Ι Ω Α Ν Ν Η Σ Μ Α Ρ Ο Υ Λ Α Σ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΕΜΦΕ

Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Η Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

Επιμέλεια : Δρ Αδάμ Μαρία

ΕΜΠ, 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο ρόλος της Γραμμικής Άλγεβρας στις Εφαρμοσμένες Επιστήμες είναι εξαιρετικά σημαντικός. Η Γραμμική Άλγεβρα είναι το υπόβαθρο της Γραμμικής Ανάλυσης, των Διακριτών Μαθηματικών, έχει ουσιαστικές εφαρμογές στη Γεωμετρία, στη Στατιστική, στη Στοχαστική Μοντελοποίηση και είναι ιδιαίτερα εύχρηστη με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Η προφανής ανάγκη παρουσίασης της προπτυχιακού επιπέδου ύλης της Γραμμικής Άλγεβρας σε e-book, όπου οι έννοιες θα παρουσιάζονται απλοποιημένες, αλλά σε μαθηματικά πλαίσια, θα βοηθήσει γενικά όλους τους φοιτητές του Πολυτεχνείου. Ένα τέτοιο βιβλίο πρέπει να είναι διαλεκτικό, περιγραφικό και να περιέχει βασικά παραδείγματα.

Η ύλη κατανέμεται σε έξι κεφάλαια. Τα τρία πρώτα κεφάλαια αναφέρονται στην άλγεβρα πινάκων, στις ορίζουσες και στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων. Τα δε επόμενα τρία κεφάλαια περιέχουν τις πλέον σημαντικές έννοιες, όπως τους διανυσματικούς χώρους, τις γραμμικές απεικονίσεις και τη θεωρία των χαρακτηριστικών μεγεθών.

Στο τέλος του βιβλίου παρουσιάζεται και το πρόγραμμα MATLAB, ιδιαίτερα απαραίτητο και φιλικό με το περιεχόμενο του βιβλίου, για να εξοικειωθεί ο αναγνώστης με τις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας χρησιμοποιώντας τον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Αθήνα, Οκτώβριος 2005

Ο συγγραφέας
Ιωάννης Μαρουλάς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Τι είναι πίνακας, ποιες ιδιότητες έχουν, ποιος είναι ο λογισμός των πινάκων και πώς επεκτείνεται στους σύνθετους πίνακες, είναι το κύριο αντικείμενο του πρώτου κεφαλαίου.

1.1. Ορισμοί

Όπως εμπειρικά κατανοείτε με την ονομασία **πίνακας τύπου μ×ν** εννοούμε μν πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς μεταξύ δύο αγκυλών που έχουν διαταχθεί ορθογώνια σε μ γραμμές και ν στήλες. Παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

είναι τύπου 2×3. Οι αριθμοί $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{23}$ ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα Α και έχουμε επιπλέον σημειώσει σ' αυτούς με δείκτες τις θέσεις που κατέχουν. Ο πρώτος δείκτης ονομάζεται **δείκτης γραμμής** και ο δεύτερος **δείκτης στήλης**. Γι' αυτό ο πίνακας Α στην (1.1) γράφεται και με την μορφή:

$$A = \left[\alpha_{ij}\right]_{i,j=1}^{2,3}$$

Αν το πλήθος των γραμμών και των στηλών σ' ένα πίνακα είναι το ίδιο (δηλ. μ = ν), ο πίνακας ονομάζεται **τετραγωνικός τάξεως μ**. Αν ο πίνακας έχει μόνο μία στήλη (ν = 1) ή μόνο μία γραμμή (μ = 1), θα τον ονομάζουμε **διάνυσμα**. Δύο ή περισσότεροι πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, θα λέμε ότι είναι του **ίδιου τύπου**. Δύο πίνακες του ίδιου τύπου, όταν τα στοιχεία τους στις ίδιες θέσεις είναι ίσα, ονομάζονται **ίσοι**. Παράδειγμα, από την ισότητα των τετραγωνικών πινάκων

$$\begin{bmatrix} x^2 - 2x & 1 \\ 2 & x^2 - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & y \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

συμπεραίνουμε $y = 1$ και από τις εξισώσεις $x^2 - 2x = -1$ και $x^2 - x = 0$ έχουμε $x = 1$.

Σε τετραγωνικό πίνακα τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ ονομάζονται **διαγώνια** και όλα μαζί αποτελούν την **κύρια διαγώνιο** του πίνακα. Οι πίνακες της μορφής

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & & 0 & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & & O \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \alpha_{\nu 1} & \dots & & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & & O \\ & \alpha_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **άνω τριγωνικός**, **κάτω τριγωνικός** και **διαγώνιος** πίνακας. Οι διαγώνιοι πίνακες σημειώνονται και ως $\operatorname{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu})$. Ειδικότερα, ο διαγώνιος πίνακας με ν γραμμές και ν στήλες

$$\begin{bmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται I_ν.

Ο πίνακας τύπου 3×2

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{bmatrix}$$

που προκύπτει από τον πίνακα (1.1) όταν οι γραμμές γίνουν στήλες, ονομάζεται **ανάστροφος** και συμβολίζεται A^T. Είναι προφανές ότι $(A^T)^T = A$. Από την ισότητα

$$\mathbf{A = A^T}$$

συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A είναι τετραγωνικός (γιατί;) και τα ζευγάρια των στοιχείων που είναι σε συμμετρικές θέσεις ως προς την κύρια διαγώνιο είναι ίσα, δηλαδή: $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31}$, … , $\alpha_{1\nu} = \alpha_{\nu 1}$, $\alpha_{23} = \alpha_{32}$, … , $\alpha_{2\nu} = \alpha_{\nu 2}$, … , $\alpha_{\nu-1,\nu} = \alpha_{\nu,\nu-1}$. Οι πίνακες με την ιδιότητα αυτή ονομάζονται **συμμετρικοί**.

Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ i & 2-i \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 2+i \end{bmatrix}$$

ονομάζονται **συζυγείς** και γι' αυτό χρησιμοποιείται ο συμβολισμός αυτός στον δεύτερο πίνακα. Οι πράξεις *συζυγίας* και *αναστροφής* μαζί σημειώνονται με τον πίνακα

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A)^T} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 2+i \end{bmatrix}$$

Αν $A = A^*$, ο τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **ερμιτιανός.**

1.2. Πράξεις πινάκων

Η *αριθμητική* των πινάκων περιορίζεται στις πράξεις αθροίσματος πινάκων, γινομένου αριθμού επί πίνακα, διαφοράς πινάκων και γινομένου πινάκων.

Άθροισμα πινάκων

Αν $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ είναι πίνακες τύπου μ×ν, τότε το **άθροισμα** των A και B είναι ένας πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ που ορίζεται από το άθροισμα των στοιχείων των A και B που έχουν τις ίδιες θέσεις:

$$\boldsymbol{\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \qquad 1 \leq i \leq \mu\ , \qquad 1 \leq j \leq \nu}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορούν να προστεθούν.

Παράδειγμα 1.1 Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

τότε

$$\Gamma = A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & -3+2 & 5+3 \\ 6+2 & -5+1 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$ □

Γινόμενο αριθμού επί πίνακα

Αν $A = [\alpha_{ij}]$ είναι πίνακας τύπου μ×ν και k είναι ένας αριθμός, τότε το γινόμενο του A επί k είναι ο πίνακας kA με στοιχεία το γινόμενο κάθε στοιχείου του A επί τον αριθμό k.

Παράδειγμα 2.1 Αν k = -2 και

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

τότε

$$(-2)A = \begin{bmatrix} (-2).2 & (-2).0 \\ (-2).(-1) & (-2).3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$ □

Αν k = -1, ο πίνακας (-1)A = -A ονομάζεται **αντίθετος** του A. Έτσι για τους πίνακες A και B του ίδιου τύπου ορίζουμε την **διαφορά** τους

$$A - B = A + (-1)B$$

και το αποτέλεσμα είναι ο πίνακας με στοιχεία την διαφορά των ομοθέσιων στοιχείων των A , B.

Παράδειγμα 3.1 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathrm{A - B} = \begin{bmatrix} 2-2 & 3+1 & -5-3 \\ 4-3 & 2-5 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Από τις ιδιότητες των πράξεων άμεσα διαπιστώνουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες για τους πίνακες.

$$\begin{array}{ll} A + B = B + A & k(A + B) = kA + \kappa B \\ A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma & (k + \lambda)A = kA + \lambda A \\ A + O = A & k(\lambda A) = (k\lambda)A \end{array}$$

όπου με O συμβολίζουμε τον μηδενικό πίνακα (*όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν*).

Γινόμενο πινάκων

Αν ο πίνακας $A = [\, \alpha_{ij} \,]$ είναι τύπου $\mu\times\rho$ και ο πίνακας $B = [\, \beta_{ij} \,]$ είναι τύπου $\rho\times\nu$, τότε ορίζεται το **γινόμενο** του A επί B, σημειούμενο AB, και είναι ο πίνακας $\Gamma = [\, \gamma_{ij} \,]$ τύπου $\mu\times\nu$, όπου

$$\boldsymbol{\gamma_{ij}} = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{i\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{\rho j} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha_{i1}\,\beta_{1j} + \dots + \alpha_{i\rho}\,\beta_{\rho j}}$$

$$1 \le i \le \mu\,, \quad 1 \le j \le \nu\,.$$

Ο τρόπος υπολογισμού των στοιχείων γ_{ij} του γινομένου AB προέρχεται, όπως είναι φανερό, από το γινόμενο των στοιχείων της i-γραμμής του A επί τα στοιχεία της j-στήλης του B. Στο παρακάτω παράδειγμα σημειώνεται το στοιχείο γ_{21} :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \boldsymbol{\alpha_{21}} & \boldsymbol{\alpha_{22}} & \boldsymbol{\alpha_{23}} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta_{11}} & \beta_{12} \\ \boldsymbol{\beta_{21}} & \beta_{22} \\ \boldsymbol{\beta_{31}} & \beta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ \boldsymbol{\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31}} & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Για τις διαστάσεις του γινομένου πινάκων, σημειώστε ότι

$$\begin{array}{cccc} A & B & = & AB \\ \mu \times \underbrace{\rho \qquad\quad \rho}_{\text{ιδια διασταση}} \times \nu & & & \mu \times \nu \\ \underbrace{\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow}_{\text{διασταση γινομενου}} & & & \end{array}$$

Παράδειγμα 4.1 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ορίζεται μόνο το γινόμενο AB και είναι τύπου 2×3.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4+3.1 & 2.3+3.(-2) & 2.6+3.3 \\ 1.4+(-5).1 & 1.3+(-5)(-2) & 1.6+(-5).3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

□

Γενικά AB ≠ BA, αν όμως οι πίνακες είναι τετραγωνικοί ν×ν και ισχύει η ισότητα AB = BA, οι πίνακες ονομάζονται **αντιμεταθετικοί**.

Για κάθε πίνακα A τύπου μ×ν, σημειώστε την ισότητα:

$$I_\mu A = AI_\nu = A$$

Προσέξτε ότι είναι δυνατόν AB = O, όταν A ≠ O και B ≠ O. Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ακόμη είναι δυνατόν AB = AΓ, όταν οι πίνακες B και Γ **δεν** είναι ίσοι. Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Για το γινόμενο των πινάκων ισχύουν οι ιδιότητες

$$A(B\Gamma) = (AB)\Gamma \qquad A(B \pm \Gamma) = AB \pm A\Gamma$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \qquad (A \pm B)\Gamma = A\Gamma \pm B\Gamma$$

και

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (AB)^* = B^* A^*$$

Παράδειγμα 5.1 Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{bmatrix}$, για ποια τιμή του k οι πίνακες A, B είναι αντιμεταθετικοί;

Λύση: Υπολογίζουμε τα γινόμενα

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4(3-k) \\ -30 & k-20 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & -24 \\ 5(3-k) & k-20 \end{bmatrix}$$

Από την ισότητα $AB = BA$ έχουμε τις εξισώσεις $4(3 - k) = -24$ και $5(3 - k) = -30$, που συναληθεύουν για $k = 9$. □

Δυνάμεις πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και για κάθε φυσικό αριθμό ρ ο πίνακας

$$A^{\rho} = \underbrace{A\ A\ \cdots\ A}_{\rho \text{ παράγοντες}}$$

ονομάζεται **ρ-στή δύναμη** του A. Σημειώστε $A^0 = I$, $A^1 = A$.

Αν ρ , σ είναι φυσικοί αριθμοί εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

$$A^{\rho} A^{\sigma} = A^{\rho+\sigma}$$

$$(A^{\rho})^{\sigma} = A^{\rho\sigma}$$

$$(k A)^{\rho} = k^{\rho} A^{\rho}$$

$$(A B)^{\rho} = A^{\rho} B^{\rho} \quad \textbf{όταν} \quad A B = B A.$$

Παράδειγμα 6.1 Αν

$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}$$

τότε

$$A^2 = \begin{bmatrix} \text{συν}^2\theta - \text{ημ}^2\theta & -2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta \\ 2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta & \text{συν}^2\theta - \text{ημ}^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}2\theta & -\text{ημ}2\theta \\ \text{ημ}2\theta & \text{συν}2\theta \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta\text{συν}2\theta - \text{ημ}\theta\text{ημ}2\theta & -\text{ημ}2\theta\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta\text{συν}2\theta \\ \text{ημ}\theta\text{συν}2\theta + \text{συν}\theta\text{ημ}2\theta & \text{συν}\theta\text{συν}2\theta - \text{ημ}\theta\text{ημ}2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}3\theta & -\text{ημ}3\theta \\ \text{ημ}3\theta & \text{συν}3\theta \end{bmatrix}$$

Οπότε για κάθε φυσικό αριθμό ρ θα είναι:

$$A^{\rho} = \begin{bmatrix} \text{συν}(\rho\theta) & -\text{ημ}(\rho\theta) \\ \text{ημ}(\rho\theta) & \text{συν}(\rho\theta) \end{bmatrix}$$

Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά. □

Παράδειγμα 7.1 Αν οι πίνακες A , B είναι τετραγωνικοί τάξεως ν και αντιμεταθετικοί, τότε $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

Λύση : Πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης πίνακα έχουμε

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{επιμεριστική ιδιότητα}}}{=} A^2 + BA + AB + B^2 \underset{\substack{\uparrow \\ AB = BA}}{=} A^2 + B^2 + AB + AB$$

$$= A^2 + B^2 + 2AB.$$ □

Σημειώστε ότι οι γνωστές αλγεβρικές ταυτότητες ισχύουν και για πίνακες, ακριβώς όταν οι πίνακες είναι αντιμεταθετικοί.

Παράδειγμα 8.1 Αν ένας από τους τετραγωνικούς πίνακες P και $I - P$ επαληθεύει την εξίσωση $X^2 = X$, δείξτε ότι και ο άλλος πίνακας έχει την ιδιότητα αυτή.

Λύση : Έστω $P^2 = P$. Επειδή οι πίνακες I, P είναι αντιμεταθετικοί

$$(I - P)^2 = I + P^2 - 2P = I + P - 2P = I - P.$$

Όμοια, αν $(I - P)^2 = I - P$ έχουμε

$$I + P^2 - 2P = I - P \Rightarrow P^2 = P. \qquad \square$$

Οι πίνακες που επαληθεύουν την προηγούμενη εξίσωση ονομάζονται **προβολικοί** ή **αδύναμοι**, αφού $X^3 = X^2 X = X X = X$, $X^4 = X^2 X^2 = X X = X$ και γενικά $X^k = X$, για κάθε $k \geq 2$.

Παράδειγμα 9.1 Θα υπολογίσουμε τις ν-οστές δυνάμεις των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση : Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζονται μερικές χρήσιμες μέθοδοι υπολογισμού των δυνάμεων πινάκων.

Για τον πρώτο πίνακα επαληθεύουμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \quad A^3 = A A^2 = A, \quad A^4 = A^2 A^2 = I \ldots$$

και γενικά έχουμε:

για τις περιττές δυνάμεις : $A^{2k-1} = A$,

για τις άρτιες δυνάμεις : $A^{2k} = I$.

Για τον πίνακα B, παρατηρούμε ότι

$$B = I + M \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή οι πίνακες I και M είναι αντιμεταθετικοί έχουμε το ανάπτυγμα

$$B^\nu = (I + M)^\nu = I + \binom{\nu}{1} M + \binom{\nu}{2} M^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu} M^\nu$$

όπου $\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$. Αλλά για τον πίνακα M, είναι $M^2 = O$ και έτσι $M^\rho = O$ για κάθε $\rho \geq 2$.

Τότε:

$$B^{\nu} \;=\; I + \binom{\nu}{1} M \;=\; \begin{bmatrix} 1 & \binom{\nu}{1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα Γ έχουμε:

$$\Gamma^2 = I, \qquad \Gamma^3 = \Gamma^2\,\Gamma = \Gamma\,, \ldots$$

Συνεπώς $\qquad \Gamma^{2k} = I \quad$ και $\quad \Gamma^{2k-1} = \Gamma.$ $\square$

Παράδειγμα 10.1 Θα δείξουμε ότι $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{k} = 3^{2k}\, I.$

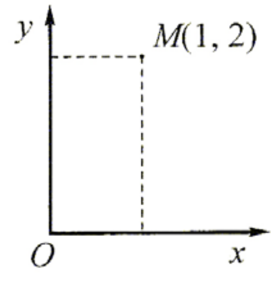
Λύση : Επαγωγικά, για $k = 1$, έχουμε $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{2} = 9\,I = 3^2\, I.$

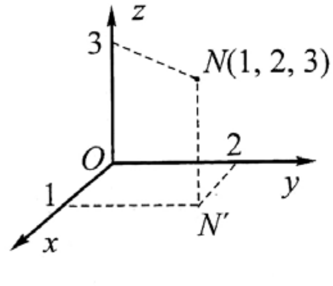
Αν ισχύει η ισότητα για $k = \nu$, τότε ισχύει και για $k = \nu+1$, γιατί:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{2(\nu+1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{2\nu} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{2} = (3^{2\nu}\, I)(3^2\, I) = 3^{2(\nu+1)}\, I.$$ $\square$

1.3. Διανύσματα

Στην ενότητα αυτή θ' ασχοληθούμε με πίνακες τύπου 2×1 και 3×1, που ονομάζονται **διανύσματα** (ενότητα 1.1). Η ονομασία αυτή δημιουργείται επειδή υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου ή του χώρου με τα στοιχεία των πινάκων. Παράδειγμα, στον πίνακα $[\,1 \;\; 2\,]^T$ αντιστοιχεί το σημείο $M(1, 2)$ του επιπέδου και στον πίνακα $[\,1 \;\; 2 \;\; 3\,]^T$ αντιστοιχεί το σημείο $N(1, 2, 3)$ του χώρου.





Έτσι απεικονίζονται τα διανύσματα (με τη γεωμετρική τους έννοια) $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$. Τα στοιχεία των πινάκων ονομάζονται **συντεταγμένες** των διανυσμάτων αυτών. Αν θεωρήσουμε τις αντιστοιχίες

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \overrightarrow{OA}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \overrightarrow{OB}$$

εύκολα διαπιστώνουμε ότι στο άθροισμα των πινάκων

$$\alpha + \beta = [\ \alpha_1 + \beta_1 \quad \alpha_2 + \beta_2 \quad \alpha_3 + \beta_3\ ]^T$$

αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα το διανυσματικό άθροισμα των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Επιπλέον, στο γινόμενο $\lambda\alpha$ αντιστοιχεί το γινόμενο $\lambda\overrightarrow{OA}$. Έτσι, συνοψίζοντας έχουμε:

$$\lambda\alpha + \mu\beta = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό λ, μ.

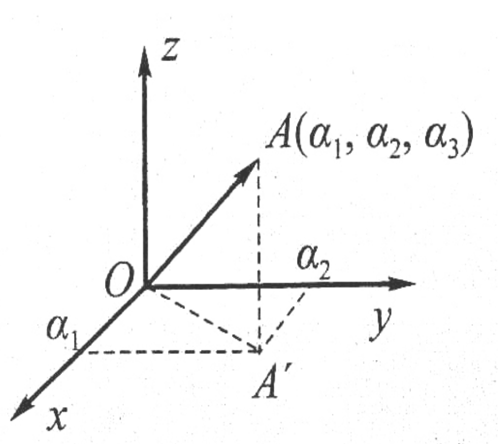
Το γινόμενο πινάκων

$$\alpha^T \beta = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \qquad (1.2)$$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των αντιστοίχων διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και σημειώνεται $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB}$. Ιδιαίτερα, ο αριθμός

$$\sqrt{\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OA}} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = \|\overrightarrow{OA}\|$$

παριστάνει το **μέτρο** του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$, όπως αυτό άλλωστε αποδεικνύεται και γεωμετρικά



$$\|\overrightarrow{OA'}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

$$\|\overrightarrow{A'A}\| = \alpha_3$$

Για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\vec{OA} \circ \vec{OB} = \vec{OB} \circ \vec{OA}$
2. $\vec{OA} \circ (\vec{OB} + \vec{O\Gamma}) = \vec{OA} \circ \vec{OB} + \vec{OA} \circ \vec{O\Gamma}$
3. $(\lambda \vec{OA}) \circ \vec{OB} = \vec{OA} \circ (\lambda \vec{OB}) = \lambda(\vec{OA} \circ \vec{OB})$
4. $\vec{OA} \circ \vec{OA} > 0$
5. $\vec{OA} \circ \vec{OA} = 0 \Leftrightarrow \vec{OA} = \vec{O} \Leftrightarrow O \equiv A$

Επειδή

$$(\alpha^T \beta)^2 \leq (\alpha^T \alpha) (\beta^T \beta) \qquad \text{(ανισότητα του Schwarz)}$$

έχουμε

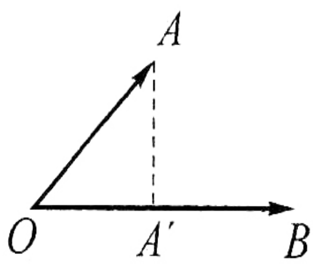
$$-1 \leq \frac{\alpha^T \beta}{\sqrt{\alpha^T \alpha}\,\sqrt{\beta^T \beta}} \leq 1$$

και κατά συνέπεια

$$\frac{\alpha^T \beta}{\sqrt{\alpha^T \alpha}\sqrt{\beta^T \beta}} = \frac{\vec{OA} \circ \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \, \|\vec{OB}\|} = \text{συν}\theta$$

όπου $\theta \in [0 , \pi]$ είναι η **γωνία των διανυσμάτων** $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.

Για $\theta = \pi/2$, είναι προφανές $\vec{OA} \circ \vec{OB} = 0$, και η συνθήκη αυτή είναι ικανή και αναγκαία για την **καθετότητα** των διανυσμάτων $\vec{OA}$, $\vec{OB}$.



$\vec{OA'} = \pi\rho o\beta_{\vec{OB}} (\vec{OA})$

Αποδεικνύεται ότι το διάνυσμα $\dfrac{\vec{OA} \circ \vec{OB}}{\| \vec{OB} \|^2} \vec{OB}$ είναι η ***προβολή*** του διανύσματος $\vec{OA}$ επί του $\vec{OB}$ και σημειώνεται $\pi\rho o\beta_{\vec{OB}} (\vec{OA})$.

Παράδειγμα 11.1 Αν τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ ορίζουν το επίπεδο Π, κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$, όπου $\Gamma \in \Pi$, γράφεται μονότροπα με τη μορφή:

$$\overrightarrow{O\Gamma} = k\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Λύση : Αν πολλαπλασιάσουμε την ισότητα $\overrightarrow{O\Gamma} = k\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ εσωτερικά επί $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ έχουμε:

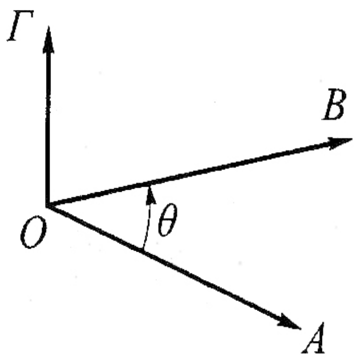
$$\overrightarrow{O\Gamma}\circ\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OA}) + \lambda(\overrightarrow{OB}\circ\overrightarrow{OA})$$
$$\overrightarrow{O\Gamma}\circ\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OB}) + \lambda(\overrightarrow{OB}\circ\overrightarrow{OB})$$

Αρκεί το σύστημα των εξισώσεων αυτών να έχει μοναδική λύση ως προς k, λ. Γι' αυτό αρκεί

$$\|\overrightarrow{OA}\|^2\|\overrightarrow{OB}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2\|\overrightarrow{OB}\|^2 \,\text{συν}^2\theta = \|\overrightarrow{OA}\|^2\|\overrightarrow{OB}\|^2(1 - \text{συν}^2\theta)$$
$$= \|\overrightarrow{OA}\|^2\|\overrightarrow{OB}\|^2 \,\text{ημ}^2\theta \neq 0,$$

η οποία αληθεύει, αφού τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ δεν είναι παράλληλα. □

Εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ που έχει



$\overrightarrow{O\Gamma} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$

I. μέτρο $\|\overrightarrow{O\Gamma}\| = \|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OB}\|\,\text{ημ}\theta$, $\theta = \text{γων}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
II. διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ [1] και
III. φορά τέτοια ώστε η διατεταγμένη τριάδα $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}\}$ να είναι δεξιόστροφη.

[1] Η συνθήκη II έχει νόημα για μη συγγραμμικά διανύσματα.

Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ συμβολίζεται $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$ και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = -[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}]$
2. $[\lambda\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = [\overrightarrow{OA}, \lambda\overrightarrow{OB}] = \lambda[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$
3. $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}] = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]+[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}]$
4. $[\overrightarrow{OA}, [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}]] = (\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{O\Gamma})\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB})\overrightarrow{O\Gamma}$

Η σχέση μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι *μετρική* και εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$\| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \|^2 = \| \overrightarrow{OA} \|^2 \| \overrightarrow{OB} \|^2 - (\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB})^2$$

Επιπλέον από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου, το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{O\Gamma}$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ και κατά συνέπεια

$$\frac{1}{2} \| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \|$$

είναι το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές τα σημεία O, A, B.

Για κάθε δεξιόστροφη τρισορθογώνια τριάδα μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, έχουμε:

$$[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{O}$$

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}, \quad [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}, \quad [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j} \qquad (1.3)$$

Αν $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$ και $[\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$ είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ αντίστοιχα ως προς τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, αποδεικνύεται ότι:

$$\overrightarrow{OA} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}$$

Έτσι, από την 3η ιδιότητα και τις σχέσεις (1.3), αποδεικνύεται

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} \qquad (1.4)$$

Από την έκφραση αυτή ή από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου συμπεραίνουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = \vec{O}$$

για να είναι τα διανύσματα ***συγγραμμικά***.

Παράδειγμα 12.1 Θα βρούμε τις συντεταγμένες του διανύσματος

$$\overrightarrow{O\Delta} = ([\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \circ [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}]) \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB}) \overrightarrow{O\Gamma}$$

αν $\overrightarrow{OA} = [\,1 \;\; 2 \;\; -1\,]^T$, $\overrightarrow{OB} = [\,0 \;\; 1 \;\; 2\,]^T$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = [\,1 \;\; -1 \;\; 0\,]^T$.

Λύση : Από τους τύπους (1.3) και (1.4) έχουμε:

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = [\,5 \;\; -2 \;\; 1\,]^T \qquad\qquad [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}] = [\,2 \;\; 2 \;\; -1\,]^T$$

και κατά συνέπεια $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \circ [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}] = 10 - 4 - 1 = 5$, $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = 0$.

Οπότε: $\overrightarrow{O\Delta} = 5\overrightarrow{OA} = [\,5 \;\; 10 \;\; -5\,]^T$. □

Για τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ το γινόμενο

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \circ \overrightarrow{O\Gamma}$$

ονομάζεται **μικτό γινόμενο** των διανυσμάτων αυτών και συμβολίζεται $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma})$.
Από τους τύπους (1.2) και (1.4) έχουμε

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) g_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) g_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) g_3 \qquad (1.5)$$

και βασιζόμενοι στην ισότητα αυτή αποδεικνύεται:

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \circ \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} \circ [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}].$$

Αποδεικνύεται ακόμη ότι το μικτό γινόμενο $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma})$ αλλάζει πρόσημο αν αντιμεταθέσουμε δυο διανύσματα απ' αυτά, αλλά δεν αλλάζει πρόσημο αν μεταθέσουμε τρία διανύσματα κυκλικά, δηλαδή:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}) &= (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OA}) \\ &= -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}).\end{aligned}$$

Η συνθήκη

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}) = 0$$

είναι ικανή και αναγκαία για να είναι τα τρία διανύσματα **συνεπίπεδα**.

Παράδειγμα 13.1 Θα υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση των *ασυμβάτων ευθειών*

$$\varepsilon_1 : \ (x, y, z) = (1, 0, -1) + t\,(2, 0, 1)$$

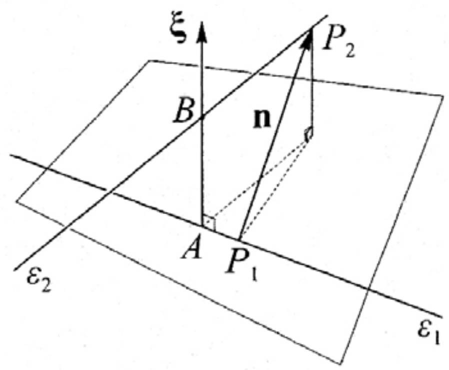
$$\varepsilon_2 : \ (x, y, z) = (3, 1, 0) + s\,(1, 1, -1)$$

και μετά θα βρούμε στις ευθείες τα σημεία A, B που απέχουν ελάχιστο.

Λύση : Οι ευθείες είναι παράλληλες των μη συγγραμμικών διανυσμάτων $n_1 = (2, 0, 1)$ και $n_2 = (1, 1, -1)$ και συνεπώς το διάνυσμα

$$\xi = [\, n_1 , n_2 \,] = (-1, 3, 2)$$

είναι κάθετο και στις δύο ευθείες. Το επίπεδο που περνά από την ευθεία ε_1 και είναι κάθετο στο διάνυσμα ξ, είναι παράλληλο της ευθείας ε_2. Κατά συνέπεια η ελάχιστη απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η απόσταση της ευθείας ε_2 από το επίπεδο αυτό.



