1. <u>ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ</u>

1.1 <u>Γραμμικός (διανυσματικός) χώρος</u>, είναι ένα σύνολο στοιχείων που μπορούν να προσθαφαιρούνται μεταξύ τους και να πολλαπλασιάζονται με αριθμούς με το αποτέλεσμα των πράξεων <u>να ανήκει πάλι στο χώρο</u>. Επιπλέον, για τις πράξεις αυτές ισχύουν οι συνήθεις ιδιότητες (ουδέτερο στοιχείο, αντιμεταθετικότητα,…). Συνοπτικά και διαισθητικά ένας γραμμικός χώρος «αντιγράφει» τις ιδιότητες των διανυσμάτων (π.χ. του επιπέδου ή του χώρου των τριών διαστάσεων) και συχνά τα στοιχεία του τα αποκαλούμε και διανύσματα. Οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουν τα στοιχεία του γραμμικού χώρου καλούνται και «βαθμωτά μεγέθη» και έχουν το ρόλο των συντελεστών των διανυσμάτων. Γενικά, τα βαθμωτά μεγέθη ανήκουν σε κάποιο σύνολο F που έχει αντίστοιχες ιδιότητες με αυτές των πραγματικών αριθμών και στην Άλγεβρα καλείται «σώμα». Η συνήθης επιλογή είναι $F=\mathbb{R}$ (οι πραγματικοί αριθμοί) ή $F=\mathbb{C}$ (οι μιγαδικοί αριθμοί) αλλά υπάρχουν και άλλες επιλογές. Διαισθητικά αρκεί να έχουμε υπ' όψιν την περίπτωση $F=\mathbb{R}$. Σε όλες τις περιπτώσεις το F έχει προ-επιλεγεί, προκειμένου να ορισθεί γραμμικός χώρος, σύμφωνα με τον ακριβή ορισμό που ακολουθεί.

<u>Ορισμός Γραμμικού Χώρου</u>. Γραμμικός χώρος είναι ένα σύνολο V για το οποίο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α) Έχει ορισθεί μια απεικόνιση που για κάθε ζεύγος στοιχείων του V παράγει ακριβώς ένα στοιχείο του V. Η απεικόνιση καλείται πρόσθεση και συμβολίζεται με «+». Η εικόνα ενός ζεύγους $(v, w) \in V\text{x}V$ συμβολίζεται με $v+w$, καλείται «άθροισμα» των v, w (και επίσης ανήκει στο V).

β) Έχει επιλεγεί ένα σώμα F και έχει ορισθεί μια απεικόνιση που καλείται «πολλαπλασιασμός με βαθμωτό μέγεθος ή πολλαπλασιασμός με αριθμό» και για κάθε ζεύγος $(\alpha,v) \in F\text{x}V$ παράγει ακριβώς ένα στοιχείο που συμβολίζεται με αv και ανήκει στο V.

γ) Για την πρόσθεση ισχύουν:

- Η αντιμεταθετική ιδιότητα: $v+w = w+v$, $\forall (v,w) \in V\text{x}V$.
- Η προσεταιριστική ιδιότητα : $v+(w+z) = (v+w)+z$, $\forall (v,w,z) \in V\text{x}V\text{x}V$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο που το συμβολίζουμε με 0 και ανήκει στο V, δηλαδή ισχύει

$$v+0 = v,\ \forall v \in V.$$

- Για κάθε $v \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο που το καλούμε «αντίθετο του v» και το συμβολίζουμε με -v, για το οποίο ισχύει

$$v+(-v) = 0.$$

Απλοποιούμε το συμβολισμό στην πρόσθεση του αντιθέτου γράφοντας w-v αντί του w+(-v) και καλούμε την πράξη αυτή «αφαίρεση» και το αποτέλεσμα της «διαφορά».

δ) Για τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό μέγεθος ισχύουν:

- $1v=v$, $\forall v \in V$, όπου 1 η μονάδα του F.
- $(\alpha+\beta)\ v = \alpha v+\beta v$, $\forall \alpha,\beta \in F$ και $\forall v \in V$.
- $(\alpha\beta)\ v = \alpha(\beta v)$, $\forall \alpha,\beta \in F$ και $\forall v \in V$. Άρα, αφού δεν έχει σημασία η σειρά υλοποίησης των πράξεων μπορούμε να γράφουμε $\alpha\beta v$.
- Επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha(v+w)= \alpha v+\alpha w$, $\forall \alpha \in F$ και $\forall (v,w) \in VxV$.

