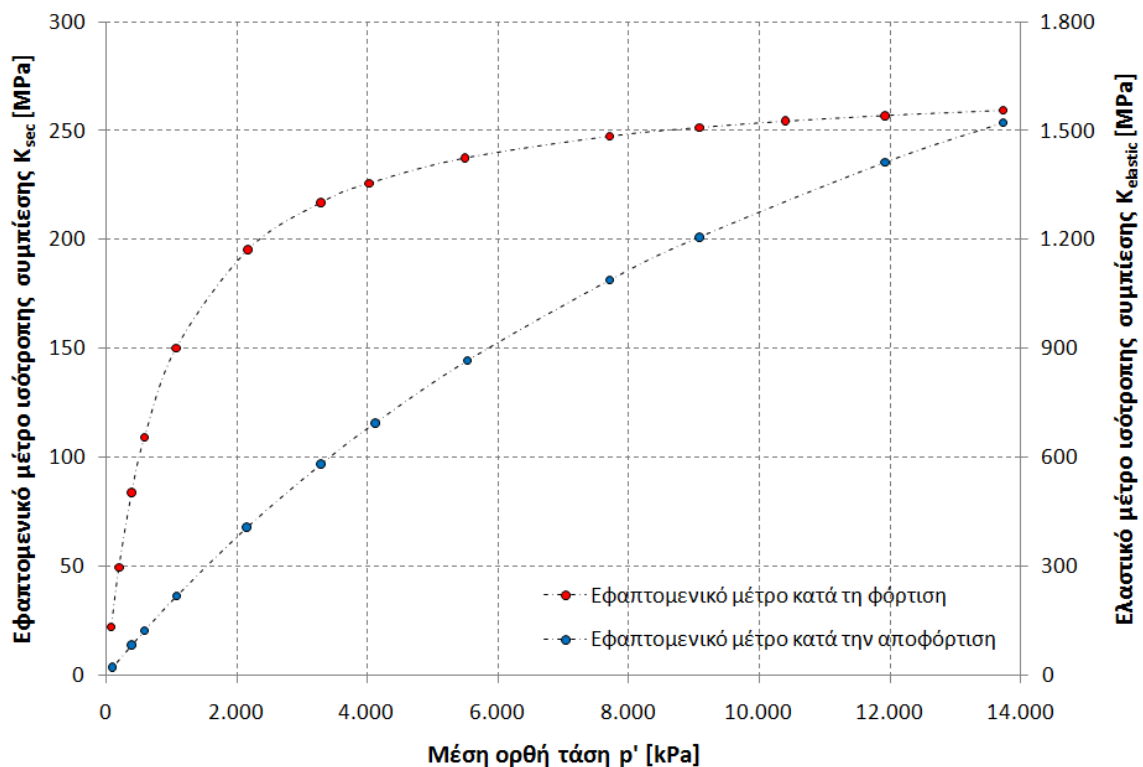
$$\varepsilon_v = c_1 \ln\left(\frac{p'}{p'_0}\right) + c_2(p' - p'_0) + c_3$$

ως προς  $p'$ , έχουμε,

$$C_{sec} = \frac{d\varepsilon_v}{dp'} = \frac{c_1}{p'} + c_2 \Rightarrow K_{sec} = \frac{dp'}{d\varepsilon_v} = \frac{p'}{c_1 + c_2 p'} = \frac{p'}{3.25 \cdot 10^{-3} + 3.62 \cdot 10^{-6} p'}$$

Το ελαστικό μέτρο ισότροπης συμπίεσης  $K_{el}$  υπολογίζεται από την κλίση του διαγράμματος ( $p'$ ,  $\varepsilon_v$ ) κατά την αποφόρτιση, ήτοι

$$C_{el} = \frac{d\varepsilon_v}{dp'} = \frac{c_1}{p'} + c_2 \Rightarrow K_{el} = \frac{dp'}{d\varepsilon_v} = \frac{p'}{c_1 + c_2 p'} = \frac{p'}{4.60 \cdot 10^{-3} + 3.22 \cdot 10^{-7} p'}$$





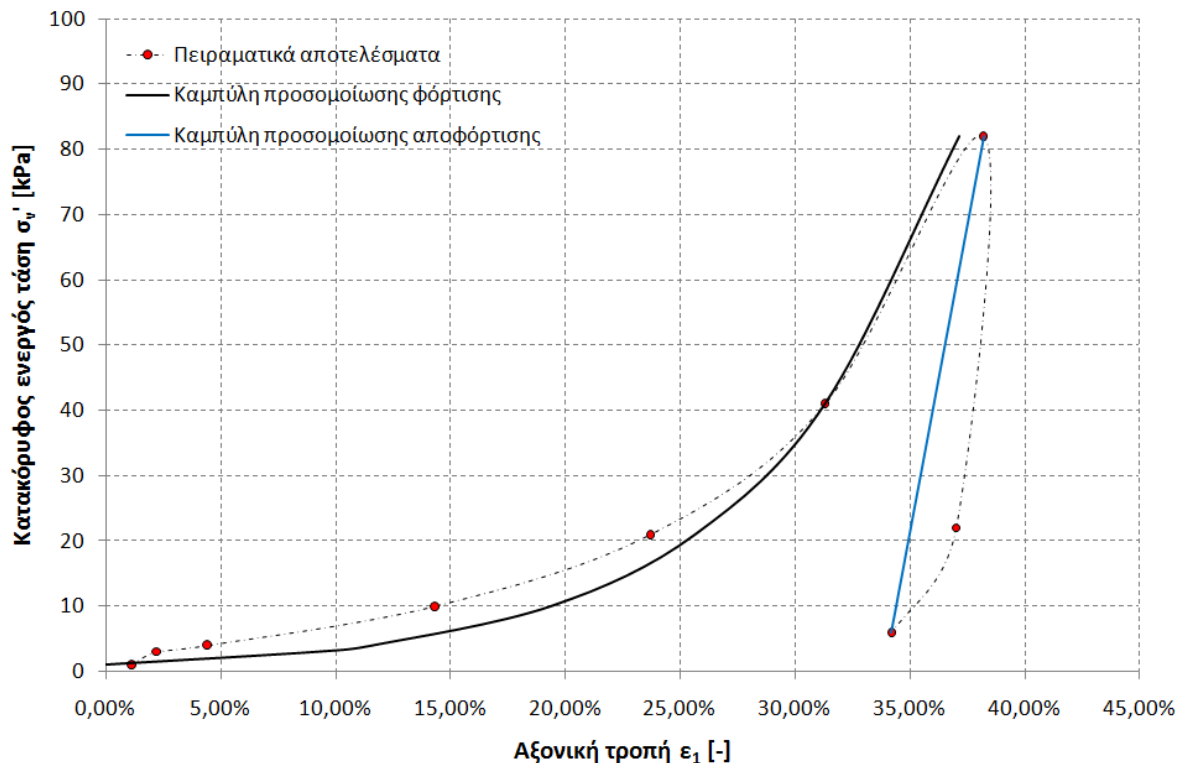
**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Εργαστηριακή δοκιμή μονοδιάστατης συμπίεσης σε ιλύδη άργιλο με αρχικό δείκτη πόρων  $e_0 = 0.950$ ,  $\sigma'_{v0} = 1 \text{ kPa}$  από τον ποταμό San Francisco, έδωσε τα κάτωθι αποτελέσματα,

Αξονική τάση $\sigma'_v$ [kPa]	Αξονική τροπή $\epsilon_1$ [%]
1	1.1
3	2.2
4	4.4
10	14.3
21	23.7
41	31.3
82	38.2
22	37.0
6	34.2

Σχεδιάστε την καμπύλη της ογκομετρικής τροπής  $\epsilon_v$  με την κατακόρυφη ενεργό τάση  $\sigma'_v$  και σχεδιάστε τη μεταβολή του εφαιπτομενικού μέτρου μονοδιάστατης συμπίεσης  $D_{sec}$  συναρτήσει της κατακόρυφης ενεργού τάσης  $\sigma'_v$ . Υπολογίστε το ελαστικό μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης  $D_{el}$ .

**Λύση:** Όμοια με την Άσκηση 5, η συνάρτηση με την οποία προσομοιώνουμε καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα είναι,

$$\epsilon_v = \frac{C_c}{1 + e_0} \log\left(\frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}}\right)$$





Το εφαπτομενικό μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης  $D_{sec}$  ορίζεται ως,

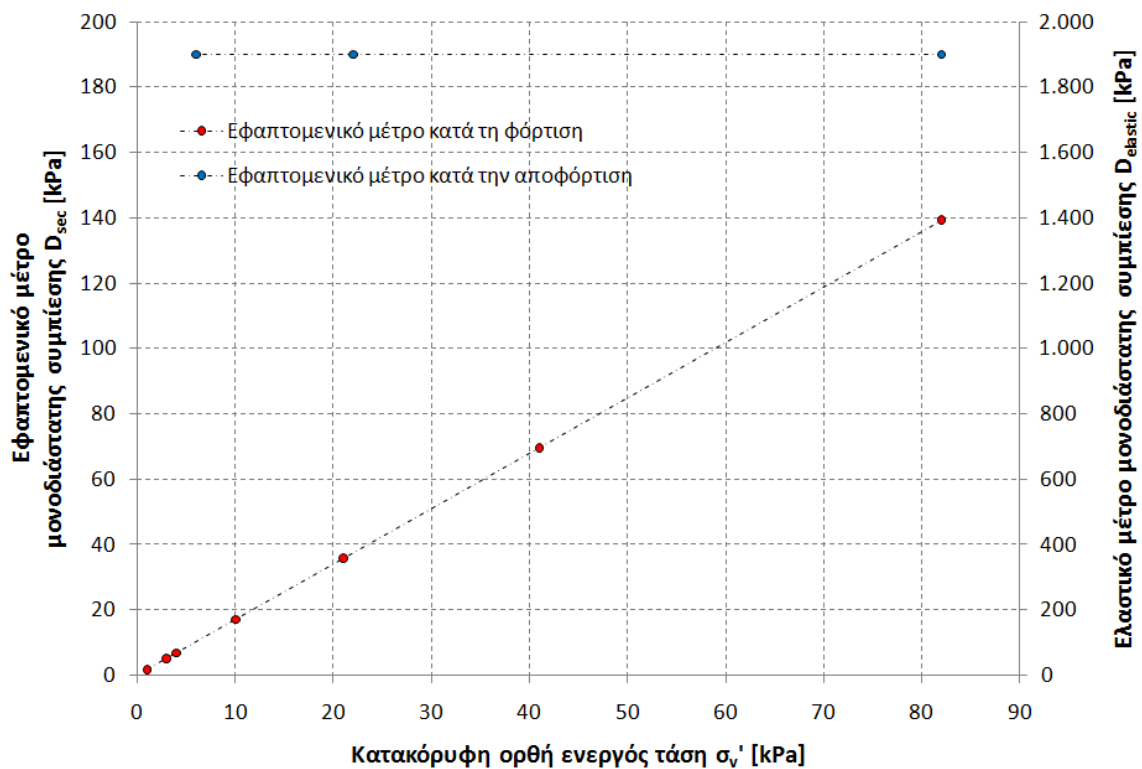
$$D_{sec} = \frac{d\sigma'_v}{d\varepsilon_v} = \frac{\ln 10 (1 + e_0)\sigma'_v}{C_c} = \frac{\ln 10 (1 + 0.95)}{0.3784} \sigma'_v = 5.15\sigma'_v$$

ενώ το εφαπτομενικό μέτρο μονοδιάστατης συμπιεστότητας  $C_{sec}$  ως,

$$C_{sec} = \frac{1}{D_{sec}} = \frac{d\varepsilon_v}{d\sigma'_v} = \frac{C_c}{\ln 10 (1 + e_0)\sigma'_v} = \frac{0.194}{\sigma'_v}$$

Το ελαστικό μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης  $D_{el}$  υπολογίζεται από την κλίση του διαγράμματος  $(\sigma'_v, \varepsilon_v)$  κατά την αποφόρτιση, ήτοι,

$$D_{el} \cong 1900 \text{ kPa}$$



**ΑΣΚΗΣΗ 7:** Εργαστηριακή δοκιμή τριαξονικής συμπίεσης σε ξηρό αμμώδες δοκίμιο με αρχικό δείκτη πόρων  $e_0 = 0.596$  και πλευρική πίεση  $\sigma_c = 588 \text{ kPa}$ , έδωσε τα κάτωθι αποτελέσματα,

Λόγος κυρίων ενεργών τάσεων $\eta$ [-]	Διαφορά κυρίων ενεργών τάσεων $q$ [kPa]	Αξονική τροπή $\varepsilon_1$ [%]	Ογκομετρική τροπή $\varepsilon_v$ [%]
1.00	0.0	0.00	0.00
1.39	229.5	0.06	0.03
1.78	459.0	0.15	0.09
2.08	635.5	0.30	0.15
2.82	1070.9	0.58	0.24



3.25	1323.9	0.88	0.27
3.87	1688.7	1.46	0.22
4.24	1906.4	2.19	0.03
4.42	2012.3	2.92	-0.24
4.56	2094.7	4.38	-0.91
4.55	2088.8	5.85	-1.61
4.45	2030.0	8.77	-2.85
4.26	1918.2	11.70	-3.80
4.18	1871.1	14.60	-4.46
3.94	1729.9	17.55	-4.91
3.72	1600.5	20.00	-5.05

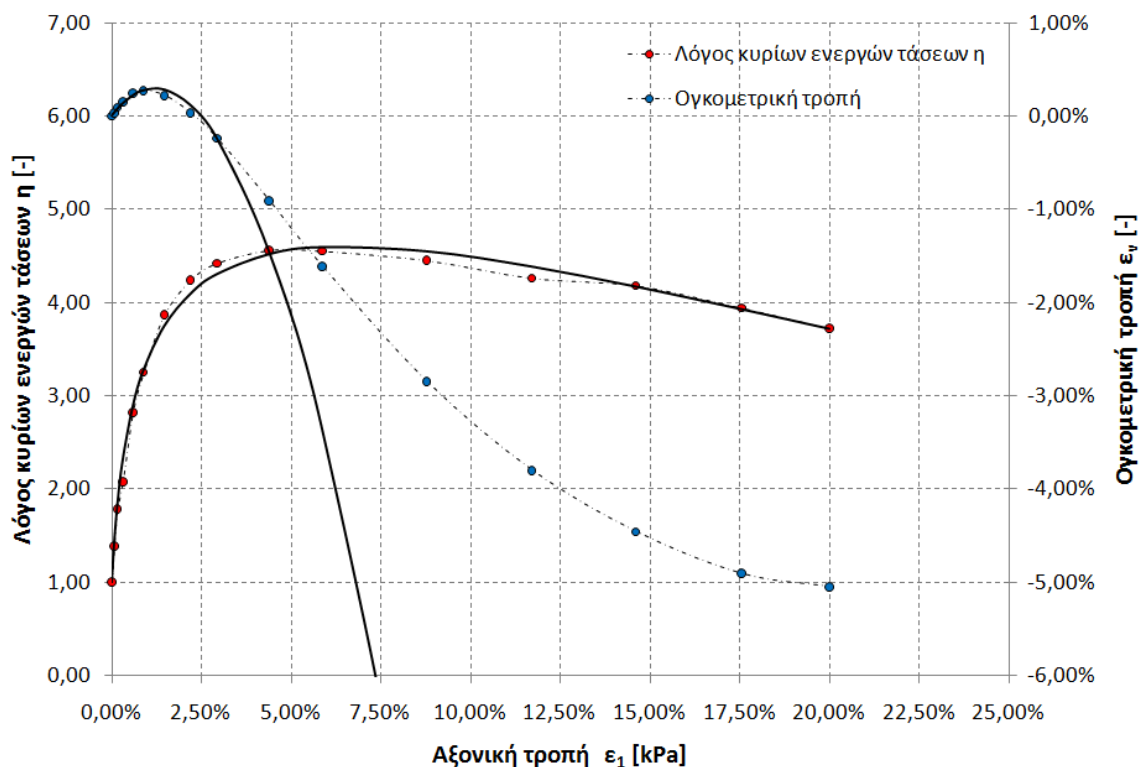
Σχεδιάστε τις καμπύλες του λόγου των κυρίων ενεργών τάσεων  $\eta$  και της ογκομετρικής τροπής  $\varepsilon_v$  συναρτήσει της αξονικής παραμόρφωσης  $\varepsilon_1$ . Σχεδιάστε τη μεταβολή του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας  $E_{sec}$  και του λόγου Poisson  $\nu$  συναρτήσει της μέσης ενεργού τάσης  $p'$ .

**Λύση:** Όμοια με την Άσκηση 6, η συνάρτηση  $\eta$  οποία προσομοιώνει καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα σε δοκιμές τριαξονικής θλίψης σε στραγγιζόμενες συνθήκες είναι,

$$\sigma'_1(\varepsilon_1) = c_1 \ln(c_2 \varepsilon_1 + c_3) + \frac{c_4 \varepsilon_1}{c_5 \varepsilon_1 + c_6}$$

$$\varepsilon_v(\varepsilon_1) = c_7 \ln(c_8 \varepsilon_1 + c_9) + \frac{c_{10} \varepsilon_1}{c_{11} \varepsilon_1 + c_{12}}$$

όπου  $\sigma'_1$ ,  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_1$  είναι η αξονική ενεργός τάση, η ογκομετρική τροπή και η αξονική τροπή αντίστοιχα.



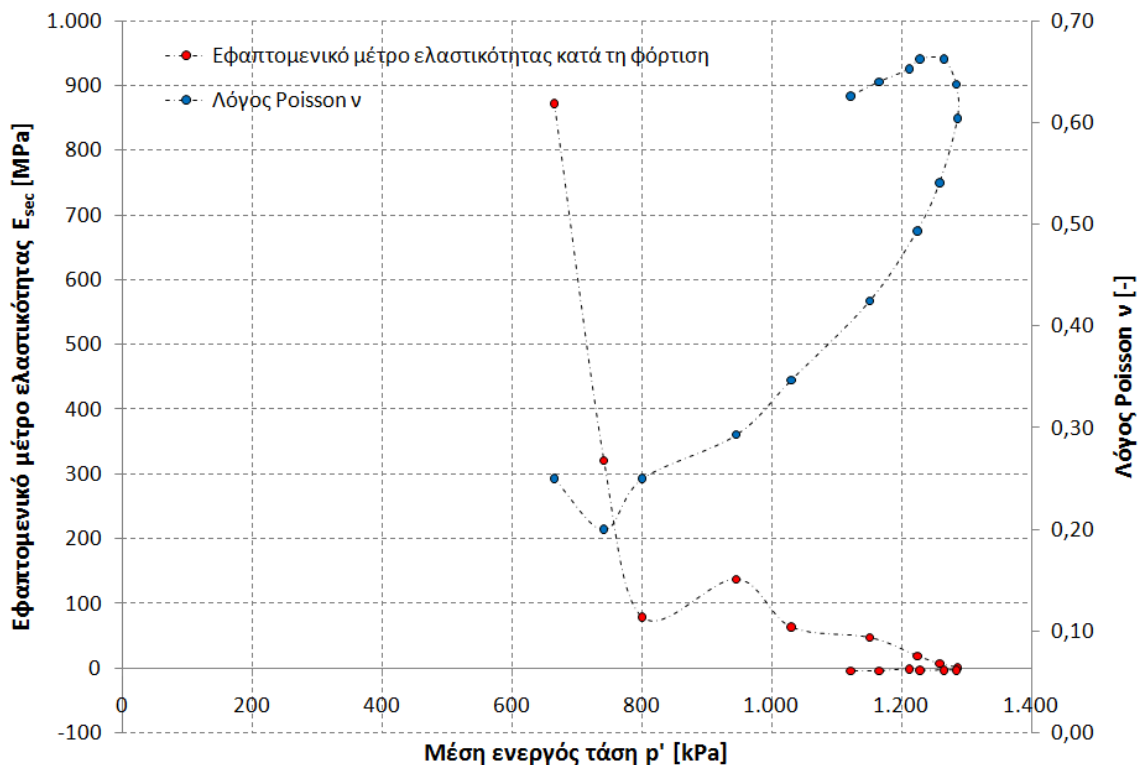


Ο λόγος του Poisson  $\nu$  κατά τη φόρτιση υπολογίζεται από,

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 - \nu\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_1 = \varepsilon_1 - 2\nu\varepsilon_1 \Rightarrow \nu = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_\nu}{2\varepsilon_1}$$

Το μέτρο ελαστικότητας  $E_{sec}$  κατά την φόρτιση θα υπολογιστεί από,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_{sec}} [\sigma'_1 - \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3)] \Rightarrow E_{sec} = \frac{\sigma'_1 - 2\nu\sigma'_3}{\varepsilon_1}$$



**ΑΣΚΗΣΗ 8:** Γράψτε το μητρώο ελαστικότητας για την περίπτωση ενός στοιχείου το οποίο βρίσκεται σε εδαφικό σχηματισμό, ο οποίος έχει προέλθει από φυσική απόθεση ιζημάτων.

**Λύση:** Η περίπτωση ιζηματογένεσης αποτελεί ένα συνήθη τρόπο δημιουργίας εδαφικών στρωμάτων. Η απόθεση μέσω της βαρύτητας (άξονας  $z$ ) οδηγεί σε δημιουργία σχηματισμών, οι οποίοι έχουν μία συμμετρία ως προς το οριζόντιο επίπεδό τους ( $x, y$ ). Αυτά τα υλικά μπορούν να χαρακτηρισθούν σε πρώτη προσέγγιση, ως ελαστικά, εγκαρσίως ισότροπα. Τέτοια υλικά είναι π.χ. το ξύλο και το πεντελικό μάρμαρο.

Οι ελαστικές τους σταθερές είναι έξι. Το μέτρο ελαστικότητας στο οριζόντιο επίπεδο ( $x, y$ ) είναι  $E_{xx} = E_{yy}$ , ενώ στο κατακόρυφο  $E_{zz} > E_{xx} = E_{yy}$ .

Ο λόγος του Poisson  $\nu$  ορίζεται ως ο λόγος των παραμορφώσεων, ήτοι,



$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$$

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

$$\nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$$

$$\nu_{zx} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

που λόγω εγκάρσιας συμμετρίας  $\nu_{xy} = \nu_{yx}$  και  $\nu_{xz} = \nu_{zx}$ .

Το μέτρο διάτμησης στο οριζόντιο επίπεδο  $(x, y)$  ισούται με

$$G_{xy} = G_{yx} = \frac{E_{xy}}{2(1 + \nu_{xy})} = \frac{E_{yx}}{2(1 + \nu_{yx})}$$

ενώ στο  $(x, z)$  και  $(y, z)$  ισούται με

$$G_{zy} = G_{zx} = \frac{E_{zy}}{2(1 + \nu_{zy})} = \frac{E_{zx}}{2(1 + \nu_{zx})}$$

Συνεπώς, οι σχέσεις που συνδέουν τις τροπές με τις τάσεις είναι,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} - \nu_{xy} \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}} - \nu_{xz} \frac{\sigma_{zz}}{E_{zz}}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}} - \nu_{yx} \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} - \nu_{yz} \frac{\sigma_{zz}}{E_{zz}}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E_{zz}} - \nu_{zx} \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} - \nu_{zy} \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{2E_{xy}(1 + \nu_{xy})} = \frac{\sigma_{yx}}{2E_{yx}(1 + \nu_{yx})}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\sigma_{xz}}{2E_{xz}(1 + \nu_{xz})} = \frac{\sigma_{zx}}{2E_{zx}(1 + \nu_{zx})}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\sigma_{yz}}{2E_{yz}(1 + \nu_{yz})} = \frac{\sigma_{zy}}{2E_{zy}(1 + \nu_{zy})}$$





**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Αστοχία και διατμητική αντοχή εδαφικού στοιχείου (4<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 01 Νοεμβρίου 2010.

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Δοκιμή απ' ευθείας διάτμησης πραγματοποιείται σε δοκίμιο αμμώδους ιλύος μέσης πυκνότητας με ορθή τάση  $\sigma_n = 65kPa$ . Ο συντελεστής πλευρικής ώθησης ισούται με  $K_0 = 0.5$ . Στην αστοχία η ορθή τάση παραμένει ίση με  $\sigma_n = 65kPa$ , ενώ η διατμητική ισούται με  $\tau = 41kPa$ . Σχεδιάστε τον κύκλο του Mohr για την αρχική εντατική κατάσταση και την εντατική κατάσταση στην αστοχία. Υπολογίστε τις κύριες τάσεις στην αστοχία, την κλίση του επιπέδου αστοχίας, τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων και τη διεύθυνση του επιπέδου με την μέγιστη διατμητική τάση στην αστοχία.

