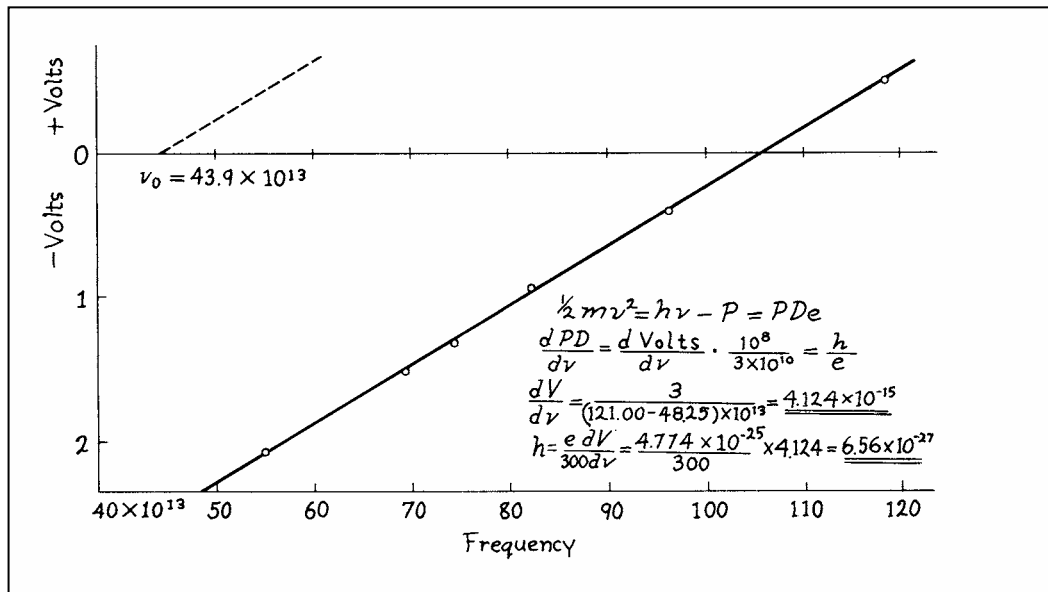


ΑΣΚΗΣΗ 2

ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

“Μια εικόνα, χίλιες λέξεις...” (Κινέζικη ρήση)



2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο εργαστήριο γίνεται συχνά η μέτρηση ενός μεγέθους y καθώς μεταβάλλεται άλλο φυσικό μέγεθος x . Το μέγεθος x θεωρείται ανεξάρτητη μεταβλητή και το y εξαρτημένη ενώ το ζεύγος τιμών (x,y) είναι αυτό που αποκαλούμε **μέτρηση**. Κατά την επεξεργασία των πειραματικών αυτών δεδομένων “κατασκευάζεται”, σχεδόν πάντα, γραφική απεικόνιση των μετρήσεων (x,y) που μας επιτρέπει να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα ως προς:

- την εξέλιξη του φαινομένου. Από τη μορφή της γραφικής παράστασης διαπιστώνεται ποιά σχέση συνδέει την y με την x . Ποιού βαθμού π.χ είναι η συνάρτηση $y = f(x)$ ως προς x .

- τη συμφωνία των πειραματικών μετρήσεων με τις θεωρητικά αναμενόμενες. Μπορούμε δηλαδή να ελέγχουμε κατά πόσο η πειραματική καμπύλη συμπίπτει με την θεωρητικά αναμενόμενη, για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων ως προς την πιστότητα του πειράματος ή της θεωρίας.

- την τιμή ενός τρίτου φυσικού μεγέθους που υπολογίζεται έμμεσα από τη γραφική παράσταση των μετρούμενων μεγεθών όπως π.χ. μεγέθη που είναι ίσα ή ανάλογα της

κλίσεως της καμπύλης σε δεδομένο σημείο της, δηλαδή της παραγώγου : $\frac{dy(x)}{dx}$ ή του

εμβαδού ανάμεσα στην καμπύλη και τον άξονα x , δηλαδή του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} y(x)dx$ (α, β οι οριακές τιμές του x).

2.2 ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων γίνεται συνήθως σε χιλιοστομετρικό χαρτί (millimétré). Σε μερικές όμως περιπτώσεις απαιτείται ημιλογαριθμικό ή (πολύ σπάνια) λογαριθμικό χαρτί.

2.2.1 Γραμμική Κλίμακα

Η γραμμική κλίμακα είναι η πιο συνηθισμένη μορφή κλίμακας, που θα συναντήσουμε στις εργαστηριακές ασκήσεις. Για την ορθή απεικόνιση των μετρήσεων, η οποία παρέχει τη δυνατότητα εξαγωγής χρήσιμων συμπερασμάτων, θα πρέπει να ακολουθούνται προσεχτικά οι παρακάτω (καθολικά αποδεκτοί) κανόνες:

- Οι κλίμακες των αξόνων εκλέγονται με τέτοιο τρόπο, ώστε η απεικόνιση να είναι ευδιάκριτη και η γραφική παράσταση να αναπτύσσεται σε τετραγωνικό περίπου τμήμα του μιλλιμετρέ.

- Κάθε κλίμακα πρέπει να είναι οπωσδήποτε ισοδιάστατη. Τα μοναδιαία διαστήματα των δύο κλιμάκων δεν είναι απαραίτητο να είναι ίδια. Εξάλλου είναι ανώφελο να συγκρίνονται μοναδιαία διαστήματα διαφορετικών φυσικών μεγεθών.

- Ως μοναδιαίο διάνυσμα εκλέγεται απλός ακέραιος ή δεκαδικός αριθμός, π.χ. 0.2, 0.5, 1, 10 κ.λ.π. Κλασματικοί αριθμοί, όπως $1/14$ ή $1/3=0,3333$ δεν αποτελούν κατάλληλα μοναδιαία διαστήματα.

- Παράλληλα με κάθε άξονα σχεδιάζεται βέλος που η κορυφή του δείχνει τη φορά αυξήσεως της τιμής του αντίστοιχου μεγέθους. Στην αρχή του βέλους τοποθετείται το σύμβολο του μεγέθους (π.χ. U ή i ή t) και κοντά στην κορυφή του η αντίστοιχη μονάδα μετρήσεως (V ή A ή sec), αν υπάρχει.

- Για να σχηματισθούν οι κλίμακες σημειώνονται δίπλα στους άξονες μόνο πολλαπλάσια των μοναδιαίων διαστημάτων και ποτέ οι ίδιες οι μετρήσεις.