<u>Άσκηση 1.1</u> Αποδείξτε ότι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι ένα και μοναδικό. Επίσης, αποδείξτε ότι κάθε $v \in V$ έχει μόνο έναν αντίθετο στο V.

<u>Άσκηση 1.2</u> Ας είναι $S \subset V$, όπου ο V είναι διανυσματικός χώρος. Τι πρέπει να ισχύει ώστε και ο S να είναι διανυσματικός χώρος;

<u>Άσκηση 1.3</u> Έστω $V=\{v\}$, δηλαδή ο διανυσματικός χώρος V περιέχει ένα μόνο στοιχείο. Ποιο είναι το v;

1.2 <u>Παράδειγμα: Ο διανυσματικός (γραμμικός) χώρος $\mathbb{R}^n$</u>. Έστω n φυσικός αριθμός. Ορίζουμε ως διάνυσμα v μήκους n μια διαταγμένη n – άδα στοιχείων (συνήθως αριθμών πραγματικών ή μιγαδικών) που τα τοποθετούμε σε μια *<u>στήλη</u>*, τα αποκαλούμε συνιστώσες του v και τα αριθμούμε με τη σειρά που εμφανίζονται από πάνω προς τα κάτω. Συνήθως (όχι όμως υποχρεωτικά) η συνιστώσα στη θέση j συμβολίζεται με v(j) ή v_j. Εκτός από περιπτώσεις που θα έχει σαφώς ορισθεί κάτι διαφορετικό, θα θεωρούμε στη συνέχεια ότι οι συνιστώσες των διανυσμάτων είναι πραγματικοί αριθμοί.

<u>Αναστροφή</u>, είναι η μετατροπή των στηλών σε γραμμές και των γραμμών σε στήλες. Για μας διάνυσμα v θα σημαίνει εξ' ορισμού μια στήλη, οπότε v^T θα σημαίνει γραμμή. Έτσι αν οι συνιστώσες ενός διανύσματος v είναι (για n=3) οι v(1)=-1, v(2)=2.3, v(3)=4 το διάνυσμα είναι

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.3 \\ 4 \end{bmatrix} = [-1\ \ 2.3\ \ 4]^T,$$

αφού η αναστροφή (δεξιά) σημαίνει ότι δεν πρόκειται για γραμμή αλλά για στήλη.

<u>Άθροισμα διανυσμάτων και πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό</u>. Ορίζουμε ως άθροισμα δυο διανυσμάτων μήκους n το διάνυσμα που έχει ως συνιστώσες το άθροισμα των συνιστωσών τους. Έτσι π.χ. αν $v=[-1, 2, -3]^T$ (στήλη) και $w=[2, 1, 3]^T$ τότε $v+w=[1\ \ 3\ \ 0]^T$. Ορίζουμε ως γινόμενο *αv* του αριθμού α επί το διάνυσμα v, το διάνυσμα που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις συνιστώσες του v επί α, π.χ. αν α=2 και $v=[-1,2,3]^T$ τότε $\alpha v =[-2,4,6]^T$

<u>Άσκηση 1.4.</u> Δείξτε ότι με τους προηγούμενους ορισμούς πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού όλα τα διανύσματα ίδιου μήκους $n \geq 1$ αποτελούν γραμμικό χώρο.

1.3 <u>Παράδειγμα: Ο γραμμικός χώρος των πινάκων mxn</u>. Ορίζουμε ως πίνακα διάστασης mxn μια διάταξη στοιχείων με m γραμμές και n στήλες. Αν ο A είναι πίνακας mxn το στοιχείο στη γραμμή j και στη στήλη k συχνά (όχι όμως υποχρεωτικά) συμβολίζεται με A(j,k) ή α_{jk}. Όταν m=n ο A καλείται τετραγωνικός αλλιώς καλείται παραλληλόγραμμος. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & -3 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι 4x3 και π.χ. A(3,2)=-3, A(1,3)=-5.