**Λύση:** Το εδαφικό αμμώδες δοκίμιο αστοχεί κάτω από ορθή και διατμητική τάση ίση με

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_n = \sigma_v = 65kPa \\ \tau = 41kPa \end{cases}$$

Θεωρώντας ότι το εδαφικό στοιχείο έχει μηδενική συνεκτικότητα, ήτοι  $c = 0$ , δηλαδή η γραμμή αστοχίας στο επίπεδο  $(\sigma, \tau)$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η γωνία εσωτερικής τριβής ισούται με,

$$\tan \varphi = \frac{\tau}{\sigma_v} = \frac{41kPa}{65kPa} \Rightarrow \varphi = 32.2^\circ$$

Στην κατάσταση αστοχίας για το αμμώδες εδαφικό δοκίμιο ισχύει (βλ. κύκλο αστοχίας Mohr),

$$\cos \varphi = \frac{\tau}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_3} \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\tau}{\cos \varphi} = \frac{82}{\cos 32.2^\circ} = 96.95kPa$$

όπου  $\sigma_1, \sigma_3$  είναι η μέγιστη και ελάχιστη κύρια τάση στην αστοχία. Επίσης, στην αστοχία, ισχύει

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sin \varphi} = \frac{96.95kPa}{\sin 32.2^\circ} = 181.72kPa$$

Επομένως,

$$\begin{cases} \sigma_1 = 139.34kPa \\ \sigma_3 = 42.39kPa \end{cases}$$

Ο Πόλος των καθέτων του κύκλου έχει συντεταγμένες

$$\begin{cases} \sigma_p = 116.72kPa \\ \tau_p = -41kPa \end{cases}$$

Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων υπολογίζονται από την σχέση,



$$\tan \theta_1 = \frac{-\tau_p}{\sigma_1 - \sigma_p} = \frac{41}{139.34 - 116.72} = \frac{41}{22.62} \Rightarrow \theta_1 = 61.12^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{-\tau_p}{\sigma_3 - \sigma_p} = \frac{41}{42.39 - 116.72} = \frac{41}{-74.33} \Rightarrow \theta_2 = 151.12^\circ$$

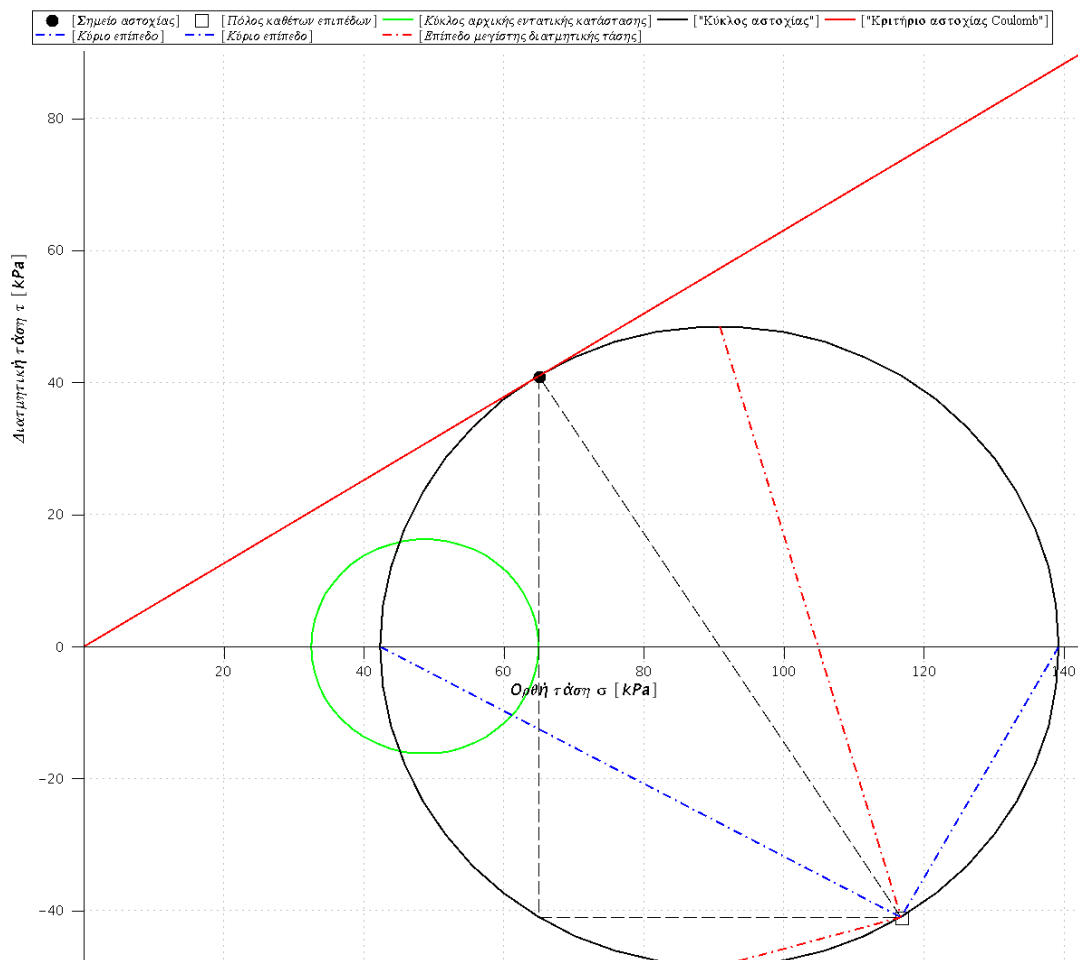
όπου  $\theta_1, \theta_2$  είναι οι γωνίες που σχηματίζουν τα κάθετα διανύσματα των κυρίων επιπέδων με τον άξονα των ορθών τάσεων. Η κλίση του επιπέδου αστοχίας είναι μηδενική, ήτοι το επίπεδο αστοχίας είναι παράλληλο προς το οριζόντιο επίπεδο. Τέλος, οι διευθύνσεις των επιπέδων με τη μέγιστη διατμητική τάση δίνονται από,

$$\tan \psi_1 = \frac{\tau_m - \tau_p}{\sigma_m - \sigma_p} = \frac{48.47 + 41}{90.86 - 116.72} \Rightarrow \psi_1 = 106.12^\circ$$

$$\tan \psi_2 = \frac{-\tau_m - \tau_p}{\sigma_m - \sigma_p} = \frac{-48.47 + 41}{90.86 - 116.72} \Rightarrow \psi_2 = 196.12^\circ$$

όπου  $\sigma_m$  είναι η συντεταγμένη του κέντρου του κύκλου αστοχίας και  $\tau_m$  η μέγιστη διατμητική τάση στην αστοχία,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 90.86 \text{ kPa}, \tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 48.47 \text{ kPa}$$





**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Αμμώδες δοκίμιο συμπιέζεται ισότροπα υπό τάση  $\sigma_c = 100kPa$ . Έπειτα υποβάλλεται σε τριαξονική δοκιμή θλίψεως, όπου στην αστοχία η πλευρική πίεση του δοκιμίου είναι  $\sigma_c = 100kPa$  και η αξονική τάση  $\sigma_a = 200kPa$ .

(α) Σχεδιάστε τους κύκλους του Mohr για την αρχική εντατική κατάσταση και την εντατική κατάσταση στην αστοχία.

(β) Υπολογίστε την γωνία (εσωτερικής) τριβής της άμμου, θεωρώντας μηδενική συνεκτικότητα ( $c = 0$ ).

(γ) Υπολογίστε την διατμητική τάση στο επίπεδο αστοχίας  $\tau_f$  και βρείτε την θεωρητική γωνία αστοχίας του δοκιμίου. Εκτιμήστε επίσης την γωνία που σχηματίζει το επίπεδο στο οποίο ο λόγος ( $\tau/\sigma$ ) μεγιστοποιείται.

(δ) Υπολογίστε την μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{max}$  στην αστοχία και την γωνία που σχηματίζει το επίπεδο στο οποίο δρα. Βρείτε την διαθέσιμη διατμητική αντοχή στο επίπεδο αυτό και εκτιμήστε τον συντελεστή ασφαλείας.

**Λύση:** Στην αρχική εντατική κατάσταση, όπου το δοκίμιο συμπιέζεται ισότροπα, οι τρεις κύριες τάσεις ισούνται με την ολόπλευρη πίεση, ήτοι,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c = 100kPa$$

Συνεπώς ο κύκλος του Mohr εκφυλίζεται σε ένα σημείο με συντεταγμένες  $(\sigma, \tau) = (100kPa, 0)$ . Στην αστοχία, η μέγιστη κύρια τάση ισούται με  $\sigma_1 = \sigma_a = 200kPa$  ενώ η ελάχιστη κύρια τάση ισούται με  $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_c = 100kPa$ . Συνεπώς το κέντρο του κύκλου αστοχίας έχει συντεταγμένες  $(\sigma, \tau) = (150kPa, 0)$  και ακτίνα  $50kPa$ .

Η γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi$  της άμμου υπολογίζεται,

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{200 - 100}{200 + 100} = \frac{100}{300} \Rightarrow \varphi = 18.43^\circ$$

Η διατμητική τάση στο επίπεδο αστοχίας ισούται με,

$$\cos \varphi = \frac{2\tau_f}{\sigma_1 - \sigma_3} \Rightarrow \tau_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \cos \varphi = 47.1kPa$$

Το επίπεδο αστοχίας σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το οριζόντιο επίπεδο ίση με,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = 54.74^\circ$$

και αποτελεί και το επίπεδο στο οποίο ο λόγος  $\tau/\sigma$  μεγιστοποιείται.

Η μέγιστη διατμητική τάση στην αστοχία ισούται με,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{200 - 100}{2} = \frac{100}{2} = 50kPa$$



η οποία δρα σε επίπεδα των οποίων τα κάθετα διανύσματα σχηματίζουν γωνία  $\theta$  ως προς τη διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης, ήτοι,

$$\tan \theta_1 = \frac{\tau_{max}}{\sigma_m - \sigma_p} = \frac{50}{150 - 100} = \frac{50}{50} \Rightarrow \theta_1 = 45^\circ$$
$$\tan \theta_2 = \frac{-\tau_{max}}{\sigma_m - \sigma_p} = \frac{-50}{150 - 100} = \frac{-50}{50} \Rightarrow \theta_2 = 315^\circ$$

όπου  $\sigma_m, \sigma_p$  είναι οι τεταγμένες του κέντρου του κύκλου του Mohr και του Πόλου των καθέτων.

Η διαθέσιμη διατμητική αντοχή  $\tau_{rd}$  στο επίπεδο αυτό είναι

$$\tau_{rd} = \sigma \tan \varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tan \varphi = \frac{200 + 100}{2} \tan 18.43^\circ = 53.03 \text{ kPa}$$

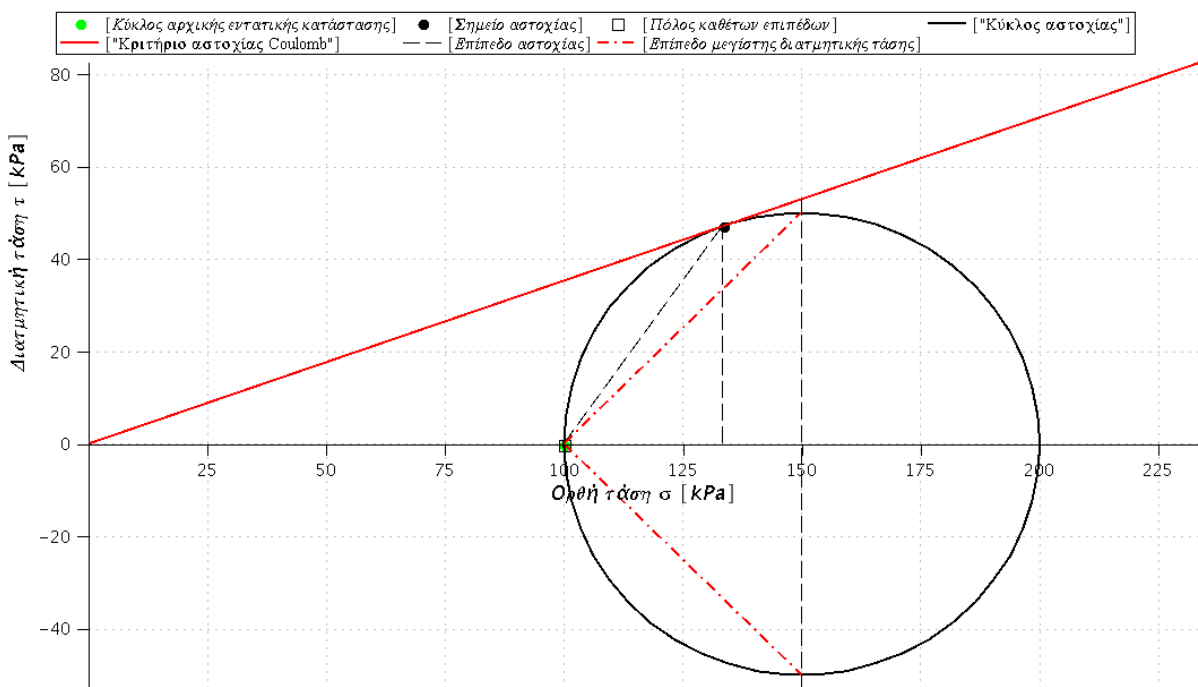
ενώ η δρώσα διατμητική τάση  $\tau_{sd}$  είναι

$$\tau_{sd} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50 \text{ kPa}$$

Ο συντελεστής ασφαλείας ορίζεται ως ο λόγος της διαθέσιμης διατμητικής αντοχής  $\tau_{rd}$  προς τη δρώσα διατμητική τάση  $\tau_{sd}$ , ήτοι,

$$SF = \frac{\tau_{rd}}{\tau_{sd}} = \frac{53.03 \text{ kPa}}{50 \text{ kPa}} = 1.06$$

Στο κάτωθι σχήμα παρουσιάζονται γραφικά ο κύκλος του Mohr, το κριτήριο Coulomb και το επίπεδο αστοχίας.





**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Δοκίμιο άμμου υποβάλλεται σε δοκιμή απλής διάτμησης με ορθή ενεργό τάση  $\sigma'_v = 100kPa$ ,  $K_0 = 0.5$  και γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi = 45^\circ$ . Υπολογίστε την διατμητική τάση στο οριζόντιο επίπεδο στην αστοχία. Σχεδιάστε τους κύκλους του Mohr στην αρχική και τελική εντατική κατάσταση. Υπολογίστε την διατμητική τάση  $\tau_\alpha$ , την ορθή τάση  $\sigma_\alpha$  στο επίπεδο αστοχίας και την διεύθυνση αυτού. Εκτιμήστε τις τιμές των κυρίων τάσεων και τις διευθύνσεις των επιπέδων στις οποίες αυτές ασκούνται. Βρείτε στα επίπεδα αυτά τις διαθέσιμες διατμητικές αντοχές.

**Λύση:** Κατά την δοκιμή απλής διάτμησης, η κατακόρυφη  $\sigma_v$  και οριζόντια  $\sigma_h$  τάση που εφαρμόζονται στο δοκίμιο παραμένουν σταθερές. Οι κύριες τάσεις δίνονται από την σχέση,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(\sigma_v + \sigma_h)}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2}}{2} \\ \sigma_3 = \frac{(\sigma_v + \sigma_h)}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2}}{2} \end{cases}$$

όπου  $\tau$  η διατμητική τάση. Στην αστοχία, η εσωτερική γωνία τριβής  $\varphi$  ισούται για μη συνεκτικό υλικό ( $c = 0$ ),

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{\sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2}}{\sigma_v + \sigma_h} \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{[(\sigma_v + \sigma_h) \sin \varphi]^2 - (\sigma_v - \sigma_h)^2}}{2} = 46.77kPa$$

όπου  $\tau$  η διατμητική τάση κατά την αστοχία στο οριζόντιο επίπεδο. Στο επίπεδο αστοχίας η διατμητική και ορθή τάση ισούται με,

$$\tau_f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \varphi = 37.50kPa$$

$$\sigma_f = \frac{\tau_f}{\tan \varphi} = 37.50kPa$$

Η διεύθυνση του καθέτου διανύσματος (ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων) του επιπέδου αστοχίας είναι

$$\tan \theta_a = \frac{\tau_f - \tau_p}{\sigma_f - \sigma_p} = \frac{37.50 - 46.77}{37.50 - 100} \Rightarrow \theta_a = 126.56^\circ$$

όπου  $\sigma_p, \tau_p$  είναι οι συντεταγμένες του Πόλου των καθέτων του κύκλου του Mohr,

$$\sigma_p = 100kPa, \tau_p = 46.77kPa$$

Οι κύριες τάσεις υπολογίζονται ως παραπάνω,

$$\sigma_1 = 128.03kPa, \sigma_3 = 21.97kPa$$

και οι διευθύνσεις των καθέτων διανυσμάτων (ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων) τους είναι,

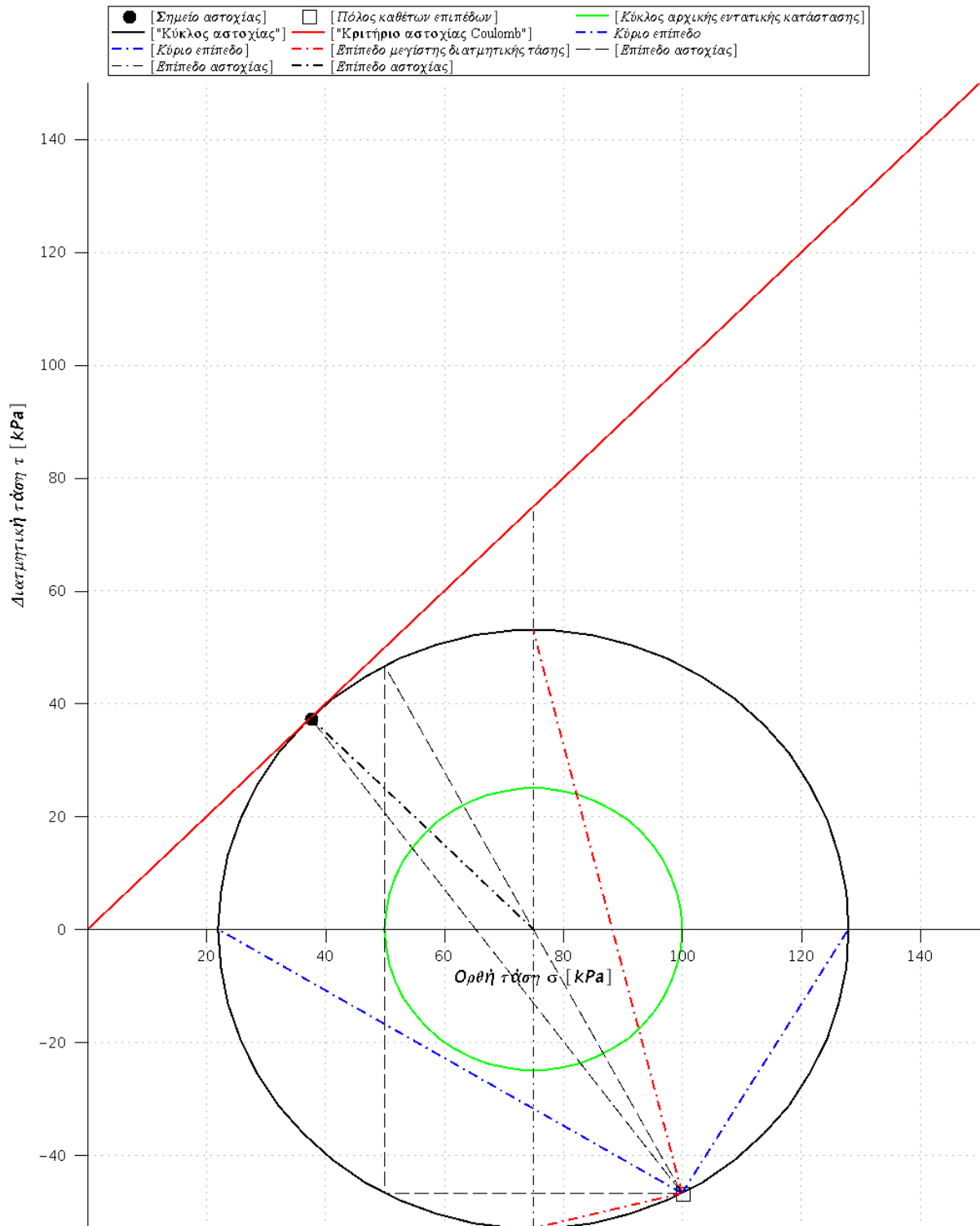
$$\tan \theta_1 = \frac{-\tau_p}{\sigma_1 - \sigma_p} = \frac{46.77}{128.03 - 100} \Rightarrow \theta_1 = 59.06^\circ$$



$$\tan \theta_2 = \frac{-\tau_p}{\sigma_3 - \sigma_p} = \frac{46.77}{21.97 - 100} \Rightarrow \theta_2 = 149.06^\circ$$

Στα επίπεδα αυτά, η διαθέσιμη διατμητική τάση είναι αντίστοιχα,

$$\tau_{rd,1} = \sigma_1 \tan \varphi = 128.03 \text{ kPa}, \tau_{rd,3} = \sigma_3 \tan \varphi = 21.97 \text{ kPa}$$





**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Η εντατική κατάσταση ενός σημείου σε ένα εδαφικό σχηματισμό δίνεται από τον τανυστή των τάσεων,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ με } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Υποθέτοντας ότι το εδαφικό υλικό υπακούει ως προς την αστοχία του στο κριτήριο Mohr-Coulomb με συνεκτικότητα  $c$  και γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi$ , δώστε την έκφραση του λόγου των κυρίων τάσεων στην αστοχία. Υπολογίστε τον λόγο αυτόν στη περίπτωση μη συνεκτικών υλικών (π.χ. άμμος,  $c = 0$ ). Εκφράστε τον λόγο αυτόν στην περίπτωση όπου  $\varphi = 0$ , με συνεκτικότητα  $c$  διάφορη του μηδενός.

**Λύση:** Σύμφωνα με το κάτωθι σχήμα, ισχύει:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{c}{\cos \varphi}} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3 + 2c \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

όπου  $\varphi, c$  η εσωτερική γωνία τριβής και συνεκτικότητα του εδαφικού υλικού και  $\sigma_1, \sigma_3$  η μέγιστη και κύρια ελάχιστη τάση. Ο λόγος των κυρίων τάσεων ισούται με,

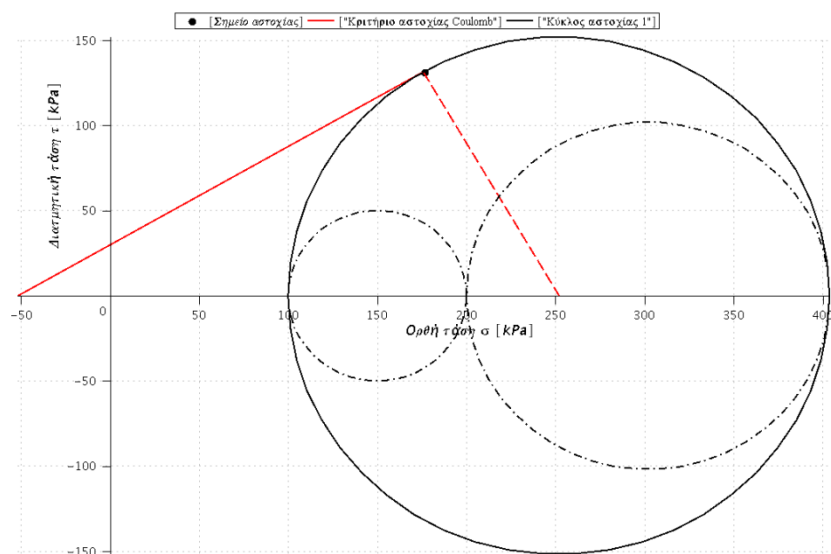
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + \frac{2c}{\sigma_3} \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

Στην περίπτωση μη συνεκτικών εδαφών ( $c = 0$ ),

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

ενώ στην περίπτωση κατά την οποία η γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού είναι μηδενική ( $\varphi = 0$ )

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2c}{\sigma_3}$$





**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Έστω ότι η εντατική κατάσταση ενός σημείου σε ένα εδαφικό σχηματισμό σε αστοχία δίνεται από,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \text{ με } \sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}$$

Υποθέτοντας ότι το εδαφικό υλικό υπακούει ως προς την αστοχία του στο κριτήριο Mohr-Coulomb με συνεκτικότητα  $c$  και γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi$ , βρείτε την έκφραση που συνδέει τις ανωτέρω τάσεις με τη συνεκτικότητα  $c$  και τη γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi$ .