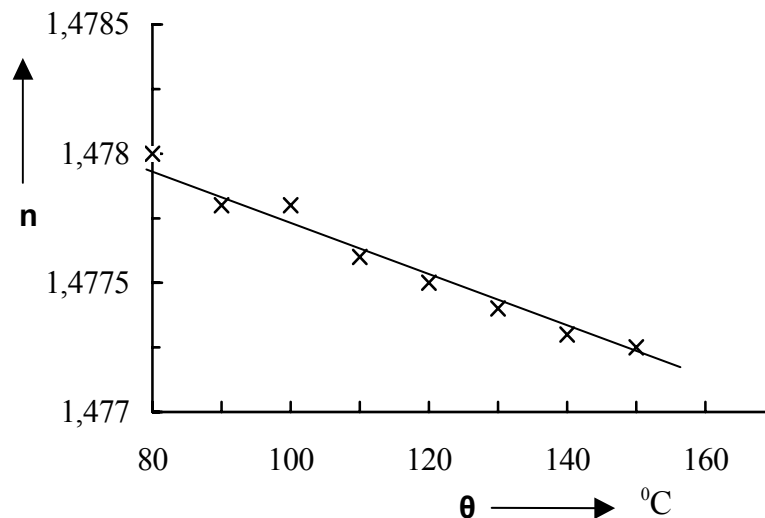
Για να κατανοηθεί ο τρόπος χαράξεως μιας καμπύλης σε χιλιοστομετρικό χαρτί, περιγράφεται η διαδικασία για τη γραφική απεικόνιση της σχέσεως $n = f(\theta)$. Έστω ότι, κατά τη μέτρηση του δείκτη διάθλασεως n υγρού, διαπιστώθηκε πως η τιμή του μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών: 1,478 και 1,4772, όταν η θερμοκρασία παίρνει αντίστοιχα τιμές από 80° μέχρι 150° C, σύμφωνα με τις μετρήσεις του πίνακα 2.1

Πίνακας 2.1

α/α	θ ($^\circ$ C)	n
1	80	1,4785
2	90	1,4778
3	100	1,4778
4	110	1,4776
5	120	1,4775
6	130	1,4774
7	140	1,4773
8	150	1,4772

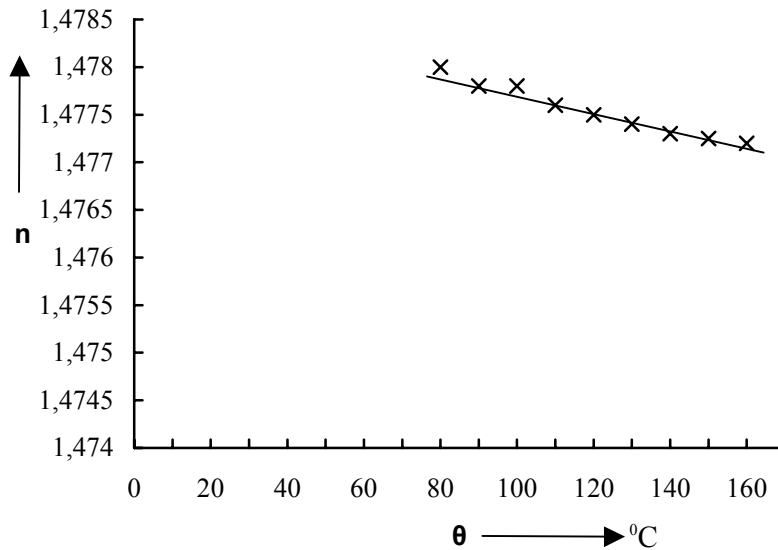
Στον άξονα της θερμοκρασίας (θ) λαμβάνεται ως μοναδιαίο διάστημα ίσο με 10° C, που αντιστοιχούν σε 1 cm του χαρτιού (Σχήμα 2.1). Για τον άξονα του δείκτη διάθλασης (n) λαμβάνεται ως μοναδιαίο διάστημα το 0,00025 που αντιστοιχεί επίσης σε 1 cm του χαρτιού. Με την επιλογή αυτή η γραφική παράσταση αναπτύσσεται σε τετραγωνική περίπτωση επιφάνεια και οι μετρήσεις του Πίνακα 2.1 σημειώνονται πολύ εύκολα.

Επίσης στο ίδιο διάγραμμα έχουν σημειωθεί στον άξονα της θ οι τιμές 80, 100, 120, 140, 160 ($^\circ$ C) και στον άξονα του n οι τιμές 1,4770, 1,4775, 1,478, 1,4785. Η μέτρηση π.χ. (90° C, 1,4778) έχει εντοπισθεί μεταξύ των ενδείξεων 80° C – 100° C και 1,4775 – 1,4780 αλλά δεν έχουν σημειωθεί τα σημεία 90° C και 1,4778 στους άξονες.



Σχήμα 2.1

Παρατηρούμε ακόμη ότι, στο παράδειγμα που εξετάζουμε, οι τιμές του n βρίσκονται σε μια μικρή περιοχή μεταξύ του 1,4772 και του 1,4780. Η κλίμακα του άξονα αυτού δεν πρέπει να επεκτείνεται πέρα από αυτήν την περιοχή και όπως παρατηρούμε στο διάγραμμα 2.1 έχει περιορισθεί μεταξύ των τιμών 1,4770 και 1.4785. Το ίδιο συμβαίνει και με την κλίμακα του άξονα της θερμοκρασίας η οποία περιορίζεται μεταξύ των 80°C και 160°C . Αν ξεφύγουμε από τις περιορισμένες αυτές περιοχές, προσπαθώντας ίσως να συμπεριλάβουμε το “0” ως αρχή του άξονα, το αποτέλεσμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 2.2 και δεν αποτελεί σωστή μορφή διαγράμματος. Το να προσπαθήσουμε επιπλέον να συμπεριλάβουμε το 0 ως κοινή αρχή των αξόνων, μας οδηγεί στο σχεδιασμό ενός διαγράμματος ακατάλληλου να μας οδηγήσει σε οποιοδήποτε συμπέρασμα. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το 0 λαμβάνεται ως κοινή αρχή των αξόνων μόνο όταν μεταξύ των μετρήσεων περιλαμβάνεται και η (0,0).



Σχήμα 2.2

2.2.2 Λογαριθμική κλίμακα

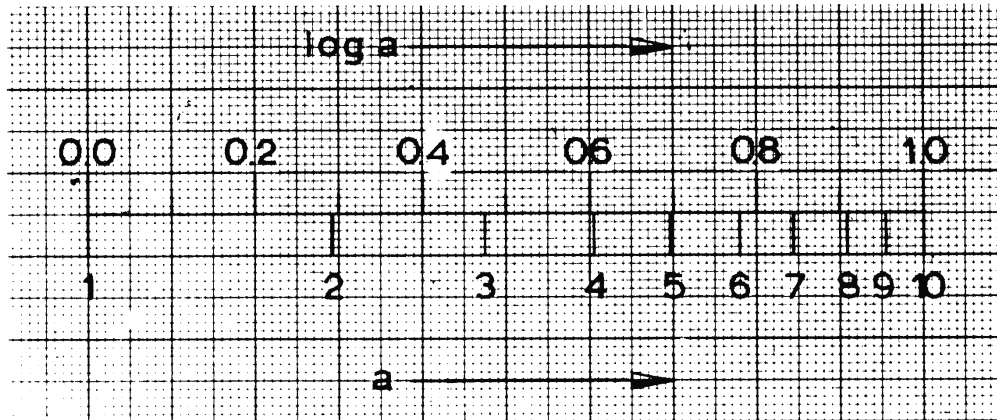
Μερικές φορές το ένα από τα δύο μεγέθη (ή και τα δύο) μεταβάλλεται μέσα σε τόσο μεγάλη περιοχή και με τέτοιο τρόπο, ώστε δεν είναι δυνατή η ευκρινής απεικόνιση της μεταβολής με την βοήθεια γραμμικής κλίμακας. Αυτό συμβαίνει συνήθως όταν τα δύο φυσικά μεγέθη συνδέονται με εκθετικές συναρτήσεις. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται συχνά η **λογαριθμική κλίμακα**.