Τα σημεία $P_1 = (1, 0, -1)$ και $P_2 = (3, 1, 0)$ αντίστοιχα των ευθειών ε_1 και ε_2 ορίζουν το διάνυσμα $n = \overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, 1)$ και το μέτρο της προβολής του n επί του ξ είναι η ζητούμενη απόσταση:

$$\|\, \text{προβ}_{\xi}\, n \,\| = \left\| \frac{n \circ \xi}{\|\xi\|^2}\, \xi \right\| = \frac{|\, n \circ \xi \,|}{\|\xi\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Τα σημεία A, B έχουν συντεταγμένες $(1+2t, 0, -1+t)$ και $(3+s, 1+s, -s)$, το δε διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (2+\sigma-2\tau, 1+\sigma, 1-\sigma-\tau)$ είναι κάθετο των ν_1, ν_2. Από τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \circ n_1 &= 0 \\ \overrightarrow{AB} \circ n_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5t - s &= 5 \\ t - 3s &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} t &= 13/14 \\ s &= -5/14 \end{aligned}$$

ορίζονται τα σημεία $A = \frac{1}{14}(40, 0, -1)$ και $B = \frac{1}{14}(37, 9, 5)$. Επαληθεύσατε ότι $\|\overrightarrow{AB}\| = 3/\sqrt{14}$, όπως πριν.

1.4. Σύνθετοι πίνακες

Ας διαμερίσουμε έναν πίνακα με κατακόρυφες και οριζόντιες γραμμές μεταξύ των γραμμών και των στηλών του. Για παράδειγμα,

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

Κάθε τμήμα του πίνακα ονομάζεται **υποπίνακας** και στο παράδειγμά μας ο πίνακας A γράφεται με τη μορφή

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Ο πίνακας A με τη μορφή (1.6) ονομάζεται **σύνθετος**, τα δε στοιχεία του (υποπίνακες του A) όταν είναι στην ίδια γραμμή, έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και όταν είναι στην ίδια στήλη, έχουν τον ίδιο αριθμό στηλών.

Παράδειγμα, η λειτουργία κυκλώματος microcomputer με τρία VLSI microchips απεικονίζεται στον πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ \mathrm{A}_{31} & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}$$

όπου οι διαγώνιοι υποπίνακες A_{11} , A_{22} , A_{33} αντιστοιχούν στα κυκλώματα VLSI chips και οι άλλοι υποπίνακες αντιστοιχούν στις συνδέσεις μεταξύ των chips.

Οι σύνθετοι πίνακες

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & \cdots & & \mathrm{A}_\nu \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1k} \\ \mathrm{O} & \mathrm{A}_{22} & & \mathrm{A}_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & \mathrm{A}_{kk} \end{bmatrix}$$

όπου με O παριστάνουμε τους μηδενικούς πίνακες, ονομάζονται **σύνθετος διαγώνιος** και **σύνθετος** (**άνω**) **τριγωνικός** αντίστοιχα και η παρουσία τους μας διευκολύνει στις πράξεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Όταν δυο πίνακες A και B είναι του ίδιου τύπου μ×ν και έχουν διαμερισθεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο μεταξύ των γραμμών και των στηλών, οι ομοθέσιοι υποπίνακες είναι του ίδιου τύπου και κατά συνέπεια το άθροισμά τους ανάγεται στο άθροισμα των υποπινάκων τους. Για παράδειγμα, οι 5×7 πίνακες

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{2\times3} & \mathrm{B}_{2\times4} \\ \Gamma_{3\times3} & \Delta_{3\times4} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{K}_{2\times3} & \Lambda_{2\times4} \\ \mathrm{M}_{3\times3} & \mathrm{N}_{3\times4} \end{bmatrix}$$

τότε,

$$\mathrm{P} \pm \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} \pm \mathrm{K} & \mathrm{B} \pm \Lambda \\ \Gamma \pm \mathrm{M} & \Delta \pm \mathrm{N} \end{bmatrix}$$

Επιπλέον

$$\lambda\, \mathrm{P} = \begin{bmatrix} \lambda\, \mathrm{A} & \lambda\, \mathrm{B} \\ \lambda\, \Gamma & \lambda\, \Delta \end{bmatrix}$$

Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στον πολλαπλασιασμό σύνθετων πινάκων. Φυσικά θα πρέπει να διατηρηθεί ο τρόπος πολλαπλασιασμού των πινάκων και επιπλέον να μπορεί να γίνει ο πολλαπλασιασμός των υποπινάκων του. Γι’ αυτό, κατά τον πολλαπλασιασμό PQ θα πρέπει να προσέξουμε **μόνο** αν ο τρόπος *διαμέρισης των γραμμών του Q είναι ίδιος με την διαμέριση στηλών του P,* **χωρίς** να ενδιαφερθούμε για τις υποδιαιρέσεις γραμμών του P και τις υποδιαιρέσεις στηλών του Q. Για παράδειγμα, οι σύνθετοι πίνακες

$$\mathrm{P}_{5\times4} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{2\times2} & \mathrm{B}_{2\times2} \\ \Gamma_{3\times2} & \Delta_{3\times2} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Q}_{4\times4} = \begin{bmatrix} \mathrm{K}_{2\times4} \\ \Lambda_{2\times4} \end{bmatrix}$$

πολλαπλασιαζόμενοι, το γινόμενό τους είναι:

$$\mathrm{PQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{AK} + \mathrm{B}\Lambda \\ \Gamma\mathrm{K} + \Delta\Lambda \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, σημειώστε για τους σύνθετους διαγωνίους πίνακες

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{2\times2} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B}_{3\times4} \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} \mathrm{K}_{2\times1} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \Lambda_{4\times2} \end{bmatrix}$$

έχουμε

$$\mathrm{H}\Theta = \begin{bmatrix} \mathrm{AK} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B}\Lambda \end{bmatrix}$$

γενικεύοντας το γνωστό τρόπο πολλαπλασιασμού διαγωνίων πινάκων.

Παράδειγμα 14.1 Θα υπολογίσουμε το γινόμενο AB, θεωρώντας τους σύνθετους πίνακες:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & I \end{bmatrix}, \qquad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 & O \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

Επειδή η υποδιαίρεση των στηλών του A και των γραμμών του B είναι η ίδια,

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 & A_2B_3 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 18 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα A^2, έχουμε

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & A_1A_2 + A_2 \\ O & I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

□

Παράδειγμα 15.1 Θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις του σύνθετου πίνακα:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

Επειδή:

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & O \\ A_2A_1 + A_3A_2 & A_3^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2 & 2A_3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} A_1^2 & O \\ A_2A_1 + 2A_3A_2 & 2A_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2 & 2^2A_3 \end{bmatrix}$$

Επαγωγικά επαληθεύουμε ότι:

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2 & 2^{k-1}A_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ 1 & -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{array}\right]$$

□

1.5. Πολυωνυμικοί πίνακες

Ο τετραγωνικός πίνακας A, τάξεως ν, που ορίζεται από τον τύπο:

$$A = \alpha_k M^k + \alpha_{k-1} M^{k-1} + \ldots + \alpha_1 M + \alpha_0 I \ , \qquad \alpha_i \in \mathbf{C}$$

ονομάζεται **πολυωνυμικός πίνακας** του M και είναι φανερό ότι ορίζεται από το πολυώνυμο $\alpha_k \lambda^k + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ αντικαθιστώντας τη μεταβλητή λ με τον πίνακα M.

Για παράδειγμα, αν $\alpha(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda + 2$ και $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, τότε

$$\alpha(M) = 3M^2 - M + 2I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε τα βαθμωτά πολυώνυμα $\alpha(\lambda)$ και $\beta(\lambda)$, αντίστοιχα των πράξεων

$$\alpha(\lambda) + \beta(\lambda) = \gamma(\lambda) \ , \qquad \alpha(\lambda)\ \beta(\lambda) = \delta(\lambda)$$

$$\alpha(\lambda) = \beta(\lambda)\,\pi(\lambda) + \upsilon(\lambda)$$

έχουμε:

$$\alpha(M) + \beta(M) = \gamma(M) \ , \qquad \alpha(M)\ \beta(M) = \beta(M)\,\alpha(M) = \delta(M) \ ,$$

$$\alpha(M) = \beta(M)\,\pi(M) + \upsilon(M).$$

Η αντιμετάθεση των πινάκων $\alpha(M)$ και $\beta(M)$ στη δεύτερη από τις παραπάνω ισότητες είναι δυνατή, διότι κάθε τετραγωνικός πίνακας αντιμετατίθεται με τον εαυτό του.

Το γνωστό θεώρημα της Άλγεβρας ότι “κάθε πολυώνυμο βαθμού k έχει k ρίζες” **δεν ισχύει** για τους πολυωνυμικούς πίνακες.

Παράδειγμα, ο πίνακας

$$\alpha(X) = X^2 + X - 2I = (X - I)(X + 2I)$$

ισούται με το μηδενικό πίνακα για $X = I$ ή $X = -2I$ και για κάθε πίνακα

$$X = \begin{bmatrix} -2 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad z \in \mathbf{C}.$$

Παράδειγμα 16.1 Αν $q(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$ και για κάθε $\alpha \in \mathbf{C}$

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

τότε έχουμε :

$$\begin{aligned} q(J) &= J^3 + J^2 + 2J + 2I \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ 0 & \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q(\alpha) & q'(\alpha) & \frac{1}{2!}q''(\alpha) \\ 0 & q(\alpha) & q'(\alpha) \\ 0 & 0 & q(\alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 17.1 Αν $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ και $\alpha(\lambda) = \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta$,

θα δείξουμε ότι $\alpha(C) = \begin{bmatrix} r \\ rC \\ rC^2 \\ rC^3 \end{bmatrix}$, όπου $r = [\,\delta \;\; \gamma \;\; \beta \;\; \alpha\,]$.

Λύση : Αν θεωρήσουμε τους πίνακες γραμμές:

$\varepsilon_1 = [\,1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\,]$ $\varepsilon_2 = [\,0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0\,]$ $\varepsilon_3 = [\,0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0\,]$ $\varepsilon_4 = [\,0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1\,]$

διαπιστώνουμε τις ισότητες

$$\varepsilon_1 C = \varepsilon_2 \;, \quad \varepsilon_2 C = \varepsilon_3 \;, \quad \varepsilon_3 C = \varepsilon_4$$

και ακόμη $\varepsilon_1 C^2 = \varepsilon_2 C = \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 C^3 = \varepsilon_3 C = \varepsilon_4$, $\varepsilon_2 C^2 = \varepsilon_3 C = \varepsilon_4$.

Οπότε η πρώτη γραμμή του $\alpha(C)$ είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \alpha(C) &= \varepsilon_1(\alpha C^3 + \beta C^2 + \gamma C + \delta I) \\ &= \alpha \varepsilon_1 C^3 + \beta \varepsilon_1 C^2 + \gamma \varepsilon_1 C + \delta \varepsilon_1 \\ &= \alpha \varepsilon_4 + \beta \varepsilon_3 + \gamma \varepsilon_2 + \delta \varepsilon_1 = [\,\delta \;\; \gamma \;\; \beta \;\; \alpha\,] = r \end{aligned}$$

Η δεύτερη, τρίτη και τέταρτη γραμμή είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 \alpha(C) &= \alpha \varepsilon_2 C^3 + \beta \varepsilon_2 C^2 + \gamma \varepsilon_2 C + \delta \varepsilon_2 \\
&= \alpha \varepsilon_1 C^4 + \beta \varepsilon_1 C^3 + \gamma \varepsilon_1 C^2 + \delta \varepsilon_1 C \\
&= (\alpha \varepsilon_1 C^3 + \beta \varepsilon_1 C^2 + \gamma \varepsilon_1 C + \delta \varepsilon_1) C = r C \\
\varepsilon_3 \alpha(C) &= \alpha \varepsilon_3 C^3 + \beta \varepsilon_3 C^2 + \gamma \varepsilon_3 C + \delta \varepsilon_3 \\
&= (\alpha \varepsilon_1 C^3 + \beta \varepsilon_1 C^2 + \gamma \varepsilon_1 C + \delta \varepsilon_1) C^2 = r C \\
\varepsilon_4 \alpha(C) &= \alpha \varepsilon_4 C^4 + \beta \varepsilon_4 C^2 + \gamma \varepsilon_4 C + \delta \varepsilon_4 \\
&= (\alpha \varepsilon_1 C^3 + \beta \varepsilon_1 C^2 + \gamma \varepsilon_1 C + \delta \varepsilon_1) C^3 = r C^3 \qquad \square
\end{aligned}$$

1.6. Ασκήσεις

1.1 Αν $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, ποια είναι τα στοιχεία α_{12}, α_{23}, α_{13}, α_{31} και α_{33};

1.2 Αν $\begin{bmatrix} x+y & 2z+\omega \\ z-2\omega & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, βρείτε τους αγνώστους x, y, z, ω.

1.3 Επαληθεύσατε με παραδείγματα και μετά αποδείξτε τις ισότητες:

I. $\| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \|^2 + (\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB})^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 \|\overrightarrow{OB}\|^2$

II. $[[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}], \overrightarrow{O\Gamma}] + [[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}], \overrightarrow{OA}] + [[\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OA}], \overrightarrow{OB}] = \vec{O}$.

III. $[\overrightarrow{OA} - \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{OB}}(\overrightarrow{OA})] \circ \overrightarrow{OB} = 0$.

1.4 Αν

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι

$$AB = A_1B_1 + A_2B_2 = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.5 Με ποια διάταξη πολλαπλασιάζονται οι πίνακες ως σύνθετοι ;

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ \hline -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

1.6 Αν $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ και $\alpha(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 1$, δείξτε ότι:

$$\alpha(M) = \begin{bmatrix} -20 & 39 \\ 26 & -59 \end{bmatrix}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορίζουσα είναι ένας αριθμός που αντιστοιχεί σε τετραγωνικό πίνακα κατά έναν ορισμένο τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των οριζουσών, ο τρόπος υπολογισμού ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα και η εφαρμογή τους στην εύρεση του αντίστροφου πίνακα.

2.1. Ορίζουσα πίνακα

Στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων ορίζεται μια ειδική συνάρτηση που ονομάζεται **ορίζουσα** και έχει πεδίο τιμών στο σύνολο **R** ή **C**. Για κάθε ν×ν πίνακα Α η ορίζουσα συμβολίζεται **| A |** ή **det A** και η έκφρασή της, σε σχέση με τα στοιχεία του πίνακα, αναπτύσσεται στον ακόλουθο λογισμό.

Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

και για τον πίνακα

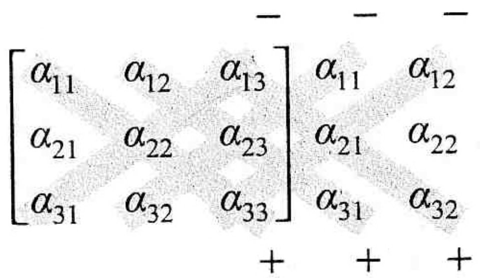
$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$\det A = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

Ιδιαίτερα την παράσταση αυτή είναι δυνατόν να τη θυμάστε “ως κανόνα του Sarrus” αν γράψετε τις δύο πρώτες στήλες δεξιά του πίνακα και υπολογίσετε τα γινόμενα των στοιχείων των έξι διαγωνίων.



Επιπλέον, από την (2.1) διαπιστώσατε ότι ο τύπος (1.4) του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων ισούται συμβολικά με την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Συμβολίζοντας με A_{ij} τον υποπίνακα του A όταν διαγράψουμε την i- γραμμή του και j- στήλη του, τότε το ανάπτυγμα του 3×3 πίνακα A γράφεται:

$$\det A = \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{12} \det A_{12} + \alpha_{13} \det A_{13}$$

Έτσι, ορίζεται *αναδρομικά* η ορίζουσα ν×ν πίνακα από τις ορίζουσες των (ν - 1)×(ν -1) υποπινάκων.

Ορισμός. Για $\nu \geq 2$, η **ορίζουσα** του ν×ν πίνακα $A = \left[\, \alpha_{ij} \,\right]_{i,j=1}^{\nu}$ είναι το άθροισμα

$$\begin{aligned} \det A &= \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+\nu} \alpha_{1\nu} \det A_{1\nu} \\ &= \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{1+j} \alpha_{1j} \det A_{1j} \end{aligned}$$

Ο αριθμός $M_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου α_{ij} και προφανώς έχουμε:

$$\det A = \alpha_{11} M_{11} + \alpha_{12} M_{12} + \ldots + \alpha_{1\nu} M_{1\nu}$$

Το άθροισμα αυτό ονομάζεται **ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή** του πίνακα A. Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα ν×ν πίνακα υπολογίζεται και όταν αναπτύξουμε αυτή ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του.

Θεώρημα 1.2 Για τον τετραγωνικό πίνακα $A = \left[\, \alpha_{ij} \,\right]_{i,j=1}^{\nu}$

$$\begin{aligned} \det A &= \alpha_{i1} M_{i1} + \alpha_{i2} M_{i2} + \ldots + a_{in} M_{in} \\ &= a_{1j} M_{1j} + a_{2j} M_{2j} + \ldots + a_{nj} M_{nj}\,. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα αυτό είναι φανερό ότι αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης του πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς αυτή τη γραμμή ή στήλη θα έχουμε $\det A = 0$.

Παράδειγμα 1.2 Θα υπολογίσουμε τις ορίζουσες των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα A αναπτύσσοντας κατά την 3η στήλη (επειδή έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία) έχουμε:

$$\det A = 2\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 2\,(\,7.1.5 - 5.2.3\,) = 10.$$

Για τον πίνακα B, αναπτύσσοντας κατά την τρίτη γραμμή έχουμε:

$$\det B = 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,\{\,2.1.3 + 4.2.(-2) - (-2).3.2 - 3.2.(-3)\,\} + 3\{1.2.(-2) + 2.1.2 - 2.2.(-3) -$$
$$(-2).(-4).2\,\} = 3.20 + 3.(-4) = 48. \qquad \square$$

Παράδειγμα 2.2 Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα άνω τριγωνικού πίνακα.

Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, τότε $\det A = \alpha_{11}\,\alpha_{22}$ και αν $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ τότε $\det A = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33}$.

Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{bmatrix}$

έχουμε:

$$\det A = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \alpha_{33}\, \alpha_{44}$$

Έτσι επαγωγικά αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα άνω τριγωνικού πίνακα είναι το *γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.* □

Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγουμε και όταν ο πίνακας είναι διαγώνιος. Ειδικότερα:

$$\det I_\nu = 1.$$

Από το θεώρημα 1.2 συμπεραίνουμε επιπλέον την αξιοσημείωτη ισότητα:

$$\det A = \det A^T \qquad (2.2)$$

2.2. Ιδιότητες οριζουσών

Στο εδάφιο αυτό θ' αναφέρουμε βασικές ιδιότητες των οριζουσών, οι οποίες μας διευκολύνουν στον υπολογισμό της ορίζουσας πίνακα.

Θεώρημα 2.2. Για κάθε $\nu \times \nu$ πίνακα A

1. Αν εναλλάξουμε δύο γραμμές (ή στήλες) του A, η ορίζουσα του νέου πίνακα ισούται με -det A.
2. Αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) του A πολλαπλασιασθούν επί τον αριθμό k, η ορίζουσα του νέου πίνακα ισούται με k(det A).
3. Αν το πολλαπλάσιο των στοιχείων μιας γραμμής (στήλης) του A προστεθεί σε μια άλλη γραμμή (στήλη) του πίνακα, η ορίζουσα του νέου πίνακα ισούται με det A.

Από τις ιδιότητες 1 και 2, συμπεραίνουμε άμεσα ότι αν ο πίνακας A έχει δύο γραμμές (στήλες) ανάλογες, τότε det A = 0. Επιπλέον από την ιδιότητα 2 έχουμε:

$$\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^\nu (\det A)}$$

Παράδειγμα 3.2 Εάν $\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \kappa & \lambda & \mu \\ \rho & \sigma & \tau \end{bmatrix} = -1$ θα υπολογίσουμε τις ορίζουσες των πινάκων: $A = \begin{bmatrix} -\rho & -\sigma & -\tau \\ 3\kappa+\alpha & 3\lambda+\beta & 3\mu+\gamma \\ 2\kappa & 2\lambda & 2\mu \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2\alpha & -2\beta & -2\gamma \\ 2\kappa+\rho & 2\lambda+\sigma & 2\mu+\tau \\ 3\rho & 3\sigma & 3\tau \end{bmatrix}$

Λύση : Για τον πρώτο πίνακα έχουμε:

$$\det A \overset{(\iota\delta.2)}{=} -\det\begin{bmatrix} \rho & \sigma & \tau \\ 3\kappa+\alpha & 3\lambda+\beta & 3\mu+\gamma \\ 2\kappa & 2\lambda & 2\mu \end{bmatrix} \overset{(\iota\delta.2)}{=} -2\det\begin{bmatrix} \rho & \sigma & \tau \\ 3\kappa+\alpha & 3\lambda+\beta & 3\mu+\gamma \\ \kappa & \lambda & \mu \end{bmatrix}$$

$$\overset{(\iota\delta.3)}{=} -2\det\begin{bmatrix} \rho & \sigma & \tau \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \kappa & \lambda & \mu \end{bmatrix} \overset{(\iota\delta.1)}{=} 2\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \rho & \sigma & \tau \\ \kappa & \lambda & \mu \end{bmatrix} \overset{(\iota\delta.1)}{=} -2\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \kappa & \lambda & \mu \\ \rho & \sigma & \tau \end{bmatrix} = 2$$

Όμοια για το δεύτερο πίνακα:

$$\det B \overset{(\iota\delta.2)}{=} (-2)3\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\kappa+\rho & 2\lambda+\sigma & 2\mu+\tau \\ \rho & \sigma & \tau \end{bmatrix} \overset{(\iota\delta.3)}{=} -6\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\kappa & 2\lambda & 2\mu \\ \rho & \sigma & \mu \end{bmatrix}$$

$$\overset{(\iota\delta.2)}{=} -12\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \kappa & \lambda & \mu \\ \rho & \sigma & \tau \end{bmatrix} = 12$$

□

Παράδειγμα 4.2 Θα δείξουμε ότι

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Λύση : Πράγματι, σύμφωνα με την ιδιότητα 3 του θεωρήματος 2.2 έχουμε:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 \\ \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$$

Γενικεύοντας την παραπάνω ισότητα, αποδεικνύεται ότι:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_\nu \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_\nu^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{\nu-1} & \alpha_2^{\nu-1} & \dots & \alpha_\nu^{\nu-1} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1})(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-2}) & \cdots & (\alpha_\nu - \alpha_1) \\ (\alpha_{\nu-1} - \alpha_{\nu-2}) & \cdots & (\alpha_{\nu-1} - \alpha_1) \\ & & \vdots \\ & & (\alpha_2 - \alpha_1) \end{matrix}$$

Η ορίζουσα αυτή είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως ορίζουσα του Vandermonde. □

Από το θεώρημα 2.2 και το χαρακτηριστικό τύπο της ορίζουσας τριγωνικού πίνακα είναι φανερό ότι για να υπολογίσουμε την ορίζουσα πίνακα, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του θεωρήματος 1.2, θα πρέπει με μετασχηματισμούς γραμμών ή στηλών να μετασχηματίσουμε τον πίνακα σε τριγωνικό άνω (ή κάτω). Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται σε αριθμητικό παράδειγμα πίνακα 4×4. Έστω:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\det A = 2\det\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Στην πρώτη στήλη κάποιο από τα στοιχεία θα είναι διάφορο του μηδενός, γιατί σε διαφορετική περίπτωση η ορίζουσα του πίνακα θα είναι μηδέν. Επειδή το στοιχείο στη θέση (1, 1) είναι διάφορο του μηδενός, πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή διαδοχικά με -3, 3 και -1 και προσθέτουμε αντίστοιχα στη 2η , 3η και 4η γραμμή. Σύμφωνα με την ιδιότητα 3 του θεωρήματος 2.2 :

$$\det A = 2\det\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα, πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή του επί 4 και προσθέτουμε στην 3η. Τότε

$$\det A = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή επί -1/2 και προσθέτουμε στην 4η γραμμή

$$\det A = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\big(1\,3\,(-6)\,1\big) = -36 .$$

Αν με τη διαδικασία αυτή κάποιος από τους σημειούμενους υποπίνακες έχει μηδενική στήλη, τότε η ορίζουσα του αρχικού πίνακα είναι μηδέν. Οι πράξεις αυτές μεταξύ των γραμμών του πίνακα ονομάζονται **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών**.

Από την ισότητα (2.2) είναι φανερό ότι αντίστοιχη διαδικασία έχουμε μεταξύ των στη-λών και οι πράξεις αυτές ονομάζονται **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών**.

Γενίκευση της ορίζουσας τριγωνικού (ή διαγωνίου) πίνακα, είναι η ορίζουσα σύνθετου τριγωνικού (ή διαγωνίου) πίνακα. Αποδεικνύεται, ότι αν A, B είναι τετραγωνικοί πί-νακες:

$$\det \begin{bmatrix} A & M \\ O & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ N & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B) \qquad (2.3)$$

και κατά συνέπεια

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)$$

Θα τελειώσουμε το εδάφιο αυτό με την ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 3.2. Αν A, B είναι ν×ν πίνακες, τότε

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

$$\det(A^k) = (\det A)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Σημειώστε ότι για το άθροισμα **δεν** ισχύει ανάλογη σχέση, δηλαδή γενικά έχουμε

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

2.3. Αντίστροφοι πίνακες

Από τους τύπους αναπτύγματος της ορίζουσας πίνακα στο θεώρημα 1.2 συμπεραίνουμε ότι *το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μιας γραμμής (στήλης) επί τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων μιας άλλης γραμμής (στήλης) είναι μηδέν,* δηλαδή

$$\alpha_{i1} M_{\tau 1} + \alpha_{i2} M_{\tau 2} + \ldots + \alpha_{i\nu} M_{\tau\nu} = 0 \ , \quad i \neq \tau$$

$$\alpha_{1j} M_{1\sigma} + \alpha_{2j} M_{2\sigma} + \ldots + \alpha_{\nu j} M_{\nu\sigma} = 0 \ , \quad j \neq \sigma \qquad (2.4)$$

Αυτό συμβαίνει διότι το αριστερό μέρος της πρώτης της (2.4) είναι το ανάπτυγμα ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \tau\text{- γραμμη} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

κατά την τ- γραμμή του, η οποία είναι ίδια με την i- γραμμή του πίνακα και γι' αυτό η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν. Κατά τον ίδιο τρόπο δικαιολογείται η δεύτερη ισότητα στη (2.4) καθόσον το αριστερό μέρος της είναι το ανάπτυγμα ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu j} & \cdots & \alpha_{\nu j} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \\ \uparrow \sigma\text{ - στήλη} \end{array}$$

κατά την σ- στήλη του, που ταυτίζεται με την j- στήλη του.

Ορισμός. Για κάθε ν×ν πίνακα Α, ο πίνακας με στοιχεία τ' αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του Α

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots & M_{\nu 1} \\ M_{12} & M_{22} & \cdots & M_{\nu 2} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{1\nu} & M_{2\nu} & \cdots & M_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **προσαρτημένος** του Α και συμβολίζεται **adj A**. Παρατηρείστε ότι τα πρόσημα $(-1)^{i+j}$ των αλγεβρικών συμπληρωμάτων M_{ij} εναλλάσσονται σύμφωνα με τον πίνακα:

$$\begin{matrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \end{matrix}$$

Παράδειγμα 5.2 Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

τ' αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του είναι:

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18, \quad M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17, \quad M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6, \quad M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad M_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28$$

Τότε:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$ □

Έχοντας υπόψη τις ισότητες (2.4) και το θεώρημα 1.2 , αποδεικνύεται άμεσα:

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)\, I_\nu \qquad (2.5)$$

Την ισότητα (2.5) μπορείτε να την επαληθεύσετε με το προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα και θα βρείτε:

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = -94\, I_3$$

όπου $\det A = -94$.

Ορισμός. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα Α, αν υπάρχει πίνακας Β που έχει την ιδιότητα

$$AB = BA = I \qquad (2.6)$$

ονομάζεται **αντίστροφος** του Α και συμβολίζεται $\mathbf{A}^{-1}$.

Από τη συνεπαγωγή

$$A\,B = I \;\Rightarrow\; B\,A = I$$

ο ορισμός του αντίστροφου πίνακα περιορίζεται σε μια από τις ισότητες $AB = I$ ή $BA = I$. Επιπλέον, από την (2.6) και το θεώρημα 3.2 συμπεραίνουμε

$$(\det A)(\det B) = 1$$

και γι' αυτό *ένας πίνακας έχει αντίστροφο (* ισοδύναμη έκφραση: *είναι αντιστρέψιμος) ακριβώς όταν η ορίζουσα του πίνακα είναι διάφορη του μηδενός*. Η συνθήκη αυτή δικαιολογεί την ονομασία **ομαλός πίνακας** ακριβώς όταν $\det A \neq 0$.

Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος πίνακας B είναι **μοναδικός** και κατά συνέπεια από την ισότητα (2.5) έχουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\operatorname{adj} A\right) \qquad (2.7)$$

Για τον πίνακα A στο παράδειγμα 5.2 θα είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 18/94 & 6/94 & 10/94 \\ -17/94 & 10/94 & 1/94 \\ 6/94 & 2/94 & -28/94 \end{bmatrix}$$

Μετά τη γνωριμία μας με τον αντίστροφο πίνακα είναι προφανής η επέκταση της έννοιας των δυνάμεων πινάκων στους αρνητικούς ακέραιους εκθέτες. Δηλαδή, ορίζουμε:

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{k παραγοντες}}$$

και κατά συνέπεια ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων που αναφέραμε στην ενότητα 1.2 και για αρνητικούς εκθέτες.

Πρόταση 4.2 Αν οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, τότε:

1. A είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. A^k αντιστρέψιμος και $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
3. για κάθε $\lambda \neq 0$, $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$
4. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
5. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
6. $\operatorname{adj} A^{-1} = (\operatorname{adj} A)^{-1}$
7. ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Άμεση εφαρμογή των αντιστρόφων πινάκων είναι η επίλυση των εξισώσεων

$$A\,X = B \qquad , \qquad Y\,A = B$$

Όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος έχουν την μοναδική λύση

$$X = A^{-1}\,B \qquad , \qquad Y = B\,A^{-1}$$

Αν οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, οι σύνθετοι πίνακες

$$\begin{bmatrix} A & M \\ O & B \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A & O \\ N & B \end{bmatrix}$$

σύμφωνα με την (2.3), είναι αντιστρέψιμοι και επαληθεύσατε ότι:

$$\begin{bmatrix} A & M \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}M\,B^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A & O \\ N & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}N\,A^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

2.4 Ασκήσεις

2.1 Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, επαληθεύσατε την ισότητα (2.2).

2.2 Υπολογίσατε τις ορίζουσες

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \det\left(\lambda I_3 - A\right), \quad \text{όπου} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3 Επαληθεύσατε με παραδείγματα την ισότητα

$$\det \overline{A} = \overline{\det A}\,.$$

2.4 Υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

2.5 Αν για τους τετραγωνικούς πίνακες A , B είναι $A\,B = O$ και ο πίνακας A (ή B) είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι $B = O$ (ή $A = O$).