**Λύση:** Σύμφωνα με τα ανωτέρω, οι κύριες τάσεις ισούνται με,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2}}{2} \\ \sigma_3 = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2}}{2} \end{cases}$$

Το κριτήριο τριβής κατά Coulomb δεν λαμβάνει υπ' όψιν του την ενδιάμεση τάση ( $\sigma_{yy}$  ή  $\sigma_2$ ), επομένως ο λόγος των κυρίων τάσεων στην αστοχία, βάσει της προηγούμενης άσκησης είναι,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + \frac{2c \cos \varphi}{\sigma_3 (1 - \sin \varphi)}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Η εντατική κατάσταση ενός σημείου σε ένα εδαφικό σχηματισμό δίνεται από,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 & 0 & 120 \\ 0 & 103 & 0 \\ 120 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

Υποθέτοντας ότι το εδαφικό υλικό υπακούει ως προς την αστοχία του στο κριτήριο Mohr-Coulomb με τιμές συνεκτικότητας  $c = 86 \text{ kPa}$  και γωνίας εσωτερικής τριβής  $\varphi = 35^\circ$ , να βρεθεί αν το υλικό σημείο αυτό αστοχεί ή όχι.

**Λύση:** Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η ακτίνα του κύκλου στην εν λόγω εντατική κατάσταση είναι,

$$R_s = \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2}}{2} = \frac{\sqrt{(180 - 80)^2 + 4 \cdot 120^2}}{2} = 130$$

Εάν ο ανωτέρω κύκλος είναι και κύκλος αστοχίας, τότε θα πρέπει η ακτίνα του να έχει τιμή ίση με,

$$R_d = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi = \frac{180 + 80}{2} \sin 35^\circ + 86 \cos 35^\circ = 145$$

Επειδή  $R_d > R_s$  ο κύκλος δεν εφάπτεται της ευθείας αστοχίας κατά Coulomb, επομένως το εδαφικό στοιχείο δεν αστοχεί βάσει του κριτηρίου Coulomb.





**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Μηχανική συμπεριφορά εδαφών υπό αστράγγιστες συνθήκες και τασικές οδεύσεις (διαδρομές) (5<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 22 Νοεμβρίου 2010.

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Υπολογίστε το μέτρο μονοδιάστατης και ισότροπης συμπίεσης εδαφικού υλικού, πλήρως κορεσμένου ύδατος σε αστράγγιστες συνθήκες (μηδενική αλλαγή όγκου). Θεωρείστε ότι το εδαφικό υλικό είναι ελαστικό και ισότροπο, με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$ .

**Λύση:** Θεωρώντας ότι το εδαφικό υλικό συμπεριφέρεται ως ελαστικά ισότροπο υλικό, οι τροπές  $\varepsilon_i$  στους κύριους άξονες (1,2,3) θα δίνονται από τον γενικευμένο νόμο του Hooke, ήτοι

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma'_1 - \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma'_2 - \nu(\sigma'_1 + \sigma'_3))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma'_3 - \nu(\sigma'_1 + \sigma'_2))$$

όπου  $\sigma'_i$  είναι οι κύριες ενεργές τάσεις και  $E, \nu$  το μέτρο ελαστικότητας και λόγος του Poisson.

Στη δοκιμή μονοδιάστατης συμπίεσης ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ), η ογκομετρική τροπή  $\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ , ισούται με,

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1$$

και επίσης,

$$\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \sigma'_2 - \nu(\sigma'_1 + \sigma'_3) = 0 \Rightarrow \sigma'_2 = \nu(\sigma'_1 + \sigma'_3)$$

$$\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \sigma'_3 - \nu(\sigma'_1 + \sigma'_2) = 0 \Rightarrow \sigma'_3 = \nu(\sigma'_1 + \sigma'_2)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\sigma'_2 = \sigma'_3 = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma'_1$$

Συνεπώς, η ογκομετρική τροπή  $\varepsilon_v$ , γράφεται,

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma'_1 - \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3)) = \frac{1}{E} \sigma'_1 \left( 1 - \frac{2\nu^2}{1 - \nu} \right) = \frac{1}{E} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \sigma'_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma'_1}{\varepsilon_v} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = D$$



Στη δοκιμή ισότροπης συμπίεσης ( $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = p'$ ) και επομένως η ογκομετρική τροπή ισούται με,

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E}(\sigma'_1 - \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3)) + \frac{1}{E}(\sigma'_2 - \nu(\sigma'_1 + \sigma'_3)) + \frac{1}{E}(\sigma'_3 - \nu(\sigma'_1 + \sigma'_2)) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E}[\sigma'_1(1 - 2\nu) + \sigma'_2(1 - 2\nu) + \sigma'_3(1 - 2\nu)] = \frac{3(1 - 2\nu)p'}{E} \Rightarrow \frac{p'}{\varepsilon_v} = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} = K$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Εδαφικό δοκίμιο άμμου, με βαθμό κορεσμού  $S_r = 100\%$ , υπόκειται σε τριαξονική θλίψη κάτω από αστράγγιστες συνθήκες φόρτισης. Υποθέτοντας ότι το υλικό είναι ισότροπο και συμπεριφέρεται γραμμικώς ελαστικά για μικρές αξονικές παραμορφώσεις  $\varepsilon_1$ , υπολογίστε την τιμή του συντελεστή  $A = \frac{\Delta u - \Delta \sigma_3}{\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3}$ .

**Λύση:** Στην τριαξονική δοκιμή θλίψεως η πλευρική ολική τάση  $\sigma_2 = \sigma_3$  παραμένει σταθερή ( $\sigma_2 = \sigma_3 = ct$ ) κατά τη διάρκεια της δοκιμής,

$$\Delta \sigma_2 = \Delta \sigma_3 = 0$$

επομένως ο συντελεστής Skempton  $A$  ισούται,

$$A = \frac{\Delta u - \Delta \sigma_3}{\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3} = \frac{\Delta u}{\Delta \sigma_1}$$

Υποθέτοντας ότι το υλικό είναι ισότροπο και συμπεριφέρεται γραμμικώς ελαστικά για μικρές αξονικές παραμορφώσεις  $\varepsilon_1$ , ισχύει ο γενικευμένος νόμος του Hooke, ήτοι

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\Delta \sigma'_1 - \nu(\Delta \sigma'_2 + \Delta \sigma'_3))$$

$$\Delta \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\Delta \sigma'_2 - \nu(\Delta \sigma'_1 + \Delta \sigma'_3))$$

$$\Delta \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\Delta \sigma'_3 - \nu(\Delta \sigma'_1 + \Delta \sigma'_2))$$

Σε αστράγγιστες συνθήκες, ο όγκος του δοκίμιου παραμένει σταθερός, ήτοι

$$\Delta \varepsilon_v = 0 \Rightarrow \Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{E}(\Delta \sigma'_1 + \Delta \sigma'_2 + \Delta \sigma'_3)(1 - 2\nu) = 0 \stackrel{\forall \nu}{\Rightarrow}$$

$$\Delta \sigma'_1 + \Delta \sigma'_2 + \Delta \sigma'_3 = 0 \stackrel{\sigma = \sigma' + u}{\Rightarrow} \Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 - 3\Delta u = 0 \stackrel{\Delta \sigma_2 = \Delta \sigma_3 = 0}{\Rightarrow} \Delta \sigma_1 = 3\Delta u$$

Συνεπώς,



$$A = \frac{\Delta u - \Delta \sigma_3}{\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3} = \frac{\Delta u}{\Delta \sigma_1} = 3$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Σχεδιάστε τις διαδρομές των τάσεων (τασικές οδεύσεις) στα επίπεδα  $(p, q)$  και  $(s, t)$  για τις δοκιμές ισότροπης συμπίεσης ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$ ), μονοδιάστατης συμπίεσης ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = K_{nc}\sigma_1$ ), τριαξονικής θλίψης ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$ ), και απλής διάτμησης ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = K_{nc}\sigma_1, \tau$ ) υπό συνθήκες πλήρους στράγγισης σε κανονικώς στερεοποιημένο εδαφικό υλικό. Υποθέστε ότι για κανονικώς στερεοποιημένο υλικό ο συντελεστής πλευρικών ωθήσεων ισούται με  $K_{nc} = 1 - \sin \varphi$ , όπου  $\varphi$  η εσωτερική γωνία τριβής του υλικού. Σχεδιάστε επίσης στα επίπεδα  $(p', q)$  και  $(s', t)$  το κριτήριο αστοχίας τριβής κατά Coulomb ( $\tau = \sigma' \tan \varphi$ ).

**Λύση:** Οι παράμετροι  $(p, q)$  και  $(s, t)$  χρησιμοποιούνται ευρέως στην Εδαφομηχανική προκειμένου να εκφράσουν την ορθή ( $p$  ή  $s$ ) και διατμητική ( $q$  ή  $t$ ) ένταση σε ένα υλικό σημείου του μέσου. Η Σχολή του Massachusetts Institute of Technology χρησιμοποιεί τις παραμέτρους  $(s, t)$  για την μέση ορθή  $s$  και διατμητική τάση  $t$ , ενώ η Σχολή του Cambridge University τις παραμέτρους  $(p, q)$ . Οι ανωτέρω παράμετροι  $p, q, s, t$  εκφράζονται σε όρους κυρίων τάσεων ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ),

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$
$$q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} J_2$$

όπου  $I_1$  είναι η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων  $[\sigma]$  και  $J_2$  η δεύτερη αναλλοίωτος του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων  $[s]$ . Υπενθυμίζεται ότι ο τανυστής των τάσεων  $[\sigma]$  αναλύεται σε δύο μέρη, ένα ισότροπο  $[p]$  και ένα αποκλίνον  $[s]$ , ήτοι  $[\sigma] = [p] + [s]$ . Αναφορικά με τις εκφράσεις των παραμέτρων των τάσεων βάσει της Σχολής του Cambridge University, ισχύει

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$
$$t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Για τον υπολογισμό των διαδρομών των τάσεων και της έκφρασης του κριτηρίου του Coulomb στα επίπεδα  $(p, q)$  και  $(s, t)$  υπολογίζουμε τους λόγους (κλίσεις)  $dq/dp$  και  $dt/ds$  συναρτήσει των τάσεων  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, t$  και της γωνίας εσωτερικής τριβής του υλικού  $\varphi$ .

(Α) Δοκιμή ισότροπης συμπίεσης ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c > 0$ )

Στην δοκιμή ισότροπης συμπίεσης, οι τρεις κύριες τάσεις έχουν ίδιες τιμές σε κάθε χρονική στιγμή. Η μέση ορθή πίεση  $p$  ισούται με,



$$\begin{cases} p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_c \\ s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_c \end{cases}$$

ενώ η αποκλίνουσα τάση με,

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}} = 0 \\ t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0 \end{cases}$$

Συνεπώς η κλίση της τασικής όδευσης (διαδρομής τάσεων) είναι,

$$\begin{cases} \frac{dq}{dp} = \frac{0}{d\sigma_c} = 0 \\ \frac{dt}{ds} = \frac{0}{d\sigma_c} = 0 \end{cases}$$

Επομένως, η τασική όδευση, και στις δύο περιπτώσεις, είναι μία ευθεία γραμμή παράλληλη προς τον άξονα της μέσης ορθής τάσης  $p$  ή  $s$ .

(B) Δοκιμή μονοδιάστατης συμπίεσης ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = K_{nc}\sigma_1 = (1 - \sin \varphi)\sigma_1 > 0$ )

Στην δοκιμή μονοδιάστατης συμπίεσης, υποθέτοντας ότι ο συντελεστής πλευρικών τάσεων  $K = K_{nc} = 1 - \sin \varphi$ , η μέση ορθή πίεση  $p$  ισούται με,

$$\begin{cases} p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 + 2(1 - \sin \varphi)\sigma_1}{3} = \sigma_1 \frac{3 - 2 \sin \varphi}{3} \\ s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_1 \frac{2 - \sin \varphi}{2} \end{cases}$$

ενώ η αποκλίνουσα τάση με,

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}} = \sigma_1 \sin \varphi \\ t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_1 \frac{\sin \varphi}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς η κλίση της τασικής όδευσης (διαδρομής τάσεων) είναι,

$$\begin{cases} \frac{dq}{dp} = \frac{\sin \varphi}{\frac{3 - 2 \sin \varphi}{3}} = \frac{3 \sin \varphi}{3 - 2 \sin \varphi} < \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \\ \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\sin \varphi}{2}}{\frac{2 - \sin \varphi}{2}} = \frac{\sin \varphi}{2 - \sin \varphi} < \sin \varphi \end{cases}$$



Επομένως, οι τασικές οδεύσεις, και στις δύο περιπτώσεις, είναι ευθείες γραμμές με κλίση  $\frac{3 \sin \varphi}{3-2 \sin \varphi}$  και  $\frac{\sin \varphi}{2-\sin \varphi}$  ως προς τον άξονα της μέσης ορθής τάσης  $p$  και  $s$ , αντίστοιχα. Επίσης, η κλίση της ευθείας του κριτηρίου Coulomb στα επίπεδα  $(p, q)$  και  $(s, t)$ , όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, ισούται με  $\frac{6 \sin \varphi}{3-\sin \varphi}$  και  $\sin \varphi$ , αντίστοιχα. Συνεπώς, οι τασικές οδεύσεις στην δοκιμή μονοδιάστατης συμπίεσης δεν μπορούν να τμήσουν την ευθεία του κριτηρίου Coulomb, επομένως το υλικό δεν δύναται να αστοχήσει βάσει του κριτηρίου αυτού στην δοκιμή μονοδιάστατης συμπίεσης.

(Γ) Δοκιμή τριαξονικής συμπίεσης ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c > 0$ )

Στην δοκιμή τριαξονικής συμπίεσης, η πλευρική τάση παραμένει σταθερή ενώ η αξονική τάση αυξάνεται, επομένως η μέση ορθή πίεση  $p$  ισούται με,

$$\begin{cases} p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_c}{3} \\ s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_c}{2} \end{cases}$$

ενώ η αποκλίνουσα τάση με,

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}} = \sigma_1 - \sigma_c \\ t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_c}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς η κλίση της τασικής οδεύσης (διαδρομής τάσεων) είναι,

$$\begin{cases} \frac{dq}{dp} = \frac{d\sigma_1 - d\sigma_c}{\frac{d\sigma_1 + 2d\sigma_c}{3}} = 3 > 3 \sin \varphi \\ \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\sigma_1 - d\sigma_c}{2}}{\frac{d\sigma_1 + d\sigma_c}{2}} = 1 > \sin \varphi \end{cases}$$

Επομένως, οι τασικές οδεύσεις, και στις δύο περιπτώσεις, είναι ευθείες γραμμές με κλίση 3 και 1 ως προς τον άξονα της μέσης ορθής τάσης  $p$  και  $s$ , αντίστοιχα. Βάσει των ανωτέρω, οι τασικές οδεύσεις στην τριαξονική δοκιμή συμπίεσης μπορούν να τμήσουν την ευθεία του κριτηρίου Coulomb, και το υλικό δύναται να αστοχήσει βάσει του αυτού στην τριαξονική δοκιμή θλίψεως.

(Δ) Δοκιμή απλής διάτμησης ( $\sigma_v > \sigma_h = K_{nc}\sigma_v > 0, \tau$ )

Στην δοκιμή απλής διάτμησης, η κατακόρυφη τάση  $\sigma_v$  παραμένει σταθερή, ενώ αυξάνεται η διατμητική τάση  $\tau$ . Υποθέτοντας ότι η πλευρική τάση δίνεται από την σχέση  $\sigma_h = K_{nc}\sigma_v = (1 - \sin \varphi)\sigma_v$ , οι κύριες τάσεις δίνονται μέσω των σχέσεων,



$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_v + \sigma_h)}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2}}{2}$$
$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_v + \sigma_h)}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2}}{2}$$

Η μέση ορθή πίεση  $p$  ισούται με,

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{(\sigma_v + \sigma_h)}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2}}{6} \\ s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_v + \sigma_h \end{array} \right.$$

ενώ η αποκλίνουσα τάση με,

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}} = \sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2} \\ t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sqrt{(\sigma_v - \sigma_h)^2 + 4\tau^2}}{2} \end{array} \right.$$

Συνεπώς η κλίση της τασικής οδεύσης (διαδρομής τάσεων) είναι,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{dp} = \frac{2 \frac{\tau d\tau}{t}}{-\frac{1}{3} \frac{\tau d\tau}{t}} = -6 \\ \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\tau d\tau}{t}}{d\sigma_v + d\sigma_h} = \infty \end{array} \right.$$

Επομένως, οι τασικές οδεύσεις, και στις δύο περιπτώσεις, είναι ευθείες γραμμές με κλίση  $-6$  και  $\infty$  (κάθετη στον άξονα  $p$  ή  $s$ ) ως προς τον άξονα της μέσης ορθής τάσης  $p$  και  $s$ , αντίστοιχα. Βάσει των ανωτέρω, οι τασικές οδεύσεις στην τριαξονική δοκιμή συμπίεσης μπορούν να τμήσουν την ευθεία του κριτηρίου Coulomb, και το υλικό δύναται να αστοχήσει βάσει του αυτού στην τριαξονική δοκιμή θλίψεως.

Το κριτήριο αστοχίας κατά Coulomb εκφράζεται σε άξονες  $(p, q)$  και  $(s, t)$  ως,

$$\frac{q}{p} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}} = 3 \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + 2\sigma_3} = 3 \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_3} + 2} = 3 \frac{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - 1}{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + 2} = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$$
$$\frac{t}{s} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \sin \varphi$$

που σημαίνει ότι πρόκειται για ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση  $\frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$  και  $\sin \varphi$ , αντίστοιχα.



**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Τριαξονική δοκιμή θλίψεως σε αμμώδες υλικό πραγματοποιήθηκε υπό πλευρική ενεργό τάση  $\sigma'_3 = \sigma_c = 500 \text{ kPa}$ . Στην αστοχία η μέγιστη διατμητική τάση μετρήθηκε ίση με  $\tau_{max} = 660 \text{ kPa}$ . Βρείτε την αξονική ενεργό τάση  $\sigma'_1$  στην αστοχία και υπολογίστε την γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού  $\varphi$ . Εκτιμήστε την κλίση του επιπέδου  $\theta$  στο οποίο επέρχεται η αστοχία ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

**Λύση:** Η μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{max} = 660 \text{ kPa}$  ισούται με το διπλάσιο της διαφοράς των κυρίων τάσεων, επομένως, για τις κύριες τάσεις στην αστοχία, ισχύει

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = 2\tau_{max} = 1320 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma'_1 = 1820 \text{ kPa}$$

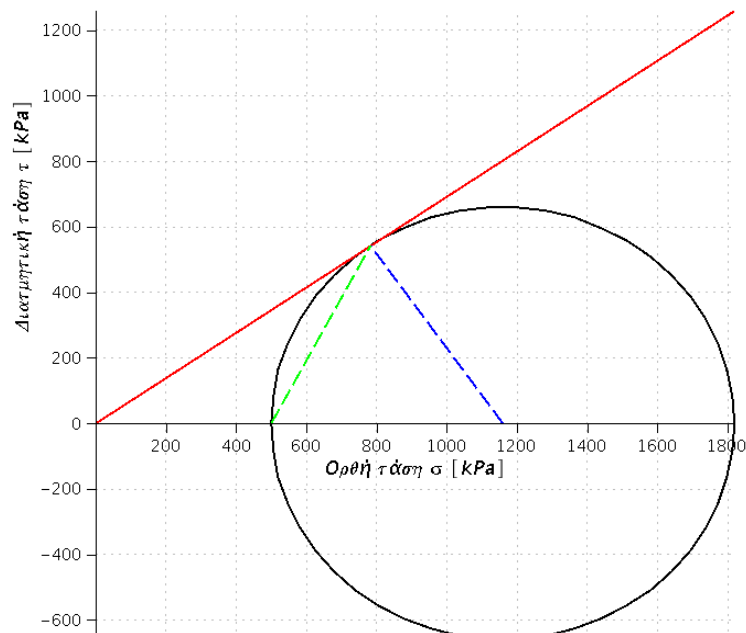
Η γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού  $\varphi$  για μη συνεκτικό υλικό (άμμος) υπολογίζεται από τις κύριες τάσεις στην αστοχία, ήτοι

$$\sin \varphi = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} \Rightarrow \varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1820 - 500}{1820 + 500} \right) = 34.7^\circ$$

Η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει το επίπεδο αστοχίας με το οριζόντιο ισούται με,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = 62.3^\circ$$

Οι παραπάνω γεωμετρικές σχέσεις εμφανίζονται και στο κάτωθι σχήμα, όπου έχουν σχεδιασθεί ο κύκλος αστοχίας του Mohr (μαύρος κύκλος), το κριτήριο αστοχίας κατά Coulomb (κόκκινη γραμμή) και το θεωρητικό επίπεδο αστοχίας (πράσινη γραμμή) του δοκιμίου.





**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Δοκίμιο πυκνής άμμου ελέγχεται σε τριαξονική δοκιμή θλίψεως υπό στραγγιζόμενες συνθήκες. Η αστοχία του δοκιμίου επέρχεται σε επίπεδο που σχηματίζει  $66^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο. Βρείτε την ενεργό πλευρική πίεση που ασκείται στο δοκίμιο εάν κατά την αστοχία μετρήθηκε η διαφορά των κυρίων τάσεων ίση με  $100kPa$ .

**Λύση:** Βάσει της προηγούμενης άσκησης, η διαφορά των κυρίων τάσεων είναι,

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = 100kPa$$

Επίσης, η εσωτερική γωνία τριβής  $\varphi$  υπολογίζεται με βάσει την γωνία που σχηματίζει το επίπεδο αστοχίας με το οριζόντιο,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = 66^\circ \Rightarrow \varphi = 42^\circ$$

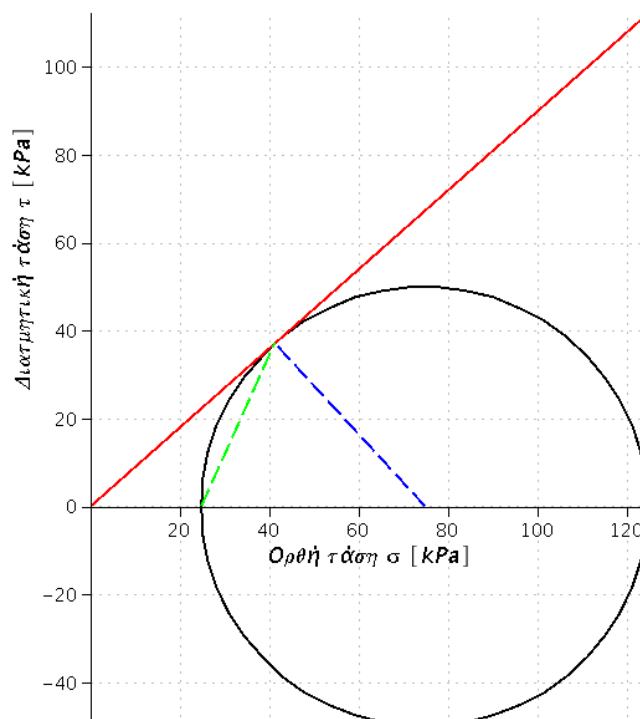
Επίσης, για μη συνεκτικά υλικά, ισχύει στην αστοχία,

$$\sin \varphi = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} \Rightarrow \frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = 5.04$$

Από την επίλυση του ανωτέρω συστήματος των δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους προκύπτουν οι τιμές των κυρίων τάσεων  $\sigma'_1, \sigma'_3$ ,

$$\begin{cases} \sigma'_1 = 124.7kPa \\ \sigma'_3 = 24.7kPa \end{cases}$$

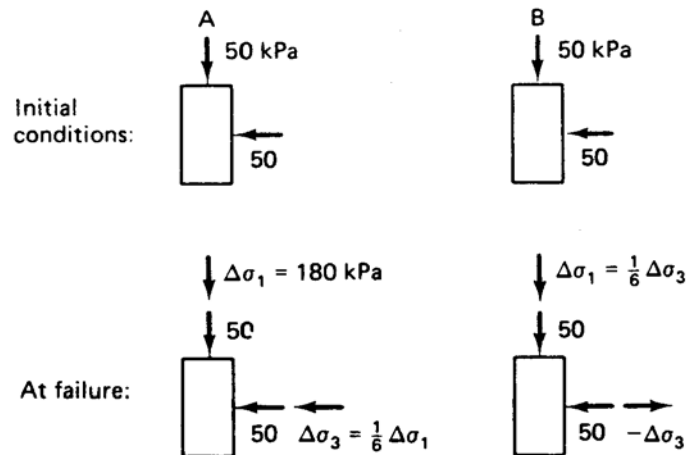
Οι παραπάνω γεωμετρικές σχέσεις εμφανίζονται και στο κάτωθι σχήμα, όπου έχουν σχεδιασθεί ο κύκλος αστοχίας του Mohr (μαύρος κύκλος), το κριτήριο αστοχίας κατά Coulomb (κόκκινη γραμμή) και το θεωρητικό επίπεδο αστοχίας (πράσινη γραμμή) του δοκιμίου.