Η κλίμακα αυτή χαράζεται ως εξής: Έστω ότι ο λογάριθμος ενός μεγέθους a μεταβάλλεται από 0 έως 1. Τότε το μέγεθος a μεταβάλλεται από 1 έως 10. Οι τιμές του $\log a$, για ακέραιες τιμές του a , δίνονται στον Πίνακα 2.2:

Πίνακας 2.2

a	$\log a$	a	$\log a$
1	0,000	6	0,779
2	0,301	7	0,846
3	0,478	8	0,904
4	0,603	9	0,955
5	0,699	10	1,000

Σε μια γραμμική κλίμακα παίρνουμε μόνο τα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές του $\log a$ του Πίνακα 2.2 και στις θέσεις αυτών σημειώνουμε τις αντίστοιχες τιμές του a . Με τον τρόπο αυτό έχει κατασκευαστεί μία κλίμακα στην οποία σημειώνονται τα a , αλλά οι αντίστοιχες αποστάσεις από την αρχή είναι ανάλογες του $\log a$ (Σχήμα 2.3). Η κλίμακα αυτή ονομάζεται λογαριθμική και παρουσιάζει χαρακτηριστικές διαφορές με την γραμμική κλίμακα:



Σχήμα 2.3

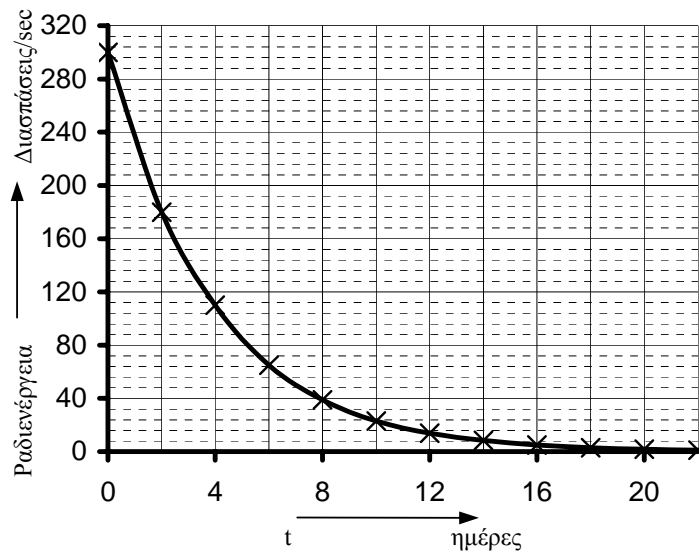
- Δε σημειώνεται ποτέ η ένδειξη 0, μία και ο αντίστοιχος λογάριθμος τείνει προς το $-\infty$.
- Η χάραξη είναι ανισοδιάστατη, με χαρακτηριστική πύκνωση στις μεγάλες ενδείξεις. Η απόσταση μεταξύ των αριθμών 2 και 3 π.χ. είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των 8 και 9 γιατί και οι αντίστοιχες διαφορές μεταξύ των λογαρίθμων είναι πολύ μεγαλύτερες.
- Μία εκθετική καμπύλη, με την βοήθεια της λογαριθμικής κλίμακας, μετατρέπεται σε ευθεία.

Για παράδειγμα, έστω σειρά μετρήσεων που δίνουν τη μεταβολή της ραδιενέργειας υλικού σε συνάρτηση του χρόνου. Στον πίνακα 2.3 σημειώνονται οι μετρήσεις αυτές για το ισότοπο $Au - 192$. Η ραδιενέργεια εκφράζεται σε διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο και ο χρόνος σε ημέρες.

Πίνακας 2.3

t (ημέρες)	Ραδιενέργεια (Διασπάσεις / sec)	t (ημέρες)	Ραδιενέργεια (Διασπάσεις / sec)
0	$300 = 3,0 \cdot 10^2$	12	$14 = 1,4 \cdot 10^1$
2	$180 = 1,8 \cdot 10^2$	14	$8,4 = 8,4 \cdot 10^0$
4	$110 = 1,1 \cdot 10^2$	16	$5 = 5,0 \cdot 10^0$
6	$65 = 6,5 \cdot 10^1$	18	$3 = 3,0 \cdot 10^0$
8	$39 = 3,9 \cdot 10^1$	20	$1,8 = 1,8 \cdot 10^0$
10	$23 = 2,3 \cdot 10^1$	22	$1,1 = 1,1 \cdot 10^0$

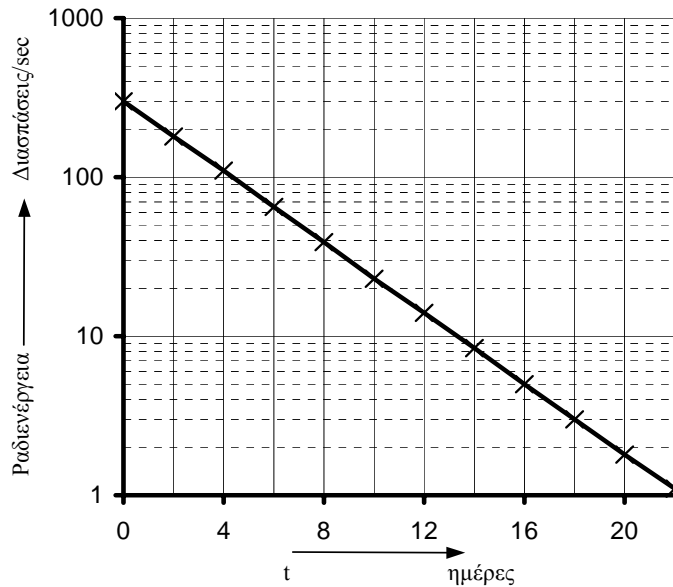
Παρατηρείται ότι, εάν για τη γραφική παράσταση του φαινομένου αυτού χρησιμοποιηθεί γραμμική κλίμακα (Σχήμα 2.4), θα σημειωθούν με την ίδια ακρίβεια οι μετρήσεις και των τριών περιοχών που διακρίνονται στον πίνακα 2.3. Δηλ. η σχετική ακρίβεια με την οποία σημειώνονται οι τελευταίες χρονικά μετρήσεις είναι πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη για τις πρώτες.



Σχήμα 2.4

Αν όμως οι τιμές της ραδιενέργειας σημειωθούν σε λογαριθμική κλίμακα (Σχήμα 2.5) η σχετική ακρίβεια των μετρήσεων είναι πάντα η ίδια.