2.6 Δείξτε για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, όταν είναι αντιστρέψιμος

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

2.7 Επαληθεύσατε με παράδειγμα ότι $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η κεντρική ιδέα της Γραμμικής Άλγεβρας είναι η μελέτη των γραμμικών συστημάτων και στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συστηματικά μέθοδοι επίλυσής τους.

3.1. Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί

Σ' έναν πίνακα η εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών), το γινόμενο γραμμής (στήλης) επί αριθμό λ και το άθροισμα δύο γραμμών (στηλών) ονομάζονται **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** (**στηλών**).
Παράδειγμα, από τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν οι πίνακες

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

όταν αντίστοιχα εναλλάξουμε 1η και 2η στήλη, πολλαπλασιάσουμε την 1η γραμμή επί 2 και τέλος προσθέσουμε στην 3η στήλη το γινόμενο της 2ης στήλης επί 3.

Με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς σκοπός μας είναι να μετασχηματίσουμε τον $\mu\times\nu$ πίνακα A σε διαγώνια μορφή. Έτσι, με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ο σύνθετος πίνακας

$$[\, I_\mu \;\; A \,]$$

μετασχηματίζεται στον

$$[\, P \;\; T \,]$$

όπου

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{1\nu} \\ 0 & \tau_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{2\nu} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ O & & & \tau_{\mu\mu} & \dots & \tau_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{όταν } \mu < \nu$$

και

$$T=\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & & \tau_{1\nu} \\ 0 & \tau_{22} & & \tau_{2\nu} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \tau_{\nu\nu} \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{όταν } \mu \geq \nu$$

χωρίς κατ' ανάγκη όλα τα διαγώνια στοιχεία να είναι διάφορα του μηδενός. Στη συνέχεια θεωρούμε τον σύνθετο πίνακα

$$\begin{bmatrix} I_\nu \\ T \end{bmatrix}$$

και με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών μετασχηματίζουμε αυτό στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} Q \\ K \end{bmatrix},$$

όπου ο πίνακας K γενικά έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

$$\begin{bmatrix} D_\rho & O \\ O & O \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} D_\mu & O \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} D_\nu \\ O \end{bmatrix} \qquad D_\nu \ , \qquad (3.1)$$

ο δε διαγώνιος πίνακας D δεν έχει μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Αντίστοιχα των πινάκων στην (3.1) έχουμε

$$\rho < \mu,\nu \qquad \rho = \mu < \nu \qquad \mu > \nu = \rho \qquad \rho = \mu = \nu$$

και προφανώς με επιπλέον στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον πίνακα $\begin{bmatrix} Q \\ K \end{bmatrix}$ μπορούμε να καταλήξουμε ώστε $D_\rho = I_\rho$. Ο πίνακας K ονομάζεται **κανονική μορφή** του πίνακα A και είναι *μοναδικός*. Οι πίνακες P, Q είναι αντιστρέψιμοι και αποδεικνύεται η αξιοσημείωτη σχέση

$$\mathbf{PAQ = K} \qquad (3.2)$$

Η τάξη του διαγώνιου πίνακα D ή ισοδύναμα, το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα T ονομάζεται **βαθμός** του A και συμβολίζεται **rank A** .

Από την (3.1) είναι φανερό ότι για κάθε $\mu\times\nu$ πίνακα A έχουμε

$$\text{rank } A \leq \mu \qquad \text{και} \qquad \text{rank } A \leq \nu$$

Επιπλέον, όταν $\mu = \nu$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος,

$$\text{rank } A = \nu.$$

Παράδειγμα 1.3 Θα βρούμε την κανονική μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Στον πίνακα [I_3 A], αν εναλλάξουμε 1η και 3η γραμμή και μετά πολλαπλασιάσουμε την 1η γραμμή επί -2 και προσθέσουμε στη 2η γραμμή έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Προσθέτοντας τη 2η γραμμή στην 3η, θα είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & T \end{bmatrix}$$

Στον πίνακα $\begin{bmatrix} I_4 \\ T \end{bmatrix}$, πολλαπλασιάζουμε την 1η στήλη επί -3 και στη συνέχεια επί 2 και προσθέτουμε αντίστοιχα στη 2η και 3η στήλη. Τότε έχουμε τον πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 3η στήλη επί -2 και προσθέτοντας στην 4η στήλη και μετά εναλλάσσοντας 2η και 3η στήλη, έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} Q \\ K \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι η κανονική μορφή του Α και προφανώς $\operatorname{rank} A = 2$. Επαληθεύσατε ότι $PAQ = K$. □

Όταν ο πίνακας Α είναι τετραγωνικός και στο σύνθετο πίνακα $[\,P \quad T\,]$ όλα τα διαγώνια στοιχεία τ_{ii} του άνω τριγωνικού πίνακα

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \cdots & & \tau_{1i} & \cdots & \tau_{1\nu} \\ & \tau_{22} & & \tau_{2i} & \cdots & \tau_{2\nu} \\ & & & \vdots & & \\ & & \ddots & \tau_{i-1,i} & & \bullet \\ & & & \tau_{ii} & & \bullet \\ & \mathbf{O} & & & \ddots & \bullet \\ & & & & & \tau_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

είναι μη μηδενικά, με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον πίνακα $[\,P \quad T\,]$ μπορούμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία τ_{1i}, τ_{2i}, $\ldots$, $\tau_{i-1,i}$ και μετά να μετασχηματίσουμε με τα στοιχεία τ_{ii} σε 1. Έτσι, θα καταλήξουμε στο σύνθετο πίνακα

$$[\,R \quad I_\nu\,]$$

Επειδή $RA = I$, συμπεραίνουμε ότι

$$R = A^{-1}.$$

Παράδειγμα 2.3 Θα υπολογίσουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Στον πίνακα $[\,I_3 \quad A\,]$ πολλαπλασιάζοντας την 1η γραμμή επί -2 και -3 και προσθέτοντας στη 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & \vdots & 0 & -7 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 2η γραμμή επί -5/7 και προσθέτοντάς την στην 3η γραμμή, καταλήγουμε στον πίνακα:

$$\begin{bmatrix} P & T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -7 & -4 \\ -11/7 & -5/7 & 1 & 0 & 0 & -50/7 \end{array}\right]$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή επί -1/7 και την 3η γραμμή επί -7/50:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2/7 & -1/7 & 0 & 0 & 1 & 4/7 \\ 11/50 & 1/10 & -7/50 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Θα μηδενίσουμε τα στοιχεία που είναι πάνω από τις διαγώνιες μονάδες, πολλαπλασιάζοντας τη 2η γραμμή επί -2 και προσθέτοντας στην 1η και πολλαπλασιάζοντας την 3η γραμμή επί -4/7 και επί -13/7 και προσθέτοντας στη 2η και στην 1η. Τα αποτελέσματα των πράξεων αυτών είναι:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/50 & 1/10 & 13/50 & 1 & 0 & 0 \\ 4/25 & -1/5 & 2/25 & 0 & 1 & 0 \\ 11/50 & 1/10 & -7/50 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ο αριστερός υποπίνακας είναι ο αντίστροφος του Α. $\square$

Θα τελειώσουμε την ενότητα αυτή, αναφέροντας μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες για το βαθμό πίνακα:

Θεώρημα 1.3. Για κάθε $\mu \times \nu$ πίνακα A

1. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A^T A$

2. $\operatorname{rank} MA \leq \operatorname{rank} A, \quad \operatorname{rank} AN \leq \operatorname{rank} A$

3. Αν M, N είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τάξεως μ, ν αντίστοιχα:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} MAN$$

4. Αν $\operatorname{rank} A = \rho$, υπάρχει τετραγωνικός υποπίνακας B του A τάξεως ρ, τέτοιος ώστε $\det B \neq 0$, αλλά η ορίζουσα κάθε υποπίνακα τάξεως $\rho+1$ είναι μηδέν.

Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις:

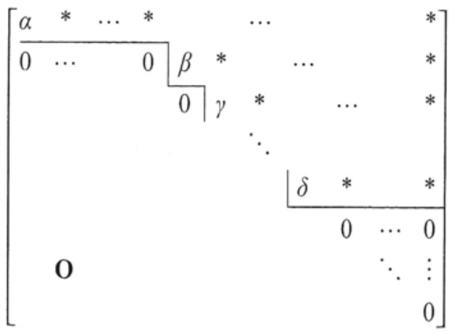
$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

και αν A, B είναι τύπου $\mu \times \nu$ και $\nu \times \rho$ αντίστοιχα

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - \nu \leq \operatorname{rank}(AB).$$

3.2. Παραγοντοποίηση LU

Έχοντας υπόψη στην ενότητα 2.2 τη μεθοδολογία μετασχηματισμού πίνακα σε άνω τριγωνικό και εφαρμόζοντας αυτήν στον σύνθετο πίνακα $[\, I \;\; A \,]$ καταλήγουμε στον πίνακα $[\, P \;\; U \,]$, όπου P είναι πίνακας αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία μονάδες και ο υποπίνακας U είναι γενικά **κλιμακωτής μορφής**



όπου όλα τα στοιχεία κάτω της τεθλασμένης γραμμής είναι 0, τα στοιχεία $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ στις "γωνιακές θέσεις" είναι διάφορα του μηδενός και τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα σημειώνονται με $*$. Έτσι θα έχουμε:

$$PA = U \qquad (3.2)$$

Επειδή ο αντίστροφος κάτω τριγωνικού πίνακα είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, αν σημειώσουμε $P^{-1} = L$, από την εξίσωση (3.2) προκύπτει η **παραγοντοποίηση LU** του πίνακα

$$A = LU \qquad (3.3)$$

όπου L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας και U άνω τριγωνικός.

Παράδειγμα 3.3 Θα παραγοντοποιήσουμε στην μορφή (3.3) τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix}$$

Πράγματι, στον πίνακα $[\, I_4 \;\; A \,]$:

- Πολλαπλασίασε την 1η γραμμή επί (-1/2) και πρόσθεσε στη 2η γραμμή. Πολλαπλασίασε την 1η γραμμή επί 2 και πρόσθεσε στην 3η γραμμή. Πρόσθεσε την 1η γραμμή στην 4η γραμμή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 6 & -2 & -4 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 4 & 13 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & 0 & -2 & -14 & 11 \end{bmatrix}$$

- Πολλαπλασίασε τη 2η γρ. επί 2 και πρόσθεσε στην 3η γραμμή. Πολλαπλασίασε τη 2η γρ. επί -1 και πρόσθεσε στην 4η γραμμή (ισοδύναμα: αφαίρεσε 2η γρ. από 4η γρ.) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 6 & -2 & -4 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 3/2 & -1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- Πολλαπλασίασε την 3η γραμμή επί 2 και πρόσθεσε στην 4η γραμμή:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 6 & -2 & -4 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 7/2 & 3 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ \quad\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \quad P \qquad\qquad\qquad U \end{array}$$

Τότε:

$$A = P^{-1}\,U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Παρατηρείστε, ότι τα στοιχεία του πίνακα $L(= P^{-1})$ κάτω από τις διαγώνιες μονάδες *είναι οι αντίθετοι των συντελεστών* στους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, απλουστεύοντας έτσι τη διαδικασία παραγοντοποίησης του πίνακα.

Σημειώστε ότι κάθε πίνακας δεν παραγοντοποιείται στη μορφή LU.

Παράδειγμα, αν γράψουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ με την μορφή γινομένου LU

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

θα έχουμε $l_{11}u_{11}= 0$. Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι $l_{11} = 0$ ή $u_{11} = 0$, δηλαδή ένας από τους πίνακες L ή U δεν είναι αντιστρέψιμος, άτοπο γιατί ο πίνακας LU = A είναι αντιστρέψιμος.

Συμβολίζοντας με $u_{11}, \dots, u_{\nu\nu}$ τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα U από την (3.3) έχουμε

$$A = L\,D\,U_1 \tag{3.4}$$

όπου $D = \mathrm{diag}(u_{11},\dots,u_{\nu\nu})$ και τα διαγώνια στοιχεία του άνω τριγωνικού πίνακα U_1 είναι μονάδες. Έτσι για τους τετραγωνικούς πίνακες θα είναι

$$\det A = u_{11}\,u_{22}\dots u_{\nu\nu}$$

Στην (3.4), αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός ($A = A^T$) τότε

$$A = L\,D\,L^T \tag{3.5}$$

Η (3.5) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **παραγοντοποίηση Cholesky**

Παράδειγμα 4.3 Η παραγοντοποίηση LU του συμμετρικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Οπότε η παραγοντοποίηση Cholesky θα είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η παραγοντοποίηση LU πίνακα μας διευκολύνει να λύσουμε την εξίσωση

$$A\,x = \beta$$

όπου x , β είναι πίνακες στήλη (διανύσματα).

Πράγματι, θέτοντας $U\,x = y$ στην εξίσωση $LU\,x = \hat{a}$, η εξίσωση

$$L\,y = \beta \qquad ; \qquad y = [\, y_1,\ y_2, \dots,\ y_\mu \,]$$

είναι άμεσα επιλύσιμη, διότι ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός και όταν αναπτύξουμε τις εξισώσεις, βλέπουμε ότι κάθε εξίσωση έχει ένα άγνωστο y_i περισσότερο από την προηγούμενη. Μετά την εύρεση του y, τα ίδια πλεονεκτήματα παρουσιάζονται στην εξίσωση $U\,x = y$, όπου κάθε εξίσωση με αγνώστους τα στοιχεία του x, έχει έναν άγνωστο τουλάχιστον λιγότερο από την προηγούμενη. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.3 Ας θεωρήσουμε στην εξίσωση $A\,x = \beta$ τον πίνακα A στο παράδειγμα 3.3 και $\beta = [\,2\ \ -4\ \ \ 8\ \ -43\,]^T$. Θέτοντας $U\,x = y$, η εξίσωση $L\,y = \beta$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad\qquad &= \ \ 2 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 \qquad\qquad &= -4 \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 \qquad &= \ \ 8 \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 &= -43 \end{aligned}$$

Οπότε $y_1 = 2$, $y_2 = -5$, $y_3 = 2$ και $y_4 = -32$.

Στη συνέχεια από την εξίσωση $U\,x = y$, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= \ \ 2 \\ -2x_2 - 4x_3 - x_4 &= -5 \\ 5x_3 - 2x_4 &= \ \ 2 \\ 8x_4 &= -32 \end{aligned}$$

που βρίσκουμε άμεσα τη λύση του $x = [\,4.5\ \ 6.9\ \ -1.2\ \ -4\,]^T$. □

3.3. Επίλυση γραμμικών συστημάτων

3.3.1. Γραμμικά συστήματα

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y = \beta$$

ονομάζεται **γραμμική** των μεταβλητών x και y. Γενικότερα, ονομάζουμε *γραμμική εξίσωση* των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu = \beta$$

όπου $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \beta$ είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Παρατηρούμε ότι σε μία γραμμική εξίσωση δεν παρουσιάζονται δυνάμεις ή γινόμενα ή ρίζες των μεταβλητών, ούτε τριγωνομετρικοί αριθμοί ή λογάριθμοι ή εκθετικές συναρτήσεις αυτών. Ένα πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_\nu$:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \ \ \vdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu &= \beta_\mu \end{aligned} \qquad (3.6)$$

ονομάζεται **γραμμικό σύστημα** μ εξισώσεων με ν αγνώστους.

Αν παραστήσουμε

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}$$

το σύστημα (3.6) γράφεται υπό τη μορφή

$$Ax = \beta \qquad (3.7)$$

Κάθε ν-άδα αριθμών $x_1 = c_1, \ldots, x_\nu = c_\nu$ που επαληθεύει τις εξισώσεις (3.6) ονομάζεται **λύση του συστήματος**. Κάθε σύστημα που έχει λύση ονομάζεται **συμβιβαστό**, διαφορετικά ονομάζεται **ασυμβίβαστο**.

Για να γίνουν κατανοητές οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται κατά την επίλυση του γραμμικού συστήματος, θεωρούμε το γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y :

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y &= \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y &= \gamma_2 \end{aligned}$$

όπου $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$ και $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ ($i = 1, 2$). Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων αυτών είναι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και οι λύσεις του συστήματος θ' αντιστοιχούν στις σχετικές θέσεις των ευθειών:

I. Όταν οι ευθείες ε_1 , ε_2 τέμνονται, το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση.

II. Όταν οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες, το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

III. Όταν οι ευθείες ε_1 , ε_2 ταυτίζονται, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Οι περιπτώσεις I, II και III ισχύουν για *οποιοδήποτε* γραμμικό σύστημα.

Θεώρημα 2.3. Το σύστημα $Ax = \beta$ είναι συμβιβαστό ακριβώς όταν

$$\operatorname{rank}[\,A \ \ \beta\,] = \operatorname{rank} A.$$

Για την επίλυση του συστήματος, θεωρούμε τον **επαυξημένο πίνακα**

$$[\,A\ \ \beta\,] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{bmatrix}$$

και με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών μετασχηματίζουμε αυτόν σε άνω τριγωνικό πίνακα (ή γενικότερα σε κλιμακωτή μορφή).

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \bullet & \bullet & \bullet & c_{1\nu} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \bullet & \bullet & \bullet & c_{2\nu} & d_2 \\ \bullet & & \ddots & & & & \vdots \\ \bullet & & 0 & c_{\rho\rho} & \cdots & c_{\rho\nu} & d_\rho \\ O & & & & & O & \end{bmatrix}$$

Το νέο σύστημα είναι ισοδύναμο του αρχικού (δηλαδή, έχει το ίδιο σύνολο λύσεων) και επιλύεται ευκολότερα, αφού κάθε εξίσωση έχει έναν τουλάχιστον άγνωστο λιγότερο από την προηγούμενη εξίσωση.

Παράδειγμα 6.3 Θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 \qquad - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Με την εμπειρία που έχετε αποκτήσει, διαπιστώνετε ότι η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Έτσι, έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -x_2 + x_3 &= 8 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

που βρίσκουμε άμεσα την λύση του:

$$x_3 = 3, \qquad x_2 = -1, \qquad x_1 = 2. \qquad \square$$

Παράδειγμα 7.3 Για το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 \quad - 6x_3 + 9x_4 &= 7 \end{aligned}$$

μπορείτε να επαληθεύσετε ότι, ο επαυξημένος πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & \vdots & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

μετασχηματίζεται στην κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε, από το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \frac{5}{2}x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 &= \frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{3}{2}x_4 &= 2 \end{aligned}$$

έχουμε *την μονοπαραμετρική απειρία* λύσεων:

$$x_4 = c \qquad x_3 = 2 - \frac{3}{2}c, \qquad x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{17}{4}c, \qquad x_1 = \frac{19}{2} - 9c. \qquad \square$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αν το σύστημα έχει περισσότερους αγνώστους από τις εξισώσεις, μπορεί το σύστημα να είναι ασυμβίβαστο, αν όμως είναι συμβιβαστό, τότε έχει άπειρες λύσεις, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.3 Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

δεν είναι συμβιβαστό, γιατί η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 2 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -5/6 & 1 & \vdots & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

όπου συμπεραίνουμε ότι η τελευταία εξίσωση του ισοδύναμου γραμμικού συστήματος είναι $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -6$. □

Στην εξίσωση (3.7), αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και $\det A \neq 0$, το σύστημα έχει τη *μοναδική* λύση:

$$x = A^{-1}\beta = \frac{1}{\det A}\left(\operatorname{adj} A\right)\beta$$

Αποδεικνύεται ότι ο άγνωστος x_i βρίσκεται από τον τύπο

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

όπου A_i είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A, όταν αντικαταστήσουμε την i - στήλη του με το διάνυσμα β. Στο Παράδειγμα 6.3, έχουμε $\det A = 20$ και

$$x_1 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$x_3 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3.$$

3.3.2. Ομογενή συστήματα

Αν στην εξίσωση (3.7) είναι $\beta = \mathbf{0}$, το σύστημα

$$A\,x = \mathbf{0}$$

ονομάζεται **ομογενές.** Τα ομογενή συστήματα είναι πάντοτε συμβιβαστά, διότι προφανής λύση είναι $x = \mathbf{0}$. **Η μηδενική λύση είναι μοναδική όταν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και det A ≠ 0**. Σε κάθε άλλη περίπτωση το ομογενές σύστημα έχει απειρία λύσεων και το πλήθος των αγνώστων στους οποίους δίνουμε οποιαδήποτε τιμή, είναι:

$$\nu - \text{rank}\,A$$

όπου ν είναι το πλήθος των αγνώστων.

Παράδειγμα 9.3 Θα λύσουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (επαληθεύσατε) είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου επιπλέον πληροφορούμαστε ότι rank A = 3.

Οπότε το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_4 &= 0 \\ x_2 \quad - 3x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

και έχουμε την μονοπαραμετρική (4 - 3 =1) απειρία λύσεων:

$x_1 = -2\,c$, $x_2 = 3\,c$, $x_3 = 2\,c$, $x_4 = c$. □

3.4. Ασκήσεις

3.1 Βρείτε την κανονική μορφή των πινάκων

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & -1\\ 1 & 4 & 5 & 1\\ 1 & 5 & 4 & 3\end{bmatrix}.$$

3.2 Βρείτε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τους αντίστροφους των πινάκων

$$A=\begin{bmatrix}2 & 8 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 7\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}6 & -2 & -4 & 4\\ 3 & -3 & -6 & 1\\ -12 & 8 & 21 & -8\\ 6 & 0 & -10 & 7\end{bmatrix}.$$

3.3 Να παραγοντοποιηθούν στην μορφή LU οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 7\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -4 & 5\\ -2 & 2 & -5 & 4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 8\\ -2 & -5 & 1 & -8\\ 0 & 1 & 7 & 8\end{bmatrix}.$$

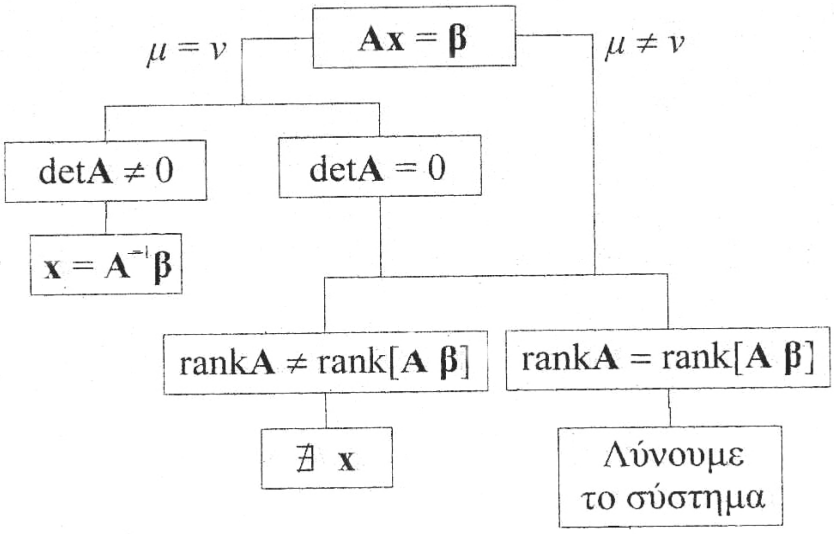
3.4 Να λύσετε τα συστήματα

$$\begin{aligned}3x+4y+z&=1\\ 2x+3y&=0\\ 4x+3y-z&=-2\end{aligned}\;,\qquad \begin{aligned}x+2y-z&=2\\ 2x+5y+2z&=-1\\ 7x+17y+5z&=-1\end{aligned}\;,\qquad \begin{aligned}x+10z&=5\\ 3x+y-4z&=-1\\ 4x+y+6z&=1\end{aligned}$$

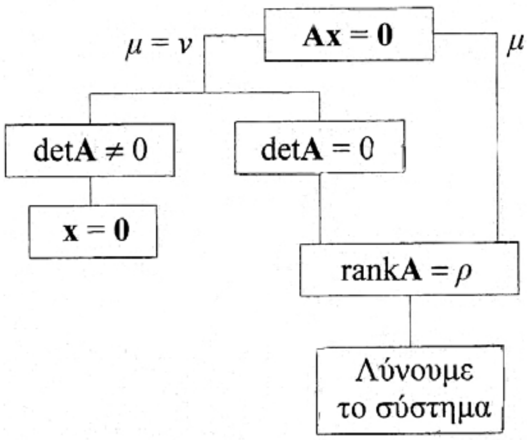
3.5 Να λύσετε τα συστήματα

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3&=0\\ 4x_1-5x_2+6x_3&=0\end{aligned}\qquad \begin{aligned}x_1-x_2+2x_3+x_4&=0\\ 2x_1+2x_2-x_4&=0\\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4&=0\end{aligned}$$

3.6 Διευκρινίσατε τα διαγράμματα ροής επίλυσης των γραμμικών συστημάτων.



Ax = β
μ = ν
μ ≠ ν
detA ≠ 0
detA = 0
x = A⁻¹β
rankA ≠ rank[A β]
rankA = rank[A β]
∄ x
Λύνουμε το σύστημα



Ax = 0
μ = ν
μ ≠ ν
detA ≠ 0
detA = 0
x = 0
rankA = ρ
Λύνουμε το σύστημα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Η έννοια του διανυσματικού χώρου έχει τις ρίζες του σε πολλά προβλήματα του φυσικού μας κόσμου. Η μελέτη των χώρων αυτών δεν είναι πολύ διαφορετική από εκείνη του ν-διάστατου χώρου $\mathbf{R}^{\nu}$*, καθόσον διάφορες γεωμετρικές έννοιες (π.χ. διάνυσμα, απόσταση, γωνία) του* $\mathbf{R}^2$ *και* $\mathbf{R}^3$ *γενικεύονται.*

4.1. Διανυσματικοί χώροι

Στην ενότητα 1.2 γνωρίσαμε ότι το σύνολο των *διανυσμάτων* (πίνακες στήλη) του ίδιου τύπου

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_\nu \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\nu \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_\nu \end{bmatrix}^T$$

έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. $\forall \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \qquad (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
2. $\forall \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \qquad \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$
3. $\forall \quad \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{x}$, όπου $\mathbf{0} = [\,0 \;\; 0 \dots 0\,]^T$
4. $\forall \quad \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, όπου $-\mathbf{x} = [\,-x_1 \;\; -x_2 \;\dots\; -x_\nu\,]^T$
5. $\forall \quad \mathbf{x} \qquad 1 \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{x}$
6. $\forall \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \; \forall \; k \in \mathbf{C} \qquad k(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$
7. $\forall \quad \mathbf{x}, \quad \forall \; k, \lambda \in \mathbf{C} \qquad (k+\lambda)\mathbf{x} = k\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}$
8. $\forall \quad \mathbf{x}, \quad \forall \; k, \lambda \in \mathbf{C} \qquad k(\lambda\mathbf{x}) = (k\lambda)\mathbf{x}$

Οι συνθήκες αυτές χαρακτηρίζουν κάθε σύνολο Δ που είναι **διανυσματικός χώρος** όταν μεταξύ των στοιχείων του Δ έχει ορισθεί η πρόσθεση και το γινόμενο επί αριθμό, έτσι ώστε:

$$\forall \;\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{x}+\mathbf{y} \in \Delta$$

$$\forall \;\; \mathbf{x} \in \Delta \,, \;\; \forall \;\; k \in \mathbf{C} \;\; \rightarrow \;\; k\mathbf{x} \in \Delta$$

Ιδιαίτερα, αν $k \in \mathbf{R}$ το σύνολο Δ ονομάζεται *πραγματικός* διανυσματικός χώρος. Τα στοιχεία κάθε διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Σε κάθε διανυσματικό χώρο Δ αποδεικνύεται ότι

$$0\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\ , \qquad k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\ , \qquad (-1)\,\mathbf{x} = -\,\mathbf{x}$$

$$\forall\ \mathbf{x} \in \Delta\ ,\ k \in \mathbf{C}\ , \quad k\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad ή \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

1. Τα σημεία μιας ευθείας **ε** ή επιπέδου **Π** που διέρχονται από την αρχή των συντεταγμένων Ο είναι διανυσματικός χώρος με τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης και γινομένου επί αριθμό, μεταξύ των σημείων του:

   $$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

   $$k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1).$$

   Κάθε ευθεία ή επίπεδο που δεν περνά από την αρχή δεν είναι διανυσματικός χώρος, αφού δεν περιέχουν το **0**. Αλλά και κάθε ημιευθεία ή ημιεπίπεδο που περνά από την αρχή δεν είναι διανυσματικός χώρος, αφού δεν περιέχει τα αντίθετα διανύσματα.
2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου στο α' τεταρτημόριο ($x \geq 0$, $y \geq 0$) δεν είναι διανυσματικός χώρος. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για $x = (1, 1)$, το σημείο $(-1)\,x = (-1, -1)$ δεν ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο.
3. Το σύνολο $\mathbf{\Pi_\nu}$ των πολυωνύμων βαθμού $\leq \nu$ είναι διανυσματικός χώρος με τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης πολυωνύμων και γινομένου πολυωνύμου επί αριθμό.
4. Το σύνολο των πινάκων τύπου $\mu\times\nu$, με πράξεις το γνωστό μας λογισμό στην ενότητα 1.2, είναι επίσης διανυσματικός χώρος.

Ένα υποσύνολο Ε του διανυσματικού χώρου Δ ονομάζεται **διανυσματικός υπόχωρος** ή απλά **υπόχωρος** του Δ ακριβώς όταν είναι διανυσματικός χώρος με πράξεις αυτές που ορίσθηκαν στον Δ. Αποδεικνύεται ότι για να συμβαίνει αυτό, ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι:

$$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \quad \forall\ k, \lambda \in \mathbf{C} \quad \rightarrow \quad k\,\mathbf{x} + \lambda\,\mathbf{y} \in E$$

Από κάθε πεπερασμένου πλήθους διανύσματα του διανυσματικού χώρου Δ, το σύνολο

$$E = \{\ \mathbf{x} : \quad \mathbf{x} = \lambda_1\,\eta_1 + \ldots + \lambda_\rho\,\eta_\rho\ , \quad \lambda_i \in \mathbf{C}\ \}$$

είναι υπόχωρος του Δ και συμβολίζεται **span** $\{\boldsymbol{\eta_1}, \ldots, \boldsymbol{\eta_\rho}\}$.Τα διανύσματα $\eta_1, \ldots, \eta_\rho$ ονομάζονται **γεννήτορες** του Ε, για δε το διάνυσμα **x** θα λέμε ότι είναι **γραμμικός συνδυασμός** αυτών.

Αν E_1 , E_2 είναι υπόχωροι του Δ, το σύνολο $E_1 \cap E_2$ είναι πάντοτε διανυσματικός υπόχωρος του Δ, αλλά αυτό **δεν** συμβαίνει για το σύνολο $E_1 \cup E_2$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που περνούν από την αρχή, για $\mathbf{x} \in \varepsilon_1$ και $\mathbf{y} \in \varepsilon_2$ δεν συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$.