**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Δύο δοκιμές τριαξονικής θλίψης πραγματοποιούνται σε δύο πανομοιότυπα εδαφικά δοκίμια άμμου. Τα δοκίμια αρχικώς στερεοποιούνται σε ισότροπη πίεση ίση με  $\sigma_c = 50kPa$  και έπειτα φορτίζονται σύμφωνα με το κάτωθι σχήμα. Το δοκίμιο A αστοχεί κάτω από  $\Delta\sigma_1 = 180kPa$ . Σχεδιάστε τους κύκλους του Mohr στην αστοχία για τα δύο δοκίμια, τις τασικές οδεύσεις και υπολογίστε την εσωτερική γωνία τριβής της άμμου.



**Λύση:** Οι τιμές των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο A στην αστοχία είναι,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_c + \Delta\sigma_1 = 50kPa + 180kPa = 230kPa \\ \sigma_3 = \sigma_c + \Delta\sigma_3 = 50kPa + \frac{1}{6}180kPa = 80kPa \end{cases}$$

Για τα μη συνεκτικά υλικά (άμμος) η γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi$  του υλικού υπολογίζεται από τις κύριες τάσεις στην αστοχία, ήτοι

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{230kPa - 80kPa}{230kPa + 80kPa} \Rightarrow \varphi = 28.9^\circ$$

Οι τιμές των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο B στην αστοχία είναι,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_c + \Delta\sigma_1 = 50kPa + \frac{\Delta\sigma_3}{6} \\ \sigma_3 = \sigma_c - \Delta\sigma_3 = 50kPa - \Delta\sigma_3 \end{cases}$$

επομένως,

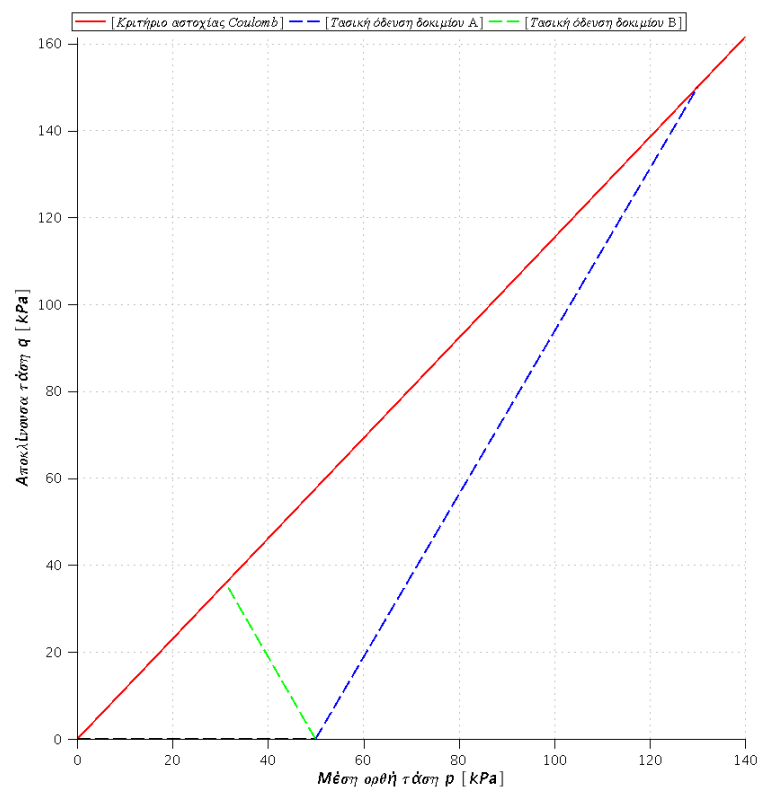
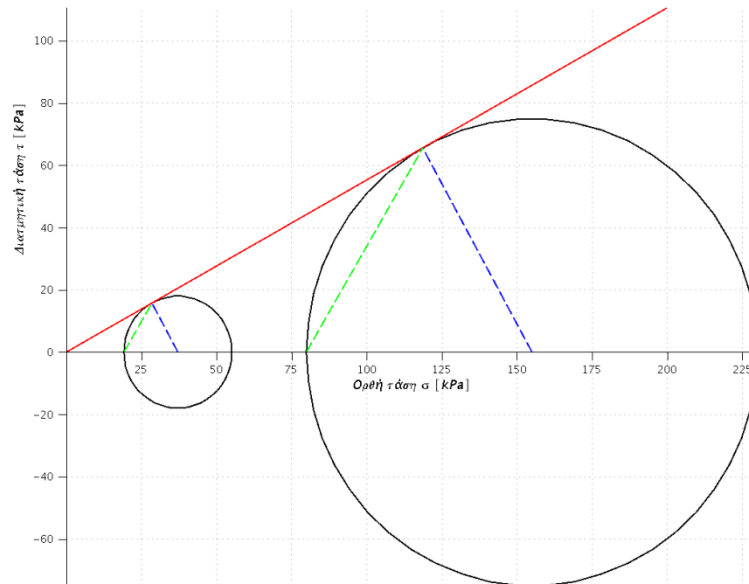
$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{50 + \frac{\Delta\sigma_3}{6} - 50kPa + \Delta\sigma_3}{50kPa + \frac{\Delta\sigma_3}{6} + 50kPa - \Delta\sigma_3} = \frac{7\Delta\sigma_3}{600kPa - 5\Delta\sigma_3} \Rightarrow \Delta\sigma_3 = 30.8kPa$$

Οι τιμές των κυρίων τάσεων για το δοκίμιο B στην αστοχία είναι,

$$\begin{cases} \sigma_1 = 50kPa + \frac{\Delta\sigma_3}{6} = 55.14kPa \\ \sigma_3 = 50kPa - \Delta\sigma_3 = 19.18kPa \end{cases}$$



Οι παραπάνω γεωμετρικές σχέσεις εμφανίζονται και στο κάτωθι σχήμα, όπου έχουν σχεδιασθεί οι δύο κύκλοι αστοχίας του Mohr (μαύροι κύκλοι), το κριτήριο αστοχίας κατά Coulomb (κόκκινη γραμμή) και το θεωρητικό επίπεδο αστοχίας (πράσινη γραμμή) του δοκιμίου. Σε επόμενο σχήμα, σχεδιάζονται οι τασικές οδεύσεις για τα δύο εδαφικά δοκίμια (Δοκίμιο Α μπλε διακεκομμένη γραμμή, δοκίμιο Β πράσινη διακεκομμένη γραμμή).





**ΑΣΚΗΣΗ 7:** Σε συνεκτικό εδαφικό δοκίμιο πραγματοποιείται τριαξονική δοκιμή θλίψεως σε αστράγγιστες συνθήκες. Η ενεργός τάση στερεοποίησης πριν την δοκιμή είναι  $\sigma'_c = 750kPa$ . Στην αστοχία η διαφορά των κυρίων τάσεων μετρήθηκε ίση με  $\sigma'_{1f} - \sigma'_{3f} = 1250kPa$  και η μέγιστη κύρια ενεργός τάση ίση με  $\sigma'_{1f} = 1800kPa$ . Υπολογίστε τον συντελεστή Skempton  $A$  στην αστοχία.

**Λύση:** Οι κύριες τάσεις στην αστοχία είναι,

$$\begin{cases} \sigma'_{1f} = 1800kPa \\ \sigma'_{3f} = 550kPa \end{cases}$$

Η υδατική υπερπίεση των πόρων στην αστοχία ισούται με,

$$\Delta u_f = \sigma'_{3f} - \sigma'_{3,c} = 550kPa - 750kPa = -200kPa$$

Συνεπώς, ο συντελεστής Skempton  $A$  στην αστοχία ισούται με,

$$A = \frac{\Delta u_f - \Delta \sigma_{3,f}}{\Delta \sigma_{1,f} - \Delta \sigma_{3,f}} = \frac{\Delta u_f - \Delta \sigma_{3,f}}{\Delta \sigma'_{1,f} - \Delta \sigma'_{3,f}} = \frac{-200kPa}{1050kPa} = -0.19$$

καθώς η πλευρική τάση  $\sigma_3$  κατά την διάρκεια της τριαξονικής φόρτισης παραμένει σταθερή ( $\Delta \sigma_3 = \Delta \sigma_{3,f} = 0$ ).

**ΑΣΚΗΣΗ 8:** Υποθέστε ότι ένα άλλο δοκίμιο από το ανωτέρω εδαφικό υλικό αναπτύσσει μία μέγιστη ενεργό κύρια τάση στην δοκιμή τριαξονικής θλίψεως σε αστράγγιστες συνθήκες ίση με  $\sigma'_{1f} = 2200kPa$ . Ποιός είναι ο συντελεστής Skempton  $A$ , εάν στην αστοχία μετρήθηκε  $\sigma'_{cf} = 900kPa$ .

**Λύση:** Οι κύριες τάσεις στην αστοχία είναι,

$$\begin{cases} \sigma'_{1f} = 2200kPa \\ \sigma'_{3f} = 900kPa \end{cases}$$

Η υδατική υπερπίεση των πόρων στην αστοχία ισούται με,

$$\Delta u_f = \sigma'_{3f} - \sigma'_{3,c} = 900kPa - 750kPa = 150kPa$$

Συνεπώς, ο συντελεστής Skempton  $A$  στην αστοχία ισούται με,

$$A = \frac{\Delta u_f - \Delta \sigma_{3,f}}{\Delta \sigma_{1,f} - \Delta \sigma_{3,f}} = \frac{\Delta u_f - \Delta \sigma_{3,f}}{\Delta \sigma'_{1,f} - \Delta \sigma'_{3,f}} = \frac{150kPa}{1300kPa} = 0.115$$

καθώς η πλευρική τάση  $\sigma_3$  κατά την διάρκεια της τριαξονικής φόρτισης παραμένει σταθερή ( $\Delta \sigma_3 = \Delta \sigma_{3,f} = 0$ ).



**ΑΣΚΗΣΗ 9:** Δοκίμιο αργίλου στερεοποιείται ισότροπα μέχρι πίεση  $\sigma'_c = 1000kPa$  και έπειτα φορτίζεται τριαξονικά υπό αστράγγιστες συνθήκες. Στην αστοχία μετρήθηκε η διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη κύρια τάση ίση με  $\sigma_{1f} - \sigma_{3f} = 1000kPa$ . Τριαξονικές δοκιμές θλίψης σε στραγγιζόμενες συνθήκες σε ίδια δοκίμια αργίλου έδωσαν γωνία εσωτερικής τριβής ίση με  $\varphi = 22^\circ$ ,  $c = 0$ . Εκτιμήστε την πίεση πόρων στην αστοχία στην αστράγγιστη τριαξονική θλίψη και τον συντελεστή Skempton  $A$ .

**Λύση:** Στην αστοχία, η διαφορά των κυρίων τάσεων είναι,

$$\sigma_{1f} - \sigma_{3f} = \sigma'_{1f} - \sigma'_{3f} = 1000kPa$$

και η γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi$  για μη συνεκτικά υλικά εκφράζεται μέσω,

$$\sin \varphi = \frac{\sigma'_{1f} - \sigma'_{3f}}{\sigma'_{1f} + \sigma'_{3f}} = 0.375$$

Από τις ανωτέρω δύο σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των κυρίων τάσεων στην αστοχία κατά τις αστράγγιστες συνθήκες φόρτισης,

$$\begin{cases} \sigma'_{1,f} = 2669.47kPa \\ \sigma'_{3,f} = 1669.47kPa \end{cases}$$

Η υδατική υπερπίεση των πόρων στην αστοχία ισούται με,

$$\Delta u_f = \sigma'_{3,f} - \sigma'_{3,c} = 1669.47kPa - 1000kPa = 669.47kPa$$

Συνεπώς, ο συντελεστής Skempton  $A$  στην αστοχία ισούται με,

$$A = \frac{\Delta u_f - \Delta \sigma_{3,f}}{\Delta \sigma_{1,f} - \Delta \sigma_{3,f}} = \frac{\Delta u_f - \Delta \sigma_{3,f}}{\Delta \sigma'_{1,f} - \Delta \sigma'_{3,f}} = \frac{669.47kPa}{1000kPa} = 0.669$$

καθώς η πλευρική τάση  $\sigma_3$  κατά την διάρκεια της τριαξονικής φόρτισης παραμένει σταθερή ( $\Delta \sigma_3 = \Delta \sigma_{3,f} = 0$ ).

**ΑΣΚΗΣΗ 10:** Τριαξονικές δοκιμές θλίψεως εκτελούνται σε δοκίμια από ένα μεγάλο αδιατάρακτο δείγμα αργίλου. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω Πίνακα. Οι δοκιμές 1 έως 4 εκτελούνται τόσο αργά ώστε η στράγγιση να πραγματοποιείται ανεμπόδιστα. Στις δοκιμές 5 έως 8 δεν επιτρέπεται στράγγιση. Σχεδιάστε την περιβάλλουσα αστοχίας κατά Mohr για την άργιλο. Προσδιορίστε τις παραμέτρους αντοχής  $\varphi$ ,  $c$  τόσο για σε όρους ολικών όσο και ενεργών τάσεων.

Δοκίμη	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7	No.8
$\sigma_{1f} - \sigma_{3f} [kPa]$	447	167	95	37	331	155	133	119
$\sigma'_{3f} [kPa]$	246	89	36	6				
$\sigma_c [kPa]$					481	231	131	53



**Λύση:** Στην αστοχία, οι τιμές των κυρίων τάσεων έχουν ως ακολούθως για τα δοκίμια της αργίλου,

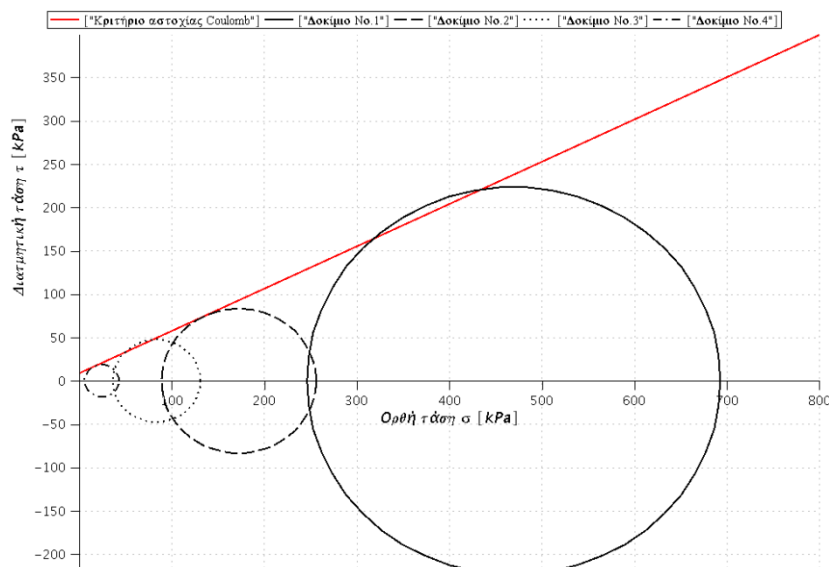
Δοκιμή	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7	No.8
$\sigma_{1f} - \sigma_{3f}$ [kPa]	447	167	95	37	331	155	133	119
$\sigma'_{1f} - \sigma'_{3f}$ [kPa]	447	167	95	37	331	155	133	119
$\sigma'_{3f}$ [kPa]	246	89	36	6				
$\sigma'_{1f}$ [kPa]	693	256	131	43				
$\sigma'_{1f} + \sigma'_{3f}$ [kPa]	939	345	167	49				
$\sigma_c$ [kPa]					481	231	131	53
$\sigma_{1f}$ [kPa]					812	386	264	172
$\sigma_{3f}$ [kPa]					481	231	131	53
$\sigma_{1f} + \sigma_{3f}$ [kPa]					1293	617	395	225

Το κριτήριο αστοχίας κατά Coulomb σε συνεκτικά υλικά με γωνία εσωτερικής τριβής  $\varphi$  και συνεκτικότητα  $c$ , γράφεται ως προς τις κύριες τάσεις αστοχίας,

$$\sigma'_{1f} - \sigma'_{3f} = 2c \cos \varphi + (\sigma'_{1f} + \sigma'_{3f}) \sin \varphi$$

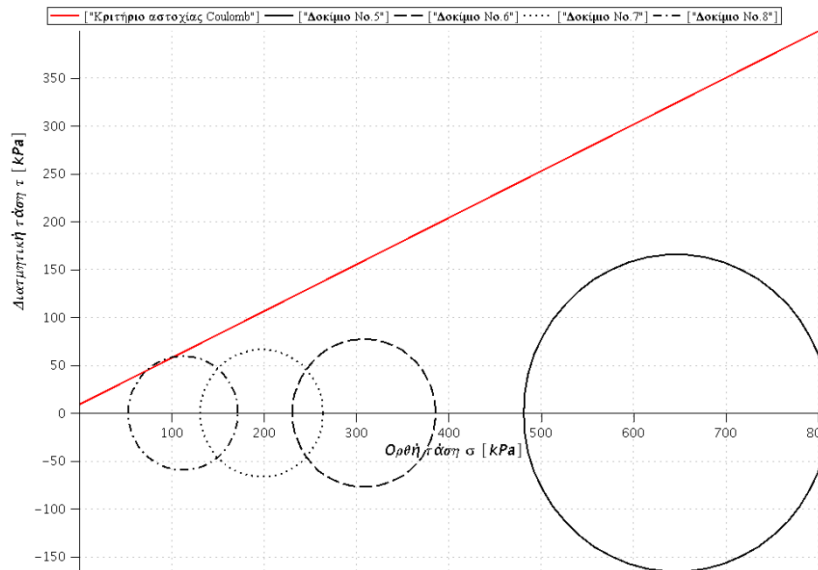
Αναφορικά με τις δοκιμές υπό στραγγιζόμενες συνθήκες φόρτισης (No.1-No.4), οι τιμές των παραμέτρων  $\varphi, c$  που προκύπτουν χρησιμοποιώντας ανά δύο τα αποτελέσματα των δοκιμών είναι,

Δοκιμή	$\varphi^\circ$	$c$ [kPa]
No.1-No.2	28,12	2,48
No.1-No.3	27,13	10,59
No.1-No.4	27,43	8,13
No.2-No.3	23,86	15,01
No.2-No.4	26,05	8,62
No.3-No.4	29,44	7,42
Μέση τιμή $\varphi_m^\circ$	27,01	8,71





Τέλος, παρουσιάζονται οι κύκλοι αστοχίας των αστράγγιστων δοκιμών (No.5-No.8),



**ΑΣΚΗΣΗ 11:** Τα κάτωθι αποτελέσματα προέκυψαν από δοκιμή τριαξονικής θλίψεως σε πλήρως κορεσμένη κανονικώς στερεοποιημένη άργιλο. Η πίεση της κυψέλης διατηρείται σταθερή και ίση με  $\sigma_c = 10kPa$ , ενώ η αξονική τάση  $\sigma_1$  αυξάνεται μέχρι την αστοχία.

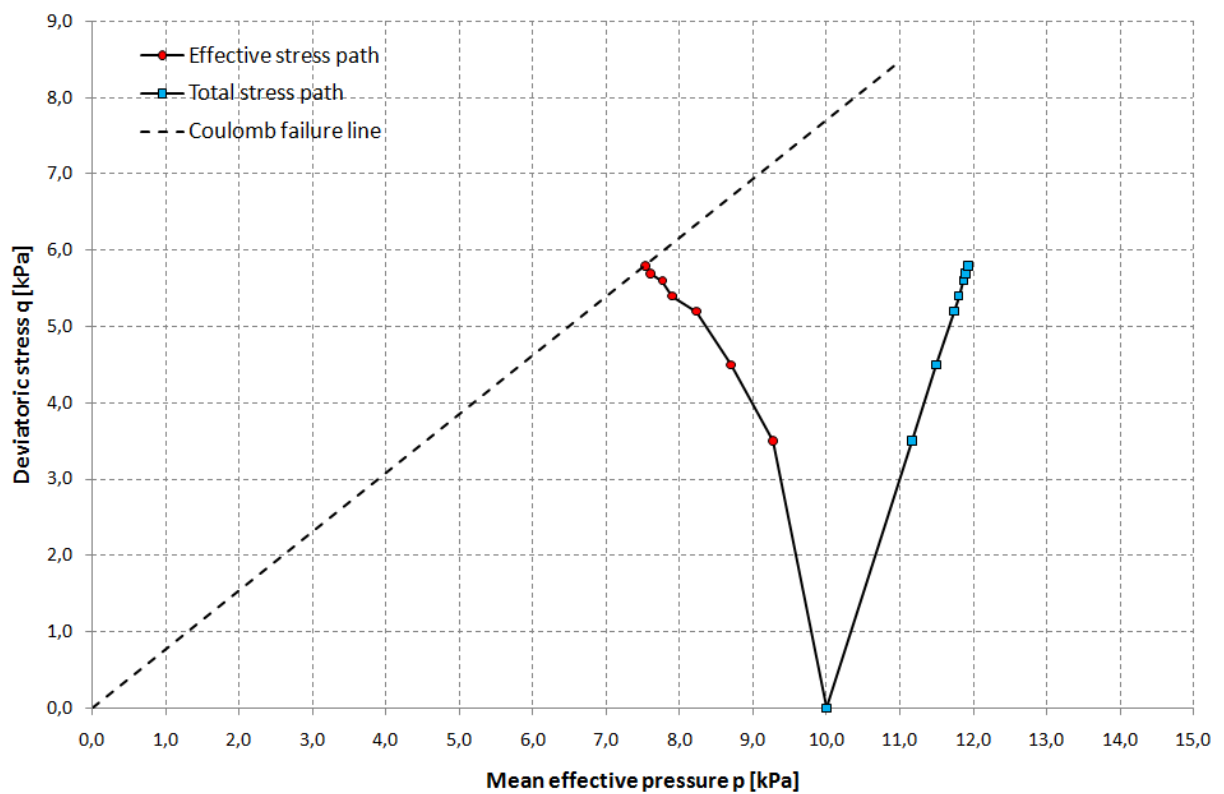
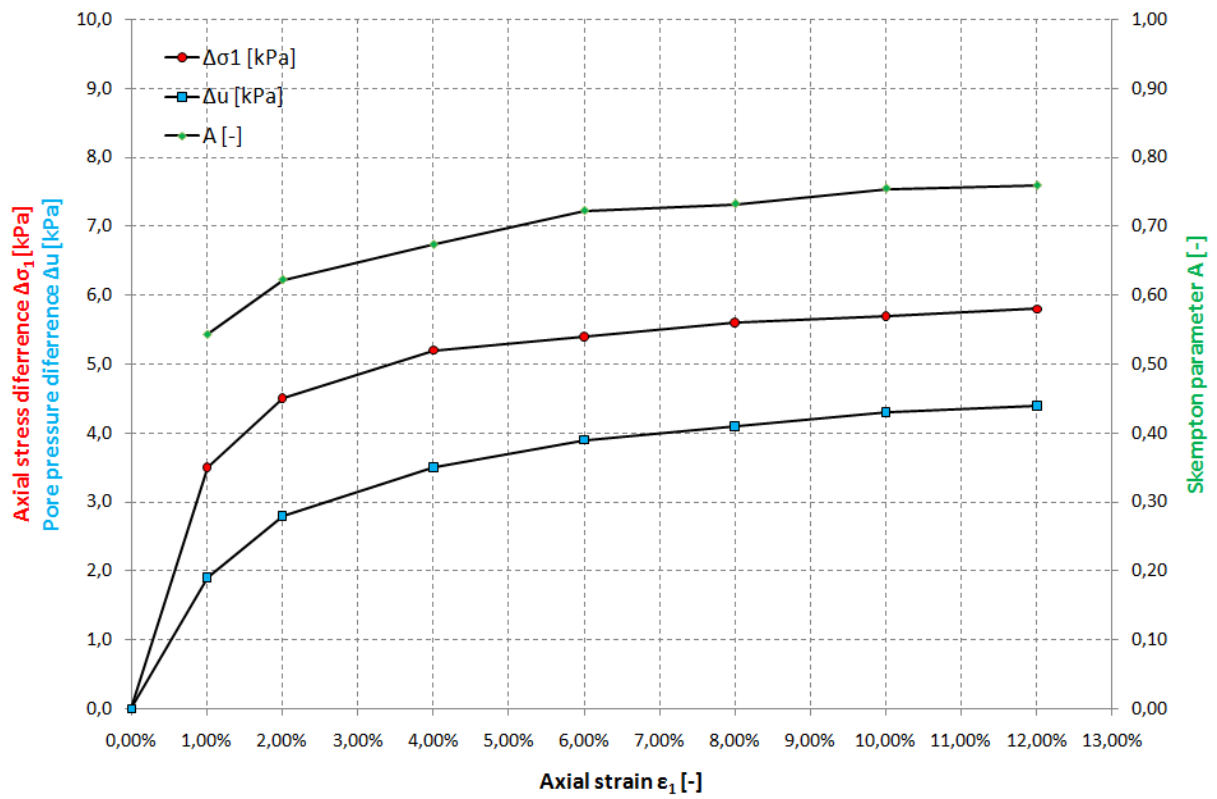
Αξονική τροπή $\varepsilon_1$ [%]	Αξονική τάση $\Delta\sigma_1$ [kPa]	Πίεση πόρων $\Delta u$ [kPa]
0	0	0
1	3.5	1.9
2	4.5	2.8
4	5.2	3.5
6	5.4	3.9
8	5.6	4.1
10	5.7	4.3
12	5.8 (αστοχία)	4.4

Σχεδιάστε τις μεταβολές των κυρίων τάσεων  $\Delta\sigma$ , της πίεσης των πόρων  $\Delta u$  και του συντελεστή Skempton  $A$  συναρτήσεως της αξονικής τροπής  $\varepsilon_1$ . Σχεδιάστε τις ολικές και ενεργές τασικές οδεύσεις και υπολογίστε την γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού, δεχόμενοι ότι  $c = 0$ .