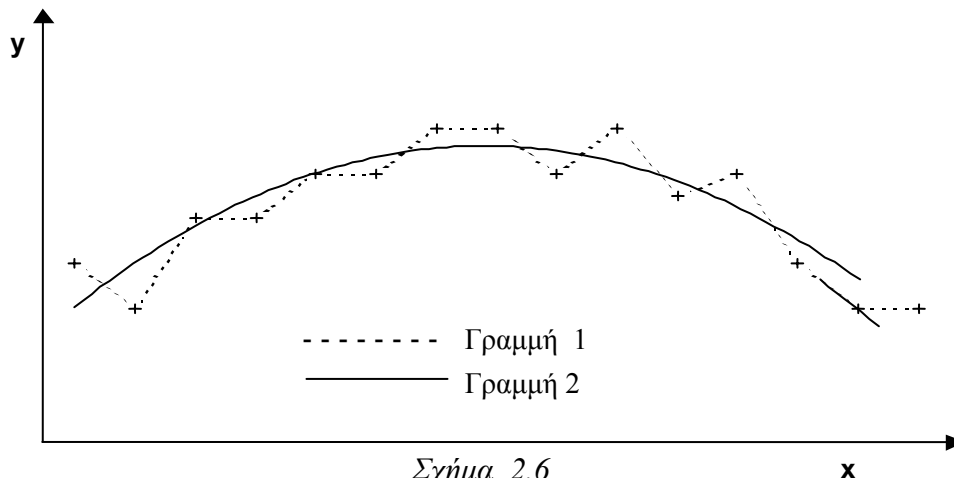
Το χαρτί που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό (Σχήμα 2.5), δηλ. το χαρτί με τη μία κλίμακα λογαριθμική και την άλλη γραμμική, ονομάζεται **ημιλογαριθμικό**.



Σχήμα 2.5

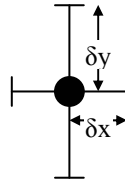
2.2.3 ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατά την χάραξη της γραφικής απεικόνισης για τη συνάρτηση: $y = f(x)$ δεν είναι απαραίτητο η καμπύλη να διέρχεται από όλες τις μετρήσεις. Συνήθως τα πειραματικά αποτελέσματα, ακόμα και τα κατά το δυνατόν πιο αξιόπιστα, δε βρίσκονται ακριβώς πάνω σε μια ομαλή καμπύλη. Αν π.χ. χαράξουμε τη καμπύλη που περνά από όλα τα σημεία του σχ.2.6, θα προκύψει η εστιγμένη γραμμή (1). Η εστιγμένη καμπύλη είναι εντελώς λάθος γιατί δείχνει ότι, στα σημεία αυτά, το μετρούμενο μέγεθος αλλάζει αλματωδώς κάποιες ιδιότητες του με αποτέλεσμα το διάγραμμα τελικά να μην αντιπροσωπεύει κανένα νόμο(η κλίση, π.χ. και το μέγεθος που αντιπροσωπεύει αλλάζει ακαριαία) Η σωστή καμπύλη φαίνεται στο ίδιο διάγραμμα και είναι η γραμμή (2). Η γραμμή αυτή δε διέρχεται ακριβώς από τις μετρήσεις αλλά ανάμεσά τους έτσι ώστε να είναι συνεχής και ομαλή.



Σχήμα 2.6

Εξάλλου φέροντας τα σημεία στο σχήμα μας δεν αναφερθήκαμε καθόλου στα σφάλματα που όπως είπαμε στην άσκηση 1 συνοδεύουν κάθε μέτρηση και κάθε πειραματικό αποτέλεσμα. Τα σφάλματα πρέπει πάντα να χαράσσονται στο διάγραμμα για κάθε σημείο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7 όπου τα δx και τα δy είναι τα σφάλματα (ανάγνωσης, μεσης τιμής η σύνθετα) ενώ το μέγεθος των γραμμών ανταποκρίνεται στο μέγεθος των σφαλμάτων σύμφωνα με τις χρησιμοποιούμενες για τα x και y κλίμακες.

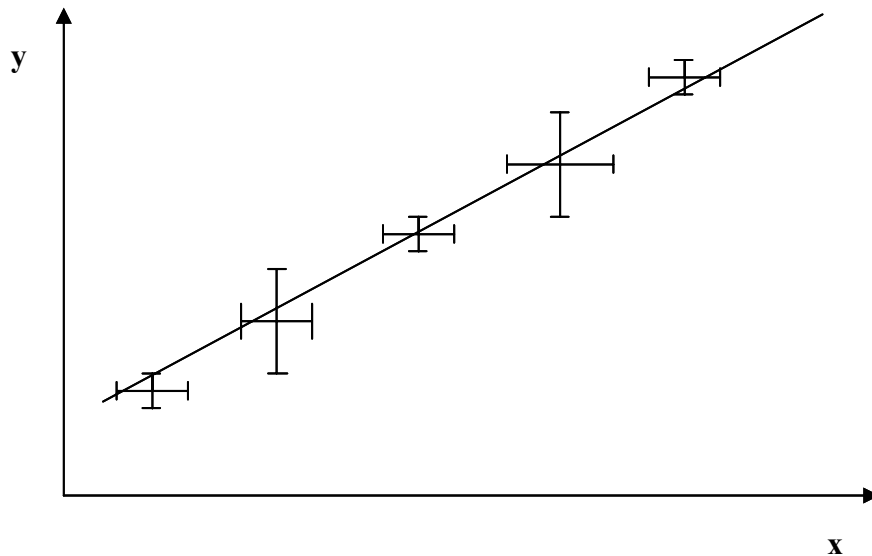


Σχήμα 2.7

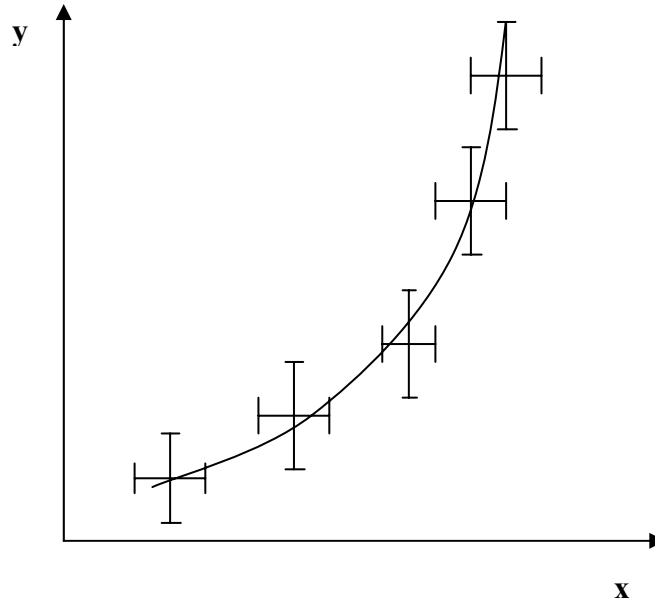
Για τη χάραξη λοιπόν της καμπύλης πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι εξής βασικές αρχές:

- Η καμπύλη $y=f(x)$ πρέπει να είναι συνεχής και ομαλή.
- Η καμπύλη χαράσσεται έτσι ώστε, όσες μετρήσεις δε βρίσκονται πάνω σε αυτή, να φαίνονται και από τις δύο πλευρές της κατά το δυνατόν συμμετρικά.
- Η καμπύλη πρέπει να διέρχεται όσο το δυνατόν μέσα από τις περιοχές σφαλμάτων των μετρήσεων. Σε περίπτωση που μία μέτρηση δεν συνδέεται με τις υπόλοιπες, επειδή βρίσκεται πολύ μακριά από αυτές και από την πιθανή καμπύλη, δεν λαμβάνεται υπόψη κατά τη χάραξη παρά το γεγονός ότι σημειώνεται.