Όπως και με τα διανύσματα ορίζεται και ο ανάστροφος πίνακας, όπου οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα. Ο ανάστροφος του A συμβολίζεται με A^T. Έτσι, για τον προαναφερόμενο πίνακα A ο ανάστροφος είναι

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -5 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

και είναι 4x3. Γενικότερα, αν ο A είναι mxn, ο A^T = είναι nxm.

<u>Άθροισμα πινάκων και πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό</u>: Ως άθροισμα πινάκων ορίζουμε τον πίνακα που προκύπτει αν αθροίσουμε τα στοιχεία τους ένα προς ένα.

Έτσι, αν

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ και $Γ=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, τότε $A+Γ=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Για να έχει νόημα ο ορισμός αυτός, πρέπει οι δύο πίνακες να έχουν την ίδια διάσταση.

Ορίζουμε ως γινόμενο αA, όπου α βαθμωτό μέγεθος, τον πίνακα που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία του A με το βαθμωτό α. Έτσι π.χ. για τον προαναφερόμενο A ισχύει

$$-2A=\begin{bmatrix} -6 & -4 & -2 \\ -10 & -12 & 14 \end{bmatrix}.$$

<u>Άσκηση 1.5.</u> Δοθέντων των φυσικών αριθμών $m \geq 1$, $n \geq 1$, δείξτε ότι οι πίνακες mxn (με στοιχεία π.χ. αριθμούς πραγματικούς ή μιγαδικούς) αποτελούν ένα γραμμικό χώρο.

Ένας πίνακας mxn μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από n διανύσματα – στήλες μήκους m σε συγκεκριμένη σειρά εμφάνισης από αριστερά προς τα δεξιά. Αν n=1 τότε ο πίνακας mx1 είναι απλά ένα διάνυσμα – στήλη μήκους m, ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^m$.

1.4 <u>Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, γινόμενο πινάκων και αντίστροφοι.</u> Τα διανύσματα και οι πίνακες πολλαπλασιάζονται και μεταξύ τους. Ο πολλαπλασιασμός αυτός δεν απαιτείται για τον ορισμό του αντίστοιχου γραμμικού χώρου όμως χρειάζεται. Αργότερα θα αναγνωρίσουμε τα γινόμενα αυτά σαν παραδείγματα γενικότερων ορισμών και ιδιοτήτων.

<u>Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$</u>. Ένα διάνυσμα v (στήλη) του $\mathbb{R}^m$ ορίζει μια γραμμή ενός πίνακα 1xm. Μια γραμμή ενός πίνακα A mxn είναι το ανάστροφο διάνυσμα v^T ενός διανύσματος (στήλη) $v \in \mathbb{R}^n$. Μια στήλη ενός πίνακα B mxn είναι ένα διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^m$.

Το γινόμενο γραμμή * στήλη = $v^T w$ καλείται εσωτερικό γινόμενο του v και w και ορίζεται ως

$$v^T w = v(1)w(1)+\ldots+v(n)w(n)$$

όπου v(j), w(j), j = 1,…,m είναι οι (πραγματικές) συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών. Παρατηρείστε ότι $v^T w = w^T v$. Το ίδιο γινόμενο συμβολίζεται και με <v,w> (=<w,v>).

<u>Γινόμενο πινάκων</u>. Το γινόμενο AB δύο πινάκων ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του A ισούται με τον αριθμό των γραμμών του B. Ορίζεται δηλαδή για πίνακες mxk (ο A) και kxn (ο B) και είναι πίνακας mxn. Το στοιχείο του πίνακα γινομένου στην οποιαδήποτε θέση (i,j) δηλαδή στη γραμμή i=1,…,m και τη στήλη j=1,…,n είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος που ορίζεται από τη γραμμή i του A με το διάνυσμα που ορίζεται από τη στήλη j του B. Έτσι, αν AB = Γ,

$$\Gamma(\mathrm{i,j}) = [\mathrm{A(i,1)....A(i,k)}] * \begin{bmatrix} \mathrm{B(1,j)} \\ . \\ . \\ \mathrm{B(k,j)} \end{bmatrix} = A(i,1)*B(1,j)+...+A(i,k)B(k,j)$$