**Λύση:** Στο κάτωθι σχήμα παρουσιάζονται οι μεταβολές της κυρίας τάσης  $\Delta\sigma_1$ , της πίεσης των πόρων  $\Delta u = \Delta\sigma_3$  και του συντελεστή Skempton  $A$  συναρτήσεως της αξονικής τροπής  $\varepsilon_1$ .

Σε επόμενο σχήμα παρουσιάζονται οι ολικές και ενεργές τασικές οδεύσεις. Δεχόμενοι ότι  $c = 0$ , η γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού υπολογίζεται από,

$$\sin \varphi = \frac{\sigma'_{1,f} - \sigma'_{3,f}}{\sigma'_{1,f} + \sigma'_{3,f}} = \frac{11.4 - 5.6}{11.4 + 5.6} = 0.341 \Rightarrow \varphi = 19.9^\circ$$





**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Υδατική ροή διαμέσου του εδάφους (6<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 29 Νοεμβρίου 2010.

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Ένα δοκίμιο μιας μεσόκοκκης πυριτικής άμμου ελέγχεται στη δοκιμή διαπερατότητας σταθερού υδραυλικού φορτίου. Η διάμετρος του δοκιμίου ισούται με  $D = 50mm$  και το μήκος του είναι  $L = 120mm$ . Κάτω από ολικό ύψος  $h = 50cm$ , μετρήθηκε παροχή ίση με  $Q = 113cm^3$  σε χρόνο  $t = 5min$ . Η ξηρά μάζα του δοκιμίου ισούται με  $m_s = 385gr$ . Υπολογίστε το συντελεστή διαπερατότητας κατά Darcy  $k$ , την ταχύτητα ροής  $v$  και την ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$ . Θεωρείστε ότι  $\rho_s = 2.65 \frac{gr}{cm^3}$ .

**Λύση:** Η παροχή  $q$ , ήτοι η ποσότητα του ύδατος που διέρχεται του εδαφικού δοκιμίου σε ορισμένο χρόνο  $t$ , κάτω από συνθήκες μόνιμης υδατικής ροής, με σταθερό υδραυλικό φορτίο, δίνεται από τον εμπειρικό νόμο του Henry Darcy,

$$q = \frac{Q}{t} = v \cdot A = k \cdot i \cdot A = k \cdot \frac{h}{L} \cdot A$$

όπου  $v$  η φαινόμενη ταχύτητα ροής,  $k$  ο συντελεστής διαπερατότητας του υλικού,  $i$  η υδραυλική κλίση και  $A$  το εμβαδόν της διατομής του δοκιμίου κάθετα στη διεύθυνση της υδατικής ροής. Επιλύοντας την ανωτέρω σχέση ως προς  $k$ ,

$$k = \frac{Q}{t \cdot i \cdot A} = \frac{Q}{t \cdot \frac{h}{L} \cdot \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{113cm^3}{5min \cdot \frac{50cm}{120mm} \cdot \frac{\pi 50^2 mm^2}{4}} = 0.276 \frac{cm}{min}$$

Η ταχύτητα ροής  $v$  ισούται με,

$$v = k \cdot i = k \cdot \frac{h}{L} = 0.276 \frac{cm}{min} \cdot \frac{50cm}{120mm} = 1.15 \frac{cm}{min}$$

Η ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$  υπολογίζεται από την σχέση,

$$v_s = \frac{v}{n}$$

όπου  $n$  το πορώδες του εδαφικού δοκιμίου. Η ξηρά πυκνότητα δίνεται από τη σχέση,

$$\rho_d = \frac{\rho_s}{1 + e} = \frac{\rho_s}{1 + \frac{n}{1-n}} \rightarrow$$
$$n = 1 - \frac{\rho_d}{\rho_s} = 1 - \frac{\frac{m_s}{V}}{\rho_s} = 1 - \frac{\frac{m_s}{L \cdot \frac{\pi D^2}{4}}}{\rho_s} = 1 - \frac{\frac{385gr}{120mm \cdot \frac{\pi 50^2 mm^2}{4}}}{2.65 \frac{gr}{cm^3}} = 0.383$$





Επομένως, η ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$  ισούται,

$$v_s = \frac{v}{n} = \frac{1.15 \frac{cm}{min}}{0.383} = 3.00 \frac{cm}{min}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Δοκιμή διαπερατότητας εκτελείται σε δοκίμιο συμπυκνωμένου αμμοχάλικου. Το μήκος του δοκιμίου είναι  $L = 150mm$  και η διάμετρος του  $D = 150mm$ . Σε  $t = 83sec$  η παροχή που μετρήθηκε σε πείραμα εκτίμησης διαπερατότητας με σταθερό υδραυλικό φορτίο ολικού ύψους  $h = 50cm$ , ήταν  $Q = 392cm^3$ . Η ξηρά μάζα του δοκιμίου είναι  $m_d = 5300gr$  και η πυκνότητα της στερεάς φάσης  $\rho_s = 2.68 \frac{gr}{cm^3}$ . Υπολογίστε το συντελεστή διαπερατότητας κατά Darcy  $k$ , την ταχύτητα ροής  $v$  και την ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$ .

**Λύση:** Η παροχή  $q$ , ήτοι η ποσότητα του ύδατος που διέρχεται του εδαφικού δοκιμίου σε ορισμένο χρόνο  $t$ , κάτω από συνθήκες μόνιμης υδατικής ροής, με σταθερό υδραυλικό φορτίο, δίνεται από τον εμπειρικό νόμο του Henry Darcy,

$$q = \frac{Q}{t} = v \cdot A = k \cdot i \cdot A = k \cdot \frac{h}{L} \cdot A$$

όπου  $v$  η φαινόμενη ταχύτητα ροής,  $k$  ο συντελεστής διαπερατότητας του υλικού,  $i$  η υδραυλική κλίση και  $A$  το εμβαδόν της διατομής του δοκιμίου κάθετα στη διεύθυνση της υδατικής ροής. Επιλύοντας την ανωτέρω σχέση ως προς  $k$ ,

$$k = \frac{Q}{t \cdot i \cdot A} = \frac{Q}{t \cdot \frac{h}{L} \cdot \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{392cm^3}{83sec \cdot \frac{50cm}{150mm} \cdot \frac{\pi 150^2 mm^2}{4}} = 0.008 \frac{cm}{sec}$$

Η ταχύτητα ροής  $v$  ισούται με,

$$v = k \cdot i = k \cdot \frac{h}{L} = 0.008 \frac{cm}{sec} \cdot \frac{50cm}{150mm} = 0.0267 \frac{cm}{sec}$$

Η ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$  υπολογίζεται από την σχέση,

$$v_s = \frac{v}{n}$$

όπου  $n$  το πορώδες του εδαφικού δοκιμίου. Η ξηρά πυκνότητα δίνεται από τη σχέση,

$$\rho_d = \frac{\rho_s}{1 + e} = \frac{\rho_s}{1 + \frac{n}{1 - n}} \rightarrow$$

$$n = 1 - \frac{\rho_d}{\rho_s} = 1 - \frac{\frac{m_s}{V}}{\rho_s} = 1 - \frac{\frac{m_s}{L \cdot \frac{\pi D^2}{4}}}{\rho_s} = 1 - \frac{\frac{5300gr}{150mm \cdot \frac{\pi 150^2 mm^2}{4}}}{2.68 \frac{gr}{cm^3}} = 0.254$$



Επομένως, η ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$  ισούται,

$$v_s = \frac{v}{n} = \frac{0.0267 \frac{cm}{sec}}{0.254} = 0.105 \frac{cm}{sec}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Δοκιμή διαπερατότητας μεταβαλλόμενου υδραυλικού φορτίου πρόκειται να πραγματοποιηθεί σε εδαφικό υλικό, του οποίου ο συντελεστής διαπερατότητας  $k$  εκτιμάται ίσος με  $k = 3 \cdot 10^{-7} m/s$ . Ποιά πρέπει να είναι η διάμετρος του σωλήνα  $\alpha$  στο υδροπερατόμετρο, προκειμένου το υδραυλικό φορτίο να μεταβληθεί από  $27.5cm$  σε  $20.0cm$  μέσα σε  $5min$  περίπου. Η διατομή του δοκιμίου είναι  $15cm^2$  και το μήκος του είναι  $15cm$ .

**Λύση:** Η διαπερατότητα  $k$  ενός εδαφικού δοκιμίου, κάτω από συνθήκες μόνιμης υδατικής ροής, με μεταβαλλόμενο υδραυλικό φορτίο, δίνεται μέσω του εμπειρικού νόμου του Henry Darcy,

$$k = \frac{\alpha \cdot L}{A \cdot \Delta t} \cdot \ln \frac{h_1}{h_2}$$

όπου  $\alpha$  η διατομή του σωλήνα του διαπερατόμετρου,  $L$  το μήκος του δοκιμίου διαμέσου του οποίου πραγματοποιείται η υδατική ροή,  $A$  η διατομή του δοκιμίου,  $h_1$  η στάθμη του σωλήνα του υδατοπερατόμετρου σε χρονική στιγμή  $t_1$  και  $h_2$  η στάθμη του σωλήνα του υδατοπερατόμετρου σε χρονική στιγμή  $t_2$ ,  $\Delta t$  η διαφορά των δύο χρονικών στιγμών,  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Επιλύοντας ως προς  $\alpha$ ,

$$\alpha = \frac{k \cdot A \cdot \Delta t}{L \cdot \ln \frac{h_1}{h_2}} = \frac{3 \cdot 10^{-7} m/s \cdot 15cm^2 \cdot 5min}{15cm \cdot \ln \frac{27.5cm}{20.0cm}} = 2.83mm^2$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Ο συντελεστής διαπερατότητας μιας καθαρής άμμου, με δείκτη πόρων  $e = 0.42$ , ισούται με  $k = 4 \cdot 10^{-2} cm/s$ . Εκτιμήστε τον συντελεστή διαπερατότητας της ίδιας άμμου όταν ο δείκτης πόρων ισούται με  $e = 0.58$ .

**Λύση:** Σύμφωνα με τον Taylor (1948), ο συντελεστής διαπερατότητας  $k_2$  ενός εδαφικού στοιχείου σε μία πυκνότητα ( $e_2$ ) μπορεί να εκτιμηθεί, εάν είναι γνωστός ο συντελεστής  $k_1$  σε μία άλλη πυκνότητα ( $e_1$ ), ήτοι:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{C_1 e_1^3}{C_2 e_2^3} \cdot \frac{1 + e_2}{1 + e_1}$$

όπου  $C_1, C_2$  συντελεστές οι οποίοι εξαρτώνται από την δομή του εδάφους και προσδιορίζονται εμπειρικά. Για άμμους μία καλή προσέγγιση είναι  $C_1 \cong C_2$ . Συνεπώς,

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{e_1^3}{e_2^3} \cdot \frac{1 + e_2}{1 + e_1} \rightarrow k_2 = k_1 \cdot \frac{e_2^3}{e_1^3} \cdot \frac{1 + e_1}{1 + e_2} = 4 \cdot 10^{-2} \frac{cm}{sec} \cdot \frac{0.58^3}{0.42^3} \cdot \frac{1 + 0.42}{1 + 0.58} = 9.47 \cdot 10^{-2} \frac{cm}{sec}$$

Συχνά για άμμους, χρησιμοποιείται η σχέση

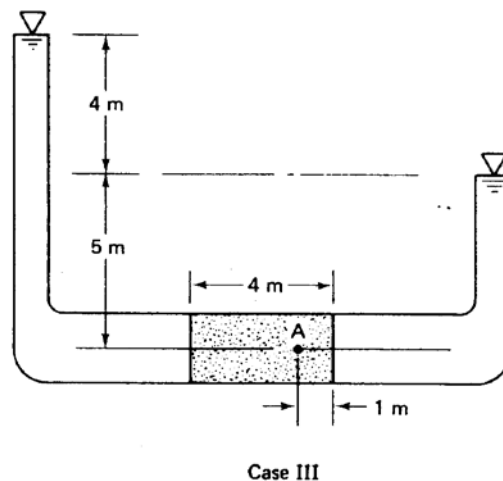
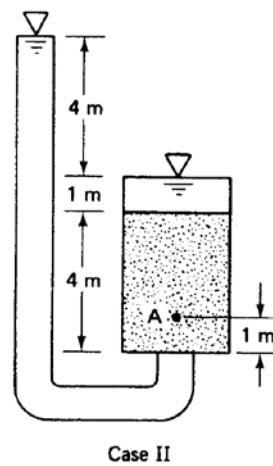
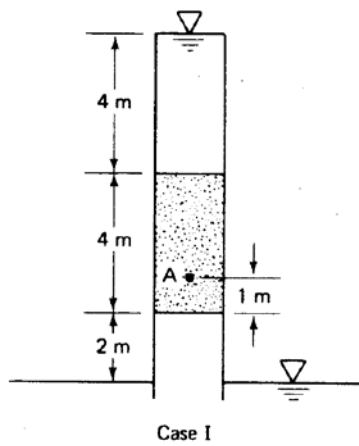


$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{C'_1 e_1^2}{C'_2 e_2^2}$$

όπου  $C'_1 \cong C'_2$ . Συνεπώς,

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{e_1^2}{e_2^2} \rightarrow k_2 = k_1 \cdot \frac{e_2^2}{e_1^2} = 4 \cdot 10^{-2} \frac{cm}{sec} \cdot \frac{0.58^2}{0.42^2} = 7.62 \cdot 10^{-2} \frac{cm}{sec}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Για τις κάτωθι τρεις περιπτώσεις υπολογίστε το πιεζομετρικό ύψος  $u/\gamma_w$ , το γεωμετρικό ύψος  $z$  και το ολικό ύψος  $h$  στην είσοδο, έξοδο και σημείο A του εδαφικού δοκιμίου.



**Λύση:** Το ολικό ύψος  $h$  δίνεται από την κάτωθι σχέση,

$$h = z + \frac{u}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} \approx z + \frac{u}{\gamma_w}$$



όπου  $z$  το γεωμετρικό ύψος,  $u$  η πίεση των πόρων και  $v$  η ταχύτητα ροής. Ως επίπεδο αναφοράς ( $z = 0$ ) δεχόμαστε στην περίπτωση I, τη στάθμη εξόδου, στην περίπτωση II, τη κάτω βάση του δοκιμίου και στην περίπτωση III, τον άξονα του σωλήνα. Οι ποσότητες αυτές παρουσιάζονται στον κάτωθι Πίνακα για την είσοδο, έξοδο και το σημείο A, ήτοι

	Case I	Case II	Case III
	Είσοδος	Είσοδος	Είσοδος
Γεωμετρικό ύψος [m]	10	9	10
Πιεζομετρικό ύψος [m]	0	0	0
Ολικό ύψος [m]	10	9	10
	Σημείο A	Σημείο A	Σημείο A
Γεωμετρικό ύψος [m]	3	1	0
Πιεζομετρικό ύψος [m]	7	4	6
Ολικό ύψος [m]	10	5	6
	Έξοδος	Έξοδος	Έξοδος
Γεωμετρικό ύψος [m]	0	5	5
Πιεζομετρικό ύψος [m]	0	0	0
Ολικό ύψος [m]	0	5	5

**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Για τις ανωτέρω τρεις περιπτώσεις υπολογίστε την ταχύτητα ροής  $v$ , την ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$ , και τη δύναμη διηθήσεως  $j = \rho_w g i = \gamma_w i$  ανά μονάδα όγκου, στην περίπτωση που (α) η διαπερατότητα είναι  $k = 0.1 \text{ cm/s}$  και το πορώδες  $n = 0.5$  και (β) η διαπερατότητα  $k = 0.001 \text{ cm/s}$  και ο δείκτης πόρων  $e = 0.67$ .

**Λύση:** Η ταχύτητα ροής  $v$  κάτω από συνθήκες μόνιμης υδατικής ροής, με σταθερό υδραυλικό φορτίο, δίνεται από τον εμπειρικό νόμο του Henry Darcy,

$$v = k \cdot i = k \cdot \frac{h}{L}$$

όπου  $k$  ο συντελεστής διαπερατότητας του υλικού και  $i$  η υδραυλική. Η υδραυλική κλίση για τις περιπτώσεις I, II και III ισούται,

$$i_1 = \frac{h}{L} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$i_2 = \frac{h}{L} = \frac{4}{4} = 1.0$$

$$i_3 = \frac{h}{L} = \frac{4}{4} = 1.0$$

Η δύναμη διηθήσεως ισούται με

$$j = \gamma_w i$$

Η ταχύτητα διηθήσεως  $v_s$  δίνεται από την σχέση,



$$v_s = \frac{v}{n}$$

Συνεπώς, για την περίπτωση (α)

$$v_1 = k \cdot i_1 = 0.1 \frac{cm}{sec} \cdot 2.5 = 0.25 \frac{cm}{sec}, v_2 = k \cdot i_2 = 0.1 \frac{cm}{sec} \cdot 1.0 = 0.10 \frac{cm}{sec} = v_3$$

$$v_{s1} = \frac{v_1}{n} = \frac{0.25 \frac{cm}{sec}}{0.50} = 0.50 \frac{cm}{sec}, v_{s2} = \frac{v_2}{n} = \frac{0.10 \frac{cm}{sec}}{0.50} = 0.20 \frac{cm}{sec} = v_{s3}$$

$$j_1 = \gamma_w i_1 = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 2.5 = 25 \frac{kN}{m^3}, j_2 = \gamma_w i_2 = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 0.1 = 1.0 \frac{kN}{m^3} = j_3$$

Για την περίπτωση (β)

$$n = \frac{e}{1 + e} = \frac{0.67}{1 + 0.67} = 0.401$$

$$v_1 = k \cdot i_1 = 0.001 \frac{cm}{sec} \cdot 2.5 = 0.0025 \frac{cm}{sec}, v_2 = k \cdot i_2 = 0.001 \frac{cm}{sec} \cdot 1.0 = 0.001 \frac{cm}{sec} = v_3$$

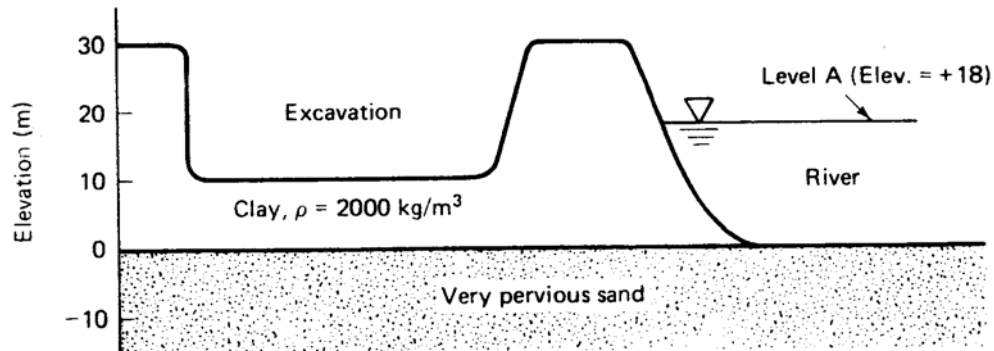
$$v_{s1} = \frac{v_1}{n} = \frac{0.0025 \frac{cm}{sec}}{0.401} = 0.0062 \frac{cm}{sec}, v_{s2} = \frac{v_2}{n} = \frac{0.001 \frac{cm}{sec}}{0.401} = 0.0025 \frac{cm}{sec} = v_{s3}$$

$$j_1 = \gamma_w i_1 = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 2.5 = 25 \frac{kN}{m^3}, j_2 = \gamma_w i_2 = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 0.1 = 1.0 \frac{kN}{m^3} = j_3$$

**ΑΣΚΗΣΗ 7:** Μπορεί ένας άνθρωπος να βυθιστεί (πιηθεί) σε ρευστοποιημένη άμμο ("κινούμενη" άμμος), όπως συνήθως παρουσιάζεται στις κινηματογραφικές ταινίες;

**Λύση:** Η ρευστοποιημένη άμμος έχει ειδικό βάρος ίσο με αυτό της πλήρους κορεσμένης ύδατος άμμου, ήτοι  $\gamma_s \approx 20 \frac{kN}{m^3}$ . Το ανθρώπινο σώμα έχει ειδικό βάρος  $\gamma_h \approx 10 \frac{kN}{m^3}$ , αφού μπορεί και επιπλέει στο θαλασσινό νερό. Από την αρχή του Αρχιμήδη, όταν ένα σώμα έχει ειδικό βάρος μικρότερο αυτό του ρευστού μέσα στο οποίο βρίσκεται, τότε αυτό επιπλέει στο ρευστό. Συνεπώς, αφού  $\gamma_h < \gamma_s$ , ένας άνθρωπος δεν μπορεί να βυθιστεί στην ρευστή άμμο (εκτός και αν πιεί πολύ από αυτήν...).

**ΑΣΚΗΣΗ 8:** Μία εκσκαφή πρόκειται να πραγματοποιηθεί όπως στο παρακάτω σχήμα. Εάν η στάθμη του ποταμού βρίσκεται στο επίπεδο Α, ποιός είναι ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ρευστοποίησης της άμμου; Αμελείστε οποιοσδήποτε διατμητικές τάσεις. Μέχρι ποια στάθμη μπορεί να ανέλθει η στάθμη του ποταμού προτού δημιουργηθούν συνθήκες ρευστής άμμου;



**Λύση:** Η πίεση πόρων της διαπερατής στρώσεως άμμου στον πυθμένα του ποταμού ( $z = 0$ ) ισούται με το γινόμενο του ειδικού βάρους του ύδατος επί τη στάθμη του ποταμού, ήτοι

$$u = \gamma_w h = 10 \frac{kN}{m^3} \cdot 18m = 180kPa$$

Η ολική τάση στο βάθος ( $z = 0$ ) της αμμώδους διαπερατής στρώσης ισούται με,

$$\sigma = \gamma_c h_c = 20 \frac{kN}{m^3} \cdot 10m = 200kPa$$

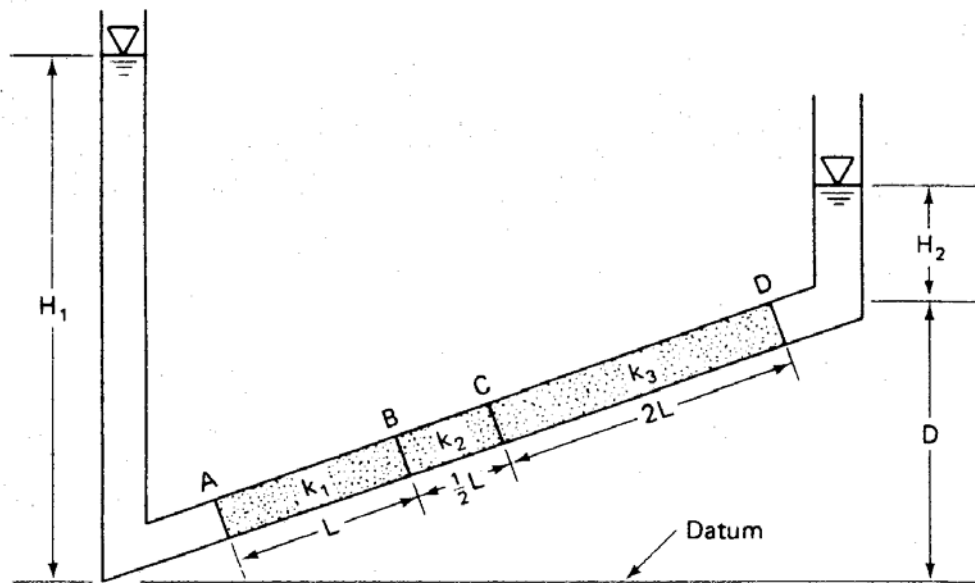
Αμελώντας οποιεσδήποτε διατμητικές τάσεις που μπορούν να εμφανιστούν, ο συντελεστής ασφάλειας έναντι ρευστοποίησης ισούται,

$$SF = \frac{\sigma}{u} = \frac{200kPa}{180kPa} = 1.11$$

Η μέγιστη στάθμη στην οποία μπορεί να ανέλθει ο ποταμός χωρίς να επέλθει ρευστοποίηση της αμμώδους στρώσης είναι,

$$\sigma' = 0 \rightarrow \sigma = u = h_{max} \gamma_w \rightarrow h_{max} = \frac{\sigma}{\gamma_w} = \frac{200kPa}{10 \frac{kN}{m^3}} = 20m$$

**ΑΣΚΗΣΗ 9:** Στο κεκλιμένο υδατοπερατόμετρο του κάτωθι σχήματος έχουν τοποθετηθεί τρία εδαφικά δοκίμια με διαφορετικούς συντελεστές διαπερατότητας. Δώστε τις εκφράσεις για τα ολικά ύψη  $h$  στα σημεία A, B, C και D συναρτήσει των συντελεστών διαπερατότητας  $k_1, k_2, k_3$  και διαστάσεων  $H_1, H_2, D, L$ , στην περίπτωση που (α)  $k_1 = k_2 = k_3$ , και (β)  $3k_1 = k_2 = 2k_3$ .