Έτσι οι καμπύλες χαράσσονται όπως φαίνονται στα σχήματα 2.8 και 2.9



Σχήμα 2.8



Σχήμα 2.9

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

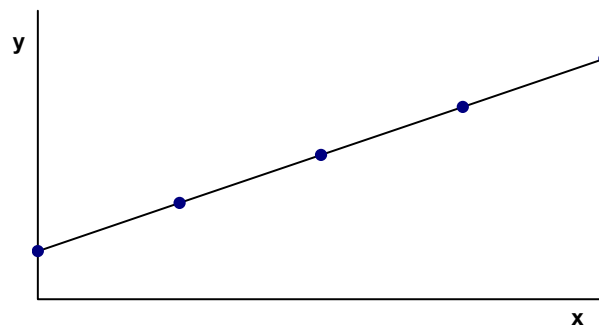
Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως μπορούμε να χαράξουμε γραφική παράσταση έχοντας ένα πίνακα τιμών. Θα ασχοληθούμε τώρα με την χάραξη ευθειών, αφού πολύ συχνά στο Εργαστήριο οι σχέσεις που έχουμε είναι ή τις κάνουμε γραμμικές.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο ποσότητες x , y οι οποίες γνωρίζουμε ότι συνδέονται με μια γραμμική σχέση της μορφής:

$$y = A + Bx \tag{2.1}$$

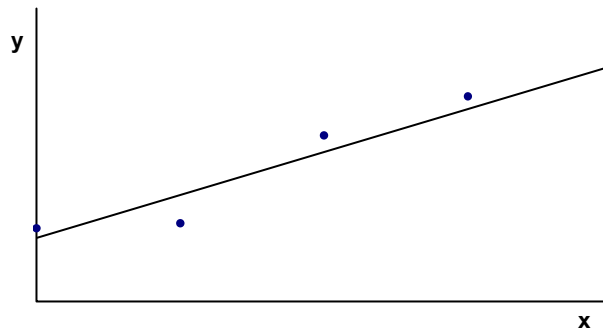
όπου τα A και B είναι σταθερές (το B είναι η κλίση της ευθείας ενώ το A είναι η τεταγμένη επί την αρχή). Ένα παράδειγμα δύο τέτοιων ποσοτήτων που συνδέονται με γραμμική σχέση είναι η ταχύτητα u (εξαρτημένη μεταβλητή) και ο χρόνος t (ανεξάρτητη μεταβλητή) στην πτώση σώματος, αφού ως γνωστό ισχύει η σχέση: $u = u_0 + gt$

Αν τώρα καταφέραμε να μετρήσουμε για τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_N της ανεξάρτητης μεταβλητής τις αντίστοιχες τιμές y_1, y_2, \dots, y_N της εξαρτημένης μεταβλητής με απόλυτη ακρίβεια, τότε θα περιμέναμε ότι τα σημεία (x_i, y_i) θα βρίσκονταν ακριβώς πάνω σε μία ευθεία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.10

Προφανώς λόγω σφαλμάτων στις μετρήσεις θα έχουμε κάτι, όπως το σχήμα:
Υπάρχουν τώρα δύο ερωτήματα στα οποία θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε.



Σχήμα 2.11

A) Γνωρίζοντας ότι οι μεταβλητές μας y και x συνδέονται με γραμμική σχέση, ποιά είναι η ευθεία γραμμική που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα; (δηλ. ποιές είναι οι τιμές των σταθερών A και B);

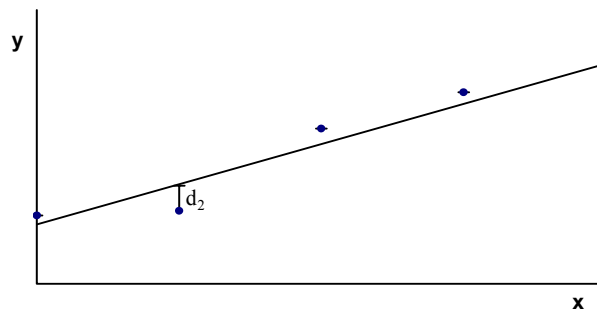
B) Πόσο καλά “συμμορφώνονται” οι μετρήσεις (x_i, y_i) με την γραμμική σχέση που περιμέναμε να έχουν;

2.3.1 Χάραξη της καλύτερης ευθείας

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα προφανώς μπορεί να δοθεί πρακτικά (χάραξη, κατ’εκτίμηση, ευθείας που να ανταποκρίνεται στις παραπάνω αρχές) με προφανή τα μειονεκτήματα του τρόπου αυτού. Για να αποφύγουμε αυτά τα μειονεκτήματα εφαρμόζουμε αναλυτικό τρόπο για την χάραξη ευθειών.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι στις μετρήσεις της ποσότητας x τα σφάλματα είναι αμελητέα, ενώ όλες οι αντίστοιχες της y γίνονται με το ίδιο σφάλμα δy . Η ευθεία π.χ του σχ.(2.12), που θα χαράξουμε πρέπει να περνάει όσο πιο κοντά γίνεται από τα πειραματικά σημεία. Άρα πρέπει να προκύψουν τιμές για τα A και B , ώστε να ελαχιστοποιήσουμε ταυτόχρονα τις κατακόρυφες αποστάσεις (d_i) των πειραματικών σημείων από την ευθεία. Πρέπει, δηλαδή, να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$q = \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2 \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.12

Γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο μιας συνάρτησης βρίσκεται απο τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου και επειδή εδώ έχουμε δύο μεταβλητές (τις A και B) πρέπει να μηδενιστούν ταυτόχρονα οι μερικές παράγωγοι δηλ.:

$$\frac{\partial q}{\partial A} = 0 \Rightarrow AN + B \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$\frac{\partial q}{\partial B} = 0 \Rightarrow A \sum_{i=1}^N x_i + B \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Απο το παραπάνω σύστημα παίρνουμε σαν λύσεις των A και B τα:

$$A = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (2.3)$$

$$B = \frac{N \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (2.4)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν τις καλύτερες εκτιμήσεις για τις σταθερές A και B με βάση τις μετρήσεις (x_i, y_i) που έχουμε. Επειδή ο υπολογισμός βασίστηκε στην ελαχιστοποίηση ενός αθροίσματος τετραγώνων γι' αυτό και η μέθοδος ονομάζεται **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων**.