Το σύνολο

$$E_1 + E_2 = \{ \ \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} : \quad \mathbf{x_1} \in E_1 , \quad \mathbf{x_2} \in E_2 \ \}$$

ονομάζεται **άθροισμα** των υποχώρων E_1 , E_2 και είναι διανυσματικός υπόχωρος του Δ.

Αν μεταξύ των υποχώρων E_1 , E_2 είναι $E_1 \cap E_2 = \{ \mathbf{0} \}$, ο υπόχωρος $E_1 + E_2$ ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** των E_1 , E_2 και συμβολίζεται $\mathbf{E_1 \oplus E_2}$. Αποδεικνύεται, ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in E_1 \oplus E_2$ γράφεται ***μονοσήμαντα*** σαν το άθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$, όπου $\mathbf{x_1} \in E_1$ και $\mathbf{x_2} \in E_2$. Ισχύει και το αντίστροφο, αν κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in E_1 \oplus E_2$ γράφεται *μονοσήμαντα* $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$, όπου $\mathbf{x_1} \in E_1$, $\mathbf{x_2} \in E_2$ τότε $E_1 \cap E_2 = \{ \mathbf{0} \}$.

Παραδείγματα διανυσματικών υποχώρων.

1. Τα διανύσματα $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ $\varepsilon_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ είναι γεννήτορες του $\mathbf{R^3}$, γιατί για κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} = [\ \alpha \ \ \beta \ \ \gamma\ ]^T \in \mathbf{R^3}$ έχουμε:

   $$\mathbf{x} = \alpha\, \varepsilon_1 + \beta\, \varepsilon_2 + \gamma\, \varepsilon_3.$$

   Αν $\gamma = 0$, το σύνολο των διανυσμάτων $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0\end{bmatrix}^T$ είναι υπόχωρος του $\mathbf{R^3}$.
2. Τα μονώνυμα $1, x , x^2, \dots , x^\nu$ είναι γεννήτορες του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων $\mathbf{\Pi_\nu}$, βαθμού $\le \nu$.
3. Στο επίπεδο 0.xy , το σύνολο των σημείων Μ (x, y) του μοναδιαίου δίσκου έχουν την ιδιότητα $x^2 + y^2 \le 1$. Το σύνολο αυτό δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbf{R^3}$, γιατί για το σημείο του δίσκου (1/2 , 0), το σημείο 3(1/2 , 0) = (3/2 , 0) είναι εκτός του δίσκου.
4. Αν W είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\begin{bmatrix}k + 3\lambda & k - \lambda & 2k - \lambda & 4\lambda\end{bmatrix}^T$ έχουμε:

   $$\begin{bmatrix} k + 3\lambda \\ k - \lambda \\ 2k - \lambda \\ 4\lambda \end{bmatrix} = k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\uparrow \ \eta_1} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\uparrow \ \eta_2}$$

   Η ισότητα αυτή δείχνει ότι $W = \text{span} \{ \eta_1 , \eta_2 \}$, είναι υπόχωρος του $\mathbf{R^4}$.

5. Το σύνολο $E = \{ (x , -x) : \ x \in \mathbf{R} \}$ είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^2$. Πράγματι, για οποιαδήποτε στοιχεία $(x , -x)$ και $(y , -y)$ του E , έχουμε

$$(x , -x) + (y , -y) = (x + y , - (x + y)) \in E ,$$

$$k (x , -x) = (kx , - (kx)) \in E \quad , \forall k \in \mathbf{C}.$$

Ο υπόχωρος E είναι το σύνολο των διανυσμάτων, συγγραμμικών του $(1, -1)$.

6. Αν U είναι το σύνολο των πολυωνύμων του $\mathbf{\Pi}_\nu$, που έχουν ρίζα τον αριθμό 3, δηλαδή $U = \{ p(x) \in \mathbf{\Pi}_\nu : \ p(3) = 0 \}$, θα δείξουμε ότι U είναι υπόχωρος του $\mathbf{\Pi}_\nu$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα πολυώνυμα $p(x) + q(x)$ και $kp(x)$, για κάθε $p(x) , q(x) \in U$ και $k \in \mathbf{C}$ μηδενίζονται για $x = 3$.

7. Το σύνολο των πινάκων $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των πινάκων 2×2. Προσπαθείστε να δικαιολογήσετε την πρόταση με το ίδιο σκεπτικό των παραπάνω παραδειγμάτων 5 και 6.

Παράδειγμα 1.4 Θα εξετάσουμε αν το σύνολο $\mathbf{R}^2$ με τις σημειωμένες πράξεις

$$(x_1 , \ x_2) + (y_1 , y_2) = (x_1 + y_1 \ , \ x_2 + \ y_2 \ )$$

$$\lambda (x_1 , \ \ x_2 \ ) = (2\lambda \, x_1 , \ 2\lambda \, x_2 \ )$$

είναι διανυσματικός χώρος. Επειδή το αξίωμα 5 με την πράξη του πολλαπλασιασμού που έχει ορισθεί

$$1 (x_1 \ , \ x_2 \ ) \ = \ (2x_1 \ , \ 2x_2) \ \neq \ (x_1 , \ x_2)$$

δεν αληθεύει, δεν είναι διανυσματικός χώρος.

Αν όμως ορισθεί ο πολλαπλασιασμός

$$\lambda (x_1 , \ x_2) \ = \ (\lambda x_1 , \ \lambda x_2)$$

τότε η απάντηση είναι καταφατική για όλα τα αξιώματα 1 - 8. □

Παράδειγμα 2.4 Αν ο πίνακας A είναι τύπου $\mu \times \nu$, το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος, $A x = \mathbf{0}$ είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^\nu$.

Για να διαπιστώσουμε αυτό θεωρούμε δύο λύσεις x και y του συστήματος, δηλαδή $A x = \mathbf{0}$ και $A y = \mathbf{0}$. Επειδή

$$A (x + y) = A x + A y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$A (kx) = k(A x) = k \, \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

συμπεραίνουμε ότι $x + y$ και kx είναι επίσης λύσεις του ομογενούς συστήματος. Ο χώρος αυτός ονομάζεται **μηδενικός χώρος** ή **πυρήνας** του πίνακα A. □

Απεναντίας, το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος A x = β, όπου β είναι μη μηδενικό διάνυσμα, **δεν** είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^{\nu}$. Αυτό συμβαίνει, διότι ο χώρος λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος A x = **0** έχει μετατοπισθεί κατά μήκος μιας συγκεκριμένης λύσης του A x = β και δεν ανήκει πλέον σ' αυτόν το μηδενικό διάνυσμα. Στο παράδειγμα 7.3 η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος A x = **0** είναι τα διανύσματα $x_0 = c\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{17}{4} & -9 \end{bmatrix}^T$, τα οποία με παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\xi = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{19}{2} \end{bmatrix}^T$ ορίζουν το χώρο λύσεων του αρχικού συστήματος. Γι' αυτό, κάθε λύση του γραμμικού συστήματος (3.7) είναι της μορφής:

$$\mathbf{x} = \xi + \mathbf{x_0}\,.$$

Παράδειγμα 3.4 Για ποια τιμή του θ, το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ \theta \end{bmatrix} \in \text{span}\,\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία, αυτό θα συμβαίνει ακριβώς όταν υπάρχουν αριθμοί λ_1 , λ_2 , λ_3 τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ \theta \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από την ισότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 4 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 &= -3 \\ 2\lambda_1 + 7\lambda_2 \quad\quad &= \theta \end{aligned}$$

θα πρέπει να είναι συμβιβαστό. Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & \vdots & 4 \\ -1 & -4 & 1 & \vdots & -3 \\ 2 & 7 & 0 & \vdots & \theta \end{bmatrix}$$

είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \theta - 5 \end{bmatrix}$$

και απ' αυτή συμπεραίνουμε ότι $\theta = 5$. □

Παράδειγμα 4.4 Εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε ότι όλα τα σύνολα

$$E_1 = \{ (\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbf{R} \} \quad , \qquad E_2 = \{ (0, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbf{R} \}$$

είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^3$. Επειδή κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ ισούται με το άθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$, όπου $\mathbf{x_1} \in E_1$ και $\mathbf{x_2} \in E_2$, έχουμε

$$\mathbf{R}^3 = E_1 + E_2$$

Επιπλέον από την ισότητα $E_1 \cap E_2 = \{ \mathbf{0} \}$, ο χώρος $\mathbf{R}^3$ είναι το ευθύ άθροισμα των E_1 και E_2, δηλαδή του επιπέδου 0.xy και του άξονα 0.z .

4.2. Γραμμικά ανεξάρτητα ή εξαρτημένα διανύσματα

4.2.1. Γραμμική εξάρτηση

Σε κάθε διανυσματικό χώρο είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ένα σύνολο γεννητόρων, αφού οι ιδιότητες των διανυσμάτων αυτών επεκτείνονται και στα υπόλοιπα στοιχεία του διανυσματικού χώρου. Γι' αυτό είναι επιθυμητό το σύνολο των γεννητόρων να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Το πρόβλημα να βρίσκουμε το μικρότερο σύνολο γεννητόρων εξαρτάται από την έννοια της *γραμμικής ανεξαρτησίας*. Αν $\eta_1, \ldots, \eta_\rho$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων, η διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \ldots + \lambda_\rho \eta_\rho = \mathbf{0} \qquad (4.1)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση την

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\rho = 0 .$$

Αν η λύση αυτή είναι μοναδική τότε τα διανύσματα $\eta_1, \ldots, \eta_\rho$ ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητα**. Αν υπάρχουν κι άλλες λύσεις τότε ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα**. Το μηδενικό διάνυσμα είναι εξαρτημένο, γιατί για κάθε $\lambda \neq 0$ είναι $\lambda\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Επίσης κάθε σύνολο διανυσμάτων, που περιέχει το $\mathbf{0}$, είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα. Κάθε διάνυσμα $\alpha \neq \mathbf{0}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού από την εξίσωση $\lambda\alpha = \mathbf{0}$ συμπεραίνουμε $\lambda = 0$.

Η ονομασία “γραμμικά εξαρτημένα” για τα διανύσματα $\eta_1 , \ldots , \eta_\rho$ δικαιολογείται, γιατί ένα τουλάχιστον διάνυσμα του συνόλου των γεννητόρων είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι, αφού η εξίσωση (4.1) έχει λύση διάφορη της μηδενικής, ας είναι $\lambda_1 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση επί $1/\lambda_1$ έχουμε:

$$\eta_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\eta_2 - \cdots - \frac{\lambda_\rho}{\lambda_1}\eta_\rho . \qquad (4.2)$$

Δηλαδή, το διάνυσμα η_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των $\eta_2 , \ldots , \eta_\rho$.
Από τους προηγούμενους ορισμούς συμπεραίνουμε ακόμη ότι αν $\eta_1 , \ldots , \eta_\rho$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε κάθε υποσύνολο αυτών είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Όπως, αν $\eta_1 , \ldots , \eta_\rho$ είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, κάθε σύνολο διανυσμάτων από τον ίδιο διανυσματικό χώρο, που περιέχει αυτά, είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.

Παράδειγμα 5.4 Τα διανύσματα $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}^T$, $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}^T$, ..., $\varepsilon_\nu = \begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γιατί από την διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \ldots + \lambda_\nu \varepsilon_\nu = \mathbf{0}$$

έχουμε $(\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_\nu) = \mathbf{0}$ και συνεπώς $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$. □

Παράδειγμα 6.4 Από την (4.2) αποδεικνύεται άμεσα ότι δύο διανύσματα υ_1 και υ_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, ακριβώς όταν ένα από τα διανύσματα αυτά είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου, δηλαδή όταν βρίσκονται στην ίδια ευθεία που περνά από την αρχή.
Όμοια, τα διανύσματα υ_1 , υ_2 και υ_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, ακριβώς όταν είναι συνεπίπεδα και το επίπεδο αυτό περνά από την αρχή. □

Θεώρημα 1.4. Τα διανύσματα $\eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_\rho$ τύπου $\nu\times 1$, είναι γραμμικά εξαρτημένα, ακριβώς όταν η ορίζουσα κάθε υποπίνακα τάξεως ρ του $\nu\times\rho$ πίνακα

$$H = [\, \eta_1 \ \eta_2 \ \ldots \ \eta_\rho \,]$$

είναι ίση με μηδέν.

Έτσι, τα διανύσματα $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\rho$, για $\rho < \nu$, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ακριβώς όταν στον $\nu \times \rho$ πίνακα

$$H = [\ \eta_1\ \ \eta_2\ \dots\ \eta_\rho\ ]$$

υπάρχει υποπίνακας τάξεως ρ, με ορίζουσα διάφορη του μηδενός.

Συνδυάζοντας το θεώρημα 1.4 με τις προτάσεις 4 και 1 του θεωρήματος 1.3, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Ι. Αν ο $\mu \times \nu$ πίνακας Α είναι βαθμού ρ, υπάρχουν ρ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του, αλλά οποιεσδήποτε $\rho+1$ στήλες του είναι γραμμικά εξαρτημένες.

ΙΙ. Τα ίδια ισχύουν και για τις *γραμμές* του πίνακα Α.

Από τα συμπεράσματα Ι και ΙΙ είναι πλέον κατανοητό ότι ο *βαθμός πίνακα* μπορεί να ορισθεί και σαν το *μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του πίνακα.* Κατά συνέπεια, όταν ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, οι γραμμές και οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Για να εξετάσουμε αν τα διανύσματα $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ή ανεξάρτητα έχουμε δύο διαδικασίες:

Α. Σχηματίζουμε την εξίσωση 4.1 και απ' αυτή οδηγούμαστε σε ομογενές σύστημα. Αν το σύστημα αυτό έχει λύση μόνο τη μηδενική, τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αν η λύση εξαρτάται από σ παραμέτρους, τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων είναι κ-σ.

Β. Σχηματίζουμε τον πίνακα Η με στήλες ή γραμμές τα διανύσματα αυτά και προσπαθούμε να βρούμε το βαθμό του Η. Αν rank $H = \rho\ (\leq \kappa)$, ρ διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τα υπόλοιπα κ-ρ διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Παράδειγμα 7.4 Τα διανύσματα $\eta_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$, $\eta_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ και $\eta_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}^T$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ή ανεξάρτητα ;

Λύση : Από την εξίσωση

$$\lambda_1\,\eta_1 + \lambda_2\,\eta_2 + \lambda_3\,\eta_3 = \mathbf{0}$$

έχουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad\; + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή έχει **μόνο** την μηδενική λύση ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$), τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, αν θεωρήσουμε τον πίνακα

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

όπου υπάρχει 3×3 υποπίνακας του H με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, δηλαδή rank H = 3. □

Παράδειγμα 8.4 Θα βρούμε για ποιες τιμές του λ τα πολυώνυμα $x + 3$ και $2x + \lambda^2 + 3$ του χώρου $\mathbf{\Pi_1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Λύση : Θα πρέπει η εξίσωση

$$\mu (x + 3) + \nu (2 x + \lambda^2 + 3) = 0$$

με αγνώστους μ, ν να έχει λύση διάφορη του μηδενός, για κάθε x. Γι' αυτό θα πρέπει το πολυώνυμο

$$(\mu + 2 \nu) x + (3 \mu + (\lambda^2 + 3) \nu) = 0$$

να είναι εκ ταυτότητας μηδέν, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \mu \quad\quad + 2 \nu &= 0 \\ 3 \mu + (\lambda^2 + 3) \nu &= 0 \end{aligned}$$

Το ομογενές σύστημα θα έχει λύση διάφορη της μηδενικής, ακριβώς όταν:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda^2 + 3 \end{vmatrix} = 0$$

Τότε, $\lambda = \pm\sqrt{3}$. □

Παράδειγμα 9.4 Αν $\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ και $\eta_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, δείξτε ότι:

$$\text{span} \{ \eta_1 , \eta_2 , \eta_3 \} = \text{span} \{ \eta_1 , \eta_2 \}$$

Λύση : Αρκεί να διαπιστώσουμε ότι τα διανύσματα η_1, η_2, η_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, ακριβέστερα ότι το διάνυσμα η_3 είναι γραμμικός συνδυασμός των η_1 , η_2. Από την εξίσωση $\eta_3 = k\,\eta_1 + \lambda\,\eta_2$ καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} k - 3\lambda &= -4 \\ -2k + 5\lambda &= 5 \\ -3k + 7\lambda &= 6 \end{aligned}$$

που είναι συμβιβαστό και έχει τη μοναδική λύση $k = 5,\ \lambda = 3$.

Τότε, για κάθε διάνυσμα $x \in \text{span}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ έχουμε:

$$x = \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \lambda_3\eta_3 = (\lambda_1 + 5\lambda_3)\,\eta_1 + (\lambda_2 + 3\lambda_3)\,\eta_2\ ,$$

δηλαδή $x \in \text{span}\{\eta_1, \eta_2\}$. □

4.2.2. Βάση - Διάσταση

Κάθε συλλογή γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu$ που είναι και γεννήτορες του διανυσματικού χώρου Δ, ονομάζεται **βάση** του Δ. Το πλήθος των διανυσμάτων της βάσης ονομάζεται **διάσταση** του Δ και σημειώνεται **dim Δ**. Για τον τετριμμένο διανυσματικό χώρο $\Delta_0 = \{\mathbf{0}\}$, ορίζουμε $\dim \Delta = 0$, αφού δεν έχει κανένα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα. Παράδειγμα, τα διανύσματα

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T, \quad \dots, \quad \varepsilon_\nu = \begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

είναι μια βάση του $\mathbf{R}^\nu$, η οποία ονομάζεται **κανονική** και συνεπώς $\dim \mathbf{R}^\nu = \nu$. Επίσης, τα μονώνυμα $1, x, \dots, x^\nu$ είναι η κανονική βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbf{\Pi}_\nu$ και $\dim \mathbf{\Pi}_\nu = \nu + 1$.

Σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς είναι φανερό ότι σ' ένα διανυσματικό χώρο η βάση *δεν είναι μοναδική,* αλλά όλες οι βάσεις έχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων, αφού η διάσταση του χώρου εκφράζει το μέγιστο πλήθος των γραμμικών ανεξάρτητων γεννητόρων του. Αν Ε είναι υπόχωρος του Δ τότε:

$$\dim E \le \dim \Delta$$

Επιπλέον, αν $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu$ είναι γεννήτορες του ν-διάστατου διανυσματικού χώρου Δ, τότε αυτά είναι μια βάση του (δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα), γιατί αν αυτό δεν συμβαίνει τότε $\dim \Delta < \nu$, άτοπο.

Για κάθε δε διάνυσμα $\alpha \in \Delta$, θα είναι

$$\alpha = \alpha_1\eta_1 + \dots + \alpha_\nu\eta_\nu\,.$$

Η ν-άδα των αριθμών $(\alpha_1 , \dots , \alpha_\nu)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη για το διάνυσμα α, (Παράδειγμα 10.4), οι δε αριθμοί $\alpha_1 , \dots , \alpha_\nu$ ονομάζονται **συντεταγμένες** του διανύσματος α ως προς τη βάση $\eta_1 , \eta_2 , \dots , \eta_\nu$. Παράδειγμα, τα στοιχεία του διανύσματος $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ είναι οι συντεταγμένες του α ως προς την κανονική βάση $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3 , \varepsilon_4$.

Θεώρημα 2.4. Αν $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \dots , \varepsilon_\nu$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου Δ και $\eta_1 , \eta_2 , \dots , \eta_\rho$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του Δ , τότε τα διανύσματα αυτά μπορούν ν' αντικαταστήσουν ρ κατάλληλα διανύσματα της βάσης $\{ \varepsilon_i \}$, ώστε το νέο σύνολο διανυσμάτων να είναι βάση του Δ.

Έτσι, σ' ένα ν-διάστατο χώρο Δ, αν $\eta_1 , \eta_2 , \dots , \eta_\rho$ $(\rho < \nu)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματά του, είναι δυνατόν να βρούμε $\xi_1 , \dots , \xi_{\nu-\rho}$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του Δ, τέτοια ώστε τα διανύσματα

$$\eta_1 , \eta_2 , \dots , \eta_\rho , \xi_1 , \dots , \xi_{\nu-\rho}$$

να είναι βάση του Δ. Συνήθως, τα $\xi_1 , \dots , \xi_{\nu-\rho}$ αναζητούνται από τα διανύσματα της κανονικής βάσης.

Θεώρημα 3.4. Αν E_1 , E_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του Δ , τότε :

$$\mathbf{dim} (\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}) = \mathbf{dim\, E_1} + \mathbf{dim\, E_2} - \mathbf{dim} (\mathbf{E_1} \cap \mathbf{E_2})$$

Παράδειγμα 10.4 Αν $\eta_1 , \eta_2 , \dots , \eta_\nu$ είναι μια βάση του ν-διάστατου χώρου Δ, κάθε διάνυσμα α είναι μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών.

Λύση : Πράγματι, τα διανύσματα $\alpha, \eta_1, \dots , \eta_\nu$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (dim Δ = ν) και αν υποθέσουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \eta_1 + \dots + \alpha_\nu \eta_\nu \\ &= \alpha'_1 \eta_1 + \dots + \alpha'_\nu \eta_\nu \end{aligned}$$

έχουμε

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) \eta_1 + \dots + (\alpha_1 - \alpha'_1) \eta_\nu = \mathbf{0}.$$

Επειδή τα διανύσματα $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συμπεραίνουμε $\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots, \alpha_\nu = \alpha'_\nu$. □

Παράδειγμα 11.4 Θα εξετάσουμε πότε τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix}1 & \beta & \beta^2\end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix}1 & \gamma & \gamma^2\end{bmatrix}^T$$

είναι βάση του $\mathbf{R}^3$.

Λύση : Για να είναι τα διανύσματα αυτά βάση του $\mathbf{R}^3$, αρκεί να διερευνήσουμε πότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε θα είναι και γεννήτορες του 3-διάστατου χώρου $\mathbf{R}^3$. Επειδή (Παράδειγμα 4.2) :

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2\end{bmatrix} = (\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)$$

είναι προφανές, ότι $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ είναι η ζητούμενη συνθήκη. □

Παράδειγμα 12.4 Αν ο υπόχωρος Ε έχει γεννήτορες τα διανύσματα

$$\eta_1 = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}^T, \ \eta_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \ \eta_3 = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}^T, \ \eta_4 = \begin{bmatrix}0 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}^T$$

θα βρούμε μια βάση του Ε και θα επεκτείνουμε αυτή σε βάση του $\mathbf{R}^4$.

Λύση : Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

είναι

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Συνεπώς, τα διανύσματα η_1, η_2, η_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του Ε. Επειδή τα διανύσματα η_1, η_2, η_3 και $\varepsilon_4 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αυτά είναι μια βάση του 4-διάστατου χώρου $\mathbf{R}^4$. □

Παράδειγμα 13.4 Θα δείξουμε ότι τα σύνολα

$$E_1 = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

$$E_2 = \{ (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) : x_1 + x_2 = 0 , x_3 = 2 x_4 \}$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbf{R}^4$ και θα βρούμε βάσεις των υποχώρων E_1 , E_2 , $E_1 \cap E_2$ και $E_1 + E_2$.

Λύση : Ας θεωρήσουμε τα διανύσματα (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) και $(x_1' , x_2' , x_3' , x_4')$ του E_1 . Το άθροισμά τους $(x_1 + x_1' , x_2 + x_2' , x_3 + x_3' , x_4 + x_4')$ και το γινόμενο επί αριθμό $(\lambda x_1 , \lambda x_2 , \lambda x_3 , \lambda x_4)$, ανήκουν στο E_1 , διότι:

$$(x_2 + x_2') + (x_3 + x_3') + (x_4 + x_4') = (x_2 + x_3 + x_4) + (x_2' + x_3' + x_4') = 0$$

$$\lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = \lambda (x_2 + x_3 + x_4) = \lambda .0 = 0.$$

Συνεπώς, E_1 είναι διανυσματικός υπόχωρος. Επειδή

$$\begin{aligned} (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) &= (x_1 , x_2 , x_3 , - x_2 - x_3) \\ &= x_1 (1, 0, 0, 0) + x_2 (0, 1, 0, -1) + x_3 (0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

τα διανύσματα $\eta_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\eta_2 = (0, 1, 0, -1)$, $\eta_3 = (0, 0, 1, -1)$ είναι γεννήτορες του E_1 . Είναι και γραμμικά ανεξάρτητα (ελέγξτε το), άρα αποτελούν βάση του E_1 και $\dim E_1 = 3$.

Όμοια, διαπιστώνουμε ότι το σύνολο E_2 είναι διανυσματικός υπόχωρος. Επειδή για κάθε διάνυσμα του E_2 είναι:

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (x_1 , - x_1 , 2x_4 , x_4) = x_1 (1, -1, 0, 0) + x_4 (0, 0, 2, 1) ,$$

τα διανύσματα $\xi_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, 0, 2, 1)$, είναι βάση του E_2 , αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητοι γεννήτορές του, $\dim E_2 = 2$.

Το σύνολο των διανυσμάτων των βάσεων των διανυσματικών χώρων E_1 και E_2 είναι γεννήτορες του $E_1 + E_2$, αφού για κάθε διάνυσμα $x \in E_1 + E_2$ έχουμε:

$$x = x_1 + x_2 = (\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \lambda_3 \eta_3) + (\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2)$$

Επειδή, τα διανύσματα η_1 , η_2 , η_3 , ξ_1 , ξ_2 του $\mathbf{R}^4$ δεν μπορούν να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

τα διανύσματα η_1 , η_2 , η_3 , ξ_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του $E_1 + E_2$. Τότε $\dim (E_1 + E_2) = 4$.

Για κάθε διάνυσμα $x \in E_1 \cap E_2$ έχουμε : $x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 = 2x_4$.
Συνεπώς, $(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = (3x_4 , -3x_4 , 2x_4 , x_4) = (3, -3, 2, 1) x_4$.
Το διάνυσμα $\varepsilon = (3, -3, 2, 1)$ είναι γραμμικός ανεξάρτητος γεννήτορας του υποχώρου $E_1 \cap E_2$, δηλαδή $\dim (E_1 \cap E_2) = 1$. Επαληθεύσατε την ισότητα στο θεώρημα 3.4 .

4.3. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

4.3.1. Ορισμός - Ιδιότητες

Έστω ο ν-διάστατος διανυσματικός χώρος Δ. Κάθε συνάρτηση $\circ : \Delta \times \Delta \to \mathbf{C}(\mathbf{R})$ ορίζει **εσωτερικό γινόμενο** επί του Δ ακριβώς όταν, για κάθε $x, y, z, \in \Delta$ ισχύουν οι συνθήκες:

I. $x \circ y = \overline{y \circ x}$ $(x \circ y = y \circ x)$

II. $(k x + \lambda y) \circ z = k (x \circ z) + \lambda (y \circ z)$

III. $x \circ x \geq 0$

IV. $x \circ x = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$

Παράδειγμα, για τα διανύσματα $x = (x_1 , \ldots , x_\nu)$, $y = (y_1 , \ldots , y_\nu)$, το **Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο**

$$x \circ y = y^* x = \overline{y}_1 x_1 + \ldots + \overline{y}_\nu x_\nu$$

ικανοποιεί τα αξιώματα I - IV. Η διαφοροποίηση της συνθήκης I δικαιολογείται γιατί, αν επί του **C** ίσχυε $x \circ y = y \circ x$, τότε για κάθε διάνυσμα $x \neq \mathbf{0}$ θα έχουμε:

$$(ix) \circ (ix) = i(x \circ (ix)) = i((ix) \circ x) = i^2 (x \circ x) = - (x \circ x)$$

άτοπο, αφού σύμφωνα με τη συνθήκη III , $(ix) \circ (ix) \geq 0$.

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $x \circ \lambda y = \overline{\lambda} (x \circ y)$
2. $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$
3. $x \circ y = 0 , \forall y \in \Delta \Rightarrow x = \mathbf{0}$

Η μη αρνητική ρίζα $\sqrt{x \circ x}$ ονομάζεται **μέτρο** του διανύσματος x και συμβολίζεται ||x||.
Αποδεικνύονται οι σχέσεις:

$$\| \lambda x \| = | \lambda | . \| x \|$$

$$| x \circ y | \leq \| x \| \| y \| ,$$

όπου στη δεύτερη, ισχύει η ισότητα ακριβώς όταν x , y είναι συγγραμμικά διανύσματα.
Η απόσταση των διανυσμάτων x , y είναι το μέτρο του διανύσματος $x - y$. Τότε

$$\| x - y \| = \sqrt{(x - y) \circ (x - y)} = \sqrt{x \circ x - y \circ x - x \circ y + y \circ y} = \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2 - 2\, x \circ y}$$

Αν $x \circ y = 0$ τα διανύσματα x , y είναι **ορθογώνια** και από προηγούμενη ισότητα συμπεραίνουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

Παράδειγμα 14.4 Στο διανυσματικό χώρο των πραγματικών πινάκων 2×2, η σχέση

$$A \circ B = \alpha_{11} \beta_{11} + \alpha_{12} \beta_{12} + \alpha_{21} \beta_{21} + \alpha_{22} \beta_{22}$$

όπου $A = [\, \alpha_{ij} \,]$, $B = [\, \beta_{ij} \,]$, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Λύση : Πράγματι, επαληθεύονται τ' αξιώματα:

1. $A \circ B = \alpha_{11} \beta_{11} + \alpha_{12} \beta_{12} + \alpha_{21} \beta_{21} + \alpha_{22} \beta_{22} = B \circ A$,
2. $(k A + \lambda B) \circ \Gamma = (k \alpha_{11} + \lambda \beta_{11}) \gamma_{11} + (k \alpha_{12} + \lambda \beta_{12}) \gamma_{12} + (k \alpha_{21} + \lambda \beta_{21}) \gamma_{21}$
   $+ (k \alpha_{22} + \lambda \beta_{22}) \gamma_{22} = k (A \circ \Gamma) + \lambda (B \circ \Gamma)$,
3. $A \circ A = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 \geq 0$, και
4. $A \circ A = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = O$. □

Παράδειγμα 15.4 Θα δείξουμε ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\eta_1 , \ldots , \eta_\nu$ που είναι ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Ας θεωρήσουμε την ισότητα

$$\lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_\nu \eta_\nu = \mathbf{0}$$

και ας πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά επί το διάνυσμα η_k, ($k = 1, 2, \ldots , \nu$) τότε έχουμε

$$\lambda_1 (\eta_1 \circ \eta_k) + \ldots + \lambda_k (\eta_k \circ \eta_k) + \ldots + \lambda_\nu (\eta_\nu \circ \eta_k) = 0$$

Επειδή $\eta_i \circ \eta_k = 0$ για $i \neq k$ και $\eta_k \circ \eta_k \neq 0$, από την ισότητα συμπεραίνουμε ότι $\lambda_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots , \nu$). □

4.3.2. Ορθοκανονική βάση

Μια βάση $\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_\nu$ του διανυσματικού χώρου Δ με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **ορθοκανονική,** ακριβώς όταν τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο ($\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = 0$) και έχουν μέτρο 1 ($\| \varepsilon_i \| = 1$).