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, το γινόμενο BA δεν ορίζεται αλλά ορίζεται το AB=Γ είναι 2x2 και πχ στη θέση (1,2) του πίνακα Γ το στοιχείο είναι: $\Gamma(1,2)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}=15$. Επαληθεύστε ότι $\Gamma=\begin{bmatrix} 19 & 15 \\ 49 & 36 \end{bmatrix}$

Παρατηρείστε ότι αν m=1 και n=1 τότε το γινόμενο των πινάκων AB γίνεται εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^k$. Εξετάστε ιδιαίτερα την περίπτωση που μόνο ο B είναι διάνυσμα, δηλαδή πίνακας κx1 (άρα διάνυσμα του $\mathbb{R}^k$). Συμβολίζοντας τότε τον B με v έχουμε το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα, το αποτέλεσμα του οποίο είναι πίνακας mx1, δηλαδή πάλι διάνυσμα (αντί για τον πίνακα Γ) έστω w. Τώρα $w \in \mathbb{R}^m$. Έτσι έχουμε Av = w. Σύμφωνα με τον ορισμό παρατηρούμε ότι η συνιστώσα j του w είναι απλά το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής j του A με το διάνυσμα v. Έτσι, αν οι γραμμές του A είναι τα διανύσματα $\gamma_1^T,\ldots,\gamma_m^T$ (έχει επιβληθεί αναστροφή ώστε τα γ_j - στήλες να γίνουν γραμμές) η συνιστώσα w(j) είναι $\gamma_j^T v$.

Επίσης, παρατηρείστε ότι αν $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ είναι οι στήλες του A, που είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ (Στήλη r = διάνυσμα $\sigma_r \in \mathbb{R}^m$) και $\alpha = [\alpha_1,\ldots,\alpha_\kappa]^T$ τότε $A\alpha = \alpha_1\sigma_1+\ldots+\alpha_j\sigma_j+\ldots+\alpha_\kappa\sigma_\kappa$. Τότε $Av = v_1\sigma_1+\ldots+v_j\sigma_j+\ldots+v_k\sigma_k$.

Παρατηρούμε επομένως ότι: <u>το γινόμενο πίνακας * διάνυσμα ταυτίζεται με το γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στηλών του πίνακα με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος.</u>

<u>Ταυτοτικός πίνακας I.</u> Ο ταυτοτικός (ή μοναδιαίος) πίνακας I ορίζεται για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ και είναι ο τετραγωνικός πίνακας n*n του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι μονάδες και όλα τα άλλα μηδέν, δηλαδή για i, j = 1 ….,n

$$I(i, j)=1 \text{ για } i=j$$
$$I(i, j)=0, \text{ για } i \neq j$$

Αν ο A είναι κxm μπορούμε να τον πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με τον ταυτοτικό πίνακα I κxκ και από δεξιά με τον ταυτοτικό πίνακα I mxm. Και στις δύο περιπτώσεις IA = A και AI = A. Βέβαια το ίδιο ισχύει όταν ο A = v είναι διάνυσμα.

<u>Αντίστροφοι πίνακες.</u> Εξετάζοντας τα ισχύοντα για αριθμούς (που είναι πίνακες 1x1), όπου π.χ. $3^{-1}*3 = 3*3^{-1} = 1$, αν ο A είναι κxm ορίζουμε ως αριστερό αντίστροφό του (<u>εάν</u> υπάρχει) ένα πίνακα έστω $A_{\alpha\rho}^{-1}$ που είναι mxκ για τον οποίο $A_{\alpha\rho}^{-1} A_{\kappa x m}$ = I, ο ταυτοτικός πίνακας που τότε υποχρεωτικά θα είναι mxm. Τα αντίστοιχα ισχύουν για τον δεξιό αντίστροφο $A_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$, ο οποίος τώρα θα είναι mxκ και δίνει $AA_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$ = I, όπου ο I είναι κxκ. Οι αντίστροφοι αυτοί μπορεί να μην υπάρχουν και αν υπάρχουν μπορεί να μην είναι μοναδικοί (βλ παράδειγμα). Αν όμως ο A είναι τετραγωνικός nxn και εάν υπάρχει ο ένας από τους $A_{\alpha\rho}^{-1}$, $A_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$ τότε υπάρχει και ο άλλος και μάλιστα συμπίπτουν σε έναν πίνακα nxn, τον A^{-1}, που είναι μοναδικός (καλείται <u>ο</u> αντίστροφος) και βέβαια ισχύει:
$A^{-1}A = AA^{-1} = I$, με τους A^{-1} και I να είναι επίσης nxn.