2.3.2 Σφάλματα των σταθερών A και B

Είναι φυσικό τώρα να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα σφάλματα στις σταθερές A και B . Χρησιμοποιώντας τη διάδοση των σφαλμάτων και έχοντας κατά νου τη βασική υπόθεση της προηγούμενης παραγράφου ότι δηλ. τα σφάλματα στις μετρήσεις της ποσότητας x είναι αμελητέα ενώ όλες οι μετρήσεις της ποσότητας y έχουν το ίδιο σφάλμα dy μπορείτε να αποδείξετε ότι:

$$\delta A = dy \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}} \quad (2.5)$$

$$\delta B = \delta y \sqrt{\frac{N}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}} \quad (2.6)$$

Αυτό που απομένει τώρα είναι να εκτιμήσουμε το σφάλμα δy . Αυτό είναι πολύ εύκολο αφού έχουμε βρεί τις τιμές των A και B και μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαφορές των πειραματικών απο τις θεωρητικές τιμές του y. Έτσι το σφάλμα θα είναι:

$$\delta y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2} \quad (2.7)$$

2.3.3 Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης

Προφανώς μπορούμε να απαντήσουμε ποιοτικά στο δεύτερο ερώτημα, δηλ. το κατά πόσο καλά οι μετρήσεις μας (x_i, y_i) συμμορφώνονται με την γραμμικότητα που περιμέναμε, εξετάζοντας πόσο μακριά ή κοντά είναι τα σημεία μας στην ευθεία που έχουμε χαράξει με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Εκτός όμως απο αυτό το ποιοτικό κριτήριο υπάρχει και ένα ποσοτικό κριτήριο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και είναι ο αριθμός:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right]}} \quad (2.8)$$

Ο δείκτης r είναι μια αδιάστατη ποσότητα που ονομάζεται **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης** και οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι ανάμεσα στο -1 και στο +1. Μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχθεί ότι όσο πιο κοντά στο +1 ή στο -1 είναι η τιμή του r τόσο καλύτερα ταιριάζουν οι μετρήσεις στην ευθεία και άρα υποστηρίζουν γραμμική σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Αντίθετα, όσο πιο κοντά πηγαίνουμε στο μηδέν, τόσο τα πειραματικά σημεία είναι μακριά απο την ευθεία που χαράξαμε. Αναρωτηθείτε, με τη βοήθεια και της σχέσης (2.8), γιατί το “±1” και το “0” “0” θεωρούνται κριτήρια για τις ακραίες περιπτώσεις.

Αριθμητικό παράδειγμα

Για παράδειγμα, ας υποθεθεί ότι στα άκρα ωμικής αντίστασης εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού U και μετράται το ρεύμα i που τη διαρρέει. Λαμβάνονται 11 διαφορετικές μετρήσεις καταγεγραμμένες στον Πίνακα 2.4. Η γραφική παράσταση των μετρήσεων αυτών δίνεται στο Σχ. 2.13. Πριν χαραχθεί η καμπύλη, η θεωρητική επεξεργασία μπορεί να έχει δώσει μιά σχέση γραμμική ή μη γραμμική μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Πίνακας 2.4

α/α	U (Volt)	i (A)	U ² (Volt) ²	i ² (A) ²	Ui (Volt.A)
1	0,00	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,32	0,020	0,1024	0,0040	0,0064
3	0,83	0,030	0,6889	0,0090	0,0249
4	1,00	0,040	1,0000	0,0016	0,0400
5	1,20	0,048	1,4400	0,0023	0,0576
6	1,48	0,054	2,1904	0,0029	0,0799
7	1,50	0,060	2,2500	0,0036	0,0900
8	1,70	0,067	2,8900	0,0045	0,1139
9	1,85	0,070	3,4225	0,0049	0,1295
10	1,90	0,078	3,6100	0,0061	0,1482
11	2,40	0,090	5,7600	0,0081	0,2160
ΣU=14.18 Volt Σi=0.557 A (Σi) ² =0.3103 A ² ΣU ² =23.3542 Volt ² Σi ² =0.03532 A ² Σ(U.i)=0.9064 Volt.A					

Στην περίπτωση γραμμικής σχέσης, (U=A+Bi για το παράδειγμα) υπολογίζονται με βάση τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τα χαρακτηριστικά της ευθείας (κλίση B και τετμημένη A) από τις σχέσεις (2.4) και (2.3).

$$A = -0.0551 \text{ Volts}$$

$$B = 26,5654 \Omega \quad (= 26,5654 \text{ V/A})$$

Από τις σχέσεις (2.7), (2.5) και (2.6) βρίσκονται τα σφάλματα υπολογισμού των μεγεθών, τα οποία στο παράδειγμα αυτό είναι:

$$\delta U = \pm 0,1 \text{ Volt}, \quad \delta A = \pm 0,2 \text{ Volt} \quad \text{και} \quad \delta B = \pm 1 \Omega$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η μέτρηση της τάσης έχει γίνει με σφάλμα $\pm 0.1V$ και έχει υπολογισθεί ότι η ωμική αντίσταση R είναι ίση προς:

$$R = (27 \pm 1) \Omega.$$

2.7 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ

Συχνά σχέσεις μη γραμμικές μεταξύ δύο μεταβλητών, μετατρέπονται σε γραμμικές με κάποιο τέχνασμα για να είναι ευκολότερη η μελέτη των πειραματικών αποτελεσμάτων. Αυτό συμβαίνει π.χ. στην περίπτωση της σχέσης μεταξύ της έντασης I της ακτινοβολίας γ (που διέρχεται από μεταλλικό φύλλο υλικού με γραμμικό συντελεστή απορρόφησης μ) με το πάχος x του φύλλου. Ισχύει τότε η σχέση:

$$I_x = I_0 \exp(-\mu x)$$

όπου I₀ και I_x είναι η ένταση της ακτινοβολίας πριν και μετά την έξοδο της από το υλικό,. Η σχέση αυτή είναι εκθετική και με τη χάραξή της δεν μπορεί να υπολογισθεί ο συντελεστής απορροφήσεως μ. Αντίθετα, αν η σχέση αυτή μετατραπεί στην:

$$y = \ln \frac{I_0}{I_x} = \mu x$$

και ληφθεί ως νέα εξαρτημένη μεταβλητή y ο φυσικός λογάριθμος, ενώ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το πάχος x , προκύπτει γραμμική σχέση μεταξύ των x και y με κλίση ίση με μ .

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ που μας δίνει την περίοδο ταλά-
ντωσης (T) μιάς μάζας (M) αναρτημένης σε ελατήριο σταθεράς k . Αν μετατρέψουμε τη
σχέση αυτή στην $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\sqrt{M}$ έχουμε μια γραμμική σχέση με εξαρτημένη μεταβλητή
 $y=T$, ανεξάρτητη μεταβλητή $x=\sqrt{M}$ και σταθερά $B=\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$.