Παράδειγμα, η κανονική βάση $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu$ είναι μια ορθοκανονική βάση του Δ. Οι πίνακες στην άσκηση 4.4 είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου των πινάκων 2×2, με εσωτερικό γινόμενο όπως αυτό έχει ορισθεί στο παράδειγμα 14.4.

Θεώρημα 4.4. Αν τα διανύσματα $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου Δ με εσωτερικό γινόμενο, τα διανύσματα $\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1, \ldots, \frac{1}{\|\xi_\nu\|}\xi_\nu$, όπου

$$\xi_1 = \eta_1$$

$$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \circ \xi_1}{\xi_1 \circ \xi_1}\xi_1$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \circ \xi_1}{\xi_1 \circ \xi_1}\xi_1 - \frac{\eta_3 \circ \xi_2}{\xi_2 \circ \xi_2}\xi_2$$

$$\vdots$$

$$\xi_\nu = \eta_\nu - \frac{\eta_\nu \circ \xi_1}{\xi_1 \circ \xi_1}\xi_1 - \frac{\eta_\nu \circ \xi_2}{\xi_2 \circ \xi_2}\xi_2 - \ldots - \frac{\eta_\nu \circ \xi_{\nu-1}}{\xi_{\nu-1} \circ \xi_{\nu-1}}\xi_{\nu-1}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του Δ.

Η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης που περιγράφεται στο θεώρημα αυτό είναι γνωστή ως μέθοδος Gram-Schmidt.

Παράδειγμα 16.4 Έστω τα διανύσματα $\eta_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, $\eta_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, $\eta_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ είναι μια βάση του υποχώρου Δ ($\subseteq \mathbf{R}^4$).

Εφαρμόζοντας τους τύπους στο θεώρημα 4.4 , βρίσκουμε μια ορθογώνια βάση του ίδιου χώρου.

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-3/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

Συνεπώς, τα διανύσματα

$$\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$
$$\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$
$$\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του Δ. □

Αν Ε είναι υπόχωρος του Δ, το σύνολο

$$E^{\perp} = \{\ y \in \Delta :\ \ y \circ x = 0\ ,\ \forall\, x \in E\ \}$$

ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του Ε και είναι και αυτό υπόχωρος του Δ (γιατί;)
Σημειώστε ότι:

$$(E^{\perp})^{\perp} = E\ , \qquad \Delta = E \oplus E^{\perp}$$

Επιπλέον, αν $\xi_1, \ldots, \xi_k$ είναι μια ορθογώνια βάση του Ε και $x \in \Delta$, το διάνυσμα

$$\hat{x} = \frac{x \circ \xi_1}{\xi_1 \circ \xi_1}\xi_1 + \cdots + \frac{x \circ \xi_k}{\xi_k \circ \xi_k}\xi_k$$

είναι η *ορθογώνια προβολή* του διανύσματος x επί του υποχώρου Ε, το δε διάνυσμα $y = x - \hat{x} \in E^{\perp}$.

Η *απόσταση* του διανύσματος x από τον υπόχωρο Ε ισούται με $\| x - \hat{x} \|$.

Παράδειγμα 17.4 Αν $\xi_1 = \begin{bmatrix}2 & 5 & -1\end{bmatrix}^T$, $\xi_2 = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, θα βρούμε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $x = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$ στον επίπεδο χώρο span { ξ_1 , ξ_2 }.

Τα διανύσματα ξ_1 , ξ_2 είναι ορθογώνια. Συνεπώς η ορθογώνια προβολή του διανύσματος x επί του επιπέδου, που περνά από την αρχή και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα ξ_1, ξ_2 είναι:

$$\hat{x} = \frac{x \circ \xi_1}{\xi_1 \circ \xi_1}\xi_1 + \frac{x \circ \xi_2}{\xi_2 \circ \xi_2}\xi_2 = \frac{9}{30}\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix} + \frac{3}{6}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2/5\\2\\1/5\end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα $y = x - \hat{x}$ είναι κάθετο στον υπόχωρο span { ξ_1, ξ_2 }. Αρκεί να διαπιστώσετε ότι $y \circ \xi_1 = 0$, $y \circ \xi_2 = 0$. □

4.3.3. Παραγοντοποίηση QR

Αν τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ είναι στήλες του $\mu\times\nu$ πίνακα A, από τις εξισώσεις του θεωρήματος 4.4 έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = \xi_1 \\
&\eta_2 = \lambda_{12}\,\xi_1 + \xi_2 \\
&\eta_3 = \lambda_{13}\,\xi_1 + \lambda_{23}\,\xi_2 + \xi_3 \\
&\vdots \\
&\eta_\nu = \lambda_{1\nu}\,\xi_1 + \lambda_{2\nu}\,\xi_2 + \cdots + \lambda_{\nu-1,\nu}\,\xi_{\nu-1} + \xi_\nu
\end{aligned}$$

όπου $\lambda_{ij} = \dfrac{\eta_j \circ \xi_i}{\xi_i \circ \xi_i}$. Από τις ισότητες αυτές έχουμε

$$A = \begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_\nu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\nu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1\nu} \\ 0 & 1 & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2\nu} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \lambda_{\nu-1,\nu} \\ O & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = QR,$$

όπου

$$Q = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\nu\end{bmatrix} \mathrm{diag}\,(\,\|\xi_1\|, \dots, \|\xi_\nu\|\,)^{-1}$$

$$R = \mathrm{diag}\,(\,\|\xi_1\|, \dots, \|\xi_\nu\|\,) \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1\nu} \\ 0 & 1 & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2\nu} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \lambda_{\nu-1,\nu} \\ O & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Η ισότητα $A = Q\,R$ ονομάζεται **παραγοντοποίηση QR** του A, ο δε πίνακας Q έχει την ιδιότητα

$$Q^* Q = I \qquad (\text{ή} \quad Q^T Q = I\,)$$

Αν οι γραμμές του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εφαρμόζουμε τα προηγούμενα στον πίνακα A^T.

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη διαδικασία παραγοντοποίησης στον πίνακα συντελεστών του συστήματος $A\,x = \beta$, έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$R\,x = Q^* \beta = \gamma.$$

Έτσι βρίσκουμε άμεσα τη λύση του συστήματος, γιατί ο πίνακας R είναι άνω τριγωνικός.

Παράδειγμα 18.4 Θα λύσουμε το σύστημα $A\,x = \beta$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad , \ \beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Η παραγοντοποίηση QR του A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$Q^T\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και το ισοδύναμο σύστημα είναι:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$x_3 = 2\ ,\ x_2 = -6\ ,\ x_1 = 10. \qquad \square$$

4.4. Ορθομοναδιαίοι πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξεως ν ονομάζεται **ορθομοναδιαίος** ή **ορθοκανονικός,** ακριβώς όταν όλες οι στήλες του ή οι γραμμές του είναι ορθοκανονικά διανύσματα.

Οι ορθομοναδιαίοι πίνακες με πραγματικά στοιχεία ονομάζονται **ορθογώνιοι.** Αποδεικνύεται ότι οι ορθογώνιοι πίνακες, τάξεως 2, είναι της μορφής

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \text{συνθ} & \text{-ημθ} \\ \text{ημθ} & \text{συνθ} \end{bmatrix} \quad , \quad S_\theta = \begin{bmatrix} \text{συνθ} & \text{ημθ} \\ \text{ημθ} & \text{-συνθ} \end{bmatrix}$$

Γενικά, διαπιστώσατε ότι μέτρο των στοιχείων των ορθομοναδιαίων πινάκων είναι πάντοτε ≤ 1.

Ιδιότητες ορθομοναδιαίων (ορθογωνίων) πινάκων

1. $A^* A = A A^* = I \quad (A^T A = A A^T = I)$
2. $|\det A| = 1$
3. $A^{-1} = A^* \quad (A^{-1} = A^T)$
4. Ο πίνακας A^* (A^T) είναι ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος).
5. Το γινόμενο ορθομοναδιαίων (ορθογωνίων) πινάκων είναι ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας.

Γεωμετρικά, οι ορθομοναδιαίοι πίνακες *και μόνο αυτοί* διατηρούν

1. *το μέτρο* : $\| A x \| = \| x \|$,
2. *την απόσταση* : $\| A x - A y \| = \| x - y \|$ και
3. *τη γωνία* : $A x \circ A y = x \circ y$

Παράδειγμα 19.4 Αν ο τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν

$$A = \begin{bmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \vdots & & & & \vdots \\ y & y & y & \dots & x \end{bmatrix} \quad , \qquad y > 0$$

είναι ορθογώνιος, δείξτε ότι $x = -1 + 2/\nu$, $y = 2/\nu$ και $A^2 = I$.

Λύση : Από τον ορισμό του ορθογωνίου πίνακα, οποιαδήποτε στήλη του A είναι μοναδιαίο διάνυσμα:

$$x^2 + (\nu - 1) y^2 = 1$$

και δυο οποιεσδήποτε στήλες του A είναι ορθογώνια διανύσματα :

$$2x y + (\nu - 2) y^2 = 0.$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις αυτές έχουμε $x^2 - 2x y + y^2 = 1$, δηλαδή : $x = y \pm 1$.

Αντικαθιστώντας στη 2η ισότητα έχουμε $\nu y^2 \pm 2y = 0$. Για $y > 0$, συμπεραίνουμε

$$y = 2/\nu \quad \text{και} \quad x = -1 + 2/\nu .$$

Έτσι

$$A = \frac{2}{\nu}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} - I$$

και

$$A^2 = \frac{4}{\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^2 - \frac{4}{\nu}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} + I = \frac{4}{\nu^2}\,\nu\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} - \frac{4}{\nu}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} + I = I. \quad \square$$

Παράδειγμα 20.4 Αν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος και τριγωνικός, δείξτε ότι είναι διαγώνιος, με διαγώνια στοιχεία ± 1.

Λύση : Έστω

$$A = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & . & . & . \ \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}$$

Η πρώτη στήλη του A είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δηλ. $\alpha_{11}^2 = 1 \Rightarrow \alpha_{11} = \pm 1$, και ορθογώνια με όλες τις άλλες στήλες: $\alpha_{11}\,\alpha_{1k} = 0 \Rightarrow \alpha_{1k} = 0$ $(k = 2, \ldots, \nu)$.

Η δεύτερη στήλη του A επίσης είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δηλ. $\alpha_{22}^2 = 1 \Rightarrow \alpha_{22} = \pm 1$ και ορθογώνια με όλες τις άλλες στήλες: $\alpha_{22}\,\alpha_{2j} = 0 \Rightarrow \alpha_{2j} = 0$ $(j = 3, \ldots, \nu)$

Συνεχίζοντας, αποδεικνύουμε ότι $\alpha_{ii} = \pm 1$ και $\alpha_{is} = 0$ για $s > i$. $\square$

Παράδειγμα 21.4 Να βρείτε τα στοιχεία x_1, x_2, x_3 έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix}3/5 & -4/6 & x_1\\ 4/5 & 3/6 & x_2\\ 0 & \sqrt{11}/6 & x_3\end{bmatrix}$$

να είναι ορθογώνιος.

Λύση : Μπορείτε να υπολογίσετε τα x_1, x_2, x_3 από το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1\\ -4x_1 + 3x_2 + \sqrt{11}x_3 &= 0\\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

που προκύπτουν από την ισότητα $A^T A = I$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να επεκτείνουμε την ορθοκανονική βάση $(3/5, 4/5, 0)$, $(-4/6, 3/6, \sqrt{11}/6)$ σε βάση του $\mathbf{R}^3$, προσαρτώντας το διάνυσμα $(0, 0, 1)$. Η βάση αυτή δεν είναι ορθοκανονική και από το θεώρημα 4.4 έχουμε

$$\xi_3 = (0, 0, 1) - \frac{\sqrt{11}}{6}(-4/6, 3/6, \sqrt{11}/6) = (\sqrt{11}/9, -\sqrt{11}/12, 25/36)$$

Συνεπώς

$$(x_1 , x_2 , x_3) = \frac{1}{\| \xi_3 \|} \xi_3 = \frac{6}{5} \xi_3 = \left(\frac{2\sqrt{11}}{15} , - \frac{\sqrt{11}}{10} , \frac{5}{6} \right). \qquad \square$$

4.5. Ασκήσεις

4.1 Εξετάσατε αν το σύνολο $\mathbf{R}^2$ είναι διανυσματικός χώρος με τις σημειούμενες πράξεις.

I. $(x_1 , x_2) + (y_1 , y_2) = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2)$, $\lambda(x_1 , x_2) = (0, 0)$

II. $(x_1 , x_2) + (y_1 , y_2) = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 +1)$, $\lambda(x_1 , x_2) = (\lambda x_1 , \lambda x_2 + \lambda - 1)$

(Υπόδειξη : Εξετάστε αν ισχύουν τ' αξιώματα 1-8).

4.2 Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$ είναι γεννήτορες του υποχώρου $\Delta = \{ (\alpha , \beta, 0) : \alpha , \beta \in \mathbf{R} \}$.

4.3 Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $1, x, x^2 , \ldots, x^\nu$ του $\mathbf{\Pi_\nu}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4.4 Δείξτε ότι οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

4.5 Αν $\eta_1 = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}^T$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}^T$, $\eta_3 = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 6 \end{bmatrix}^T$, δείξτε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και επαληθεύουν την ισότητα

$$4 \eta_1 + 5 \eta_2 - 3 \eta_3 = \mathbf{0}.$$

4.6 Αν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα του πραγματικού διανυσματικού χώρου $\mathbf{\Pi_\nu}$ δείξτε ότι ο τύπος

$$p(x) \circ q(x) = p(0) .q(0) + p(1).q(1) + \ldots + p(\nu).q(\nu)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο.

4.7 Αν $\eta_1 = (1 , -2 , 0 , 1)$, $\eta_2 = (-1 , 0 , 0 , -1)$ και $\eta_3 = (1 , 1 , 0 , 0)$, βρείτε μια ορθοκανονική βάση του χώρου $W = \text{span} \{ \eta_1 , \eta_2 , \eta_3 \}$.

4.8 Αν $\varepsilon_1 , \ldots, \varepsilon_\nu$ είναι ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου Δ και A είναι ορθομοναδιαίος πίνακας, δείξτε ότι τα διανύσματα $A\varepsilon_1 , A\varepsilon_2 , \ldots, A\varepsilon_\nu$ είναι ορθοκανονική βάση του Δ.

4.9 Δείξτε ότι ο πίνακας $A = B^{-1}B^*$ είναι ορθομοναδιαίος όταν οι πίνακες B, B^* είναι αντιμεταθετικοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η σχέση των γραμμικών απεικονίσεων των διανυσματικών χώρων με τους πίνακες.

5.1. Γραμμική απεικόνιση

5.1.1. Ορισμοί

Έστω Δ και Η είναι διανυσματικοί χώροι διαστάσεων αντίστοιχα ν και μ. Η συνάρτηση $f : \Delta \to H$ ονομάζεται **γραμμική απεικόνιση** ακριβώς όταν για κάθε x, y με $x, y \in \Delta$ ισχύει :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (1.5)$$

$$f(kx) = kf(x) \qquad k \in \mathbf{C}$$

Παράδειγμα γραμμικής απεικόνισης είναι η συνάρτηση $y = Ax$, όπου Α είναι πίνακας τύπου $\mu\times\nu$. Άμεσα επαληθεύουμε τις (1.5) :

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

$$A(kx) = k(Ax)$$

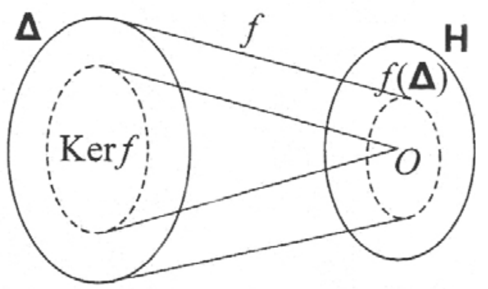
Για τις γραμμικές απεικονίσεις $f : \Delta \to H$, $g : H \to E$, η **σύνθεση** αυτών

$$g * f : \Delta \to E$$

που ορίζεται από τον τύπο

$$(g * f)(x) = g(f(x))$$

είναι επίσης γραμμική απεικόνιση. Για την γραμμική απεικόνιση $f : \Delta \to H$ τα σύνολα:



Ι. πεδίο τιμών της f

$$f(\Delta) = \{ f(x) : x \in \Delta \} \subseteq H$$

ΙΙ. πυρήνας της f :

$$\text{Ker}\, f = \{ x : f(x) = 0 \} \subseteq \Delta$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι των Η και Δ αντίστοιχα και ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{dim}\,\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{dim\ f\ (\ \boldsymbol{\Delta}\ ) + dim\ Ker\ f}$$

Έτσι, αν τα διανύσματα $\eta_1, \dots, \eta_\rho, \eta_{\rho+1}, \dots, \eta_\nu$ είναι βάση του Δ τέτοια ώστε $\eta_{\rho+1}, \dots, \eta_\nu$ είναι βάση του Ker f, τότε σύμφωνα με την παραπάνω ισότητα $f(\eta_1), \dots, f(\eta_\rho)$ είναι βάση του $f(\Delta)$.

Η γραμμική απεικόνιση f είναι ***ένα - προς - ένα*** ακριβώς όταν Ker f = { **0** } και ***επί*** ακριβώς όταν $f(\Delta) = H$.

Παράδειγμα 1.5 Θα εξετάσουμε αν οι απεικονίσεις $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ και $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ που ορίζονται από τους τύπους

$$f(x) = (x_2, x_1 + x_3) \quad , \quad g(x) = (x_2, 2x_1)$$

είναι γραμμικές και θα βρούμε τη σύνθεση $g * f$ αυτών.

Λύση : Επειδή

$$f(x + y) = (x_2 + y_2, (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3)) = (x_2, x_1 + x_3) + (y_2, y_1 + y_3)$$
$$= f(x) + f(y)$$

$$f(kx) = (kx_2, kx_1 + kx_3) = k(x_2, x_1 + x_3) = kf(x)$$

και ακόμη

$$g(x + y) = (x_2 + y_2, 2(x_1 + y_1)) = (x_2, 2x_1) + (y_2, 2y_1) = g(x) + g(y)$$

$$g(kx) = (kx_2, 2kx_1) = k(x_2, 2x_1) = kg(x)$$

οι συναρτήσεις f και g είναι γραμμικές. Η σύνθεση $g * f$ ορίζεται από τον τύπο:

$$(g * f)(x) = g(f(x)) = g(x_2, x_1 + x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2) \qquad \square$$

Παράδειγμα 2.5 Για τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ γνωρίζουμε ότι

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και θέλουμε να βρούμε το διάνυσμα $f\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$

Λύση : Επειδή $\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$f\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = f\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + 3f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

□

Παράδειγμα 3.5 Για τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = (x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 3x_3)$$

θα βρούμε μία βάση του Ker f και μία βάση του $f(\mathbf{R}^3)$.

Λύση : Από τον ορισμό του συνόλου Ker f έχουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι $x_1 = -x_3$ και $x_2 = -x_3$. Συνεπώς

$$\text{Ker } f = \{\, x : \ x = \alpha(-1, -1, 1) \,\}$$

Το διάνυσμα $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ είναι βάση του πυρήνα της f και dim Ker f =1. Προφανώς, η απεικόνιση f δεν είναι ένα - προς - ένα.

Για το χώρο $f(\mathbf{R}^3)$, από την ισότητα

$$f(x) = x_1(1, 1, 2) + x_2(0, 1, 1) + x_3(1, 2, 3)$$

συμπεραίνουμε

$$f(\mathbf{R}^3) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

Οι γεννήτορες είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, αλλά τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και είναι βάση του $f(\mathbf{R}^3)$, $\dim f(\mathbf{R}^3) = 2$.

Επειδή $f(\mathbf{R}^3) \subset \mathbf{R}^3$, η απεικόνιση f δεν είναι επί. □

5.1.2. Πίνακας της γραμμικής απεικόνισης

Αν τα διανύσματα $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu$ είναι βάση του Δ και τα διανύσματα $\eta_1, \dots, \eta_\mu$ είναι βάση του Η, τα διανύσματα $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_\nu)$ ανήκουν στο χώρο Η και είναι γραμμικός συνδυασμός των $\eta_1, \dots, \eta_\mu$:

$$f(\varepsilon_1) = \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \dots + \alpha_{\mu 1}\eta_\mu$$
$$\vdots \qquad (2.5)$$
$$f(\varepsilon_\nu) = \alpha_{1\nu}\eta_1 + \alpha_{2\nu}\eta_2 + \dots + \alpha_{\mu\nu}\eta_\mu$$

Κατά συνέπεια, για κάθε διάνυσμα $x = x_1\varepsilon_1 + \dots + x_1\varepsilon_\nu \in \Delta$, έχουμε:

$y = f(x) = x_1 f(\varepsilon_1) + \dots + x_\nu f(\varepsilon_\nu)$

$= (\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1\nu}x_\nu)\eta_1 + (\alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2\nu}x_\nu)\eta_2 + \dots + (\alpha_{\mu 1}x_1 + \dots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu)$

η_μ

$= y_1\eta_1 + \dots + y_\mu\eta_\mu \qquad (3.5)$

Αν θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

από την (3.5), για τις συντεταγμένες $(x_1, \dots, x_\nu)$ και $(y_1, \dots, y_\mu)$ αντίστοιχα των διανυσμάτων x και y, ως προς τις συγκεκριμένες βάσεις $\{\varepsilon_i\}$, $\{\eta_j\}$ ισχύει η ισότητα:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\mu \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

Αντίστροφα, για κάθε πίνακα A από την (4.5) άμεσα συμπεραίνουμε ότι ορίζεται μία γραμμική απεικόνιση.

Θεώρημα 1.5. Σε κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \Delta \to H$, μετά την εκλογή των βάσεων στους διανυσματικούς χώρους Δ και Η, αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα ένας πίνακας A τύπου $\mu\times\nu$, όπου $\nu = \dim \Delta$ και $\mu = \dim H$.

Από τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων στο κεφάλαιο 3, καταλήγουμε στην επόμενη διαδικασία υπολογισμού του πίνακα A που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση f :

1. Υπολογίζουμε τα διανύσματα $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_\nu)$
2. Μετασχηματίζουμε τον πίνακα

$$[\, \eta_1 \dots \eta_\mu \;\vdots\; f(\varepsilon_1) \dots f(\varepsilon_\nu)\,]$$

με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον πίνακα $[\, I_\mu \quad A\,]$.

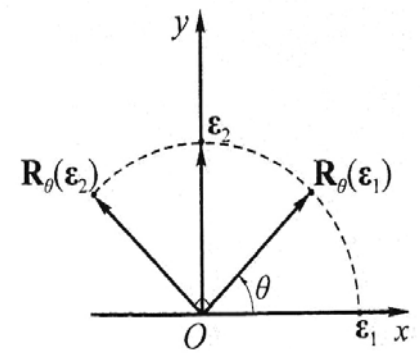
3. Ο πίνακας Α αντιπροσωπεύει την απεικόνιση f ως προς τις βάσεις $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\nu$ και $\eta_1, \cdots, \eta_\mu$.

Στην **ταυτοτική** απεικόνιση $1: \Delta \to \Delta$ είναι προφανές ότι αντιστοιχεί ο μοναδιαίος πίνακας I_ν, για οποιαδήποτε βάση του Δ. Επιπλέον σε κάθε αντιστρέψιμη (ένα - προς - ένα) απεικόνιση, ο αντίστοιχος πίνακας είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή στην απεικόνιση f^{-1} αντιστοιχεί ο πίνακας A^{-1}.

Είναι *αξιοσημείωτο* ότι αν ο πίνακας Α τύπου $\mu\times\nu$, και ο πίνακας Β τύπου $\rho\times\mu$, αντιστοιχούν στις γραμμικές απεικονίσεις $f_A : \Delta \to H$ και $g_B : H \to E$, στη σύνθεση αυτών $g_B * f_A : \Delta \to E$ αντιστοιχεί ο πίνακας ΒΑ .

Παράδειγμα 4.5 Για τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ θα βρούμε τον αντίστοιχο πίνακα όταν αυτή είναι:

1. **περιστροφή** περί την αρχή κατά γωνία θ
2. **προβολή** επί της ευθείας $y = \lambda x$
3. **συμμετρία** ως προς την ευθεία $y = \lambda x$.



1. Θεωρούμε την κανονική βάση
   $\varepsilon_1 = (1, 0)^T$, $\varepsilon_2 = (0, 1)^T$ του $\mathbf{R}^2$.
   Από το σχήμα έχουμε:
   $f (\varepsilon_1) = (\text{συνθ} , \text{ημθ}) = \text{συνθ}\ \varepsilon_1 + \text{ημθ}\ \varepsilon_2$
   $f (\varepsilon_2) = (-\text{ημθ}, \text{συνθ}) = - \text{ημθ}\ \varepsilon_1 + \text{συνθ}\ \varepsilon_2$

Ο πίνακας R_θ της γραμμικής απεικόνισης f , όταν αυτή εκφράζει στροφή κατά γωνία θ, είναι ο γνωστός ορθογώνιος πίνακας:

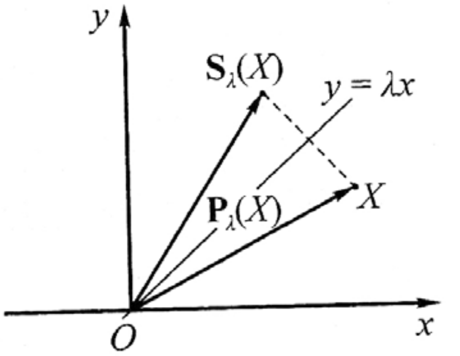
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \text{συνθ} & -\text{ημθ} \\ \text{ημθ} & \text{συνθ} \end{bmatrix}$$

2. Η ευθεία είναι παράλληλη του διανύσματος (1, λ) , αφού για κάθε σημείο της (α , β) έχουμε:

$$(\alpha , \beta) = (\alpha , \lambda\alpha) = \alpha (1, \lambda)$$

Για κάθε σημείο (x , y) του επιπέδου, η προβολή του επί της ευθείας είναι

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix} = \frac{x+\lambda y}{1+\lambda^2}\begin{bmatrix}1\\ \lambda\end{bmatrix} = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{bmatrix}x+\lambda y\\ \lambda x+\lambda^2 y\end{bmatrix} = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$



έτσι ο πίνακας προβολής είναι:

$$P = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{bmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2\end{bmatrix}$$

3. Από το σχήμα έχουμε $f(x) = 2Px - x = (2P - I)x$. Τότε, ο αντίστοιχος πίνακας της συμμετρίας, είναι:

$$S = 2P - I = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{bmatrix}2 & 2\lambda\\ 2\lambda & 2\lambda^2\end{bmatrix} - I = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{bmatrix}1-\lambda^2 & 2\lambda\\ 2\lambda & \lambda^2-1\end{bmatrix}$$

Παρατηρείστε ότι ο πίνακας S είναι συμμετρικός.

Σχόλιο : Για $\lambda = 0$ (η ευθεία είναι ο άξονας Ox), είναι:

$$S = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Τότε για τον ορθογώνιο πίνακα

$$T_\theta = \begin{bmatrix}\text{συνθ} & \text{ημθ}\\ \text{ημθ} & -\text{συνθ}\end{bmatrix}$$

έχουμε

$$T_\theta = R_\theta S$$

όπου συμπεραίνουμε ότι η αντίστοιχη του T_θ γραμμική απεικόνιση είναι σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων, της συμμετρίας ως προς τον άξονα Ox και μετά στροφής κατά γωνία θ. □

Παράδειγμα 5.5 Για την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

ως προς τις κανονικές βάσεις $\{\varepsilon_i\}$ των χώρων έχουμε:

$$f(\varepsilon_1) = (1, 1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$
$$f(\varepsilon_2) = (1, 2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$$
$$f(\varepsilon_3) = (1, 3) = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$$

Ο αντίστοιχος πίνακας της f ως προς τις βάσεις αυτές είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ως βάση του $\mathbf{R}^3$ και τα διανύσματα $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ ως βάση του $\mathbf{R}^2$ έχουμε:

$$f(\eta_1) = (2, 3), \quad f(\eta_2) = (2, 5), \quad f(\eta_3) = (1, 3)$$

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \vdots & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

μετασχηματίζεται στην κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστοιχος πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις βάσεις $\{\eta_i\}$ και $\{\xi_j\}$ είναι:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ □

Παράδειγμα 6.5 Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbf{\Pi_1} \to \mathbf{\Pi_2}$ που ορίζεται από τον τύπο $f(p(t)) = t\,p(t)$. Αν θεωρήσουμε τα σύνολα $\{t, 1\}$ και $\{t^2, t-1, t+1\}$ ως βάσεις των $\mathbf{\Pi_1}$ και $\mathbf{\Pi_2}$ αντίστοιχα, έχουμε:

$$f(t) = t.t = t^2 = 1.t^2 + 0(t-1) + 0(t+1)$$
$$f(t) = t.1 = t = 0t^2 + 1/2(t-1) + 1/2(t+1)$$

Ο αντίστοιχος πίνακας της απεικόνισης είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Η εικόνα του πολυωνύμου $p(t) = 3t - 2$ είναι:

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

δηλαδή, $f(p(t)) = 3t^2 - (t-1) - (t+1) = 3t^2 - 2t \quad \left(= t\,p(t)\right)$. □

5.1.3. Αλλαγή βάσης

Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $1: \Delta \to \Delta$ και τα διανύσματα $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu$ και $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ είναι βάσεις του διανυσματικού χώρου Δ, τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1(\varepsilon_1) = \alpha_{11}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\nu 1}\eta_\nu \\ \varepsilon_2 &= 1(\varepsilon_2) = \alpha_{2\nu}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\nu 2}\eta_\nu \\ &\vdots \\ \varepsilon_\nu &= 1(\varepsilon_\nu) = \alpha_{1\nu}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\nu\nu}\eta_\nu \end{aligned}$$

Αν $(x_1, \dots, x_\nu)$ και $(x'_1, \dots, x'_\nu)$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $x \in \Delta$ ως προς τις βάσεις $\{\varepsilon_i\}$ και $\{\eta_j\}$ αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_\nu \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} \qquad (6.5)$$

όπου ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στην ταυτοτική απεικόνιση ως προς τις προηγούμενες βάσεις και ονομάζεται **πίνακας αλλαγής βάσης**.