<u>*Παράδειγμα:*</u> Δίνεται ο A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ και ζητείται να βρεθεί ο αριστερός αντίστροφός του.

Ο A έχει διάσταση 3x2 οπότε ο $A_{\alpha\rho}^{-1}$ πρέπει να είναι διάστασης 2x3 και έστω

$A_{\alpha\rho}^{-1}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}$. Για να τον βρούμε θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων που προκύπτει από την απαίτηση $A_{\alpha\rho}^{-1}$ A=I δηλαδή:

$$A_{\alpha\rho}^{-1}\,\mathrm{A}=\mathrm{I} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι:

$$2x_1+x_2+x_3+0x_4+0x_5+0x_6=1$$
$$x_1+2x_2-x_3+0x_4+0x_5+0x_6=0$$
$$0x_1+0x_2+0x_3+2x_4+x_5+x_6=0$$
$$0x_1+0x_2+0x_3+x_4+2x_5-x_6=1$$

και αποτελείται από τέσσερις εξισώσεις με έξι αγνώστους, οπότε είναι λογικό να περιμένουμε πως δύο τουλάχιστον μεταβλητές θα είναι ελεύθερες (δηλαδή θα υπάρχουν πολλοί αριστεροί αντίστροφοι). Πράγματι, λύνοντας το σύστημα προκύπτει $x_1=2/3-c_1$, $x_2=c_1-1/3$, $x_3=c_1$ και $x_4=-1/3-c_2$, $x_5=2/3+c_2$ και $x_6=c_2$. Παίρνοντας αυθαίρετα για $c_1=c_2=0$ προκύπτει ο

$$A_{\alpha\rho}^{-1}=\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Για άλλες τιμές των c_1 και c_2 λαμβάνουμε διαφορετικούς αριστερούς αντίστροφους.

Άσκηση 1.6 Έστω A τετραγωνικός nxn. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει αριστερός αντίστροφος του A τότε ο ίδιος είναι και δεξιός και είναι ο μόνος αντίστροφος.

1.5 Γραμμικοί συνδυασμοί. Ένας **γραμμικός συνδυασμός** των n στοιχείων $v_1,\ldots v_n$ του V είναι το στοιχείο $v\in V$ που ορίζεται από τη σχέση

$$v := \alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \qquad (1.1)$$

όπου οι συντελεστές $\alpha_1,\ldots\alpha_n$ είναι βέβαια βαθμωτά μεγέθη, $\alpha_j\in F$. Εννοείται ότι τα στοιχεία προστίθενται ανά δυο επειδή η πρόσθεση απαιτεί δύο προσθετέους, π.χ. $v = (((\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)+\alpha_3 v_3)+\alpha_4 v_4)$ ή με όποια άλλη σειρά θέλουμε. Από την προσεταιριστική ιδιότητα δεν αλλάζει κάτι αν αλλάξουμε τις θέσεις των παρενθέσεων οπότε δεν απαιτούνται οι παρενθέσεις.

1.6 Γραμμικώς ανεξάρτητα και γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία. Τα $v_1,\ldots,v_k \in V$ καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα όταν ο μόνος γραμμικός συνδυασμός τους που δίνει αποτέλεσμα το στοιχείο 0 του V είναι αυτός για τον οποίο όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν. Ισχύει δηλαδή

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, \ldots a_k = 0. \qquad (1.2)$$

Αν τα $v_1, \ldots v_k$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε καλούνται «γραμμικώς εξαρτημένα». Ο προηγούμενος ορισμός συνεπάγεται ότι τα $v_1, \ldots v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός τους

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \qquad (1.3)$$

για τον οποίο τουλάχιστον ένας συντελεστής, έστω α_m, δεν είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή, αφού $\alpha_m \neq 0$, μπορούμε να λύσουμε τη σχέση (3) ως προς v_m. Λεπτομερέστερα, η (1.3) δίνει

$$\left(\sum_{\substack{j \neq m \\ j=1}}^{k} a_j \mathrm{v}_j \right) + \alpha_m v_m = 0,$$