Σημείωση : Ισοδύναμη επιλογή είναι να μετατρέψουμε τη σχέση σε : $T^2 = \frac{4\pi^2}{k}M$ και
να επιλέξουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το M και εξαρτημένη το T^2 , οπότε η σταθερά B
είναι : $B = \frac{4\pi^2}{k}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: 1) Στις γραφικές παραστάσεις πρέπει να σημειώνονται οπωσδήποτε τα
πειραματικά σημεία. Η κλίση και η τεταγμένη επι την αρχή, όταν πρόκειται για ευθεία,
υπολογίζονται σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

2) Όταν χρησιμοποιούμε τα A, B που υπολογίζουμε απο τη μέθοδο των
ελαχίστων τετραγώνων για να βρούμε μια φυσική ποσότητα, θα υπολογίζουμε πάντα τα
σφάλματα δA και δB ώστε απο τη θεωρία της διάδοσης σφαλμάτων να βρίσκουμε και το
σφάλμα της ζητούμενης φυσικής ποσότητας.

2.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κατά τη θέρμανση μάζας νερού η θερμοκρασία της μεταβάλλεται με το χρόνο
σύμφωνα με τη σχέση $\theta = \theta_0 + \frac{U \cdot I}{J \cdot m \cdot c} \cdot t$. ($J=4,18 \frac{Joule}{cal}$) Κατά τη διάρκεια ενός
πειράματος διατηρώντας σταθερό τον όρο $\frac{U \cdot I}{J \cdot m \cdot c}$, μετρήθηκαν οι τιμές θερμοκρασίας
που φαίνονται στον Πίνακα 2.5 για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Να παρασταθεί
γραφικά η σχέση $\theta = \theta(t)$ και να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας. Κατά τη
χάραξη να ληφθούν υπόψη υπολογισμοί της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων

Πίνακας 2.5

t (min)	θ (°C)
0	14.6
4	18.0
6	19.8
8	21.5
10	23.2

2. Στον Πίνακα 2.6 δίνονται οι τιμές της γωνίας στροφής του επιπέδου πολώσεως θ , για διαφορετικές τιμές της συγκεντρώσεως C υδατικού διαλύματος σακχάρου Η γωνία θ έχει μετρηθεί τρεις φορές για κάθε τιμή της συγκεντρώσεως. Να χαραχθεί το διάγραμμα $\bar{\theta} = f(C)$ και να σημειωθούν οι αντίστοιχες τιμές του σφάλματος $\Delta\theta$. Κατά τη χάραξη να ληφθούν υπόψη υπολογισμοί της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

Πίνακας 2.6

θ (μοίρες)	C (%κ.ό)	θ (μοίρες)	C (%κ.ό)
20.40	3.42	30.10	17.10
21.50		29.35	
22.10		28.75	
24.55	8.55	38.00	25.65
25.00		37.55	
23.50		37.85	

3. Έχει διαπιστωθεί ότι πολλές βιολογικές παράμετροι σχετίζονται με το μέγεθος ενός ζώου σύμφωνα με τη σχέση:

$$Y = aM^b$$

όπου Y η συγκεκριμένη μεταβλητή (π.χ η μάζα του λίπους ενός ζώου, ο μέσος χρόνος ζωής του κ.ο.κ.), M η συνολική μάζα του ζώου και a, b δύο σταθερές. Μια τέτοια εξίσωση ονομάζεται **αλλομετρική**.

Στον Πίνακα 2.7 δίνονται για διάφορα είδη ζώων η μάζα τους (M) και ο μέσος χρόνος ζωής τους (T).

Πίνακας 2.7

ΖΩΟ	M (kgr)	T (έτη)
Ποντίκι	0.02	3.5
Ινδικό Χοιρίδιο	0.26	7.5
Αλεπού	3	14
Κατσίκα	34	18
Άνθρωπος	63	70
Γορίλλας	190	36
Ελέφαντας	3500	70

- i) Υπολογίστε τις σταθερές a, b.
- ii) Υπολογίστε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r.
- ii) Προβλέψτε το μέσο χρόνο ζωής για την τίγρη με μέση μάζα 99 kgr.

4. Στον πίνακα 2.8 δίνεται η ένταση I_x ακτινοβολίας γ σε συνάρτηση με το πάχος x. Να χαραχτεί σε χιλιοστομετρικό χαρτί κατάλληλη καμπύλη, ώστε να βρεθεί ο συντελεστής απορροφήσεως μ και το σφάλμα $\delta\mu$.

Πίνακας 2.8

I_x (κρούσεις / min)	x (mm)
15195	0,00
14208	0,90
12899	3,50
10647	6,25
9205	9,75

5. Στόν Πίνακα 2.9 φαίνονται εξισώσεις απο διάφορα πεδία της Φυσικής. Για καθεμία απ' αυτές δίνονται η ανεξάρτητη, η εξαρτημένη μεταβλητή και οι σταθερές.

Πίνακας 2.9

Εξίσωση	Εξαρτημένη Μεταβλητή	Ανεξάρτητη Μεταβλητή	Σταθερές
$F = \mu N$	F	N	μ
$u = u_0 + gt$	u	t	u_0, g
$N = N_0 e^{-\lambda t}$	N	t	N_0, λ
$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$	v	u	f
$T_w = T_c - kR^2$	T_w	R	T_c, k

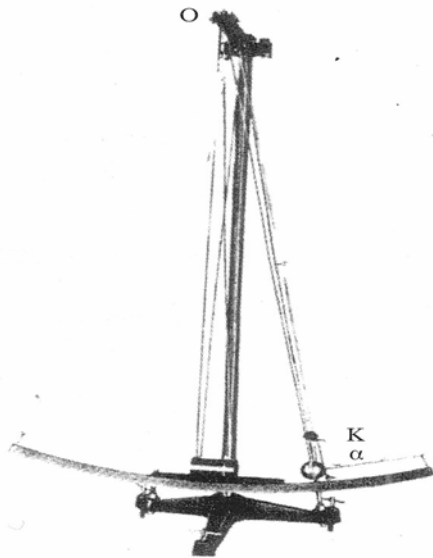
A) Πως θα κάνουμε γραμμικές τις παραπάνω εξισώσεις; Σχεδιάστε πρόχειρες γραφικές παραστάσεις.

B) Πως συνδέονται η κλίση και η τεταγμένη επί την αρχή με τις σταθερές κάθε εξίσωσης.;

4. Με τα δεδομένα της άσκησης 4 χαράζετε τη γραφική παράσταση σε ημιλογαριθμικό χαρτί. Να βρεθεί το πάχος ημιαπορρόφησης $x_{1/2}$ ($x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$) και το σφάλμα $\delta x_{1/2}$.