Αν οι βάσεις είναι ορθοκανονικές, ο πίνακας A είναι ορθοκανονικός. Σημειώνοντας τους πίνακες

$$E = [\,\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu\,] \quad , \quad H = [\,\eta_1 \dots \eta_\nu\,]$$

από την (6.5) έχουμε

$$E = H\,A$$

και απ' αυτή

$$A_{\varepsilon\to\eta} = H^{-1}E\,, \quad A^{-1}_{\eta\to\varepsilon} = E^{-1}H$$

Παράδειγμα 7.5 Στο παράδειγμα 5.5, ο πίνακας αλλαγής βάσης P από την βάση η_1, η_2, η_3 στην κανονική βάση ε_1, ε_2, ε_3 είναι:

$$P = [\,\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \varepsilon_3\,]^{-1} [\,\eta_1 \ \ \eta_2 \ \ \eta_3\,] = I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας αλλαγής βάσης Q από την κανονική βάση ε_1, ε_2 στη βάση ξ_1, ξ_2 είναι:

Από το σχήμα

$$\begin{tikzcd} x_\varepsilon \arrow[r, "A"] & f(x)_\varepsilon \arrow[d, "Q"] \\ x_\xi \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\widetilde{A}"'] & f(x)_\xi \end{tikzcd}$$

συμπεραίνουμε την ισότητα

$$\widetilde{A} = Q\ A\ P.$$

5.2. Όμοιοι πίνακες

Έστω $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ και $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ είναι δύο βάσεις του διανυσματικού χώρου Δ και $f : \Delta \to \Delta$ είναι γραμμική απεικόνιση. Αν οι πίνακες A και B αντιστοιχούν στην απεικόνιση f, ως προς τις βάσεις αυτές, τότε

$$B = P^{-1} A\, P \tag{7.5}$$

όπου P είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\{\xi_i\}$ στην $\{\eta_j\}$. Αυτό άλλωστε φαίνεται και στο γράφημα

$$\begin{tikzcd} x_\eta \arrow[r, "A"] & f(x)_\eta \arrow[d, "P^{-1}"] \\ x_\xi \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B"'] & f(x)_\xi \end{tikzcd} \tag{8.5}$$

Οι πίνακες A και B στην (7.5) ονομάζονται **όμοιοι**. Για τους όμοιους πίνακες σημειώστε:

$$\det A = \det B \;, \qquad \text{rank } A = \text{rank } B \;, \qquad \text{tr } A = \text{tr } B,$$

όπου $\text{tr } A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{\nu\nu}$, το οποίο ονομάζεται **ίχνος** του τετραγωνικού πίνακα A. Αποδεικνύεται ότι οι *όμοιοι πίνακες αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση* $f : \Delta \to \Delta$.

Για τους όμοιους πίνακες A , B στην (8.5) αν $\{ \eta_i \}$ είναι η κανονική βάση του Δ, τότε οι στήλες του πίνακα P είναι τα διανύσματα της βάσης $\{ \xi_i \}$. Επιπλέον, αν ο $\nu\times\nu$ πίνακας A αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση $f : \Delta \to \Delta$, ο αντίστοιχος πίνακας της f για κάθε βάση $\{ \xi_i \}$ του διανυσματικού χώρου Δ, είναι:

$$B = P^{-1} A P \;, \qquad \text{όπου} \quad P = [\, \xi_1 \;\; \xi_2 \;\cdots\; \xi_\nu \,]$$

Στην (7.5) αν ο πίνακας P είναι ορθομοναδιαίος, έχουμε

$$B = P^{*} A P$$

και οι πίνακες A, B ονομάζονται **ορθομοναδιαία όμοιοι**. Όπως έχουμε αναφέρει στην ενότητα 5.1.3, αυτό συμβαίνει όταν οι βάσεις $\{ \eta_i \}$ και $\{ \xi_j \}$ είναι ορθοκανονικές.

Παράδειγμα 8.5 Αν $A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -18 & -11 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ διαπιστώσατε ότι $P^{-1} A P = B$ και βρείτε βάση του $\mathbf{R}^2$ έτσι ώστε ο πίνακας B να αντιστοιχεί στη βάση αυτήν.

Λύση : Αρκεί να επαληθεύσουμε την ισότητα

$$A P = P B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες A , B ορίζουν την ίδια γραμμική απεικόνιση

$$f(x) = Ax = (\, 10x_1 + 6x_2 \,,\; -18x_1 - 11x_2 \,)$$

Αν σαν βάση του $\mathbf{R}^2$ θεωρήσουμε τις στήλες του πίνακα P, ο αντίστοιχος πίνακας της f είναι ο πίνακας B. Πράγματι, η κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$[\; P \quad A P \;] = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right]$$

είναι

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] = [\; I \quad B \;]$$

□

Ιδιότητες

Αν οι πίνακες A , B είναι όμοιοι:

1. οι πίνακες A^T και B^T είναι όμοιοι
2. οι πίνακες A^{-1} και B^{-1} είναι όμοιοι
3. αν $A^2 = A \Rightarrow B^2 = B$
4. αν $A^k = O \Rightarrow B^k = O$
5. αν $A A^T = A^T A \Rightarrow B B^T = B^T B$
6. αν $A = -A^T \Rightarrow B = -B^T$

Διατυπώσατε ανάλογες ιδιότητες για τους ορθομοναδιαία όμοιους πίνακες.

5.3. Ασκήσεις

5.1 Δείξτε ότι οι απεικονίσεις

$$f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2 \ , \ 3|x_2|)$$

$$g(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2 \ , x_1 + 4 \ , 5x_2)$$

δεν είναι γραμμικές.

5.2 Υπολογίζοντας το ίχνος ή την ορίζουσα ή το βαθμό πίνακα, δείξτε ότι οι πίνακες A , B δεν είναι όμοιοι.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται ιδιότητες του γραμμικού μετασχηματισμού $x \to Ax$ *και εφαρμογές αυτών στην απλοποίηση εξισώσεων επιφανείας.*

6.1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Διάφορα προβλήματα των Μαθηματικών, της Φυσικής, των Οικονομικών καταλήγουν στην επίλυση της εξίσωσης

$$A\,x = \lambda\,x\,,$$

όπου ο πίνακας A είναι τετραγωνικός τάξεως ν και άγνωστος είναι το διάνυσμα x και η παράμετρος λ. Η εξίσωση αυτή έχει πάντοτε λύση αλλά όχι μοναδική και ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A, γιατί τα άγνωστα διανύσματα x και οι εικόνες τους Ax είναι διανύσματα συγγραμμικά, με *συντελεστή συγγραμμικότητας* λ. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ισοδύναμη με το ομογενές σύστημα

$$(I\lambda - A)\,x = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

Αν στην (1.6) θέσουμε $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_\nu \end{bmatrix}^T$ και $A = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \end{bmatrix}_{i,j=1}^{\nu}$ αναλυτικά οι εξισώσεις του συστήματος είναι:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(\lambda - \alpha_{11})\,x_1 & & -\ \alpha_{12}\,x_2 & - \dots & & -\ \alpha_{1\nu}\,x_\nu & = 0 \\
-\ \alpha_{21}\,x_1 & + & (\lambda - \alpha_{22})\,x_2 & - \dots & & -\ \alpha_{2\nu}\,x_\nu & = 0 \\
\vdots & & & & & & \\
-\ \alpha_{\nu 1}\,x_1 & & -\ \alpha_{\nu 2}\,x_2 & - \dots & + & (\lambda - \alpha_{\nu\nu})\,x_\nu & = 0
\end{array} \tag{2.6}$$

Το σύστημα (2.6), όπως γνωρίζετε, έχει μη μηδενική λύση ακριβώς όταν

$$\begin{vmatrix}
\lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1\nu} \\
-\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2\nu} \\
\vdots & & & \vdots \\
-\alpha_{\nu 1} & -\alpha_{\nu 2} & \dots & \lambda - \alpha_{\nu\nu}
\end{vmatrix} = 0$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα αυτή προκύπτει το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα Α

$$\delta_A(\lambda) = \lambda^{\nu} + c_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \qquad (3.6)$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου λ_1 , λ_2 , . . . , λ_ν (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες μεταξύ τους) ονομάζονται **ιδιοτιμές** του πίνακα Α. Το σύνολο των ιδιοτιμών του Α ονομάζεται **φάσμα** και συμβολίζεται **σ (Α).**

Αντικαθιστώντας στο σύστημα (2.6) τις διακεκριμένες τιμές των ριζών του $\delta_A(\lambda)$, για κάθε $\lambda = \lambda_i$ βρίσκουμε τη λύση του ομογενούς συστήματος

$$(A - \lambda_i I)\, x = \mathbf{0}.$$

Αν

$$k_i = \nu - \text{rank}\,(\lambda_i I - A)\,,$$

η γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι k_i - *παραμετρική* και, όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3, βρίσκουμε ότι κάθε λύση του είναι γραμμικός συνδυασμός των k_i διανυσμάτων

$$x_{i1}\,,\ x_{i2}\,,\ \ldots,\ x_{i\,k_i}$$

Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα Α *αντίστοιχα της ιδιοτιμής* λ_i. Ο υπόχωρος

$$\text{span}\,\{\, x_{i1},\ x_{i2}\,,\ \ldots,\ x_{i\,k_i} \,\}$$

ονομάζεται **ιδιόχωρος** και η διάστασή του k_i ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i. Αν ν_i είναι η **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ρίζας λ_i στο πολυώνυμο $\delta_A(\lambda)$, σημειώστε ότι

$$1 \le k_i \le \nu_i \qquad (4.6)$$

Προφανώς για τις *απλές* ρίζες ($\nu_i = 1$) έχουμε $k_i = 1$. Συνολικά, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **ιδιοποσά** ή **χαρακτηριστικά μεγέθη** του πίνακα Α.

Παράδειγμα 1.6 Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ και $x = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Είναι τα διανύσματα x και y ιδιοδιανύσματα του Α ;

Λύση : Επειδή

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4\,x$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

το διάνυσμα x είναι ιδιοδιάνυσμα του A , αντίστοιχο της ιδιοτιμής -4, αλλά το διάνυσμα y δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A, αφού τα διανύσματα $\begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ δεν είναι συγγραμμικά. □

Παράδειγμα 2.6 Για τον πίνακα A στο παράδειγμα 1.6, δείξτε ότι ο αριθμός 7 είναι ιδιοτιμή του και βρείτε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Λύση : Ο αριθμός 7 είναι ιδιοτιμή του A ακριβώς όταν η εξίσωση

$$Ax = 7x$$

έχει μη μηδενική λύση. Η ισοδύναμη εξίσωση

$$(7I - A)x = \mathbf{0}$$

έχει λύση διάφορη της μηδενικής, διότι

$$\det (7I - A) = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

και συνεπώς λ = 7 είναι ιδιοτιμή του A. Για να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα γράφουμε τις εξισώσεις του ομογενούς συστήματος

$$6 x_1 - 6 x_2 = 0$$

$$-5 x_1 + 5 x_2 = 0$$

Αυτές επαληθεύονται για κάθε διάνυσμα της μορφής $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Κάθε διάνυσμα της μορφής αυτής, για $c \neq 0$, είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής 7, αλλά μπορείτε να θεωρήσετε το $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή για c = 1 . □

Παράδειγμα 3.6 Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ θα δείξουμε ότι

$\sigma (A) = \{ \alpha + i \beta, \alpha - i \beta \}$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Λύση : Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = (\alpha + i\beta)\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ \beta + i\alpha \end{bmatrix} = (\alpha - i\beta)\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

□

Παράδειγμα 4.6 Θα βρούμε τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Λύση : Από τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

έχουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x_1 \quad\quad - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 4)x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Όπως γνωρίζετε, το σύστημα αυτό έχει λύση διάφορη της μηδενικής ακριβώς όταν

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

δηλαδή, όταν:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

Συνεπώς

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 3$$

είναι οι ιδιοτιμές του A. Για $\lambda_1 = 2$, από το σύστημα (*) έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση κάθε διάνυσμα της μορφής $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ για $c \neq 0$. Ιδιαίτερα, θεωρούμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ως ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 2$. Για $\lambda_2 = 3$, από τις εξισώσεις (*) έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

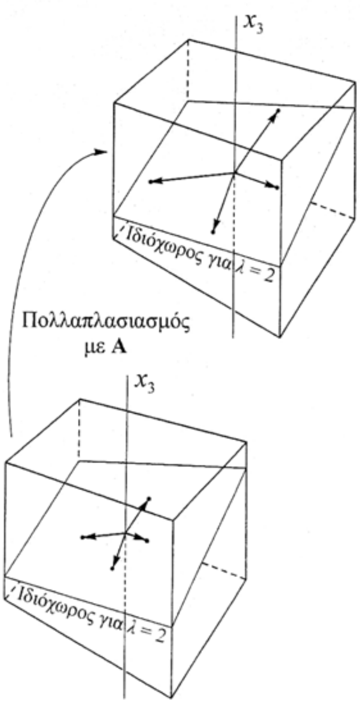
που έχει λύση κάθε διάνυσμα $c\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, για $c \neq 0$. Το διάνυσμα $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 3$. □

Παράδειγμα 5.6 Έστω $A = \begin{bmatrix}4 & -1 & 6\\2 & 1 & 6\\2 & -1 & 8\end{bmatrix}$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός $2 \in \sigma(A)$ και θα βρούμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου.

Λύση : Πράγματι, ο αριθμός 2 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , διότι

$$|2I - A| = \begin{vmatrix}-2 & 1 & -6\\-2 & 1 & -6\\-2 & 1 & -6\end{vmatrix} = 0$$

Επειδή



$$3 - \text{rank}(2I - A) = 3 - 1 = 2$$

ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda = 2$ έχει διάσταση 2, δηλαδή αντιστοιχούν σ' αυτήν δύο ιδιοδιανύσματα. Το ομογενές σύστημα $(2I - A)x = \mathbf{0}$, είναι η εξίσωση

$$-2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0$$

και έχει λύση

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\2x_1 + 6x_3\\x_3\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\6\\1\end{bmatrix}$$

όπου x_1 , x_3 αυθαίρετες μεταβλητές. Μια βάση του ιδιοχώρου είναι

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\6\\1\end{bmatrix} \right\}$$

και τα διανύσματα αυτά είναι ιδιοδιανύσματα του A αντίστοιχα της ιδιοτιμής 2. □

6.2. Ιδιότητες

Στο εδάφιο αυτό θα σας παρουσιάσουμε τις πλέον αξιοσημείωτες ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

1. $$\det A = l_1 l_2 \dots l_n = (-1)^n c_0 \qquad (5.6)$$

Απόδειξη : Από την δεύτερη ισότητα

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^\nu + c_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_\nu)$$

είναι προφανές ότι $(-1)^\nu \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu = c_0$. Επιπλέον, αν αντικαταστήσουμε $\lambda = 0$, έχουμε

$$\det(-A) = c_0$$

Επειδή $\det(-A) = (-1)^\nu \det A$, άμεσα συμπεραίνουμε την (5.6). □

Από την ισότητα αυτή είναι φανερό ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος *ακριβώς όταν* ο αριθμός 0 *δεν* είναι ιδιοτιμή του A.

Συνοψίζοντας σχετικά με την *αντιστρεψιμότητα* του πίνακα A, έχουμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες:

1. $\det A \neq 0$
2. ο πίνακας A αντιστρέφεται.
3. rank $A = \nu$.
4. οι γραμμές (στήλες) του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
5. $\dim\{Ax : x \in \mathbf{K}^\nu\} = \nu \quad (\mathbf{K} \equiv \mathbf{R}$ ή $\mathbf{C})$
6. $\dim\{x : Ax = \mathbf{0}\} = 0$.
7. Το σύστημα $Ax = \beta$, έχει λύση για κάθε $\beta \in \mathbf{K}^\nu$.
8. Αν το σύστημα $Ax = \beta$ είναι συμβιβαστό, τότε η λύση του είναι μοναδική.
9. Το ομογενές σύστημα $Ax = \mathbf{0}$, έχει μοναδική λύση $x = \mathbf{0}$.
10. Το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A.

2. $$\sigma(A) = \sigma(A^T)$$

Απόδειξη : Οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, διότι

$$\det(\lambda I - A^T) = \det(\lambda I - A)^T = \det(\lambda I - A).$$ □

3. Αν λ , x είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα A , τότε λ^k , x είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα A^k , όπου k φυσικός αριθμός.

Απόδειξη : Από την εξίσωση $A\,x = \lambda\,x$ έχουμε:

$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$$

$$A^3 x = A(A^2 x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2 (Ax) = \lambda^3 x$$

και επαγωγικά διαπιστώνουμε ότι

$$A^k x = \lambda^k x$$

για κάθε φυσικό αριθμό k. □

4. Αν λ , x είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη του αντιστρέψιμου πίνακα A, τότε λ^{-1} , x είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη του A^{-1}.

Απόδειξη : Από την εξίσωση $A\,x = \lambda\,x$, έχουμε

$$x = I\,x = (A^{-1}A)\,x = A^{-1}(A\,x) = A^{-1}\lambda\,x = \lambda(A^{-1}x)$$

Συνεπώς $A\,x = \lambda^{-1} x$ (Γιατί $\lambda \neq 0$;) □

5. Αν ο πίνακας A είναι τριγωνικός, οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Απόδειξη : Χωρίς να είναι περιορισμός έστω ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, τάξεως 3. Τότε:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ 0 & \lambda - \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \lambda - \alpha_{33} \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha_{11})(\lambda - \alpha_{22})(\lambda - \alpha_{33})$$

Προφανώς, $\sigma(A) = \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}\}$. □

Συμπληρώστε την απόδειξη, όταν ο πίνακας A είναι κάτω τριγωνικός.

6. Αν A , B είναι $\nu \times \nu$ πίνακες και $A\,x = \lambda\,x$, $B\,x = \mu\,x$, τότε

$$(A + B)\,x = (\lambda + \mu)\,x , \quad (AB)\,x = (\lambda\mu)\,x .$$

7. Αν x_1 , x_2 είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A αντίστοιχα της ιδιοτιμής λ , τότε το διάνυσμα $kx_1 + \mu x_2$, για κάθε k , μ είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο του λ.

Απόδειξη : Από τις ισότητες $A\,x_1 = \lambda\,x_1$, $A\,x_2 = \lambda\,x_2$ έχουμε:

$$A(k\,x_1 + m\,x_2) = k(A\,x_1) + m(A\,x_2) = kl\,x_1 + ml\,x_2 = l(k\,x_1 + m\,x_2).$$ □

8. Έστω A , B είναι όμοιοι πίνακες και $B = P^{-1} A P$. Αν λ , x είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα A, τότε λ , $P^{-1}x$ είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του B.

Απόδειξη : Από την ισότητα

$$\lambda I - B = P^{-1} (\lambda I - A) P$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \det (\lambda I - B) &= \det P^{-1} \det (\lambda I - A) \det P \\ &= (\det P)^{-1} \det (\lambda I - A) \det P = \det (\lambda I - A) \end{aligned}$$

δηλαδή, οι όμοιοι πίνακες A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Επιπλέον

$$B (P^{-1} x) = P^{-1} A x = P^{-1} \lambda x = \lambda (P^{-1} x)$$

και η πρόταση αποδείχθηκε. □

9. Για τους τετραγωνικούς πίνακες A και B , τάξεως ν, ισχύει η ισότητα

$$\boldsymbol{\sigma (AB) = \sigma (BA)}$$

Απόδειξη : Αν ένας από τους πίνακες A , B είναι αντιστρέψιμος οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι, δηλαδή $BA = A^{-1} (AB)A$ ή $AB = B^{-1} (BA)B$. Έτσι, σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα 8, $\sigma (AB) = \sigma (BA)$.

Αν όμως κανένας από τους πίνακες A , B δεν αντιστρέφεται, υπάρχει αριθμός ε_0 τέτοιος ώστε, $\det (B + \varepsilon_0 I) \neq 0$. Τότε

$$| \lambda I - A (B + \varepsilon I) | = | \lambda I - (B + \varepsilon I) A | \quad , \qquad \forall \ \varepsilon > \varepsilon_0$$

και σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της Άλγεβρας, συμπεραίνουμε ότι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων AB και BA ταυτίζονται. □

10. Αν $x_1 , x_2 , \dots , x_\nu$ είναι ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα των διακεκριμένων ιδιοτιμών $\lambda_1 ,\lambda_2 , \dots , \lambda_\nu$ του πίνακα A, τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη : Ας υποθέσουμε ότι από τα ιδιοδιανύσματα $x_1 , x_2 , \dots , x_\nu$ τα διανύσματα $x_1 , x_2 , \dots , x_k$, όπου $k < \nu$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θ' αποδείξουμε ότι και τα διανύσματα $x_1 , \dots , x_k , x_{k+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα . Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

επί τον πίνακα A, έχουμε

$$\begin{aligned} &\alpha_1 A x_1 + \dots + \alpha_k A x_k + \alpha_{k+1} A x_{k+1} = \\ &\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = \mathbf{0} . \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (*) επί λ_{k+1} και αφαιρώντας από την τελευταία ισότητα, έχουμε

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) x_k = \mathbf{0} .$$

Επειδή $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$, και τα διανύσματα $x_1 , x_2 , \dots , x_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ και από την (*) συμπεραίνουμε επιπλέον $\alpha_{k+1} = 0$ αφού $x_{k+1} \neq \mathbf{0}$. Συνεπώς στην (*) , $x_1 , \dots , x_k , x_{k+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. □

11. Οι ιδιοτιμές ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη : Έστω ο πίνακας A είναι ερμιτιανός ($A = A^*$) και $A x = \lambda x$. Τότε

$$x^* A^* = (A x)^* = \bar{\lambda} x^*$$

και

$$0 = x^* (A^* - A) x = x^* A^* x - x^* A x = (\bar{\lambda} - \lambda) x^* x$$

Επειδή το διάνυσμα x είναι μη μηδενικό, $\lambda = \bar{\lambda}$, δηλαδή $\lambda \in \mathbf{R}$.

Αν τα ιδιοδιανύσματα x_1 , x_2 αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_1 , λ_2 από τις εξισώσεις $A x_1 = \lambda_1 x_1$, $A x_2 = \lambda_2 x_2$ έχουμε:

$$0 = x_1^* (A^* - A) x_2 = \bar{\lambda}_1 x_1^* x_2 - \lambda_2 x_1^* x_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) x_1^* x_2 ,$$

διότι $\lambda_1 \in \mathbf{R}$. Επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$ είναι φανερό ότι $x_1^* x_2 = x_1 \circ x_2 = 0$, δηλαδή τα διανύσματα x_1 , x_2 είναι κάθετα. □

Η πρόταση αυτή ισχύει και για *πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες*.

12. Οι ιδιοτιμές ορθομοναδιαίου πίνακα έχουν μέτρο 1 και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη : Έστω $A x = \lambda x$, όπου ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαίος ($A^* A = I$)

Τότε:

$$0 = x^* (I - A^* A) x = x^* x - x^* A^* A x = x^* x - x^* \bar{\lambda} \lambda x = (1 - \bar{\lambda} \lambda) x^* x$$

Επειδή $x \neq \mathbf{0}$, από την προηγούμενη ισότητα συμπεραίνουμε $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$.

Αν $A x_1 = \lambda_1 x_1$ και $A x_2 = \lambda_2 x_2$, όπου $\lambda_1 \neq \lambda_2$ τότε:

$$0 = x_1^* (I - A^* A) x_2 = x_1^* x_2 - x_1^* A^* A x_2 = x_1^* x_2 - x_1^* \bar{\lambda}_1 \lambda_2 x_2$$
$$= (1 - \bar{\lambda}_1 \lambda_2) x_1^* x_2$$

Έχοντας υπόψη ότι $\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$, από την ισότητα

$$(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})\, x_1^* x_2 = 0$$

έχουμε $x_1^*\, x_2 = x_1 \circ x_2 = 0$, δηλαδή τα διανύσματα x_1 , x_2 είναι κάθετα. □

Η πρόταση ισχύει και για *ορθογώνιους* πίνακες.

Παράδειγμα 6.6 Αν τα στοιχεία κάθε γραμμής του $\nu\times\nu$ πίνακα A έχουν την ιδιότητα

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{i\nu} = 1 \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

δείξτε ότι τα στοιχεία του πίνακα A^μ , όπου μ φυσικός αριθμός, έχουν την ίδια ιδιότητα.

Λύση : Από την ιδιότητα των στοιχείων κάθε γραμμής διαπιστώνουμε

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, βλέπουμε ότι ο αριθμός 1 και το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T$ είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα A και σύμφωνα με την τρίτη ιδιότητα, ο αριθμός 1^μ (=1) και το ίδιο διάνυσμα είναι ιδιοποσά του A^μ. Οπότε

$$A^\mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \ldots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{\nu1} & \beta_{\nu2} & \ldots & \beta_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

δηλαδή έχουμε $\beta_{i1} + \beta_{i2} + \ldots + \beta_{i\nu} = 1$. □

Παράδειγμα 7.6 Αν $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα $B = A^2 - 4A + 2I$, χωρίς να βρούμε τον πίνακα B.

Λύση : Θα βρούμε πρώτα τις ιδιοτιμές του πίνακα A:

$$| \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 1) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Οπότε $\sigma (A) = \{ 1 , 2 \}$. Παρατηρούμε ότι αν λ , x είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του A τότε

$$Bx = (A^2 - 4A + 2I)x = A^2 x - 4A x + 2x = \lambda^2 x - 4\lambda x + 2x = (\lambda^2 - 4\lambda + 2)x$$

δηλαδή $\lambda^2 - 4\lambda + 2$, x είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του B.

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του B είναι

$$\lambda_1 = 1^2 - 4.1 + 2 = -1 \quad , \qquad \lambda_2 = 2^2 - 4.2 + 2 = -2$$

και από την πρώτη ιδιότητα, την ισότητα (4.6), θα έχουμε $\det B = (-1)(-2) = 2$. □

Παράδειγμα 8.6 Αν ο πίνακας A είναι **μηδενοδύναμος**, δείξτε ότι $\sigma(A) = \{0\}$.

Λύση : Σύμφωνα με τον ορισμό, ο πίνακας A είναι μηδενοδύναμος, ακριβώς όταν υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός k, τέτοιος ώστε $A^k = O$. Οπότε,

$$\det A^k = (\det A)^k = 0 .$$

Επειδή όμως $\det A$ ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του A, μια τουλάχιστον ιδιοτιμή του πίνακα είναι ο αριθμός 0, δηλ. $0 \in \sigma(A)$. Αν λ είναι μια άλλη ιδιοτιμή του A και x είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε λ^k, x είναι ιδιοποσά του A^k. Από την εξίσωση

$$A^k x = \lambda^k x = \mathbf{0}$$

είναι πλέον φανερό ότι $\lambda^k = 0$, δηλ. $\lambda = 0$. □

Παράδειγμα 9.6 Αν ο πίνακας A έχει μόνο μια ιδιοτιμή διάφορη του μηδενός, δείξτε ότι

$$\det(I + A) = 1 + \operatorname{tr} A,$$

όπου $\operatorname{tr} A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{\nu\nu}$ είναι το *ίχνος* του A.

Λύση : Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A αποδεικνύεται στην επόμενη ενότητα ότι:

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu$$

Αν $\sigma(A) = \{0, \lambda\}$ όπου $\lambda \neq 0$, τότε $\sigma(I + A) = \{1, 1 + \lambda\}$. Συνεπώς

$$\det(I + A) = 1.1 \dots 1(1 + \lambda) = 1 + \lambda = 1 + (0 + \cdots + 0 + \lambda)$$
$$= 1 + \operatorname{tr} A.$$ □

6.3. Διαγωνοποίηση πίνακα

Για κάθε $\nu \times \nu$ πίνακα A, ο διανυσματικός χώρος

$$L = \operatorname{span}\{ x : x \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \}$$

έχει γενικά διάσταση $\leq \nu$. Ιδιαίτερα ενδιαφερόμαστε όταν $\dim L = \nu$ και αυτό συμβαίνει, ακριβώς όταν ο πίνακας A έχει ν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα ή *ισοδύναμα*, ακριβώς όταν στην (4.6) η αλγεβρική πολλαπλότητα ν_i κάθε ιδιοτιμής λ_i του A ισούται με τη γεωμετρική της πολλαπλότητα k_i . Στην περίπτωση αυτή ισχύει η επόμενη αξιοσημείωτη πρόταση:

Θεώρημα 1.6. Ένας πίνακας A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα, ακριβώς όταν έχει ν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

*Τότε χρησιμοποιούμε την έκφραση ότι **ο πίνακας A διαγωνοποιείται.***

Απόδειξη : Έστω $\lambda_1 , x_1 \; ; \dots ; \; \lambda_\nu , x_\nu$ είναι ιδιοποσά του πίνακα A. Αν θέσουμε

$$P = [\, x_1 \; x_2 \; \dots \; x_\nu \,] \qquad\qquad D = \mathrm{diag}\,(\, \lambda_1 , \dots , \lambda_\nu \,)$$

τότε

$$\begin{aligned} A\,P &= A\,[\, x_1 \; \dots \; x_\nu \,] = [\, Ax_1 \; \dots \; Ax_\nu \,] = [\, \lambda_1 x_1 \; \dots \; \lambda_\nu x_\nu \,] \\ &= [\, x_1 \; \dots \; x_\nu \,]\, D = P\,D \end{aligned} \tag{6.6}$$

Από την (6.6) , έχουμε τη σχέση ομοιότητας $A = P\,D\,P^{-1}$, ακριβώς όταν οι στήλες του τετραγωνικού πίνακα P, τάξεως ν, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. □

Συνδυάζοντας το θεώρημα 1.6 με την ιδιότητα 10 στην ενότητα 6.2 συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A θα διαγωνοποιείται *εάν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι διακεκριμένες.*

Από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος οδηγούμαστε στην ακόλουθη διαδικασία διαγωνοποίησης πίνακα:

I. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ του A.

II. Βρίσκουμε τις ρίζες του $\delta_A(\lambda)$.

III. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i του A, πολλαπλότητας ν_i , βρίσκουμε μια βάση του χώρου λύσεων του ομογενούς συστήματος $(\lambda_i I - A)\,x = \mathbf{0}$. Αν η διάσταση του ιδιοχώρου είναι μικρότερη του ν_i , τότε ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται. Έτσι βρίσκουμε συνολικά ν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.

IV. Αν οι στήλες του πίνακα P είναι τα ν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε $P^{-1} A\,P = D$ είναι διαγώνιος πίνακας, με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A που αντιστοιχούν στις στήλες του P.

Από την ισότητα (6.6) είναι φανερό ότι

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

και ακόμη για κάθε αριθμό k

$$A^k = P\,D^k\,P^{-1}\,.$$

Παράδειγμα 10.6 Θα εξετάσουμε αν διαγωνοποιούνται οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Λύση : Για τον πίνακα A έχουμε:

I. $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2$, δηλαδή ο αριθμός 1 είναι ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2.

II. Το ομογενές σύστημα $(I - A)\,x = \mathbf{0}$, έχει τη μονοπαραμετρική λύση $c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και επειδή στην ιδιοτιμή 1 αντιστοιχεί μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα, ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται.