άρα ο $\alpha_m \mathrm{v}_m$ είναι ο αντίθετος του διανύσματος της παρένθεσης, οπότε

$$\alpha_m v_m = - \left(\sum_{\substack{j \neq m \\ j=1}}^{k} a_j \mathrm{v}_j \right)$$

άρα (από ποιες ιδιότητες;)

$$v_m = \sum_{\substack{j \neq m \\ j=1}}^{k} \beta_j \mathrm{v}_j \quad \text{όπου } \beta_j = - a_j/\alpha_m,\ j \neq m.$$

Αυτό αποδεικνύει και ότι *τα $v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα (ανεξάρτητα) τότε και μόνον τότε όταν ένα από αυτά μπορεί (δεν μπορεί) να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.* Αυτή η ιδιότητα εκπροσωπεί και την ουσία της γραμμικής ανεξαρτησίας: αν τα στοιχεία σε ένα γραμμικό συνδυασμό είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε τουλάχιστον ένα από αυτά «περισσεύει» γιατί δεν προσφέρει κάτι στον γραμμικό συνδυασμό, αφού μπορεί να αντικατασταθεί συναρτήσει των υπολοίπων. Έτσι για παράδειγμα, αν τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα θα μπορούσαμε να γράψουμε (π.χ.) $\mathrm{v}_3 = 5\mathrm{v}_1 - 7\mathrm{v}_2$ και επομένως, ένας γραμμικός συνδυασμός των $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ όπως ο $\mathrm{v} = 4\mathrm{v}_1 + 12\mathrm{v}_2 - 3\mathrm{v}_3$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός μόνον των $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ δηλαδή $\mathrm{v} = 4\mathrm{v}_1 + 12\mathrm{v}_2 - 3(5\mathrm{v}_1\text{-}7\mathrm{v}_2)$ = $-11\mathrm{v}_1 + 33\mathrm{v}_2$. Άρα, το v_3 δεν προσφέρει κάτι στο γραμμικό συνδυασμό. Αντίθετα, αν τα διανύσματα είναι όλα γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε όλα απαιτούνται πραγματικά στον γραμμικό συνδυασμό, είναι όλα αναντικατάστατα, το καθένα προσφέρει τη δική του επιπλέον «διάσταση».

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα της γραμμικής ανεξαρτησίας είναι η ακόλουθη:

Άσκηση 1.6: Έστω ότι το v είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,.....v_k$,

$$v = a_1 v_1 + ... + a_k v_k .$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει άλλος γραμμικός συνδυασμός των $v_1,.....v_k$ που να δίνει το v (δεν υπάρχει άλλη επιλογή συντελεστών στη θέση των $a_1,.....a_k$) εάν και μόνο εάν τα $v_1,.....v_k$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

1.7 Παραγόμενος (υπο)χώρος. Το σύνολο S **όλων** των δυνατών γραμμικών συνδυασμών των $v_1,.....v_k \in$V, όπου V δοθείς γραμμικός χώρος, δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών ποσοτήτων $a_1 v_1 + ... + a_k v_k$ (να έχουν χρησιμοποιηθεί **όλοι** οι δυνατοί συνδυασμοί συντελεστών $a_1,.....a_k$ από τα στοιχεία του F) ονομάζεται «ο χώρος που παράγεται από τα $v_1,.....v_k$». Ο S μπορεί να είναι γνήσιος υποχώρος του V ή και να συμπίπτει με τον V.

Άσκηση 1.7 Δείξτε ότι ο S είναι γραμμικός χώρος.

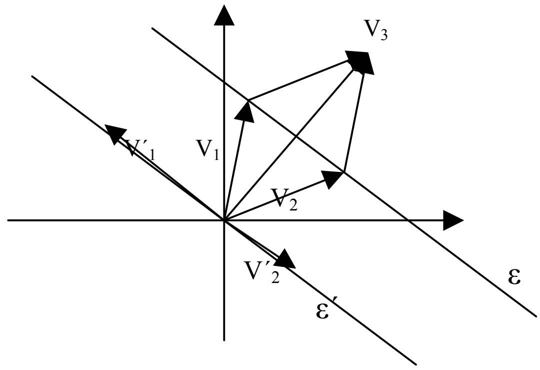
Άσκηση 1.8 Θεωρείστε V=$\mathbb{R}^2$, το επίπεδο. Κάθε σημείο P(x,y)$\in \mathbb{R}^2$ ορίζει το διάνυσμα με αρχή το (0,0) και τέλος το P, το οποίο και συμβολίζουμε με