**Λύση:** Βάσει της Άσκησης 10, η παροχή  $Q$  κατά μήκος του σωλήνα και μεταξύ των σχηματισμών παραμένει σταθερή ( $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ ) καθώς και το άθροισμα της πτώσης του υδραυλικού ύψους στα εκάστοτε δοκίμια ισούται με το σύνολο της πτώσης του υδραυλικού ύψους, ήτοι,

$$\frac{Q}{ki} = \frac{Q_1}{k_1 i_1} = \frac{Q_2}{k_2 i_2} = \frac{Q_3}{k_3 i_3} \Rightarrow ki = k_1 i_1 = k_2 i_2 = k_3 i_3$$

και

$$H_1 - H_2 - D = i3.5L = i_1 L + i_2 \frac{1}{2}L + i_3 2L \Rightarrow$$

$$i3.5L = \frac{ki}{k_1}L + \frac{ki}{k_2} \frac{1}{2}L + \frac{ki}{k_3} 2L \Rightarrow k = \frac{7k_1 k_2 k_3}{4k_1 k_2 + 2k_2 k_3 + k_1 k_3}$$

Στην περίπτωση (α), όπου  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ , ισχύει  $i_1 = i_2 = i_3 = i = \frac{H_1 - H_2 - D}{3.5L}$  και τα ολικά ύψη  $h$  υπολογίζονται,

$$h_A = H_1$$

$$h_B = H_1 - i_1 L = H_1 - \frac{H_1 - H_2 - D}{3.5} = \frac{2.5}{3.5} H_1 + \frac{1}{3.5} (H_2 + D)$$

$$h_C = h_B - i_2 \frac{1}{2}L = \frac{2.5}{3.5} H_1 + \frac{1}{3.5} (H_2 + D) - \frac{H_1 - H_2 - D}{7} = \frac{4}{7} H_1 + \frac{3}{7} (H_2 + D)$$

$$h_D = h_C - i_3 2L = \frac{4}{7} H_1 + \frac{3}{7} (H_2 + D) - \frac{4}{7} (H_1 - H_2 - D) = H_2 + D$$

Στην περίπτωση (β), όπου  $3k_1 = k_2 = 2k_3$ , ισχύει



$$k = \frac{7k_1k_2k_3}{4k_1k_2 + 2k_2k_3 + k_1k_3} = \frac{63}{45}k_1 = \frac{21}{45}k_2 = \frac{42}{45}k_3$$

και τα ολικά ύψη  $h$  υπολογίζονται,

$$H_1 - H_2 - D = i_1L + i_2\frac{1}{2}L + i_32L = i_1L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{k_1}{k_2} + 2\frac{k_1}{k_3}\right) \Rightarrow i_1 = \frac{6}{15}\frac{H_1 - H_2 - D}{L}$$

$$H_1 - H_2 - D = i_1L + i_2\frac{1}{2}L + i_32L = i_2L\left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{1}{2} + 2\frac{k_2}{k_3}\right) \Rightarrow i_2 = \frac{2}{15}\frac{H_1 - H_2 - D}{L}$$

$$H_1 - H_2 - D = i_1L + i_2\frac{1}{2}L + i_32L = i_3L\left(\frac{k_3}{k_1} + \frac{1}{2}\frac{k_3}{k_2} + 2\right) \Rightarrow i_3 = \frac{4}{15}\frac{H_1 - H_2 - D}{L}$$

Τα ολικά ύψη  $h$  στα σημεία A, B, C & D είναι:

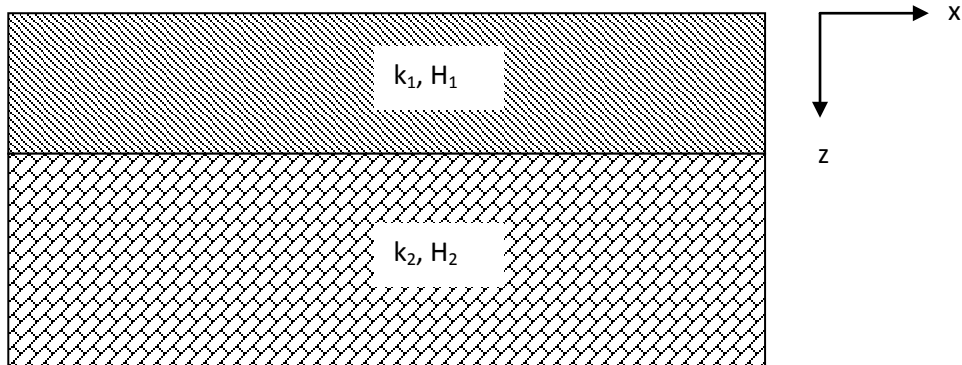
$$h_A = H_1$$

$$h_B = H_1 - i_1L = H_1 - \frac{6}{15}(H_1 - H_2 - D) = \frac{9}{15}H_1 + \frac{6}{15}(H_2 - D)$$

$$h_C = h_B - i_2\frac{1}{2}L = \frac{9}{15}H_1 + \frac{6}{15}(H_2 - D) - \frac{1}{15}(H_1 - H_2 - D) = \frac{8}{15}H_1 + \frac{7}{15}(H_2 - D)$$

$$h_D = h_C - i_32L = \frac{8}{15}H_1 + \frac{7}{15}(H_2 - D) - \frac{8}{15}(H_1 - H_2 - D) = H_2 + D$$

**ΑΣΚΗΣΗ 10:** Υπολογίστε το μέσο συντελεστή διαπερατότητας ενός δίστρωτου εδαφικού σχηματισμού με συντελεστές διαπερατότητας  $k_1, k_2$  και αντίστοιχα πάχη  $H_1, H_2$ , για υδατική ροή (α) παράλληλα (κατά  $x$ ) με τις δύο στρώσεις, (β) κάθετα (κατά  $z$ ) προς τις στρώσεις.



**Λύση:** Στην περίπτωση (α), κατά την οποία η υδατική ροή πραγματοποιείται παράλληλα προς τη στρωματογραφία, η ολική παροχή  $Q$  ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παροχών  $Q_1, Q_2$ , ήτοι,

$$Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow k \cdot i \cdot H = k_1 \cdot i \cdot H_1 + k_2 \cdot i \cdot H_2$$

όπου  $i$  είναι η κοινή υδραυλική κλίση για τα δύο στρώματα και  $H = H_1 + H_2$ , άρα





$$k = \frac{k_1 \cdot H_1 + k_2 \cdot H_2}{H_1 + H_2}$$

όπου  $k$  ο συνολικός συντελεστής διαπερατότητας των δύο εδαφικών στρωμάτων.

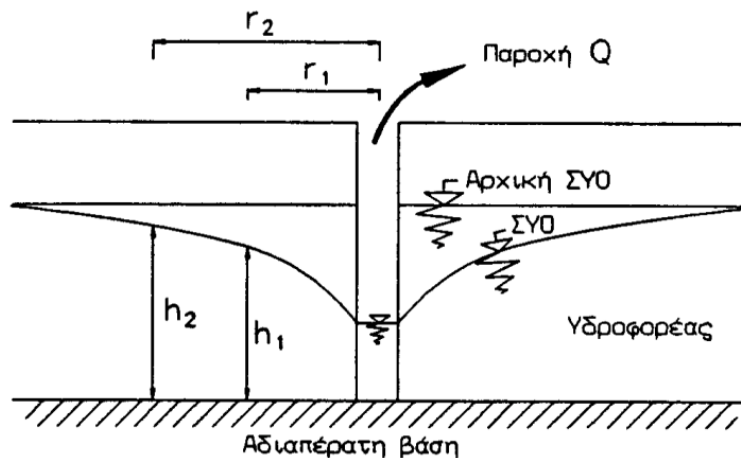
Στην περίπτωση (β), κατά την οποία η υδατική ροή πραγματοποιείται κάθετα προς τα δύο εδαφικά στρώματα, η παροχή  $Q$  παραμένει σταθερή και ίση με την παροχή στα δύο αυτά στρώματα, ήτοι,

$$Q = Q_1 = Q_2 \rightarrow k \cdot i \cdot H = k_1 \cdot i_1 \cdot H_1 = k_2 \cdot i_2 \cdot H_2$$

όπου  $i_1, i_2$  είναι οι υδραυλικές κλίσεις στα δύο στρώματα και  $H = H_1 + H_2$ . Η ολική πτώση της υδραυλικής κλίσης  $i$  είναι το άθροισμα των δύο επιμέρους πτώσεων των υδραυλικών κλίσεων, ήτοι,

$$i \cdot H = i_1 \cdot H_1 + i_2 \cdot H_2 \rightarrow \frac{Q}{k} = \frac{Q}{k_1} + \frac{Q}{k_2} \rightarrow k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 11:** Δώστε την έκφραση για την παροχή ύδατος  $Q$ , αντλούμενο από κατακόρυφο κυλινδρικό φρέαρ ακτίνας  $R$ , σε οριζόντιο εδαφικό στρώμα πάχους  $H$  και διαπερατότητας  $k$ , το οποίο υπέρκειται αδιαπέρατης βάσης, όπως στο κάτωθι σχήμα, (Καββαδάς, Σεπτέμβριος 2006).



**Λύση:** Η κατασκευή αντλητικού φρέατος σε έναν υδροφορέα έχει ως αποτέλεσμα τον καταβιβασμό του υπόγειου υδροφόρου ορίζοντα από την αρχική στάθμη στην τελική. Ο καταβιβασμός αυτός διαρκεί ορισμένο χρόνο, ο οποίος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του υδροφορέα. Η ταπείνωση της στάθμης του υδροφόρου ορίζοντα μειώνεται με την απόσταση από το φρέαρ, αυξάνει σε όλες τις θέσεις με την πάροδο του χρόνου και προκαλεί μία βαθμίδα επέκτασης της ζώνης γύρω από το φρέαρ. Στην περίπτωση που ο υδροφορέας έχει μεγάλη έκταση, η βαθμιαία ταπείνωση της στάθμης εξελίσσεται (θεωρητικώς για άπειρο χρόνο) με διαρκώς μειούμενο ρυθμό. Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι μετά από κάποιο χρόνο επιτυγχάνεται πρακτικώς κατάσταση μόνιμης ροής προς το φρέαρ, ήτοι η ταπείνωση της στάθμης του υδροφόρου ορίζοντα και η επέκταση της ζώνης επιρροής δεν μεταβάλλονται.



Όταν επιτευχθεί πρακτικώς κατάσταση μόνιμης ροής, η παροχή άντλησης από το φρέαρ είναι ίση με την παροχή που διηθείται διαμέσου οποιασδήποτε κυλινδρικής επιφάνειας σε απόσταση  $r$  από τον άξονα του φρέατος, η οποία κατά το νόμο Darcy θα ισούται με,

$$Q = k \cdot i \cdot A$$

όπου  $k$  ο συντελεστής διαπερατότητας του εδαφικού σχηματισμού,  $i$  η υδραυλική κλίση για ροή στην οριζόντια κατεύθυνση και  $A$  το εμβαδόν της κατακόρυφης επιφάνειας διήθησης.

Στην περίπτωση που η ταπείνωση του υπόγειου υδροφόρου ορίζοντα είναι μικρή σε σχέση με το συνολικό πάχος της διαπερατής ζώνης, η διεύθυνση της διήθησης προς το φρέαρ είναι περίπου οριζόντια, δηλαδή η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ροής  $v_z$  είναι μικρή σε σχέση με την οριζόντια  $v$ . Η παραδοχή αυτή είναι γνωστή ως παραδοχή Dupuit, και συνεπώς

$$v_z = 0 \rightarrow i_z = \frac{dh}{dz} = 0$$

Επομένως η πιεζομετρική στάθμη του υπόγειου υδροφόρου ορίζοντα  $h$  θα εκφράζεται από την ελεύθερη στάθμη του, ήτοι

$$i = \frac{dh}{dr}$$

Το εμβαδόν της κατακόρυφης επιφάνειας διήθησης  $A$  σε απόσταση  $r$  από τον άξονα του φρέατος είναι

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

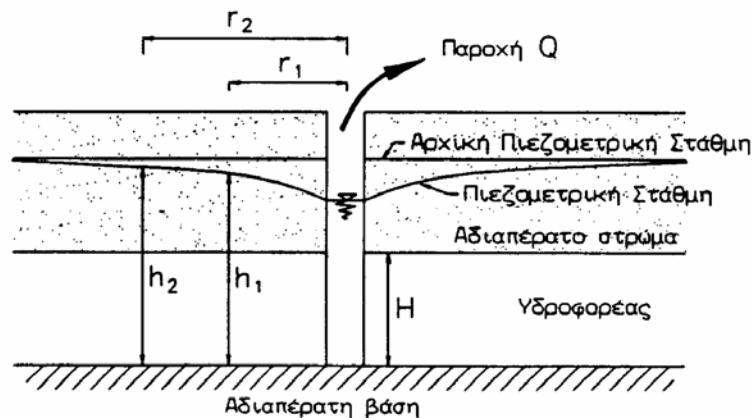
Συνεπώς, συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις έχουμε,

$$Q = k \cdot \frac{dh}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{Q} h \cdot dh \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{Q} h \cdot dh \rightarrow$$

$$\ln r_2 - \ln r_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{Q} \cdot \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\pi \cdot k \cdot (h_2^2 - h_1^2)}{Q} \rightarrow$$

$$Q = \frac{\pi \cdot k \cdot (h_2^2 - h_1^2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, (r_2 > r_1 > R)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 12:** Δώστε την έκφραση για την παροχή ύδατος  $Q$ , αντλούμενο από κατακόρυφο κυλινδρικό φρέαρ ακτίνας  $R$ , σε οριζόντιο εδαφικό στρώμα πάχους  $H$  και διαπερατότητας  $k$ , το οποίο υπέρκειται και υπόκειται αδιαπέρατου στρώματος, όπως στο κάτωθι σχήμα, (Καββαδάς, Σεπτέμβριος 2006).



**Λύση:** Ομοίως με την ανωτέρω άσκηση, στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια διηθήσεως θα δίνεται από τη σχέση,

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H$$

όπου  $H$  το πάχος του υδροφορέα. Συνεπώς, το εμβαδόν της κατακόρυφης επιφάνειας διήθησης  $A$  σε απόσταση  $r$  από τον άξονα του φρέατος είναι

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H$$

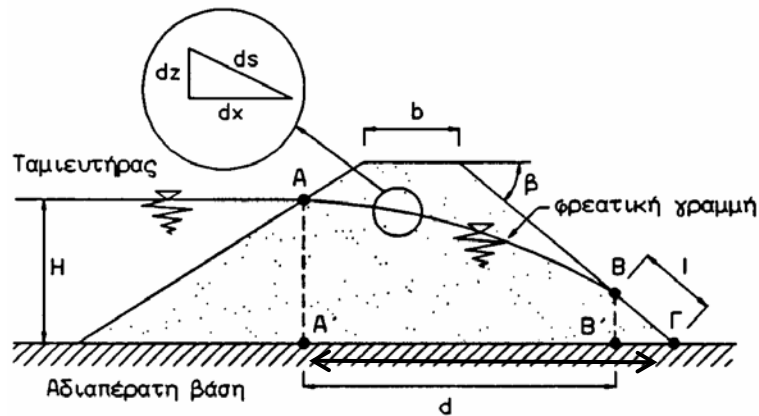
Επομένως έχουμε, βάσει της προηγούμενης άσκησης,

$$Q = k \cdot \frac{dh}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H \rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{Q} \cdot H \cdot dh \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{Q} \cdot H \cdot dh \rightarrow$$

$$\ln r_2 - \ln r_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{Q} \cdot H \cdot (h_2 - h_1) \rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot H \cdot (h_2 - h_1)}{Q} \rightarrow$$

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot H \cdot (h_2 - h_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, (r_2 > r_1 > R)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 13:** Υπολογίστε την παροχή διηθήσεως  $Q$  διαμέσου του χωμάτινου φράγματος, το οποίο έχει συντελεστή διαπερατότητας  $k$  και υπέρκειται αδιαπέρατου στρώματος, όπως στο κάτωθι σχήμα, (Καββαδάς, Σεπτέμβριος 2006).



**Λύση:** Όμοια με τα προηγούμενα, γίνεται η παραδοχή της μόνιμης ροής και αυτή του Dupuit, αναφορικά με την υδραυλική κλίση, η οποία θα δίνεται από την κλίση της φρεατικής γραμμής,

$$i = \frac{dz}{dx}$$

Ο Arthur Casagrande (1932) τροποποιεί την σχέση αυτή για τον υπολογισμό της υδραυλικής κλίσης, προκειμένου να ληφθεί υπ' όψιν η έντονη κλίση της, ήτοι,

$$i = \frac{dz}{ds}$$

δηλαδή γίνεται η σιωπηρή υπόθεση ότι η κίνηση του ύδατος πραγματοποιείται κατά μήκος του κεκλιμένου στοιχείου  $ds$  αντί του οριζοντίου  $dx$ . Επομένως, η κίνηση διαμέσου του φράγματος δεν θα είναι οριζόντια, όπως θεωρεί ο Dupuit, αλλά κεκλιμένη.

Στην περιοχή κατόντη του πόδα του φράγματος (τμήμα ΒΓ) η φρεατική γραμμή ταυτίζεται με την επιφάνεια του πρανούς, σε μήκος  $l = (B\Gamma)$ . Συνεπώς ισχύει,

$$i = \frac{dz}{ds} = \sin \beta$$

Η παροχή που διηθείται, ισούται με,

$$Q = k \cdot i \cdot (BB') = k \cdot \sin \beta \cdot l \cdot \sin \beta = k \cdot l \cdot (\sin \beta)^2$$

Η παροχή αυτή όμως ισούται με την παροχή σε οποιαδήποτε κατακόρυφη επιφάνεια ύψους  $z$  και υδραυλικής κλίσης  $i$ , λόγω της μόνιμης ροής, άρα,

$$k \cdot l \cdot (\sin \beta)^2 = k \cdot i \cdot z = k \cdot \frac{dz}{ds} \cdot z \rightarrow z \cdot dz = l \cdot (\sin \beta)^2 \cdot ds \rightarrow$$
$$\int_{l \cdot \sin \beta}^H z \cdot dz = \int_{(B\Gamma)}^{(AB\Gamma)} l \cdot (\sin \beta)^2 \cdot ds \rightarrow \frac{H^2 - (l \cdot \sin \beta)^2}{2} = (AB) \cdot l \cdot (\sin \beta)^2$$



Θεωρώντας ότι το μήκος της φρεατικής γραμμής ( $AB$ ) είναι περίπου ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ( $AB$ ) έχουμε,

$$(AB) \cong \sqrt{H^2 + d^2} - l$$

επομένως,

$$\frac{H^2 - (l \cdot \sin \beta)^2}{2} = (\sqrt{H^2 + d^2} - l) \cdot l \cdot (\sin \beta)^2 \rightarrow$$

$$(\sin \beta)^2 \cdot l^2 - 2 \cdot (\sin \beta)^2 \cdot \sqrt{H^2 + d^2} \cdot l + H^2 = 0$$

Η επίλυση της ανωτέρω δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνει το μήκος  $l$ ,

$$l = \sqrt{H^2 + d^2} - \sqrt{d^2 - (H \cdot \cot \beta)^2}$$



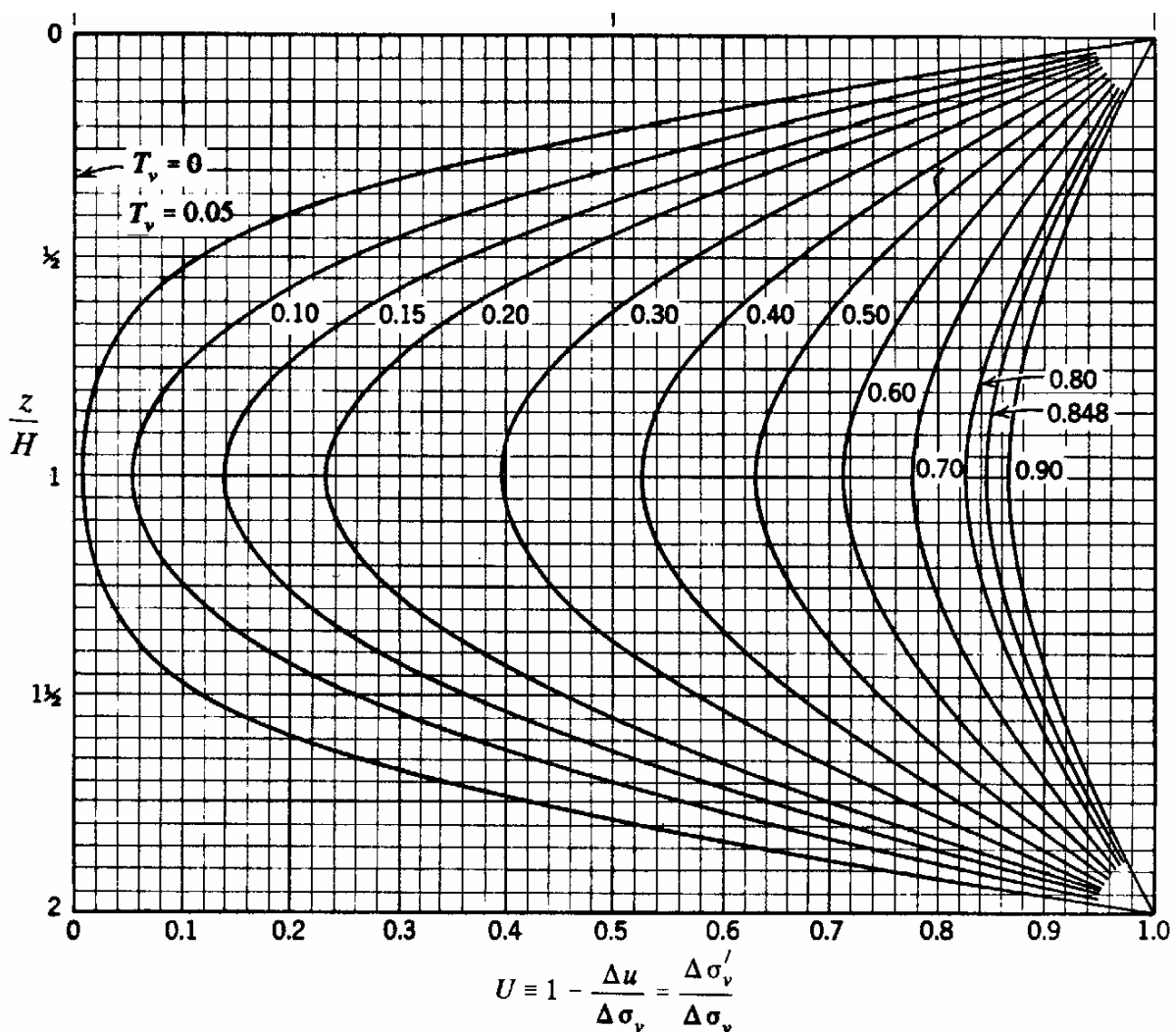
**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Στερεοποίηση εδαφικού στοιχείου (7<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 20 Δεκεμβρίου 2010.