Για τον πίνακα B έχουμε:

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2),$$

δηλαδή $\sigma(B) = \{2, -3\}$. Επειδή ο 2×2 πίνακας B έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, διαγωνοποιείται. Το ομογενές σύστημα $(2I - B)x = \mathbf{0}$ έχει λύση τα διανύσματα $c\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ και το ομογενές σύστημα $(-3I - B)x = \mathbf{0}$ επαληθεύεται από τα διανύσματα $c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Θέτοντας $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε $P^{-1} A\,P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. □

Παράδειγμα 11.6 Όμοια, θα εξετάσουμε την διαγωνοποίηση των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση : Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία έχουμε:

I. $|\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 1)^2 \Rightarrow \sigma(A) = \{0, 1\}$.

II. Το σύστημα $(0I - A)x = \mathbf{0}$, έχει λύση τα διανύσματα $c\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$ και ο χώρος λύσεων του συστήματος $(I - A)x = \mathbf{0}$ έχει βάση τα διανύσματα $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$. Ο πίνακας A, όπως βλέπετε, έχει συνολικά 3 ιδιοδιανύσματα και ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων $P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Έτσι, θα έχουμε

$$P^{-1} A P = \mathrm{diag}(0, 1, 1).$$

Για τον πίνακα B έχουμε:

I. $|\lambda I - B| = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \Rightarrow \sigma(B) = \{i, -i, 1\}$.

II. Το σύστημα $(iI - B)x = \mathbf{0}$ επαληθεύεται από τα διανύσματα $c\begin{bmatrix}1 & -1-i & i\end{bmatrix}^T$ και ας είναι για $c = 1$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή i. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι στην ιδιοτιμή $-i$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix}1 & -1+i & -i\end{bmatrix}^T$ και στην ιδιοτιμή 1, το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1-i & -1+i & 0\\ i & -i & 1\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, διότι οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα καθόσον αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές (ιδιότητα 10, ενότητα 6.2). Κατά συνέπεια,

$$P^{-1} B P = \mathrm{diag}(i, -i, 1).$$ □

Στην εξίσωση (6.6), όταν ο πίνακας P είναι ορθομοναδιαίος, τότε

$$A = P D P^* \tag{7.6}$$

και για τον πίνακα A θα λέμε ότι είναι **ορθομοναδιαία όμοιος** με διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 2.6. (Schur) Κάθε τετραγωνικός πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με άνω τριγωνικό πίνακα T, με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ του A.

Βάσει του γεγονότος ότι όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια ίχνη, από το θεώρημα του Schur συμπεραίνουμε:

$$\text{tr}\, A = \text{tr}\, T = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu$$

Έχοντας υπόψη την ιδιότητα 11, στην ενότητα 6.2, σας αναφέρουμε την εξής βασική πρόταση:

Φασματικό θεώρημα 3.6. Ένας πίνακας είναι ερμιτιανός (συμμετρικός) ακριβώς όταν είναι ορθομοναδιαία όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα.

Κατά συνέπεια, οι ερμιτιανοί (συμμετρικοί) πίνακες πάντοτε διαγωνοποιούνται και σε κάθε ιδιοτιμή λ_i , πολλαπλότητας ν_i , η βάση του αντιστοίχου ιδιοχώρου αποτελείται από ν_i ιδιοδιανύσματα που βρίσκονται από τη λύση του συστήματος $(\lambda_i I - A)x = \mathbf{0}$. Στην (7.6) για να βρούμε τον ορθομοναδιαίο πίνακα P, θα πρέπει σε κάθε ιδιόχωρο να μετασχηματίσουμε με τη μέθοδο Gram-Schmidt (ενότητα 4.3) τα ιδιοδιανύσματα σε ορθοκανονική βάση. Συνολικά οι ορθοκανονικές βάσεις των ιδιοχώρων ορίζουν ένα σύνολο ν ορθομοναδιαίων ιδιοδιανυσμάτων που είναι και οι στήλες του πίνακα P (γιατί;).

Παράδειγμα 12.6 Θα βρούμε τον πίνακα P στην (7.6) για το συμμετρικό πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση :

I. $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2 (\lambda - 4) \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 4\}.$$

II. Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής -2 είναι ο χώρος λύσεων του συστήματος $(-2I - A)x = \mathbf{0}$, ακριβέστερα της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Τα διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad , \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (βάση του ιδιόχωρου) και με τη μέθοδο ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt, βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή 4, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, αφού είναι βάση του χώρου λύσεων του συστήματος (4I - A)x = **0**. Το μοναδιαίο διάνυσμα αυτού είναι $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Θέτοντας

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$P^* A P = \text{diag}(-2, -2, 4).$$ □

Παράδειγμα 13.6 Θα λύσουμε την εξίσωση:

$$X^2 = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Λύση : Ο πίνακας $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$ διαγωνοποιείται, αφού η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & -9 \\ 6 & \lambda - 10 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

έχει δύο διακεκριμένες ρίζες 1 και 4. Για $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$ τ' αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $[\,-3/2 \;\; 1\,]^T$ και $[\,1 \;\; 1\,]^T$. Αν $P = \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$X^2 = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} P \, .$$

Θέτοντας $Y = P X P^{-1}$, τότε

$$Y^2 = P X^2 P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Το δεύτερο μέλος είναι διαγώνιος πίνακας και επαληθεύεται για

$$Y = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}$$

Από την ισότητα

$$X = P^{-1}\, Y\, P,$$

με τους συνδυασμούς των προσήμων στο διαγώνιο πίνακα Y, προκύπτουν 4 λύσεις της εξίσωσης. □

6.4. Θεώρημα Cayley - Hamilton

Έστω A τετραγωνικός πίνακας τάξεως ν. Για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbf{C}^{\nu}$, ο υπόχωρος

$$K = \text{span}\{\; x\,,\, A\,x\,,\, \ldots,\, A^{\nu-1}\,x \;\}$$

έχει το πολύ διάσταση ν και κατά συνέπεια το διάνυσμα $A^{\nu}\,x$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων του K. Έτσι, από τη σχέση

$$A^{\nu}\,x = c_0\,x + c_1\,A\,x + \ldots + c_{\nu-1}\,A^{\nu-1}\,x$$

συμπεραίνουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο ν-στου βαθμού

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{\nu} - c_{\nu-1}\,\lambda^{\nu-1} - \ldots - c_1\,\lambda - c_0$$

τέτοιο ώστε $\varphi(A) = O$. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 4.6. (Cayley-Hamilton) Για κάθε πίνακα A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\delta_A(\lambda) = \lambda^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\,\lambda^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\,\lambda + \alpha_0$$

τότε ισχύει η ισότητα

$$\delta_A(A) = A^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\,A^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\,A + \alpha_0\,I = O \qquad (8.6)$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, σύμφωνα με την (5.6) στην ενότητα 6.2, ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι μηδέν. Πολλαπλασιάζοντας την (8.6) επί A^{-1} και διαιρώντας με το α_0 έχουμε:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}\,A^{\nu-1} - \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_0}\,A^{\nu-2} - \ldots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\,I.$$

Με αυτόν τον τρόπο εκφράζουμε τον πίνακα A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων $I, A, A^2, \ldots, A^{\nu-1}$.

Αν $p(\lambda)$ είναι πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστον ν, από την ισότητα

$$p(\lambda) = \delta(\lambda)\,\pi(\lambda) + \upsilon(\lambda) \quad , \quad \beta\alpha\theta\mu\,[\,\upsilon(\lambda)\,] \leq \nu - 1$$

έχουμε

$$p(A) = \delta(A)\,\pi(A) + \upsilon(A) = \upsilon(A),$$

με αποτέλεσμα την οικονομία των πράξεων κατά τον υπολογισμό του πίνακα $p(A)$.

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton προκύπτει εύλογα το ερώτημα αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\delta(\lambda)$ είναι το μικροτέρου βαθμού πολυώνυμο με την ιδιότητα $\delta(A) = O$. Η απάντηση είναι αρνητική. Παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ και *μηδενίζει* επιπλέον το πολυώνυμο $\alpha(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.

Παράδειγμα 14.6 Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ θα επαληθεύσουμε το θεώρημα Cayley-Hamilton και θα δείξουμε ότι $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I$.

Λύση : Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2.$$

Επιπλέον έχουμε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

και επαληθεύουμε ότι

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = O.$$

Επειδή $\delta(0) = -2$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη ισότητα με τον πίνακα A^{-1}, έχουμε:

$$A^2 - 4A + 5I - 2A^{-1} = O$$

και απ' αυτή βρίσκουμε τον πίνακα A^{-1} ως γραμμική έκφραση των πινάκων I, A και A^2 :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} A^2 - 2A + \frac{5}{2} I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Παράδειγμα 15.6 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θα εκφράσουμε τον πίνακα A^{31} ως πολυώνυμο του A , βαθμού το πολύ 2.

Λύση : Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 1 & \lambda + 2 & -3 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)[(\lambda - 1)^2 - 4]$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Το υπόλοιπο $\upsilon(\lambda)$ της διαίρεσης λ^{31} **:** $\delta(\lambda)$ θα είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού και έτσι από την ταυτότητα

$$\lambda^{31} = \delta(\lambda)\,\pi(\lambda) + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

αντικαθιστώντας όπου λ τις ρίζες του $\delta(\lambda)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (-1)^{31} &= \alpha - \beta + \gamma \\ (-2)^{31} &= 4\alpha + 2\beta + \gamma \\ 3^{31} &= 9\alpha + 3\beta + \gamma \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση

$$\alpha = \frac{1}{4}3^{31} - \frac{1}{3}(-2)^{31} - \frac{1}{12}, \quad \beta = -\frac{1}{4}3^{31} + \frac{2}{3}(-2)^{31} + \frac{5}{12}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}3^{31} + (-2)^{31} - \frac{1}{2}$$

και συνεπώς

$$A^{31} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I . \qquad \square$$

Παράδειγμα 16.6 Εφαρμόζοντας το θεώρημα Cayley-Hamilton, θα βρούμε τον πίνακα A^{-3} όταν:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση : Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

Επειδή $\delta(0) = 2 \neq 0$, ο πίνακας A αντιστρέφεται και από την ιδιότητα

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I = O \qquad (*)$$

έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{2} I + A - \frac{1}{2} A^2$$

Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα (*) επί A^{-2} και αντικαθιστώντας την έκφραση του A^{-1} θα είναι:

$$A^{-2} = I + \frac{1}{2} A^{-1} - \frac{1}{2} A = \frac{5}{4} I - \frac{1}{4} A^2$$

Όμοια πολλαπλασιάζοντας την (*) επί A^{-3} και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των A^{-1} και A^{-2} έχουμε τελικά:

$$A^{-3} = \frac{1}{2} A^{-2} + A^{-1} - \frac{1}{2} I = \frac{5}{8} I + A - \frac{5}{8} A^2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 13 & 3 & -21 \\ 7 & 1 & -7 \\ 5 & 3 & -13 \end{bmatrix}$$ □

Παράδειγμα 17.6 Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ θα εκφράσουμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$B = 2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37I$$

σε σχέση με τους πίνακες I και A.

Λύση : Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 7$$

Επειδή

$$2\lambda^4 - 12\lambda^3 + 19\lambda^2 - 29\lambda + 37 = (\lambda^2 - 6\lambda + 7)(2\lambda^2 + 5) + \lambda + 2.$$

προκύπτει η απλούστερη έκφραση του πίνακα

$$B = A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$\delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -2 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 23.$$

Κατά συνέπεια από την ισότητα

$$B^2 - 10B + 23I = O$$

έχουμε

$$B^{-1} = \frac{10}{23} I - \frac{1}{23} B = \frac{10}{23} I - \frac{1}{23} (A + 2I) = \frac{8}{23} I - \frac{1}{23} A. \qquad \square$$

6.5. Τετραγωνικές μορφές

Κάθε ομογενές πολυώνυμο δευτέρου βαθμού των μεταβλητών $x_1 , x_2 , \dots , x_\nu$ με πραγματικούς συντελεστές

$$\begin{aligned} Q(x) = \alpha_{11} x_1^2 &+ 2\alpha_{12} x_1x_2 + \dots + 2\alpha_{1\nu} x_1x_\nu \\ &+ \alpha_{22} x_2^2 + 2\alpha_{23} x_2x_3 + \dots + 2\alpha_{2\nu} x_2x_\nu + \dots + \alpha_{\nu\nu} x_\nu^2 \end{aligned} \qquad (9.6)$$

ονομάζεται **τετραγωνική μορφή**. Αν συμβολίσουμε $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_\nu \end{bmatrix}^T$ και

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{1\nu} & \alpha_{2\nu} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} ,$$

η πολυωνυμική παράσταση (9.6) γράφεται

$$Q(x) = x^T Ax = Ax \circ x = x \circ Ax \qquad (10.6)$$

Ο πίνακας A είναι συμμετρικός και ονομάζεται *πίνακας της τετραγωνικής μορφής* Q(x). Αν ο πίνακας A της τετραγωνικής μορφής είναι ομαλός, η παράσταση Q(x) ονομάζεται **ομαλή** και αντίστοιχα ο βαθμός ρ του A ονομάζεται **βαθμός** της τετραγωνικής μορφής. Δύο τετραγωνικές μορφές

$$Q_1(x) = x^T Ax \quad , \quad Q_2(x) = x^T Bx$$

ονομάζονται **ισοδύναμες** ακριβώς όταν οι πίνακες A και B είναι ορθογώνια όμοιοι. Αν $B = P^T A P$ και θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $x = Py$, τότε

$$Q(x) = x^T Ax = y^T (P^T A P)y = y^T By$$

δηλαδή, αναφερόμαστε στην ίδια τετραγωνική μορφή σε δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων.

Παράδειγμα 18.6 Θα γράψουμε στη μορφή x^TAx την τετραγωνική μορφή:

$$Q(x) = x_1^2 - 2 x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3.$$

Λύση : Οι συντελεστές των x_1^2 , x_2^2 , x_3^2 στην παράσταση Q(x) θα καταλάβουν τις διαγώνιες θέσεις του πίνακα και για να είναι ο πίνακας A συμμετρικός, το μισό των συντελεστών των γινομένων $x_i x_j$ ($i \neq j$) θα καταλάβουν τις θέσεις (i , j) και (j , i). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$Q(x) = [\, x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \,] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Μια τετραγωνική μορφή Q(x) ονομάζεται **θετικά ορισμένη** ακριβώς όταν για κάθε διάνυσμα $x \neq \mathbf{0}$,

$$Q(x) = x^T Ax > 0$$

Μια τετραγωνική μορφή Q(x) ονομάζεται **θετικά ημιορισμένη** ακριβώς όταν για κάθε διάνυσμα x ,

$$Q(x) = x^T Ax \geq 0$$

και υπάρχει διάνυσμα $x_0 \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε, $x_0^T Ax_0 = 0$.

Η τετραγωνική μορφή Q(x) ονομάζεται **αρνητικά ορισμένη ή αρνητικά ημιορισμένη** ακριβώς όταν η - Q(x) είναι θετικά ορισμένη ή θετικά ημιορισμένη.

Μια τετραγωνική μορφή Q(x) ονομάζεται **αόριστη** ακριβώς όταν για κάθε $x \neq \mathbf{0}$, η παράσταση Q(x) δεν έχει σταθερό πρόσημο.

Σημειώστε ότι:

I . Σε κάθε θετικά (ή αρνητικά) ορισμένη τετραγωνική μορφή ο αντίστοιχος πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

II . Οι ισοδύναμες τετραγωνικές μορφές έχουν το ίδιο πρόσημο.

Παράδειγμα 19.6 Θα γράψουμε τις τετραγωνικές μορφές

$$Q_1(x) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 , \qquad Q_2(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

στη μορφή $x^T Ax$ και θα βρούμε το πρόσημό τους.

Λύση : Η πρώτη τετραγωνική μορφή γράφεται

$$Q_1(x) = [\, x_1 \;\; x_2 \,] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Για $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, έχουμε $Q_1(x) = 1 > 0$ και για $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ είναι $Q_2(x) = -1 < 0$. Συνεπώς, $Q_1(x)$ είναι αόριστη

Για την

$$Q_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

έχουμε $Q_2(x) > 0$ για κάθε $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, αφού

$$Q_2(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0$$

Επιπλέον δεν υπάρχει $x_0 \neq \mathbf{0}$, τέτοιο ώστε $Q(x_0) = 0$. Το μη μηδενικό διάνυσμα x_0 θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x = \mathbf{0}$$

που όμως έχει τη *μοναδική* λύση $x = \mathbf{0}$. □

Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος** ή **θετικά ημιορισμένος** και συμβολίζεται $A > 0$ ή $A \geq 0$, ακριβώς όταν η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή x^TAx είναι θετικά ορισμένη ή θετικά ημιορισμένη. Για κάθε θετικά ορισμένο (ημιορισμένο) πίνακα A είναι προφανές ότι ο πίνακας $-A$ είναι αρνητικά ορισμένος (ημιορισμένος). Οι προηγούμενοι ορισμοί εισάγουν στο χώρο $\mathbf{R}_{\nu \times \nu}$ μια *μερική διάταξη* όπου

$$A \geq B \iff A - B \quad \text{θετικά ημιορισμένος}$$

$$A > B \iff A - B \quad \text{θετικά ορισμένος.}$$

Παράδειγμα 20.6 Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα P, ο πίνακας $A = P^T P$ είναι θετικά ορισμένος.

Λύση : Κατ' αρχήν ο πίνακας A είναι συμμετρικός, διότι

$$A^T = (P^T P)^T = P^T (P^T)^T = P^T P = A$$

Επιπλέον είναι και θετικά ορισμένος, διότι για κάθε διάνυσμα x :

$$x^T Ax = x^T P^T P x = (Px)^T Px = \| Px \| > 0$$

Είναι φανερό ότι αν ο πίνακας P *δεν είναι αντιστρέψιμος ,* τότε για κάθε διάνυσμα x_0 που είναι λύση του συστήματος $P x = \mathbf{0}$, έχουμε:

$$x_0^T A x_0 = 0$$

και τότε ο πίνακας A θα είναι θετικά ημιορισμένος. □

Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας A διαγωνοποιείται και ας είναι

$$P^T A P = D$$

όπου οι στήλες του P είναι ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα του A και τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα D είναι οι ιδιοτιμές λ_i του A. Αν κάνουμε το μετασχηματισμό $x = Py$, τότε

$$\begin{aligned} x^T Ax &= y^T (P^T A P)y = y^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)y \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_\nu y_\nu^2 \end{aligned} \qquad (11.6)$$

Το δεξιό μέλος της (11.6) ονομάζεται **διαγώνια μορφή** της τετραγωνικής μορφής $x^T Ax$. Όταν rank A $= \rho < \nu$, ο πίνακας έχει ιδιοτιμή $\lambda = 0$ με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα $\nu - \rho$ και στην περίπτωση αυτή η διαγώνια μορφή (11.6) είναι

$$x^T Ax = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_\rho x_\rho^2$$

όπου $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\rho \neq 0$.

Από την (11.6) είναι φανερό ότι το πρόσημο μιας τετραγωνικής μορφής εξαρτάται από το πρόσημο των ιδιοτιμών του αντίστοιχου πίνακα.

Θεώρημα 5.6. Έστω A πραγματικός συμμετρικός πίνακας, τάξεως ν. Τότε η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ είναι:

1. Θετικά ορισμένη ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.

2. Θετικά ημιορισμένη ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικές.

3. Αόριστη ακριβώς όταν ο πίνακας A έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές.

Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ είναι *αρνητικά ορισμένη* (*ημιορισμένη*) ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι *αρνητικές* (*μη θετικές*).

Παράδειγμα 21.6 Διαπιστώσατε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος και βρείτε την διαγώνια μορφή της $x^T Ax$.

Λύση : Επειδή

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 6 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9)$$

οι ιδιοτιμές 3 , 6 , 9 είναι θετικοί αριθμοί, οπότε $x^T Ax$ είναι θετικά ορισμένη.

Τ' αντίστοιχα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα είναι οι στήλες του πίνακα

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

και με το μετασχηματισμό $x = Py$, όπου $y = [\, y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \,]^T$, έχουμε

$$Q = y^T P^T A P y = y^T \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} y = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$$ □

Παράδειγμα 22.6 Βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος.

Λύση : Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$\delta(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3(1 - \alpha^2)\lambda - 1 + 3\alpha^2 - 2\alpha^3$$

Αν λ_1 , λ_2 , λ_3 είναι οι ρίζες του πολυωνύμου, για να είναι αυτές θετικές, από τις σχέσεις ριζών και συντελεστών του πολυωνύμου, έχουμε

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 > 0 , \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3(1 - \alpha^2) > 0 , \; \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3 > 0$$

Από την 2η ανισότητα προκύπτει ότι $-1 < \alpha < 1$ και από την 3η ανισότητα $1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3 = (\alpha - 1)^2(2\alpha + 1) > 0$ έχουμε $\alpha > -1/2$. Κατά συνέπεια για κάθε $\alpha \in (-1/2 , 1)$, ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος. □

Παράδειγμα 23.6 Αν οι συμμετρικοί πίνακες A , B είναι θετικά ορισμένοι, θα δείξουμε ότι και ο πίνακας $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

Λύση : Επειδή για κάθε διάνυσμα x και w έχουμε $x^T Ax > 0$ και $w^T Bw > 0$, θα είναι

$$[\, x \;\; w \,]^T \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = x^T A x + w^T B w > 0$$

δηλαδή, ο σύνθετος διαγώνιος πίνακας είναι θετικά ορισμένος. □

Αν στην τετραγωνική μορφή $Q(x) = x^T A x$ ο συμμετρικός πίνακας A είναι τύπου 2×2, η αλγεβρική παράσταση $Q(x) + R(x) = c$, όπου $R(x)$ είναι γραμμική έκφραση, παριστάνει έλλειψη ή υπερβολή ή παραβολή. Η ταξινόμηση αυτή παρουσιάζεται στον ΠΙΝΑΚΑ Ι, σε σχέση με τις ιδιοτιμές του πίνακα A, από δε τη διαγώνια μορφή της $Q(x)$ στην (11.6), καταλήγουμε άμεσα στις γνωστές μορφές των εξισώσεων αυτών.

Π Ι Ν Α Κ Α Σ Ι

$\lambda_1 \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 \lambda_2 = 0$
έλλειψη	υπερβολή	παραβολή

Αν ο συμμετρικός πίνακας A είναι τύπου 3×3, η τετραγωνική μορφή

$$x^T A x + R(x) = c$$

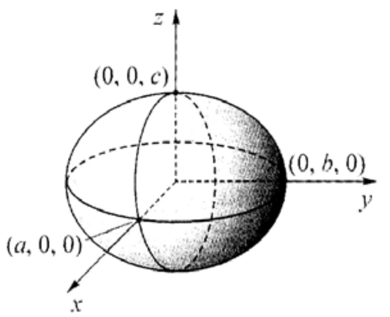
παριστάνει επιφάνειες, οι οποίες ταξινομούνται στον ΠΙΝΑΚΑ ΙΙ. Στον πίνακα αυτό χρησιμοποιείται ο συμβολισμός **In(A)** που αναφέρεται στην διατεταγμένη τριάδα των αριθμών σχετικά με το πλήθος των ιδιοτιμών του A που είναι:

In (A) = (θετικές , αρνητικές , μηδενικές ιδιοτιμές)

Π Ι Ν Α Κ Α Σ ΙΙ

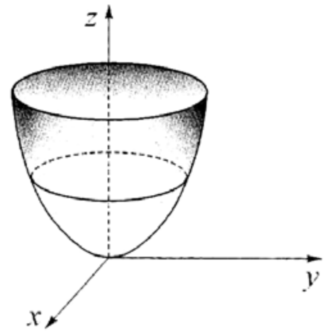
In(A) = (3, 0, 0)	:	ελλειψοειδές
In(A) = (2, 0, 1)	:	ελλειπτικό παραβολοειδές
In(A) = (2, 1, 0)	:	μονόχωνο υπερβολοειδές ή κώνος, όταν c = 0
In(A) = (1, 2, 0)	:	δίχωνο υπερβολοειδές
In(A) = (1, 1, 1)	:	υπερβολικό παραβολοειδές
In(A) = (1, 0, 2)	:	παραβολικός κύλινδρος

Στο παράδειγμα 21.6, η τετραγωνική μορφή Q για κάθε $c > 0$ παριστάνει ελλειψοειδές, για $c = 0$ είναι το σημείο $(0, 0, 0)$ και για $c < 0$ είναι φανταστική επιφάνεια.



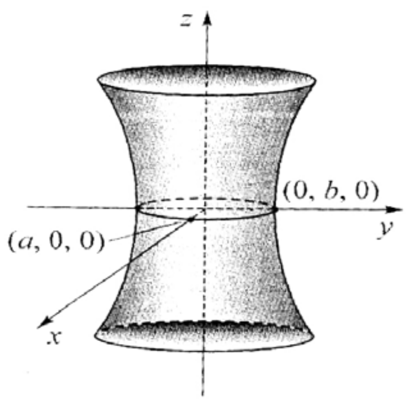
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ελλειψοειδές



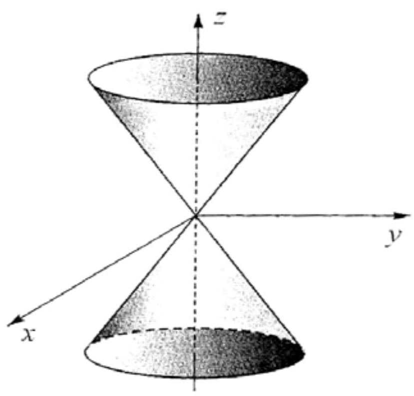
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

ελλειπτικό παραβολοειδές



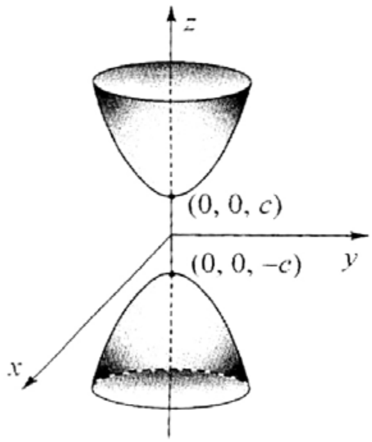
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

υπερβολοειδές μονόχωνο



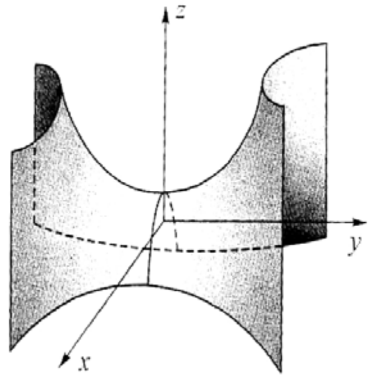
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

κώνος



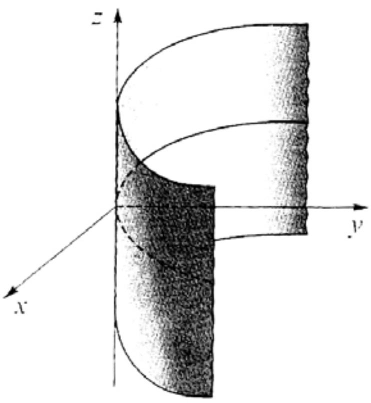
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

υπερβολοειδές δίχωνο



$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=z$$

υπερβολικό παραβολοειδές



$x^2 = ay \qquad a > 0$

παραβολικός κύλινδρος

6.6. Ασκήσεις

6.1 Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο των πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6.2 Βρείτε τα ιδιοποσά των πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

6.3 Αν λ, x είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα A, δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $p(s) = s^{\mu} + \alpha_{\mu-1} s^{\mu-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$, ο αριθμός $p(\lambda)$ και το διάνυσμα x είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα $p(A)$.

6.4 Για ποιες τιμές των α, β οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$$

δεν διαγωνοποιούνται ;

6.5 Διαγωνοποιείστε το σύνθετο διαγώνιο πίνακα

$$\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

6.6 Αν ο $\nu\times\nu$ πίνακας A είναι αδύναμος, ποιο πολυώνυμο βαθμού μικροτέρου του ν επαληθεύει ;

6.7 Γράψτε τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές στη μορφή $x^T Ax$, βρείτε τη διαγώνια μορφή τους και το πρόσημό τους και αναγνωρίστε το είδος της γραμμής ή της επιφάνειας.

$$Q_1 = x_1 x_2$$

$$Q_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$Q_3 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$Q_4 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

M A T L A B

Η χρήση και εξοικείωση των εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας με τη βοήθεια του υπολογιστή (PC).

7.1. Εισαγωγή στο πρόγραμμα

Το πρόγραμμα MATLAB είναι μια ιδιαίτερη συλλογή προγραμμάτων για υπολογιστικά θέματα πινάκων και η ονομασία του προέρχεται από τα αρχικά των λέξεων **Mat**rix **Lab**oratory. Δημιουργήθηκε από λογισμικά προγράμματα και είναι γραμμένο για να χρησιμοποιείται σε προσωπικούς υπολογιστές (PC). Η εγκατάσταση του MATLAB στο PC είναι απλή, εξαρτάται από τη δυνατότητα του λειτουργικού συστήματος την οποία διαθέτει ο Η/Υ του χρήστη και κάθε έκδοση του προγράμματος περιέχει τις κατάλληλες οδηγίες εγκατάστασής του. Το ίδιο το πρόγραμμα έχει ενσωματωμένες ορισμένες εντολές, μαθηματικές εκφράσεις και συναρτήσεις, οι δε πράξεις των πινάκων εκτελούνται αμέσως με ελάχιστο κόστος. Μπορούν όμως να εκτελεστούν και με διαδοχικές εντολές, οι οποίες περιλαμβάνονται σε αρχείο. Τα αρχεία αυτά ονομάζονται **m-files** και ένα τέτοιο αρχείο έχει τη δυνατότητα να καλεί και άλλα m-files.

Το MATLAB έχει ένα ιδιαίτερο τρόπο επικοινωνίας με τον χρήστη, όπως αυτό άλλωστε συμβαίνει με όλες τις γλώσσες προγραμματισμού. Οι συμβολισμοί του προγράμματος είναι διαφορετικοί με τους αντίστοιχους της Γραμμικής Άλγεβρας και οι εντολές είναι εκφράσεις με ειδικούς χαρακτήρες. Πληκτρολογούμε πάντοτε μετά το σύμβολο “>>” είτε για να εισάγουμε έναν πίνακα, είτε για να δώσουμε κάποια εντολή. Η εργασία ολοκληρώνεται όταν πληκτρολογήσουμε **enter** και το αποτέλεσμα θα παρουσιασθεί στην οθόνη.