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\, y \end{bmatrix}^T$$

Στο επίπεδο, ποιος ο υποχώρος που παράγεται

α) από το $v_1 = [0,0]^T$
β) από το $v_1 = [1,2]^T$
γ) από τα $v_1 = [2,1]^T$, $v_2 = [-4,-2]^T$
δ) από τα $v_1 = [1,2]^T$, $v_2 = [1,0]^T$
ε) από τα $v_1 = [1,4]^T$, $v_2 = [1,0]^T$, $v_3 = [2.1]^T, v_4 = [-1,1]^T$.

Ο υποχώρος που παράγεται από ένα διάνυσμα $v_1 \in$V καλείται ευθεία παραγόμενη από το v_1 και αποτελείται από όλα τα διανύσματα αv_1, α αριθμός. Ομοίως ο υποχώρος που παράγεται από δύο διανύσματα v_1, $v_2 \in$V καλείται επίπεδο παραγόμενο από τα v_1, v_2 και αποτελείται από όλα τα διανύσματα της μορφής $a_1 v_1 + a_2 v_2$ όπου $α_1$, $α_2$ αριθμοί. Για να είναι ένας υποχώρος επίπεδο και να μην εκφυλίζεται σε ευθεία θα πρέπει τα v_1, v_2 να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Η γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις είναι και ο ορισμός του υποχώρου S που παράγεται από ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων. Γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι δύο σημεία του επιπέδου ορίζουν μια ευθεία. Εάν η ευθεία αυτή δεν περιέχει την αρχή των αξόνων (το μηδενικό στοιχείο του επίπεδου χώρου) δε μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος όπως φαίνεται και στο σχήμα και όπως προκύπτει από το ότι



το άθροισμα των v_1, v_2 είναι το διάνυσμα v_3 που βρίσκεται εκτός της ευθείας ε. Αν η ευθεία διέρχεται από το μηδέν, όπως πχ η ε΄, τότε τα $v_1΄$ και $v_2΄$ αθροιζόμενα δίνουν διάνυσμα που ανήκει πάλι στην ε΄. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ε΄ είναι διανυσματικός χώρος.

Περιοριζόμενοι στο επίπεδο και αντιγράφοντας από τη γεωμετρία, τα δύο σημεία που ορίζουν μια ευθεία αντιστοιχούν σε δύο διανύσματα v_1, v_2. Διαλέξτε δύο σημεία στο επίπεδο και σχεδιάστε τα v_1, v_2 και τη διαφορά τους $v_1 - v_2$ (η διαφορά αυτή είναι διάνυσμα άρα αρχίζει από το μηδέν). Η ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα - διαφορά v_2-v_1 είναι ο διανυσματικός χώρος διάστασης 1 και αποτελείται από όλα τα διανύσματα $\alpha(v_2-v_1)$, α αριθμός. Τότε η παράλληλη μεταφορά της στο σημείο που αντιστοιχεί στο v_1, δηλαδή η ζητούμενη ευθεία που ορίζεται από τα δύο σημεία v_1, v_2 είναι όλα τα διανύσματα της μορφής:

$$v=v_1+\alpha(v_2-v_1)=(1-\alpha)v_1+\alpha v_2 \qquad (1.4)$$

Για α = 0, 1 έχουμε αντίστοιχα $v=v_1$, $v=v_2$. Για $\alpha<0$ το διάνυσμα βρίσκεται εκτός του διαστήματος που ορίζεται από τα v_1, v_2 και προς την πλευρά του v_1, κ.ο.κ. Δεν είναι πάντως απαραίτητο τα διανύσματα αυτά να αντιστοιχούν σε σημεία του επιπέδου. Μπορούν να είναι διανύσματα οποιουδήποτε χώρου. Απλά τότε «εξ' αντιγραφής» ορίζουμε ευθείες κλπ από τις επιθυμητές σχέσεις, π.χ ως «ευθεία παραγόμενη από τα v_1, v_2» ορίζεται το σύνολο όλων των v που δίνονται από την (1.4).