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Στρώμα αργίλου πάχους  $d = 12m$  υπέρκειται και υπόκειται αμμώδους στρώματος μεγάλης διαπερατότητας. Ο συντελεστής στερεοποίησης της αργίλου είναι  $c_v = 8 \cdot 10^{-8} m^2/s$ . Υπολογίστε το βαθμό στερεοποίησης  $U$  για το αργιλικό στρώμα μετά από 5yr από την επιβολή της φόρτισης σε βάθη 3, 6, 9, 12m.



**Λύση:** Η στράγγιση στο αργιλικό στρώμα πραγματοποιείται από το μέσο του στρώματος προς τα δύο αμμώδη στρώματα. Συνεπώς η μέγιστη διαδρομή στράγγισης στο αργιλικό στρώμα ισούται με το ήμισυ του πάχους του, ήτοι  $H = d/2 = 12/2 = 6m$ . Για τον υπολογισμό του βαθμού στερεοποίησης  $U$  μπορούμε να καταφύγουμε είτε στην αναλυτική είτε στη γραφική λύση της εξίσωσης μονοδιάστατης στερεοποίησης, ήτοι



$$U\left(\frac{z}{H}, T_v\right) = 1 - \frac{\Delta u}{\Delta \sigma_v} = \frac{\Delta \sigma'_v}{\Delta \sigma_v} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(M \frac{z}{H}\right) e^{-M^2 T_v}$$

όπου  $z/H$  είναι ο αδιάστατος συντελεστής της θέσεως του εδαφικού υλικού από τα όρια στράγγισης (αμμώδη διαπερατά στρώματα),  $T_v = c_v t / H^2$  ο αδιάστατος χρονικός παράγοντας ο οποίος εξαρτάται από το συντελεστή διαπερατότητας, το χρόνο και το πάχος του εδαφικού στρώματος και  $M = (2m + 1)\pi/2$ . Για το εν λόγω εδαφικό στρώμα έχουμε:

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2} = \frac{8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 / \text{sec} \cdot 5 \text{ yr}}{6^2 \text{ m}^2} = \frac{8 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{36} = 0.3504$$

Ο αδιάστατος συντελεστής  $\zeta$  της θέσεως του εδαφικού υλικού  $\zeta = z/H$  για τις διάφορες θέσεις ισούται με,

$$\zeta_1 = \frac{z_1}{H} = \frac{3m}{6m} = 0.5$$

$$\zeta_2 = \frac{z_2}{H} = \frac{6m}{6m} = 1.0$$

$$\zeta_3 = \frac{z_3}{H} = \frac{9m}{6m} = 1.5$$

$$\zeta_4 = \frac{z_4}{H} = \frac{12m}{6m} = 2.0$$

Ο συντελεστής στερεοποίησης  $U$  υπολογίζεται (αναλυτικά ή γραφικά) για τις ανωτέρω θέσεις και χρονικές στιγμές,

$$\zeta_1 = 0.5, T_v = 0.3504 \rightarrow U(\zeta_1, T_v) = 0.621$$

$$\zeta_2 = 1.0, T_v = 0.3504 \rightarrow U(\zeta_2, T_v) = 0.464$$

$$\zeta_3 = 1.5, T_v = 0.3504 \rightarrow U(\zeta_3, T_v) = 0.621$$

$$\zeta_4 = 2.0, T_v = 0.3504 \rightarrow U(\zeta_4, T_v) = 1.000$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Στρώμα αργίλου πάχους  $d = 10m$  υπέρκειται βραχόδους αδιαπέρατου σχηματισμού. Ο συντελεστής στερεοποίησης της αργίλου είναι  $c_v = 0.544 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{s}$ . Σε διάστημα  $t = 3.5 \text{ yr}$  μετρήθηκε καθίζηση ίση με  $\delta = 9 \text{ cm}$ . Υπολογίστε την τελική (μέγιστη) αναμενόμενη καθίζηση  $\delta_\infty$  και το χρόνο που θα πάρει προκειμένου ο βαθμός στερεοποίησης να γίνει  $U = 90\%$ .

**Λύση:** Ο αδιάστατος χρονικός παράγοντας  $T_v$  ισούται,

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2} = \frac{0.544 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{sec} \cdot 3.5 \text{ yr}}{10^2 \text{ m}^2} = 0.600$$



καθώς η στερεοποίηση του αργιλικού στρώματος πραγματοποιείται μόνο προς την επιφάνεια, λόγω της ύπαρξης του υποκείμενου βραχώδους αδιαπέρατου στρώματος ( $H = d = 10m$ ).

Ο μέσος συντελεστής στερεοποίησης  $U_{avg}(T_v)$  της αργίλου ισούται με,

$$U_{avg}(T_v) = \frac{1}{2H} \int_0^{2H} U\left(\frac{z}{H}, T_v\right) dz = \frac{1}{2H} \int_0^{2H} \left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(M \frac{z}{H}\right) e^{-M^2 T_v}\right) dz$$

Προσεγγιστικά, ο μέσος συντελεστής στερεοποίησης  $U_{avg}(T_v)$  μπορεί να υπολογισθεί μέσω της σχέσεως,

$$U_{avg}(T_v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4T_v}{\pi}}, T_v < 0.6 \\ 1 - 10^{-\left(\frac{T_v+0.0851}{0.9332}\right)}, T_v \geq 0.6 \end{cases}$$

Για το ανωτέρω εδαφικό στρώμα αργίλου, η τιμή του μέσου συντελεστή στερεοποίησης  $U_{avg}(T_v)$ , για  $T_v = 0.600$ , ισούται με

$$U_{avg}(0.600) = 0.816$$

Η καθίζηση σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από την σχέση,

$$\delta_t = U_{avg}(T_v) \cdot \delta_{\infty}$$

όπου  $\delta_{\infty}$  είναι η ολική καθίζηση στο τέλος της στερεοποίησης. Συνεπώς, η μέγιστη αναμενόμενη καθίζηση  $\delta_{\infty}$  στο τέλος της στερεοποίησης εκτιμάται,

$$\delta_{\infty} = \frac{\delta_t}{U_{avg}(T_v)} = \frac{9cm}{0.816} \cong 11cm$$

και ο αναμενόμενος χρόνος προκειμένου ο μέσος βαθμός στερεοποίησης να λάβει την τιμή  $U_{avg}(T_v) = 0.9$ , ισούται με,

$$U_{avg}(T_v) = 1 - 10^{-\left(\frac{T_v+0.0851}{0.9332}\right)} = 0.9 \Rightarrow T_v = 0.8485 \Rightarrow$$

$$t = \frac{T_v \cdot H^2}{c_v} = \frac{0.8485 \cdot 10^2 m^2}{0.544 \cdot 10^{-2} cm^2/sec} = 4.95yr$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Εδαφικό δοκίμιο πάχους  $20mm$  ελέγχεται στην δοκιμή συμπίεσομέτρου, κατά την οποία η στράγγιση του δοκιμίου πραγματοποιείται και στις δύο επιφάνειές του. Το δοκίμιο στερεοποιήθηκε κατά  $U = 90\%$  σε χρόνο  $t = 12min$ . Εκτιμήστε το συντελεστή στερεοποίησης  $c_v$ .

**Λύση:** Ο μέσος συντελεστής στερεοποίησης  $U_{avg}(T_v)$  του δοκιμίου ισούται προσεγγιστικά, βάσει της ανωτέρω άσκησης, με





$$U_{avg}(T_v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4T_v}{\pi}}, T_v < 0.6 \\ 1 - 10^{-\left(\frac{T_v+0.0851}{0.9332}\right)}, T_v \geq 0.6 \end{cases}$$

Επιλύοντας ως προς τον αδιάστατο χρονικό παράγοντα  $T_v$ , έχουμε

$$T_v = \begin{cases} \frac{\pi}{4} U_{avg}^2, U_{avg} < 0.82 \\ 0.9332 \log\left(\frac{1}{1 - U_{avg}}\right) - 0.0851, U_{avg} \geq 0.82 \end{cases}$$

επομένως,

$$U_{avg} = 0.90 \Rightarrow T_v = 0.8485 \Rightarrow c_v = \frac{T_v \cdot H^2}{t} = \frac{0.8485 \cdot 20^2 \text{mm}^2}{12 \text{min}} = 4.71 \cdot 10^{-3} \text{cm}^2/\text{sec}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Ο αδιάστατος χρονικός συντελεστής στερεοποίησης ενός αργλικού στρώματος είναι  $T_v = 0.2$ . Ποιος είναι ο βαθμός στερεοποίησης  $U$  στο μέσο του στρώματος ( $z/H = 1$ ) και στα σημεία με  $z/H = 0.25$  και  $z/H = 1.75$ . Εκτιμήστε το μέσο βαθμό στερεοποίησης του αργλικού στρώματος  $U_{avg}$ .

**Λύση:** Ο βαθμός στερεοποίησης  $U(\zeta, T_v)$  στο μέσο ( $\zeta = z/H = 1.0$ ) και στα σημεία με  $\zeta = z/H = 0.25$  και  $\zeta = z/H = 1.75$ , του αργλικού στρώματος για αδιάστατο χρονικό παράγοντα  $T_v = 0.2$  ισούται με,

$$U(\zeta, T_v) = U(1.0, 0.2) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin(M) e^{-0.2M^2} = 0.228$$

$$U(\zeta, T_v) = U(0.25, 0.2) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin(0.25M) e^{-0.2M^2} = 0.698$$

$$U(\zeta, T_v) = U(1.75, 0.2) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin(1.75M) e^{-0.2M^2} = 0.698$$

Ο μέσος βαθμός στερεοποίησης ισούται με,

$$U_{avg}(T_v) = U_{aver}(0.2) = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.2}{\pi}} = 0.505$$



**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Δύο στρώματα αμμώδους και αργιλικού υλικού πάχους  $d = 3m$  στερεοποιούνται σε συνθήκες διπλής στράγγισης (το ρευστό των πόρων διαφεύγει από το μέσο των στρωμάτων προς τα δύο άκρα του). Ο συντελεστής διαπερατότητας της άμμου είναι  $k_s$  και της αργίλου  $k_c$ , με  $k_s = 10^5 k_c$ . Ο συντελεστής συμπίεσότητας του αμμώδους στρώματος είναι  $m_{v,s}$  και αυτός της αργίλου  $m_{v,c}$ , με  $m_{v,c} = 5m_{v,s}$ . Βρείτε πως συσχετίζονται οι χρόνοι στερεοποίησης  $t_c$  των δύο αυτών στρωμάτων για  $T_v = 1$ , ήτοι  $U = 90\%$ .

**Λύση:** Ο αδιάστατος χρονικός παράγοντας στερεοποίησης, για  $U = 90\%$ , ισούται προσεγγιστικά με  $T_v = 1$ . Συνεπώς, ο χρόνος στερεοποίησης για τα δύο εδαφικά στρώματα ισούται με,

$$T_v = 1 \Rightarrow c_v^{(s)} t^{(s)} = c_v^{(c)} t^{(c)} = d$$

Ο συντελεστής στερεοποίησης  $c_v$  δίνεται από την έκφραση,

$$c_v = \frac{D \cdot k}{\gamma_w} = \frac{k}{m_v \cdot \gamma_w}$$

όπου  $D = 1/m_v$  είναι ο συντελεστής μονοδιάστατης συμπίεσης και  $m_v$  ο συντελεστής συμπίεσότητας,  $k$  ο συντελεστής διαπερατότητας και  $\gamma_w$  το ειδικό βάρος του ύδατος. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει,

$$\frac{k^{(s)}}{m_v^{(s)} \cdot \gamma_w} \cdot t^{(s)} = \frac{k^{(c)}}{m_v^{(c)} \cdot \gamma_w} \cdot t^{(c)} \Rightarrow \frac{t^{(c)}}{t^{(s)}} = \frac{k^{(s)}}{k^{(c)}} \cdot \frac{m_v^{(c)}}{m_v^{(s)}} = 5 \cdot 10^5$$

**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Εάν για το στρώμα της αργίλου της προηγούμενης άσκησης ο χρόνος στερεοποίησης είναι  $t_c = 10yr$ , ποιος θα είναι ο αναμενόμενος χρόνος στερεοποίησης  $t_c$  για στρώμα της ίδιας αργίλου πάχους  $d = 12m$ .

**Λύση:** Ο χρόνος στερεοποίησης  $t_c$  για το στρώμα της αργίλου πάχους  $d = H = 3m$  υπολογίζεται ως,

$$T_v = 1 \Rightarrow$$

$$t_c = \frac{H^2}{c_v} = \alpha H^2 = 10yr$$

Όταν το πάχος του στρώματος της αργίλου γίνει  $d' = 12m = 4d = 4H$ , ήτοι τετραπλασιαστεί, ο χρόνος που θα απαιτηθεί προκειμένου να ολοκληρωθεί η στερεοποίηση είναι δεκαεξαπλάσιος, αφού είναι ανάλογος του τετραγώνου του πάχους του στρώματος, ήτοι

$$t_c = 160yr$$



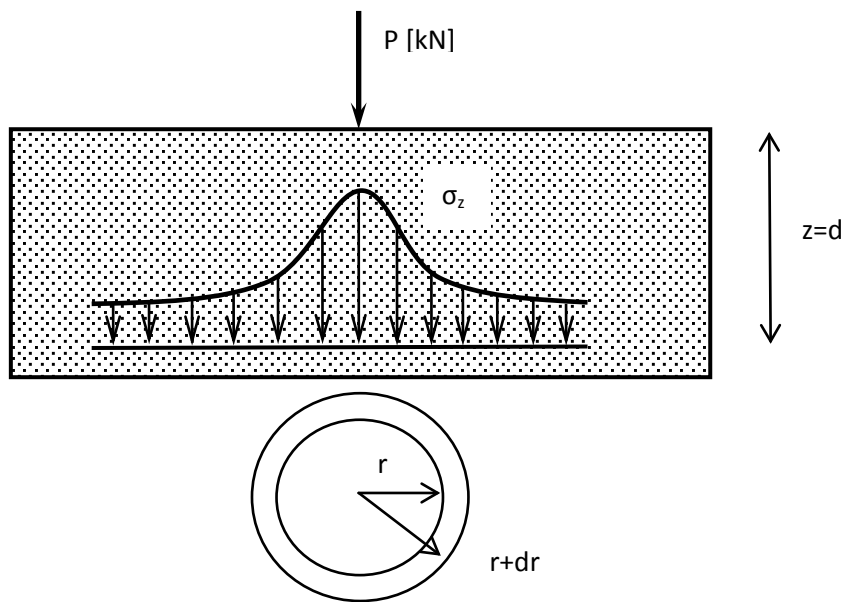
**Μάθημα:** Εδαφομηχανική Ι, 5<sup>ο</sup> εξάμηνο.

**Διδάσκων:** Ιωάννης-Ορέστης Σ. Γεωργόπουλος, Π.Δ.407/80, Δρ Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

**Θεματική περιοχή:** Μετάδοση τάσεων στο έδαφος (8<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων).

**Ημερομηνία:** Δευτέρα 10 Ιανουαρίου 2011.

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Υπολογίστε τη συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη σε οριζόντιο επίπεδο με  $z = d$  για συγκεντρωμένο σημειακό φορτίο  $P$ , σύμφωνα με το σχήμα.



**Λύση:** Η συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη  $P_z$  ενός κυκλικού δακτυλίου εσωτερικής ακτίνας  $r$  και πάχους  $dr$  σε βάθος  $z = d$  ισούται με,

$$P_z = \int_0^r dP_z = \int_0^r \sigma_z dA = \int_0^r \sigma_z (2\pi r dr) = 2\pi \int_0^r \frac{3P}{2\pi d^2} \frac{r}{\left(1 + \frac{r^2}{d^2}\right)^{\frac{5}{2}}} dr = \frac{3P}{2d^2} \int_0^r \frac{d(r^2)}{\left(1 + \frac{r^2}{d^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow$$

$$P_z = -\frac{3P}{2} \frac{1}{\left(\frac{5}{2} - 1\right) \left(1 + \frac{r^2}{d^2}\right)^{\frac{5}{2}-1}} \Bigg|_0^r = -\frac{3P}{2} \frac{1}{\frac{3}{2} \left(1 + \frac{r^2}{d^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Bigg|_0^r = -\frac{P}{\left(1 + \frac{r^2}{d^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Bigg|_0^r = P \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{d^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

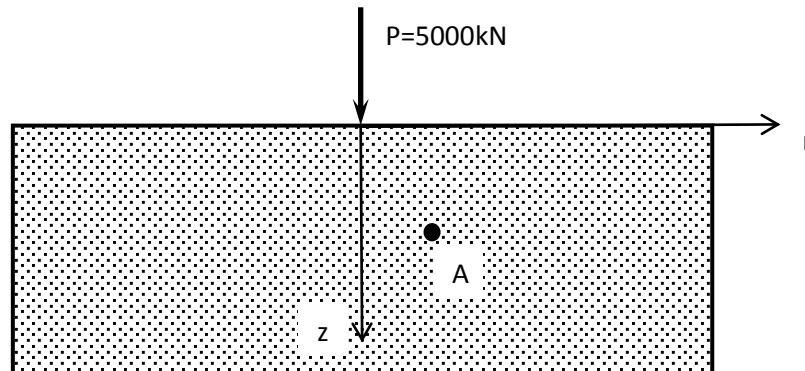
Η συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη  $P_z$  για  $r \rightarrow \infty$ ,

$$P_z = P$$

το οποίο και αναμένεται λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα.



**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Υπολογίστε την εντατική κατάσταση στο σημείο A ( $z_A = 5m, r_A = 2m$ ) για συγκεντρωμένο σημειακό φορτίο  $P = 5000kN$ , σύμφωνα με το σχήμα. Δεχθείτε τιμή του λόγου του Poisson  $\nu = 0.50$ . Εκτιμήστε επίσης τις κύριες τάσεις  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , τις διευθύνσεις των κυρίων επιπέδων και των επιπέδων μεγίστης διατμητικής τάσης. Δώστε την γραφική τους απεικόνιση στο επίπεδο  $(\tau, \sigma)$ .



**Λύση:** Από τη λύση του προβλήματος Boussinesq, υπολογίζουμε την κατακόρυφη ορθή τάση  $\sigma_z$ , τις οριζόντιες ορθές τάσεις  $\sigma_r$  και  $\sigma_\theta$  και την διατμητική τάση  $\tau_{rz}$ , ήτοι,

$$\sigma_{z,A} = \frac{3P}{2\pi z^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{z^2}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3 \cdot 5000kN}{2\pi \cdot 25m^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{25}\right)^{\frac{5}{2}}} = 65.9kPa$$

$$\sigma_{r,A} = \frac{P}{2\pi(r^2 + z^2)} \left[ \frac{3r^2 z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1 - 2\nu)\sqrt{r^2 + z^2}}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{r,A} = \frac{5000kN}{2\pi(4 + 25)m^2} \left[ \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{(4 + 25)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1 - 2 \cdot 0.5)\sqrt{4 + 25}}{\sqrt{4 + 25} + 5} \right] = 10.5kPa$$

$$\sigma_{\theta,A} = -\frac{(1 - 2\nu)P}{2\pi(r^2 + z^2)} \left[ \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \right] = 0$$

$$\tau_{rz,A} = \frac{3Prz^2}{2\pi(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3 \cdot 5000kN \cdot 2m \cdot 25m}{2\pi \cdot (4 + 25)^{\frac{5}{2}}} = 26.4kPa$$

Στο επίπεδο  $(r, z)$  έχουμε,

$$\sigma_{11} = \sigma_z = 65.9kPa$$

$$\sigma_{22} = \sigma_r = 10.5kPa$$



$$\sigma_{33} = \sigma_{\theta} = 0$$

$$\tau_{12} = -\tau_{rz} = -26.4kPa$$

$$\tau_{21} = \tau_{rz} = 26.4kPa$$

Οι κύριες τάσεις στο επίπεδο  $(r, z)$  είναι,

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2}}{2} = 76.43kPa$$

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2}}{2} = 0$$

και οι διευθύνσεις των καθέτων διανυσμάτων των κυριών επιπέδων ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων ισούνται με,

$$\tan \theta_1 = \frac{\tau_p}{\sigma_1 - \sigma_p} = \frac{2 \cdot 26.36}{65.89 - 10.54} = 0.952 \Rightarrow \theta_1 = 338.20^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\tau_p}{\sigma_1 - \sigma_p} = \frac{2 \cdot 26.36}{65.89 - 10.54} = 0.952 \Rightarrow \theta_2 = 248.20^\circ$$

όπου  $\sigma_p, \tau_p$  είναι οι συντεταγμένες του Πόλου των Καθέτων του,

$$\sigma_p = 10.54kPa$$

$$\tau_p = 26.36kPa$$

ενώ οι διευθύνσεις των καθέτων διανυσμάτων των επιπέδων μέγιστης διατμητικής τάσης ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων ισούνται με,

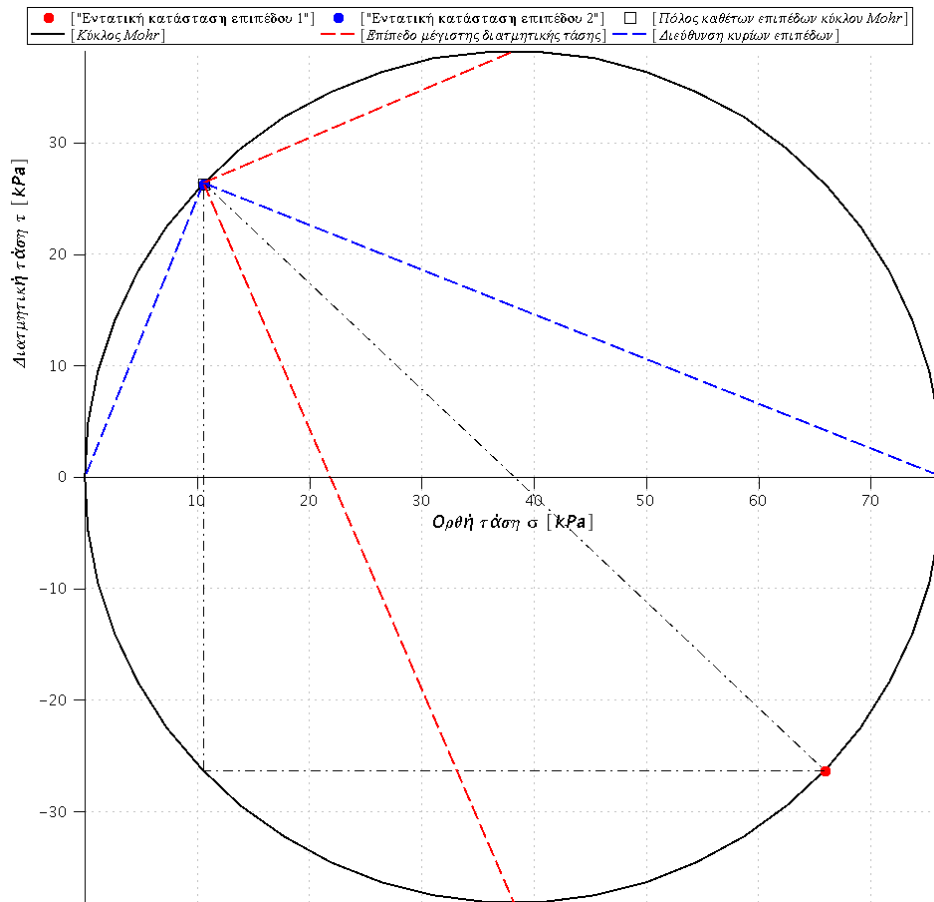
$$\tan \psi_1 = \frac{\tau_{max} - \tau_p}{\sigma_m - \sigma_p} = \frac{-26.36}{-10.54} \Rightarrow \psi_1 = 23.20^\circ$$

$$\tan \psi_2 = \frac{-\tau_{max} - \tau_p}{\sigma_m - \sigma_p} = \frac{-26.36}{-10.54} \Rightarrow \psi_2 = 293.20^\circ$$

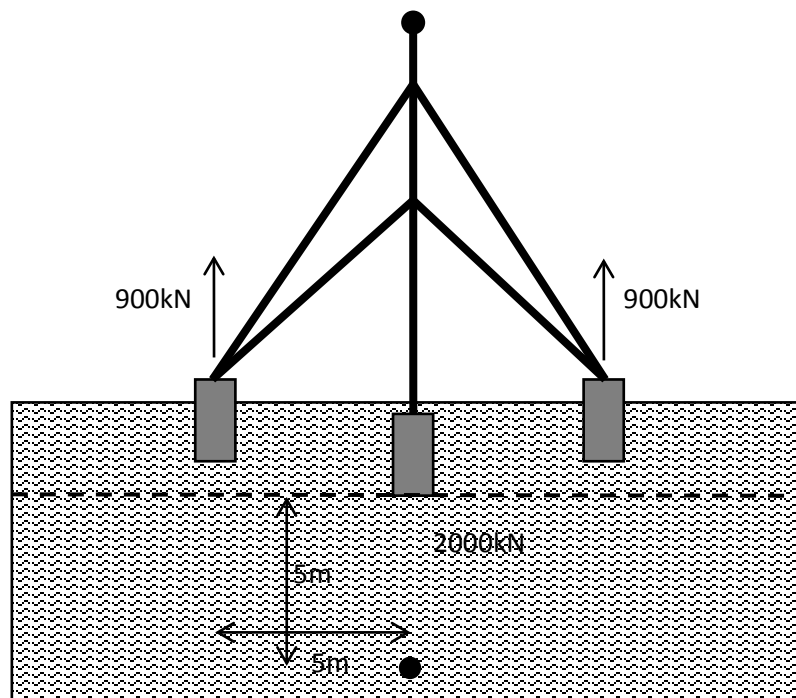
όπου  $\sigma_m, \tau_{max}$  είναι το κέντρο του κύκλου και η μέγιστη διατμητική τάση αντίστοιχα,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 38.22kPa$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 38.22kPa$$



**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Υπολογίστε την κατακόρυφη τάση  $\sigma_z$  στο σημείο A ( $z_A = 5m$ ) για την εν λόγω φόρτιση από τα θεμέλια ενός πυλώνα. Θεωρείτε ότι τα τρία φορτία είναι σημειακά και ότι δρουν στην επιφάνεια ημιχώρου (διακεκομμένη γραμμή).