Η εισαγωγή των πινάκων στο πρόγραμμα είναι πολύ απλή. Παράδειγμα για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

πληκτρολογούμε

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 ; & 2 & 3 & 4 ; & -2 & 4 & 10\end{bmatrix}$$

όπου κάθε στοιχείο χωρίζεται από το επόμενο με κενό διάστημα και κάθε γραμμή χωρίζεται από την επόμενη με το σύμβολο " **;** ". Πληκτρολογώντας **enter**, αμέσως παρουσιάζεται στην οθόνη :

```
A =
     1   0  -1
     2   3   4
    -2   4  10
```

Η ονομασία του πίνακα A διατηρείται για μελλοντική χρήση. Αν η μεταβλητή και το σημείο " = " παραλειφθούν, τότε θα παρουσιασθεί στην οθόνη πριν τον πίνακα το σύμβολο **ans** (answer). Η εισαγωγή του πίνακα μπορεί να γίνει και με διαφορετικό τρόπο, πληκτρολογώντας

```
A = [ 1    0    -1
      2    3     4
     -2    4    10 ] ;  enter
```

Με την εντολή **clear** διαγράφονται όλοι οι πίνακες, αλλά με την εντολή clear ακολουθούμενη μετά από διάστημα το όνομα του πίνακα, δηλαδή **clear A**, διαγράφεται μόνο ο πίνακας A. Αν από τον πίνακα A θέλετε να χρησιμοποιήσετε το στοιχείο του (2, 3), γράψτε **A(2, 3)**, αν θέλετε την 5η γραμμή του πίνακα, γράψτε **A(5, :)** και αν θέλετε την 2η στήλη του, γράψτε **A(: , 2)**.

Με τις εντολές

size(A) , zeros(A) ή zeros(3) , eye(A) ή eye(3)

βλέπουμε αμέσως τις αντίστοιχες απαντήσεις

```
ans =        ,    ans =          ,    ans =
    3  3            0  0  0              1  0  0
                    0  0  0              0  1  0  ,
                    0  0  0              0  0  1
```

Τα στοιχεία των πινάκων μπορεί να είναι και οποιεσδήποτε συναρτήσεις. Παράδειγμα, εισάγοντας

x = [0.5   sqrt(9)   (-15 + 7) / 4] ;   enter

βλέπουμε

```
x =
     0.5   3   -2
```

αλλά αν πληκτρολογήσουμε:

x = [0.5 ; sqrt(9) ; (-15 + 7) / 4]

θα παρουσιασθεί στην οθόνη x =

$$\begin{matrix} 0.5 \\ 3 \\ -2 \end{matrix}$$

Η εντολή **diag(A)** αναφέρεται στο διάνυσμα με συντεταγμένες τα διαγώνια στοιχεία του A , αλλά **diag(x)** , όπου x είναι διάνυσμα, είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις συντεταγμένες του x. Οπότε, η εντολή diag(diag(A)) για τον προηγούμενο πίνακα A, αντιστοιχεί στον πίνακα diag(1, 3, 10) , η δε εντολή **sum(diag(A))** υπολογίζει το ίχνος του πίνακα, δηλαδή ταυτίζεται με την εντολή **trace(A)** .

Οι *σύνθετοι πίνακες* εισάγονται κατ' ανάλογο τρόπο με τους απλούς πίνακες. Παράδειγμα, αν έχουν εισαχθεί οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και πληκτρολογήσουμε E = [A B] , enter , τότε E =

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Αν πληκτρολογήσουμε H = [A ; B] , enter , θα έχουμε τον πίνακα

H =

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

και αν M = [A B ; ones(1,2) C] , enter , τότε

M =

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε υποπίνακα του A, οι δείκτες γραμμών και στηλών πληκτρολογούνται με τον συμβολισμό **A(α : β, γ : δ)**, όπου " α : β " σημαίνει από την γραμμή α έως την β και " γ : δ " σημαίνει από την στήλη γ μέχρι την δ. Παράδειγμα, για τον πίνακα A της σελίδας 2 :

A(2:3 , 2:3) ⇒ ans =

$$\begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{matrix}$$

Ο συμβολισμός **Α(α : β, :)** είναι ο υποπίνακας με στοιχεία , τα στοιχεία των γραμμών από α μέχρι β και **Α(: , γ : δ)** είναι ο υποπίνακας με στοιχεία τα στοιχεία των στηλών από γ μέχρι δ.

7.2. Εφαρμογές στη Γραμμική Άλγεβρα

Τα θέματα που ακολουθούν αναφέρονται σε προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας και όπως θα διαπιστώσετε, το πρόγραμμα είναι ένα πολύ καλά εξοπλισμένο εργαστήριο για τη μελέτη και επεξεργασία των προβλημάτων με πίνακες.

Πράξεις πινάκων

Στο MATLAB οι πράξεις των πινάκων γίνεται με τους ειδικούς χαρακτήρες

+ (πρόσθεση) , - (αφαίρεση) , ∗ (γινόμενο) ,

^ (εκθέτης δύναμης , δηλ. A^3 = A^3) ,

/ (γινόμενο από δεξιά με αντίστροφο δηλ. AB^{-1}) ,

\ (γινόμενο από αριστερά με αντίστροφο δηλ. $A^{-1}B$) .

Παράδειγμα 1.7 Εισάγουμε τους πίνακες : $K = [1 \;\; 2 \,; \;\; 3 \;\; 4]$, $L = [0 \;\; 1 \,; \;\; -1 \;\; 1]$, και με τις παρακάτω εντολές έχουμε άμεσα την απάντηση:

K + L ⇒ ans =

```
     1   3
     2   5
```
,

3∗L ⇒ ans =

```
     0   3
    -3   3
```

K ∗ L ⇒ ans =

```
    -2   3
    -4   7
```
,

L^3 ⇒ ans =

```
    -1   0
     0  -1
```

K / L ⇒ ans =

```
     3  -1
     7  -3
```
,

K \ L ⇒ ans =

```
    -1   -1
    0.5   1
```

Τα στοιχεία του πίνακα που παρουσιάζεται μετά από κάποια εντολή είναι σε δεκαδική μορφή, αλλά με την εντολή **rat( )**, επανεμφανίζονται ως ρητοί αριθμοί.

Για την πρόσθεση $A^T + cI$, όπου c είναι αριθμός, θα πρέπει να πληκτρολογήσουμε $A' + c * \text{eye}(n)$, όπου με **A′** συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακας.

Για τον υπολογισμό πολυωνυμικής παράστασης τετραγωνικού πίνακα, για παράδειγμα $p(A) = A^3 - A^2 + 2I$, θα πρέπει να εισάγουμε τον πίνακα α = [1 -1 0 2] με στοιχεία τους συντελεστές του πολυωνύμου, και με την εντολή **polyvalm(α , A)** υπολογίζεται ο πίνακας p(A).

Αντιστροφή πίνακα

Για τον ομαλό πίνακα A, η εντολή **inv(A)** υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} με στοιχεία δεκαδικούς αριθμούς. Το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε με την εντολή **A\eye(n)** .

Με την εντολή rat(inv(A)) , τα στοιχεία του πίνακα A^{-1} παρουσιάζονται ως πηλίκο ακέραιων αριθμών. Σημειώστε ότι $A * \text{rat(inv(A))} \neq \text{eye(n)}$, αλλά αν επανεισάγουμε τον πίνακα $B = A^{-1}$, τότε $B * A = A * B = \text{eye(n)}$.

Ορίζουσα πίνακα

Η ορίζουσα του πίνακα A υπολογίζεται αμέσως με την εντολή **det(A)**.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

Η κλιμακωτή μορφή πίνακα κατά γραμμές του πίνακα A υπολογίζεται με την εντολή **rref(A)**, η δε εντολή **rrefmovie(A)** παρουσιάζει επιπλέον στην οθόνη τους πίνακες που μεσολαβούν μετά από κάθε στοιχειώδη μετασχηματισμό.

Παράδειγμα 2.7 Έστω ο πίνακας

```
A =

     1     1     1     1
    -1    -1     1     1
     1     1    -1     2
```

τότε B = rref(A) , enter

```
B =

     1     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

και rrefmovie(A) , enter

ans =

```
1  1   1  1
0  0   2  2
0  0  -2  1

1  1   1  1
0  0   1  1
0  0  -2  1

1  1   0  0
0  0   1  1
0  0   0  3

1  1   0  0
0  0   1  1
0  0   0  1
```

Αν θέλετε να σημειώνετε τους μετασχηματισμούς γραμμών, θα πρέπει να δώσετε διαδοχικά τις εντολές : $A(2, :) = (1/2)*\big(A(1\ ,\ :)\ +\ A(2\ ,\ :)\big)$, $A(3, :) = A(3, :) - A(1, :)$, $A(3, :)\ =\ 2 * A(2, :)\ +\ A(3, :)$ και $A(3, :)\ =\ (1/3) * A(3, :)$.

Με τις εντολές αυτές αντικαθίσταται η γραμμή του πίνακα A που σημειώνεται αριστερά της ισότητας, με το αποτέλεσμα των πράξεων μεταξύ των γραμμών που σημειώνεται δεξιά. Είναι φανερό ότι η εντολή $A(2, :) = A(3, :)$ σημαίνει εναλλαγή 2ης και 3ης γραμμής. Σημειώστε ότι, με την εντολή $(\,\mathrm{rref}(\,B'\,)\,)'$, ο πίνακας

ans =

```
1  0  0  0
0  1  0  0
0  0  1  0
```

είναι η κανονική μορφή του πίνακα A.

Επιπλέον, εισάγοντας τον πίνακα $M = \big[A \quad \mathrm{eye}\big(\mathrm{size}(A)\big)\big]$ με την εντολή rref(M) υπολογίζουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τον αντίστροφο πίνακα του A, ο δε πίνακας A^{-1} αυτονομείται με την εντολή M(: , n+1 : 2n).

Παραγοντοποίηση LU

Η εντολή **[L, U] = lu(A)** , υπολογίζει τους πίνακες L , U ώστε A = LU.

Παράδειγμα 3.7 Για τον πίνακα $A = \big[7 \quad 8 \quad 0\ ; \quad 1 \quad 2 \quad 3\ ; \quad 4 \quad 5 \quad 6\big]$ αν πληκτρολογήσουμε [L, U] = lu(A) προβάλλεται στην οθόνη

L =

1.0000	0	0
0.1429	1.0000	0
0.5714	0.5000	1.0000

U =

7.0000	8.0000	0
0	0.8571	3.0000
0	0	4.5000

Το σύστημα Ax = 0

Η εντολή **null(A)** παρουσιάζει στην οθόνη πίνακα, του οποίου οι στήλες είναι ορθοκανονική βάση του KerA . Το αποτέλεσμα αυτό διαφέρει από εκείνο της εντολής **mnull(A)**, με την οποία υπολογίζεται μία βάση του KerA.

Η γενική λύση του συστήματος Ax = 0 είναι $x = N * \alpha$, όπου οι στήλες του πίνακα N είναι βάση του KerA .

Το σύστημα Ax = β

Με την εντολή **A\β** υπολογίζεται μερική λύση του συστήματος $A * x = \beta$ ακριβώς όταν το σύστημα είναι συμβατό . Τότε, η γενική λύση του συστήματος είναι

$$N * \alpha + A\backslash\beta ,$$

όπου ο πίνακας N υπολογίζεται σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο . Σημειώστε ότι $A\backslash\beta \equiv inv(A) * \beta$. Στη γενική λύση του συστήματος οδηγούμαστε και με την εντολή rref([A β]).

Ορθοκανονική βάση

Η εντολή **Q = orth(A)** υπολογίζει μία ορθοκανονική βάση του υπόχωρου ImA , συμπεραίνοντας ταυτόχρονα τη διάσταση του υπόχωρου.

Παράδειγμα 4.7 Αν A = $\left[2 \quad 1 \quad 1 ; \quad -1 \quad 0 \quad -1 ; \quad 1 \quad 1 \quad 0\right]$, enter

orth(A) $\Rightarrow$ ans =

0.8165	0
- 0.4082	- 0.7071
0.4082	- 0.7071

Παραγοντοποίηση QR

Για κάθε πίνακα A τύπου μ×ν, η εντολή **[Q, R] = qr(A)** υπολογίζει τους πίνακες Q, R ώστε A = QR. Ο πίνακας Q είναι ομαλός, τύπου μ×μ και R είναι άνω τριγωνικός πίνακας, τύπου μ×ν , με την ιδιότητα rank A = rank R. Αν rank A = ρ, οι τελευταίες μ - ρ γραμμές του R είναι μηδέν.

Σημειώστε ότι η QR παραγοντοποίηση του πίνακα A με το πρόγραμμα MATLAB διαφέρει της αντίστοιχης παραγοντοποίησης (ενότητα 4.3.3), όπου εκεί οι πίνακες Q και R είναι τύπου $\mu\times\nu$ και $\nu\times\nu$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 5.7 Αν

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 ; & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 ; & 4 & 5 & 6 ; & 7 & 8 & 9 ; & 10 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

τότε με την εντολή [Q, R] = qr(A), έχουμε

Q = , R =

-0.7071	-0.7071		-1.4142	-0.7071	0.7071
-0.7071	0.7071		0	-0.7071	0.7071

και για [Q, R] = qr(B),

Q = , R =

-0.0776	-0.8331	0.5444	0.0605		-12.8841	-14.5961	-16.2992
-0.3105	-0.4512	-0.7709	0.3251		0	-1.0413	-2.0826
-0.5433	-0.0694	-0.0913	-0.8317		0	0	0
-0.7762	0.3124	0.3178	0.4461		0	0	0

Ρίζες πολυωνύμων

Οι συντελεστές των πολυωνύμων εισάγονται στο πρόγραμμα MATLAB, όπως οι συντεταγμένες διανύσματος γραμμής. Το πρώτο στοιχείο είναι ο συντελεστής της μεγιστοβάθμιας δύναμης του πολυωνύμου και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι οι συντελεστές των δυνάμεων της μεταβλητής με φθίνουσα διάταξη. Η εντολή **s = roots(p)** υπολογίζει τις ρίζες της εξίσωσης $p(\lambda) = 0$, που προβάλλονται ως διάνυσμα στήλη. Η εντολή **poly(s)** προβάλλει τους συντελεστές του πολυωνύμου $kq(\lambda)$, όπου $q(\lambda)$ είναι πολυώνυμο με ρίζες τις συντεταγμένες του διανύσματος s και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.

Παράδειγμα 6.7 Έστω το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^4 - 8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 7\lambda + 3$$

Εισάγουμε p = [-1 5 -8 8 7 3] και με την εντολή r = roots(p) έχουμε:

r =

3.0000
-0 + 1.000i
-0 - 1.000i
1.0000
1.0000

και poly(r) ,

ans =

$$1.0000 \quad -5.0000 \quad 8.0000 \quad -8.0000 \quad -7.0000 \quad -3.0000 \quad ,$$

δηλαδή k = -1 .

Ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα

Η εντολή **eig(A)** υπολογίζει τις ιδιοτιμές λ_i του πίνακα A, διατεταγμένες σε στήλη, και η εντολή **poly(A)** υπολογίζει τους συντελεστές του πολυωνύμου det(λI - A). Είναι φανερό ότι, και με την εντολή roots(poly(A)), υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα υπολογίζονται με την εντολή [X, D] = eig(A), όπου η k-στήλη του πίνακα X και το k διαγώνιο στοιχείο λ_k του D είναι αντίστοιχα ιδιοποσά. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή, στον πίνακα X είναι ορθοκανονικά. Αν ο πίνακας διαγωνοποιείται, τότε D είναι διαγώνιος πίνακας και

$$A = X * D * \mathrm{inv}(X)$$

Παράδειγμα 7.7 Έστω A = ones(3)

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Με την εντολή [X, D] = eig(A) , έχουμε

$$X = \begin{matrix} 0.7685 & -0.2759 & 0.5774 \\ -0.6232 & -0.5275 & 0.5774 \\ 0.1453 & 0.8035 & 0.5774 \end{matrix} \quad , \quad D = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \; .$$

Αν όμως πληκτρολογήσουμε την εντολή **[V , e , g] = meig(A),** θα προκύψει

$$V = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix} \qquad e = \begin{matrix} 0 & 0 & 3 \end{matrix} \qquad g = \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix}$$

Οι συντεταγμένες του g είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών 0 και 3 αντίστοιχα . Επαληθεύεται ότι:

$$\mathrm{inv}(V) * A * V = \mathrm{diag}(e).$$

Παράδειγμα 8.7 Να βρείτε τα ιδιοποσά των πινάκων

$$A = \left[\; 0.7 \quad 0.2 \quad 0.2\; ; \;\; 0.2 \quad 0.6 \quad 0.3\; ; \;\; 0.1 \quad 0.2 \quad 0.5 \;\right] \qquad \text{και}$$

$$B = \left[\; 0.8 \quad 0.2 \quad 0.1\; ; \;\; 0.1 \quad 0.7 \quad 0.3\; ; \;\; 0.1 \quad 0.1 \quad 0.6 \;\right]$$

και εξετάστε αν οι πίνακες διαγωνοποιούνται.

Λύση : Πληκτρολογούμε [X, D] = eig(A) enter , τότε:

X =

1.0000	1.0000	0
0.9286	-0.5000	1.0000
0.5714	-0.5000	-1.0000

D =

1.0000	0	0
0	0.5000	0
0	0	0.3000

Συνεπώς σ(A) = { 1, 0.5, 0.3} και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι στήλες του πίνακα X. Προφανώς ο πίνακας A διαγωνοποιείται , αφού οι ιδιοτιμές του είναι διακεκριμένες.

Πληκτρολογούμε [Y , W] = eig(B) enter , τότε:

Y =

1.0000	-1.0000	-0.5000
0.7778	1.0000	1.0000
0.4444	0	-0.5000

W =

1.0000	0	0
0	0.6000	0
0	0	0.5000

Έτσι σ(B) = { 1, 0.6, 0.5 } με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τις στήλες του Y. O πίνακας B είναι επίσης διαγωνοποιήσιμος.

Παραγοντοποίηση Schur

Με την έκφραση “ παραγοντοποίηση Schur ” εννοούμε την ορθομοναδιαία ομοιότητα κάθε τεραγωνικού πίνακα A με άνω τριγωνικό πίνακα T (θεώρημα Schur, ενότητα 6.3). Στο πρόγραμμα MATLAB υπάρχουν δύο σχετικές εντολές. Αν ο πίνακας $A\in\mathbf{K}_{n\times n}$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές, η εντολή **T = schur(A)** προβάλλει στην οθόνη άνω τριγωνικό πίνακα T με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Η εντολή **[T,U] = schur(A)** υπολογίζει ταυτόχρονα τον άνω τριγωνικό πίνακα T και τον ορθομοναδιαίο πίνακα U τέτοιον , ώστε $U'*A*U=T$.

Αν $z = \alpha + i\beta$, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ είναι ιδιοτιμές του A με το πρόγραμμα MATLAB προβάλλεται στην οθόνη ο πίνακας T τέτοιος ώστε σε κάθε ζευγάρι συζυγών ιδιοτιμών αντιστοιχεί υποπίνακας 2×2 συμμετρικά τοποθετημένος κατά μήκος της διαγωνίου με ιδιοτιμές z και $\bar{z}$.

Παράδειγμα 9.7 O πίνακας $A = [0\ 1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ 0\ 1\ ;\ -3\ 4\ -4\ 4]$ έχει ιδιοτιμές 3 , 1 , i και -i . Πληκτρολογώντας schur(A), έχουμε :

ans =

3.0000	1.8138	-1.6913	6.1220
0	0.2261	-1.1371	0.6811
0	0.9244	-0.2261	1.9124
0	0	0	1.0000

Ο υποπίνακας, τύπου 2×2

$$B = \begin{bmatrix} 0.2261 & -1.1371 \\ 0.9244 & -0.2261 \end{bmatrix}$$

που παρουσιάσθηκε περί την διαγώνιο έχει ιδιοτιμές i και -i , όπως άμεσα διαπιστώνεται με την εντολή eig(B).

7.3. Πίνακες βασικών εντολών

Συμβολισμοί

A’	A^*
A.’	A^T
A(: , j)	j στήλη του A
A(i , :)	i στήλη του A
[ ]	δεν υπάρχει πίνακας
eye(n)	I_n
zeros(n)	$0_{n\times n}$
zeros(A)	$0_{m\times n}$, του ίδιου τύπου με τον πίνακα A
ones(n)	πίνακας $n\times n$, με στοιχεία $\alpha_{ij} = 1$, για κάθε i , j
ones(A)	πίνακας του ίδιου τύπου με τον A και $\alpha_{ij} = 1$
ones(m , n)	πίνακας με στοιχεία $\alpha_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$
zeros(m , n)	$0_{m\times n}$
size(A)	διαστάσεις του πίνακα
inf	$\propto$
NaN	δεν υπάρχει αριθμός (not a number)
diag(u)	πίνακας διαγώνιος με στοιχεία τις συντεταγμένες του u
diag(A)	το διάνυσμα γραμμή $[\ \alpha_{11}\ \alpha_{22}\ \dots\ \alpha_{vv}\ ]$
tril(A)	κάτω τριγωνικός πίνακας , $\alpha_{ij} = 0$, $i < j$

triu(A)	άνω τριγωνικός πίνακας , $\alpha_{ij} = 0$, $i > j$
max(u), min(u)	μέγιστη (ελάχιστη) συντεταγμένη του διανύσματος u
max(A), min(A)	διάνυσμα με συντεταγμένες τα μέγιστα (ελάχιστα) στοιχεία των στηλών του A
sum(u)	άθροισμα συντεταγμένων του διανύσματος u
sum(A)	διάνυσμα με συντεταγμένες το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του A
rand(n)	πίνακας τύπου $n\times n$ με στοιχεία $\alpha_{ij} \in (0,1)$
rand(m , n)	πίνακας τύπου $m\times n$ με στοιχεία $\alpha_{ij} \in (0,1)$
A.$*$B	γινόμενο Hadamard $A \circ B$
A.^2	γινόμενο Hadamard $A \circ A$
compan(r)	συνοδεύων πίνακας του πολυωνύμου $p=x^n + r_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + r_1\, x+r_0$, όπου $r = [\ 1\ \ r_{n-1}\ \ \cdots\ \ r_0\ ]$
mcirc(r)	κυκλικός πίνακας με πρώτη γραμμή $[\ \alpha_0 ; \alpha_1 ; \cdots ; \alpha_n\ ] = r$
hankel(r)	πίνακας hankel με στοιχεία $[\ \alpha_0\ \ \alpha_1\ \ \cdots\ \ \alpha_n\ ] = r$
toeplitz(r)	πίνακας Toeplitz με στοιχεία $[\ \alpha_0 ; \alpha_1 ; \cdots ; \alpha_n\ ] = r$
hilb(n)	πίνακας Hilbert $H_n = [\ 1/i + j - 1\ ]_{i,j=1}^{n,n}$, $n \in \mathbf{N}$
invhilb(n)	H_n^{-1} για $n \leq 12$
vander(r)	πίνακας Vandermonde που ορίζεται από τις συντεταγμένες του διανύσματος r

<u>Συναρτήσεις</u>

sin	ημίτονο
cos	συνημίτονο
tan	εφαπτομένη
asin	τόξο-ημιτόνου
acos	τόξο-συνημιτόνου
atan	τόξο-εφαπτομένης
sinh	υπερβολικό ημίτονο
cosh	υπερβολικό συνημίτονο
tanh	υπερβολική εφαπτομένη
asinh	τόξο - υπερβολικού ημιτόνου
acosh	τόξο - υπερβολικού συνημιτόνου

atanh	τόξο - υπερβολικής εφαπτομένης
abs	απόλυτη τιμή
sqrt	τετραγωνική ρίζα
real	πραγματικό μέρος
imag	φανταστικό μέρος
conv	πολλαπλασιασμός πολυωνύμων
deconv	διαίρεση πολυωνύμων
round	προσέγγιση προς τον πλησιέστερο ακέραιο
fix	προσέγγιση προς τον μικρότερο κατ΄απόλυτη τιμή ακέραιο
fool	προσέγγιση προς τον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο
ceil	προσέγγιση προς τον αμέσως μικρότερο ακέραιο
exp	εκθετική συνάρτηση
log	φυσικός λογάριθμος
log10	λογάριθμος με βάση το 10
rat	μετατρέπει δεκαδικούς αριθμούς σε ρητούς
plot	σχεδίαση

<u>Εντολές</u>

det (A)	ορίζουσα του πίνακα A
trace(A)	ίχνος του πίνακα A
inv(A)	A^{-1}
pinv(A)	Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα A
rref(A)	κλιμακωτή μορφή κατά γραμμές του A
eig(A)	ιδιοτιμές του A
schur(A)	άνω τριγωνικός πίνακας T τέτοιος, ώστε $\sigma(T) = \sigma(A)$
svd(A)	ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A
sqrtm(A)	τετραγωνική ρίζα του A (δηλ. $B^2 = A$)
null(A)	ορθοκανονική βάση του $\text{Ker } A = \{ x : Ax = 0 \}$.
mnull(A)	βάση του Ker A
chol(A)	Cholesky παραγοντοποίηση για θετικά ορισμένο πίνακα , $A = B^T B$.

orth(A)	ορθοκανονική βάση του υποχώρου span { $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ } όπου α_i είναι οι στήλες του A.
A\b	λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$, $A \in \mathbf{K}_{n \times n}$
inv(A) * b	λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$, $A \in \mathbf{K}_{n \times n}$
A\B	λύση της εξίσωσης $AX = B$, $A \in \mathbf{K}_{n \times n}$
inv(A) * B	λύση της εξίσωσης $AX = B$, $A \in \mathbf{K}_{n \times n}$
X=msoln(A,B)	λύση της εξίσωσης $AX = B$, όπου ο πίνακας A είναι τύπου μ×ν. Αν η εξίσωση δεν είναι συμβιβαστή , X = [].
[L,U] = lu(A)	παραγοντοποίηση $A = LU$
[Q,R] = qr(A)	παραγοντοποίηση $A = QR$
[X,D] = eig(A)	ιδιοποσά του A , $A = XDX^{-1}$
[X , e, g] = meig(A)	e : διάνυσμα γραμμή με συντεταγμένες τις ιδιοτιμές του A. X : μη τετραγωνικός πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και g : διάνυσμα γραμμή με στοιχεία τις γεωμετρικές πολλαπλότητες των αντίστοιχων ιδιοτιμών.
[P,H] = hess(A)	$A = PHP^T$, P ορθοκανονικός πίνακας και H πίνακας τύπου Hessenberg
[U,T] = schur(A)	$A = UTU^{-1}$, U ορθοκανονικός πίνακας , T άνω τριγωνικός
[U,S,V] = srd(A)	ιδιάζουσα παραγοντοποίηση , $A= USV^T$
poly(A)	συντελεστές χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A σε φθίνουσα διάταξη δυνάμεων
poly(α)	πολυώνυμο με ρίζες τις συντεταγμένες του διανύσματος α .
roots(p)	ρίζες του πολυωνύμου p .
polyval(p, s)	η αριθμητική τιμή p(s) , όπου p πολυώνυμο .
polyvalm(r, A)	$r(A) = r_\nu A^\nu + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$, όπου $A \in \mathbf{K}_{\mu \times \mu}$, $r = [\, r_\nu \dots r_1 \, r_0 \,]$
expm	e^A
logm(A)	logA
funm(A , ΄fun΄)	fun(A) , όπου fun είναι οποιαδήποτε από τις στοιχειώδεις συναρτήσεις cos , sin , sqrt κ.λ.π
norm(A , x)	για x =1 ; fro ; inf , υπολογίζει τις αντίστοιχες norm του πίνακα A

norm(r , x)	για x =1 ; 2 ; inf , υπολογίζει τις αντίστοιχες norm του διανύσματος r .
dot(α , β)	εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων α , β.

7.4 Ασκήσεις

7.1 Εισάγετε στο πρόγραμμα MATLAB τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4*(-2) & 2/3 \\ 1/201 & 5-8.2 \\ 0.00001 & (9+4)/3 \end{bmatrix}$$

και δώστε εντολές για την αυτόνομη παρουσίαση του στοιχείου α_{23} , της $3^{ης}$ γραμμής του A και της $2^{ης}$ στήλης του B.

7.2 Εισάγετε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και με τις εντολές rref [A b] ή A\b ή rank(A), rank([A b]), εξετάστε αν το σύστημα Ax = b είναι συμβιβαστό.

7.3 Η μέθοδος ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt υλοποιείται στο πρόγραμμα MATLAB με την εντολή **gschmidt**. Δώστε την εντολή αυτή για να βρείτε ορθο-κανονική βάση του $\mathbf{R}^3$, από τη βάση : (1, 1, 0) , (1, 0, 0) , (0, 1, 1).

7.4 Αν

$$A = \begin{bmatrix} -7.5 & 8 & 16 \\ -2 & 2.5 & 4 \\ -2 & 2 & 4.5 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

βρείτε τον αριθμό λ , ώστε Ax = λx .

7.5 Βρείτε μία βάση του πυρήνα και του πεδίου τιμών της γραμμικής απεικόνισης

$$F(x) = Ax \,, \text{ όπου } \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ -4 & -4 & 7 & -2 & -19 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σ.Α. Ανδρεαδάκη , *Γραμμική Άλγεβρα ,* Αθήνα.

2. Δ.Γ. Δασκαλόπουλου , *Εφηρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα ,* Αθήνα.

3. Ι. Μαρουλά , *Γραμμική Άλγεβρα ,* Αθήνα.

4. S. Barnett , *Matrices Methods and Applications ,* Clarendon Press, Oxford, 1990.

5. R. Bronson , *Matrix Methods ,* Academic Press, 1991.

6. B.N. Datta , *A first course in Numerical Linear Algebra ,* Brooks Cole, 1995.

7. J.L. Goldberg , *Matrix Theory with Applications ,* McGraw Hill, 1991.

8. P. Halmos , *Linear Algebra Problem Book ,* Amer. Math. Soc. , 1995.

9. D. Hanselman and B. Littlefield , *Mastering MATLAB ,* Prentice Hall , 1996.

10. D.R. Hill and D.E. Zitarelli , *Linear Algebra Labs with MATLAB ,* Prentice Hall , 1994.

11. P. Horn and C. Johnson , *Matrix Analysis ,* Cambridge , 1985.

12. H.D. Ikramov , *Linear Algebra ,* Mir Publ. , 1983.

13. B. Kolman , *Introductory Linear Algebra with Applications ,* Prentice Hall , 1997.

14. P. Lancaster and M. Tismenetsky , *The Theory of Matrices ,* Academic Press , 1985.

15. D.C. Lay , *Linear Algebra and its Applications ,* Addison-Wesley P.Co. , 1994.

16. S.J. Leon , *Linear Algebra with Applications ,* MacMillan , 1990.

17. W.K. Nicholson , *Linear Algebra with Applications ,* 3rd Ed. , PWS , 1995.

18. V.V. Prasolov , *Problems and Theorems in Linear Algebra ,* Amer. Math. Soc. , 1994.

19. V.V. Voyevodin , *Linear Algebra ,* Mir Publ. , 1983.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