5. Μετατρέψτε κατάλληλα τις παρακάτω σχέσεις, ώστε να γίνουν γραμμικές. Ποια μεγέθη υπολογίζονται από το διάγραμμα και πως;

Μη γραμμική σχέση	Ανεξάρτητη μεταβλητή	Εξαρτημένη μεταβλητή	Γραμμική σχέση	Μεγέθη στους άξονες
$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$	ℓ	T		
$J=J_0e^{-\mu x}$	x	J		
$s=\frac{1}{2}at^2$	t	s		
$h = \frac{4\gamma}{\rho \cdot g \cdot d}$	d	h		



8. Ομάδα φοιτητών πήρε σειρά 10 μετρήσεων, (που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα) σε απλό εκκρεμές ($x=OK$, όπου K το κέντρο μάζας σφαίρας-νήματος). Να συμπληρωθούν οι υπόλοιπες γραμμές και στήλες του πίνακα. Να κάνετε το διάγραμμα : $x=f(\frac{T^2}{4\pi^2})$. Στο διάγραμμα να φαίνονται και οι περιοχές σφάλματος για τα μεγέθη των 2 αξόνων (αν οι κλίμακες το επιτρέπουν). Να υπολογιστεί η κλίση και η τιμή του g . $g=..... \frac{m}{s^2}$ Να βρεθεί το σφάλμα δg του g . $\delta g = \pm \frac{m}{s^2}$ Να γραφεί το τελικό αποτέλεσμα με τη μορφή: $g \pm \delta g = \frac{m}{s^2}$

(Συμβουλευθείτε το Παράρτημα Α. Θυμηθείτε τη σχέση: $x = \frac{g}{4\pi^2} T^2 - \alpha$)

α/α	x (cm)	$10T$ (s)	T (s)	T^2 (s ²)	$T^2/4\pi^2$ (s ²)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

9. Επιδιώκεται ο υπολογισμός της σταθερής k ελατηρίου με 2 μεθόδους :

α) **στατική**: μετρώνται οι τιμές επιμήκυνσης ($\Delta\ell$) του ελατηρίου όταν αναρτούνται σώματα με διαφορετική μάζα (m). (Νόμος Hooke: $F=k \cdot \Delta\ell$)

β) **δυναμική** : μετρώνται οι τιμές περιόδου (T) ταλάντωσης των σωμάτων για τα σώματα, με μικρή απομάκρυνσή τους από τη θέση ισορροπίας. (Αντίστοιχη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}). \text{ Και στις 2 περιπτώσεις το ελατήριο θεωρείται αβαρές, ενώ στη μέθοδο$$

(β) τα σώματα έχουν αμελητέες διαστάσεις.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν σε ελατήριο (η διαφορετικά ελατήρια).

m(gr)	B(N)	x (cm)	10T(s)	T (s)	T ² (s ²)
50		1,0	1,64		
100		2,6	1,67		
150		4,0	1,84		
200		5,4	2,16		
250		6,2	2,49		
300		8,0	2,70		
350		9,0	2,89		
400		10,0	3,07		
450		11,4	3,25		
500		12,8	33,9		

Να γίνουν τα κατάλληλα γραμμικά διαγράμματα για τις 2 μεθόδους από τα οποία να βρεθεί η σταθερή k. Να συγκριθούν οι δυο τιμές της k. Πιστεύετε ότι οι δυο μέθοδοι εφαρμόστηκαν στο ίδιο ελατήριο; Ποια μέθοδος πιστεύετε ότι είναι πιο αξιόπιστη και γιατί;

10. Ακτινοβολία γ διαδίδεται στον αέρα($x=0\text{mm}$) και μέσα σε πλάκες ενός υλικού

I κρ/min)	x (mm)	I (κρ/min)	x (mm)
151	0,00	78	3,29
148	0,00	86	3,28
156	0,00	79	3,26
104	1,87	81	4,73
112	1,92	77	4,72
108	1,91	70	4,69
90	2,95	53	12,58
85	2,99	59	12,54
88	2,98	62	12,59

πάχους x. Η ένταση I και το πάχος μετρήθηκαν 3 φορές για κάθε περίπτωση και τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα. Δίνεται η σχέση :

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

(μ είναι ο γραμμικός συντελεστής απορρόφησης του υλικού. Να γίνει κατάλληλο γραμμικό διάγραμμα στο οποίο να φαίνονται τα δI και δx από το οποίο να υπολογιστεί το μ .

11. Κατά τη θέρμανση μάζας υγρού με τη βοήθεια ηλεκτρικής αντίστασης η αύξηση της θερμοκρασίας $\theta(t)$ με το χρόνο δίνεται από τη σχέση: $\theta(t)=\theta_0+\frac{A}{c}t$ (το μέγεθος

A συνδέεται με τα ηλεκτρικά μεγέθη και τη μάζα του υγρού). Για ίδιες ποσότητες

νερού και άγνωστου υγρού δίνονται οι μετρήσεις $\theta(t)$ με ίδια ηλεκτρικά μεγέθη ($A =$ σταθερό) για τα 2 υγρά.

	Νερό	Υγρό
t (min)	θ (°C)	θ (°C)
0	18,1	21,0
1	18,7	21,5
2	19,3	21,9
3	19,8	22,5
4	20,3	23,2
5	20,8	23,9
6	21,3	24,5
7	21,8	25,4
8	22,4	26,0
9	23,0	26,5

Να γίνουν οι καμπύλες: $\theta(t)$ στο ίδιο διάγραμμα και να υπολογιστούν οι κλίσεις τους. Τι εκφράζει η κλίση μιας τέτοιας καμπύλης; Αν θεωρήσουμε γνωστή την ειδική θερμότητα c του νερού ($c=1 \frac{cal}{gr \cdot ^\circ C}$), να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή για το άγνωστο υγρό.

$$c_x \pm \delta c_x = \dots \dots \frac{cal}{gr \cdot ^\circ C}$$

12. Οι τιμές του πίνακα αναφέρονται σε κινητό. Η σχέση: $s=30,77+0,64t$ και $\sigma_A = \pm 0,08$ και $\sigma_B = \pm 0,015$ (σε μονάδες του πίνακα, που προέκυψαν με τη μέθοδο

t (min)	s (m)
0	31,0
1	31,5
2	31,9
3	32,5
4	33,2
5	33,9
6	34,5
7	35,4
8	36,0
9	36,5

ελαχίστων τετραγώνων) να χρησιμοποιηθούν για την χάραξη της καμπύλης: $s=f(t)$ και τον υπολογισμό της ταχύτητας v και του σφάλματος σ_v του κινητού στο S.I. Το τελικό αποτέλεσμα να γραφεί με την μορφή :

$$v \pm \sigma v = \dots \dots$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) J. R. Taylor, *An Indroduction to Error Analysis*. University Science Books 1982
- 2) Δ. Μεντζαφός, Ι. Γαροφαλάκης, Ν. Τσαμπουράκης, Ν. Γ. Χρυσοχοΐδης, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Ανώτατη Γεωπονική Σχολή Αθηνών 1982.
- 3) Δ. Μεντζαφός, Α. Χούντας, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Ανώτατη Γεωπονική Σχολή Αθηνών 1997.
- 4) *Εργαστήριο Φυσικής Εισαγωγικά μαθήματα για τα σφάλματα*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής 1988.
- 5) L. Kirkup, *Experimental Methods*. J. Wiley & Sons 1994.
- 6) H. Lin, *Fundamentals of zoological scaling*. Am. Journal of Physics 50 Jan. 1982.