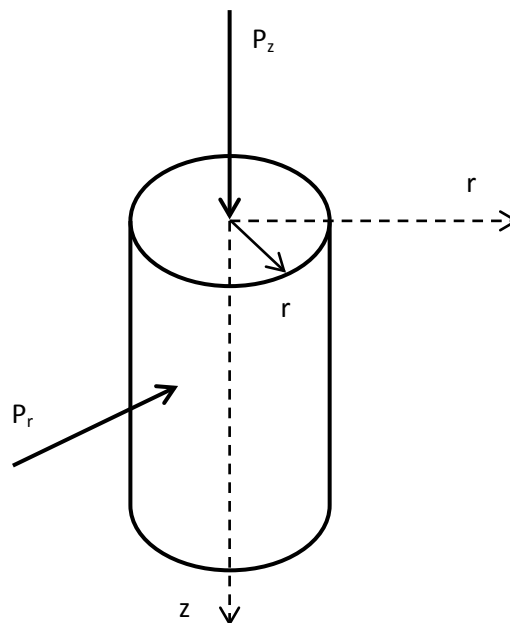


**Λύση:** Σύμφωνα με την αρχή του Saint-Venant, οι αναπτυσσόμενες τάσεις "μακριά" από τη θέση επιβολής του εξωτερικού φορτίου δεν εξαρτώνται από τις λεπτομέρειες του τρόπου επιβολής του φορτίου (αν δηλαδή είναι συγκεντρωμένο, ομοιόμορφο σε κυκλική ή ορθογωνική επιφάνεια) αλλά μόνο από την συνισταμένη του τιμή. Ο όρος "μακριά" αναφέρεται σε απόσταση που είναι μεγάλη σε σχέση με την χαρακτηριστική διάσταση της γεωμετρίας επιβολής του φορτίου (π.χ. διάμετρος φορτιζόμενης κυκλικής επιφάνειας).

Συνεπώς στο εν λόγω πρόβλημα, η κατακόρυφη τάση  $\sigma_{z,A}$  θα υπολογιστεί μέσω της επαλληλίας των τριών φορτίσεων, ήτοι,

$$\sigma_{z,A} = \frac{3P_1}{2\pi z_1^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r_1^2}{z_1^2}\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3P_2}{2\pi z_2^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r_2^2}{z_2^2}\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3P_3}{2\pi z_3^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r_3^2}{z_3^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow$$
$$\sigma_{z,A} = \frac{3 \cdot 2000 \text{ kN}}{2\pi \cdot 25 \text{ m}^2} + \frac{3 \cdot (-900) \text{ kN}}{2\pi \cdot 25 \text{ m}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{25}{25}\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3 \cdot (-900) \text{ kN}}{2\pi \cdot 25 \text{ m}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{25}{25}\right)^{\frac{5}{2}}} = 32.14 \text{ kPa}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4:** Υπολογίστε την συνισταμένη πλευρική δύναμη  $P_r$  η οποία ασκείται σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας  $r$ , λόγω κατακόρυφης σημειακής φόρτισης  $P_z$ , όπως στο σχήμα. Θεωρείστε ότι ο ημίχωρος αποτελείται από ελαστικό υλικό με λόγο Poisson  $\nu$ .

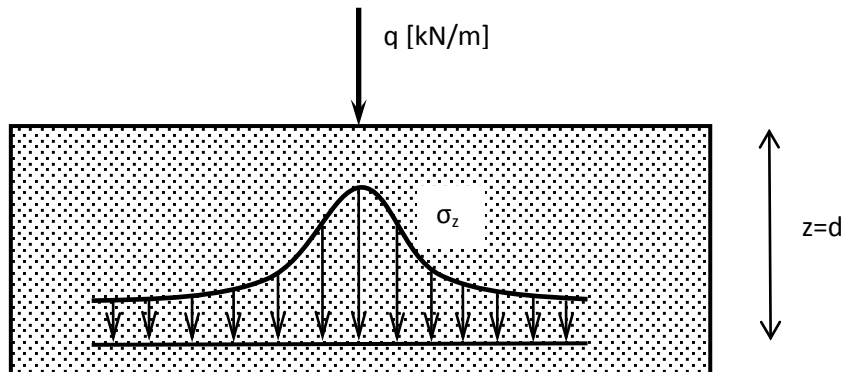


**Λύση:** Η συνισταμένη πλευρική δύναμη  $P_r$  θα ισούται με,

$$P_r = \int_0^\infty dP_r = \int_0^\infty \sigma_r dA = \int_0^\infty \sigma_r (2\pi r dz) = \int_0^\infty \frac{r P_z}{r^2 + z^2} \left[ \frac{3r^2 z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1 - 2\nu)\sqrt{r^2 + z^2}}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \right] dz = 2\nu P_z$$



**ΑΣΚΗΣΗ 5:** Υπολογίστε τη συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη σε οριζόντιο επίπεδο με  $z = d$  για γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$ , σύμφωνα με το σχήμα.

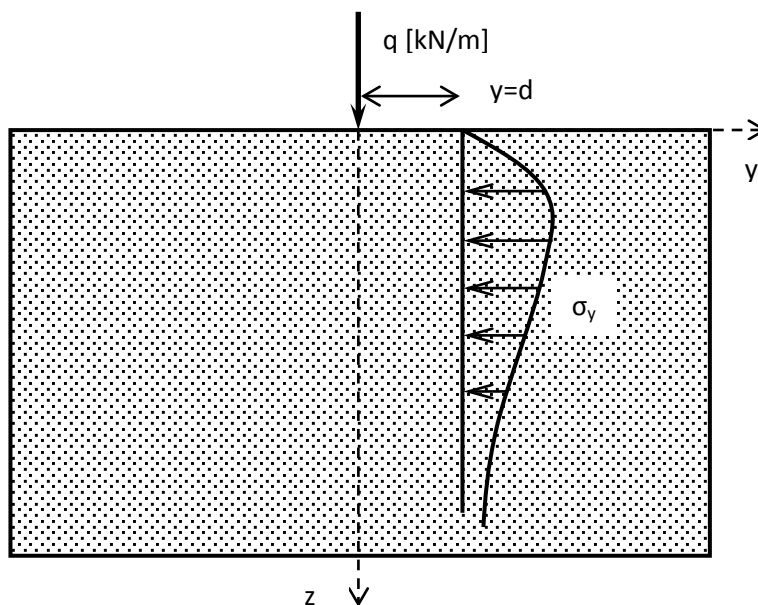


**Λύση:** Η συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη  $P_z$  σε οριζόντιο επίπεδο με  $z = d$  για γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$  ισούται με,

$$P_z = \int_{-\infty}^{+\infty} dP_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_z dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_z dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2q}{\pi} \frac{d^3}{(y^2 + d^2)^2} dy = \frac{q}{\pi} \left( \left| \frac{dy}{y^2 + d^2} + \tan^{-1} \left( \frac{y}{d} \right) \right|_{-\infty}^{+\infty} \right) \Rightarrow$$
$$P_z = \frac{q}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = q$$

το οποίο και αναμένεται λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα.

**ΑΣΚΗΣΗ 6:** Υπολογίστε τη συνισταμένη οριζόντια δύναμη σε κατακόρυφο επίπεδο με  $y = d$  για γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$ , σύμφωνα με το σχήμα.







**Λύση:** Η συνισταμένη οριζόντια δύναμη  $P_y$  σε κατακόρυφο επίπεδο με  $y = d$  για γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$  ισούται με,

$$P_y = \int_0^{+\infty} dP_y = \int_0^{+\infty} \sigma_y dA = \int_0^{+\infty} \sigma_y dz = \int_0^{+\infty} \frac{2q}{\pi} \frac{d^2 z}{(d^2 + z^2)^2} dz = \frac{q}{\pi} \left[ -\frac{d^2}{d^2 + z^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{q}{\pi}$$

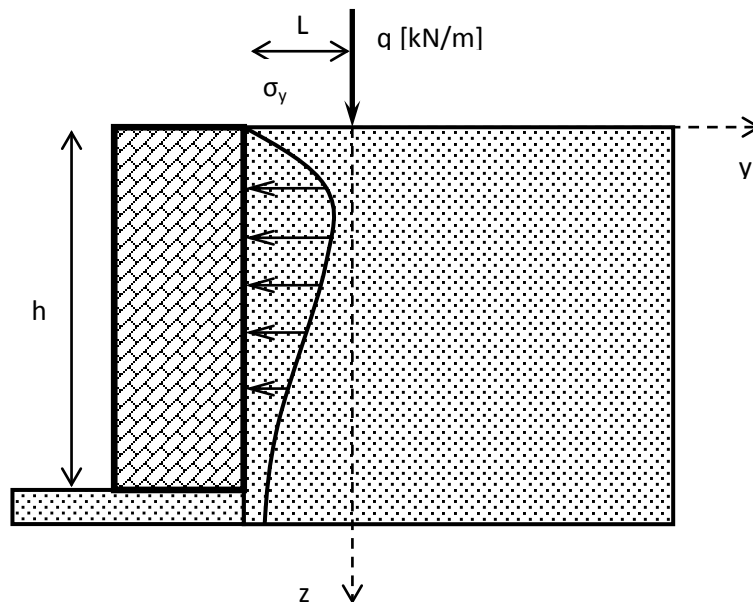
**ΑΣΚΗΣΗ 7:** Υπολογίστε τη συνισταμένη διατμητική δύναμη σε οριζόντιο επίπεδο με  $z = d$  για γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$ .

**Λύση:** Η διατμητική δύναμη θα δίνεται από,

$$T_{yz} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{yz} dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{yz} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2q}{\pi} \frac{y d^2}{(y^2 + d^2)^2} dy = \frac{q}{\pi} \left[ -\frac{d^2}{d^2 + y^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

το οποίο και αναμένετο λόγω ισορροπίας.

**ΑΣΚΗΣΗ 8:** Υπολογίστε τη συνισταμένη πλευρική ώθηση σε έναν αρκετά άκαμπτο τοίχο αντιστήριξης, σύμφωνα με το σχήμα. Υποθέστε ότι η δυσχέρεια πλευρικών μετατοπίσεων του τοίχου οδηγεί σε διπλασιασμό των πλευρικών τάσεων επί του τοίχου, όπως αυτές υπολογίζονται από την ελαστική ανάλυση.



**Λύση:** Η συνισταμένη οριζόντια δύναμη  $P_y$  σε κατακόρυφο επίπεδο με  $y = d$  για γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$  ισούται με,

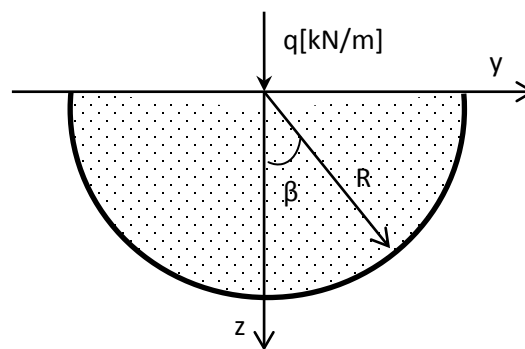


$$P_y = \int_0^h dP_y = \int_0^h \sigma_y dA = \int_0^h \sigma_y dz = \int_0^h \frac{2q}{\pi} \frac{L^2 z}{(L^2 + z^2)^2} dz = \frac{qL^2}{\pi} \left| -\frac{1}{L^2 + z^2} \right|_0^h = \frac{q}{\pi \left(1 + \frac{L^2}{h^2}\right)}$$

και λόγω του άκαμπτου του τοίχου, η συνισταμένη δύναμη ισούται με,

$$P_y^* = \frac{2q}{\pi \left(1 + \frac{L^2}{h^2}\right)}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 9:** Δώστε τις εκφράσεις για τη μέγιστη και ελάχιστη κύρια τάση σε ελαστικό ημίσφαιρο υπό γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$  στο επίπεδο  $(y, z)$ . Βρείτε τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων. Υπολογίστε την ορθή  $\sigma_R$  και διατμητική  $\tau_{R\theta}$  τάση σε επίπεδο που σχηματίζει γωνία με το οριζόντιο επίπεδο ίση με  $\beta$ . Αποδείξτε επίσης ότι οι ισοστασικές καμπύλες της ορθής τάσης  $\sigma_R$  είναι κύκλοι και δώστε την τιμή της για έναν κύκλο διαμέτρου  $d$ .



**Λύση:** Οι ορθές και διατμητικές τάσεις σε ένα εδαφικό στοιχείο ελαστικού ημίσφαιρου υποβαλλόμενο σε γραμμικά κατανεμημένο φορτίο  $q$  είναι,

$$\sigma_z = \frac{2q}{\pi} \frac{z^3}{(y^2 + z^2)^2}$$

$$\sigma_y = \frac{2q}{\pi} \frac{y^2 z}{(y^2 + z^2)^2}$$

$$\sigma_x = \frac{2q}{\pi} \frac{vz}{y^2 + z^2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{2q}{\pi} \frac{yz^2}{(y^2 + z^2)^2}$$

Η μέγιστη κύρια τάση ισούται με,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}^2}}{2} = \frac{2qz}{\pi(y^2 + z^2)}$$



ενώ η ελάχιστη,

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}^2}}{2} = 0$$

Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων θα υπολογίζονται από,

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y} = \frac{2yz}{z^2 - y^2}$$

Η ορθή και διατμητική τάση σε επίπεδο που σχηματίζει γωνία  $\beta$  με το οριζόντιο είναι,

$$\sigma_R = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\beta + \tau_{yz} \sin 2\beta$$
$$\tau_{R\theta} = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\beta + \tau_{yz} \cos 2\beta$$

Από την γεωμετρία του προβλήματος,

$$\begin{cases} y = R \cdot \sin \beta \\ z = R \cdot \cos \beta \end{cases}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι,

$$\sigma_R = \frac{2q \cos \beta}{\pi R}$$
$$\tau_{R\theta} = 0$$

Οι ισοτασικές καμπύλες της  $\sigma_R$  είναι κύκλοι αφού η κατωτέρω έκφραση παριστάνει κύκλο στο επίπεδο  $(y, z)$  με σταθερό σημείο το  $(0,0)$ .

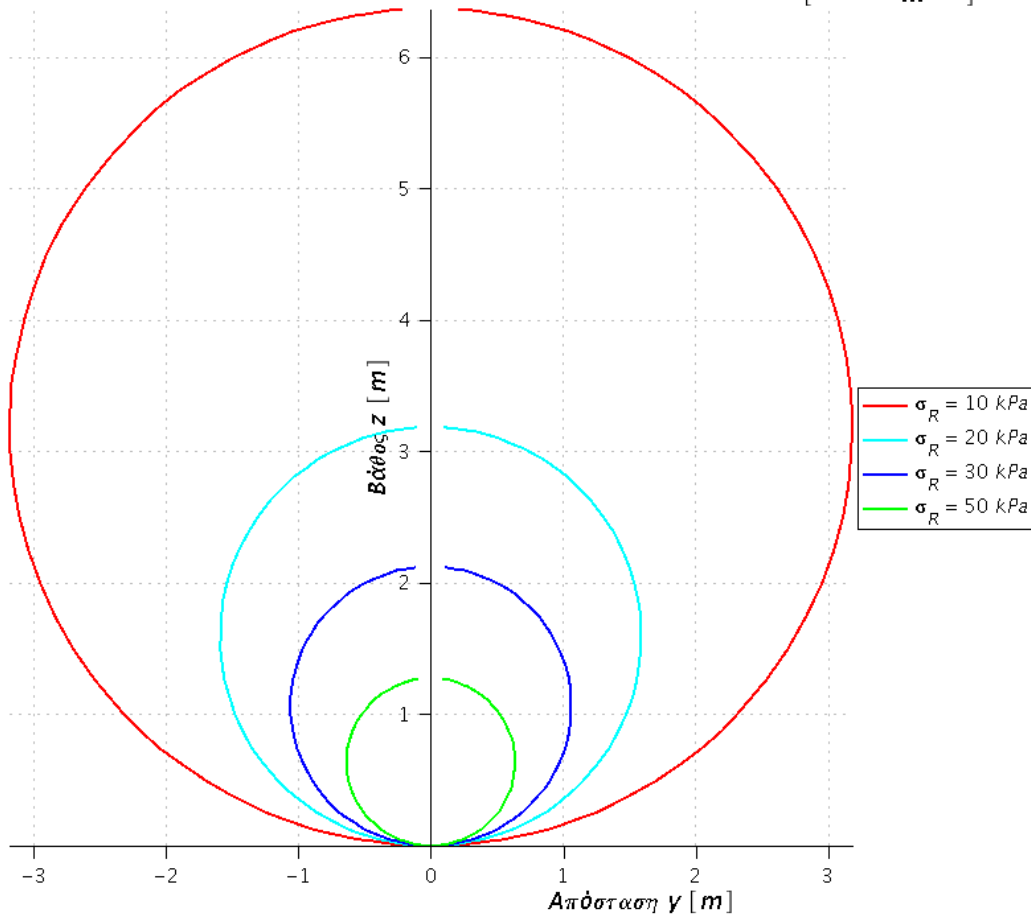
$$\sigma_R = \frac{2q \cos \beta}{\pi R} \Rightarrow \frac{2qz}{\pi R^2} = \sigma_R \Rightarrow \frac{2qz}{\pi(z^2 + y^2)} = \sigma_R \Rightarrow \pi\sigma_R(z^2 + y^2) = 2qz$$

Η τιμή της ισοτασικής καμπύλης σε έναν κύκλο διαμέτρου  $d$  είναι,

$$\sigma_R = \frac{2q \cos \beta}{\pi R} = \frac{2q}{\frac{\pi R}{\cos \beta}} = \frac{2q}{\pi d}$$



Ισοστασικές καμπύλες ορθής τάσης  $\sigma_R$  για γραμμικό απειρομήκες  $\left[ q = \frac{100 \text{ kN}}{m} \right]$



**ΑΣΚΗΣΗ 10:** Πεδιλοδοκός μεγάλου μήκους έχει πλάτος  $2b = 1m$  και μεταφέρει γραμμικό φορτίο  $q = 50 \text{ kN}/m$ . Υπολογίστε την κατακόρυφη τάση  $\sigma_z$  στο σημείο A με συντεταγμένες  $y_A = 0, z_A = 3m$ , θεωρώντας το φορτίο ως (α) γραμμικά κατανεμημένο και (β) ομοιόμορφα κατανεμημένο στο πλάτος της δοκού.

**Λύση:** Η κατακόρυφη τάση  $\sigma_z$  στο σημείο A για γραμμικά κατανεμημένο φορτίο ισούται,

$$\sigma_{z,A}^{(\alpha)} = \frac{2q}{\pi} \frac{z^3}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{2 \cdot 50 \text{ kN}/m}{\pi} \frac{27}{(0 + 9)^2 m} = 10.61 \text{ kPa}$$

ενώ η κατακόρυφη τάση  $\sigma_z$  στο σημείο A για ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο ισούται,

$$\sigma_{z,A}^{(\beta)} = \frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cos 2\beta)$$

όπου

$$\alpha = 2 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{b}{z_A} \right) = 2 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{0.5}{3} \right) = 0.33 \text{ rad}$$

$$\beta = 0 \text{ rad}$$



Επομένως,

$$\sigma_{z,A}^{(\beta)} = \frac{50kPa}{\pi} (0.33 + \sin 0.33 \cos 0) = 10.41kPa$$

Παρατηρούμε ότι  $\sigma_{z,A}^{(\alpha)} \cong \sigma_{z,A}^{(\beta)}$  αφού σύμφωνα με την αρχή του Saint-Venant δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο στον υπολογισμό των τάσεων εντός ελαστικού ημιχώρου η κατανομή του εξωτερικά επιβαλλόμενου φορτίου (γραμμικά ή ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο).

**ΑΣΚΗΣΗ 11:** Ημίχωρος φορτίζεται με ομοιόμορφο απειρομήκης φορτίο πλάτους  $2b$  (απειρολωρίδα). Σε ποιά σημεία του ημιχώρου μεγιστοποιούνται οι διατμητικές τάσεις.

**Λύση:** Η μέγιστη διατμητική τάση ισούται με,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

όπου  $\sigma_1, \sigma_3$  είναι η μέγιστη και ελάχιστη κύρια τάση.

Η λύση του προβλήματος της απειρολωρίδας δίνει,

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\beta)$$

$$\sigma_y = \frac{p}{\pi} (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\beta)$$

$$\tau_{yz} = \frac{p}{\pi} \sin \alpha \cdot \sin 2\beta$$

Η μέγιστη κύρια τάση ισούται με,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}^2}}{2}$$

ενώ η ελάχιστη,

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}^2}}{2}$$

Συνεπώς η μέγιστη διατμητική τάση ισούται με

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2p}{\pi} \sin \alpha \cos 2\beta\right)^2 + \left(\frac{2p}{\pi} \sin \alpha \sin 2\beta\right)^2} = \frac{p}{\pi} \sin \alpha$$

Η διατμητική τάση  $\tau_{max}$  μεγιστοποιείται για



$$\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου μεγιστοποιείται η διατμητική τάση είναι ημικύκλιο διαμέτρου  $D = 2b$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 12:** Φορτίο  $p = 50 \text{ kN/m}^2$  κατανέμεται ομοιόμορφα σε επιφάνεια κύκλου ακτίνας  $R = 30\text{m}$ . Ζητούνται οι τιμές των κυρίων τάσεων και οι διευθύνσεις τους σε σημείο με συντεταγμένες  $r = z = 30\text{m}$ . Υπολογίστε επίσης την μέγιστη καθίζηση δεχόμενοι  $E = 60\text{MPa}$  και  $\nu = 0.45$ .

**Λύση:** Η μέγιστη και ελάχιστη κύρια τάση λόγω επιβολής του κατακόρυφου φορτίου  $p = 50 \text{ kN/m}^2$  είναι για  $r/R = z/R = 1$ ,

$$\sigma_1 = 0.45 \cdot 50 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 22.5 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = 0.03 \cdot 50 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 1.5 \text{ kPa}$$

Επίσης η κατακόρυφη τάση  $\sigma_z$  ισούται με,

$$\sigma_z = 0.33 \cdot 50 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 16.5 \text{ kPa}$$

Από τον κύκλο του Mohr προσδιορίζουμε την διατμητική τάση  $\tau_{zr}$ , η οποία ισούται με,

$$\tau_{zr} = -9.5 \text{ kPa}$$

και την οριζόντια τάση  $\sigma_r$ ,

$$\sigma_r = 7.5 \text{ kPa}$$

Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων ισούνται με,

$$\tan \varphi_1 = \frac{\tau_p}{\sigma_1 - \sigma_p} \Rightarrow \varphi_1 = 327.7^\circ$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{\tau_p}{\sigma_3 - \sigma_p} \Rightarrow \varphi_2 = 237.7^\circ$$

όπου  $\sigma_p, \tau_p$  οι συντεταγμένες του Πόλου των Καθέτων του κύκλου του Mohr.

Η μέγιστη καθίζηση υπολογίζεται για  $r = z = 0$  ως,

$$\rho_{max} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} Rp = \frac{2(1 - 0.45^2)}{60000 \text{ kPa}} 30\text{m} \cdot 50 \text{ kPa} \cong 40 \text{ mm}$$