1.8 <u>Βάση γραμμικού χώρου V</u> είναι ένα σύνολο στοιχείων του που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν ολόκληρο το χώρο. Άρα κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης και αφού αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ο συνδυασμός αυτός είναι μοναδικός (Άσκηση 1.6).

<u>Άσκηση 1.9</u> Για κάθε ένα από τα ερωτήματα (α) έως και (ε) της Άσκησης 1.8, τα αναφερόμενα διανύσματα αποτελούν βάση κάποιου χώρου; και (γεωμετρικά) ποιού;

1.9 <u>Διάσταση γραμμικού χώρου.</u> Ένας γραμμικός χώρος μπορεί να έχει μια βάση με άπειρο πλήθος στοιχείων. Τότε λέμε ότι έχει άπειρη διάσταση. Αν έχει μια βάση με $n<\infty$ στοιχεία τότε λέμε ότι έχει διάσταση n. Για να έχει αυτό νόημα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Άσκηση 1.10 Αν ένας γραμμικός χώρος έχει μια βάση με n στοιχεία τότε κάθε άλλη βάση του έχει υποχρεωτικά n στοιχεία.

Άσκηση 1.11 Για κάθε j=1,…..,n θεωρήστε το διάνυσμα $e_j \in \mathbb{R}^n$ του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι μηδέν εκτός από αυτήν στη θέση j που είναι ίση με 1, δηλαδή $e_j(k)=0$ αν $k \neq j$ και $e_j(j)=1$. Δείξτε ότι τα n αυτά διανύσματα αποτελούν βάση για το χώρο των διανυσμάτων μήκους n. Τη συγκεκριμένη αυτή βάση (γιατί υπάρχουν και άπειρες άλλες) θα την αποκαλούμε τυπική.

Άσκηση 1.12 Από την Άσκηση 1.11 και την Άσκηση 1.4 προκύπτει ότι ο χώρος των διανυσμάτων μήκους n έχει διάσταση n και κάθε βάση του $\{z_1,\ldots,z_n\}$ θα αποτελείται από n ακριβώς διανύσματα. Από την Άσκηση 1.6 γνωρίζουμε ότι εφόσον δοθεί η βάση κάθε διάνυσμα v του χώρου γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός

$$v=\alpha_1 z_1+\ldots+\alpha_n z_n$$

δηλαδή δεν υπάρχουν άλλοι συντελεστές α που ο συνδυασμός να παράγει πάλι το v. Άρα το v εκπροσωπείται πλήρως και αποκλειστικά από τους συντελεστές $\alpha_1,\ldots\alpha_n$, για τη συγκεκριμένη όμως επιλογή της βάσης.
α) Για την τυπική βάση $e_1,\ldots,e_n$ της Άσκησης 1.11 και για δοθέν $v=[v(1)\ldots\ v(n)]^T$, ποιοι είναι οι συντελεστές $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ στο γραμμικό συνδυασμό

$$v=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n \ ;$$

β) Έστω n=2 οπότε ο γραμμικός χώρος είναι ο $V=\mathbb{R}^2$ (το επίπεδο). Γεωμετρικά σε κάθε σημείο P=(x,y) του επιπέδου αντιστοιχεί το διάνυσμα με αρχή το (0,0) και τέλος το (x,y), το οποίο και εκπροσωπείται από το διάνυσμα - στήλη $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$. Θεωρείστε την τυπική βάση e_1, e_2 του v, δηλαδή $e_1=[1\ \ 0]^T$ και $e_2=[0\ \ 1]^T$. Τότε, σύμφωνα και με το μέρος (α), $v=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$ όπου $\alpha_1=$; , $\alpha_2=$;. Θεωρείστε τώρα τα διανύσματα $B_1=[1\ 2]^T$ και $B_2=[-1\ 3]^T$. Δείξτε ότι και αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$ και για κάθε δοθέν $v=[x\ y]^T \in \mathbb{R}^2$ βρείτε τα α_1, α_2 στην έκφραση $v=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$, συναρτήσει των συνιστωσών x, y του v.

1.10 Γραμμικοί συνδυασμοί και πίνακες στον $\mathbb{R}^k$. Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{R}^k$. Σε ένα γραμμικό συνδυασμό

$$v = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$$

διακρίνουμε: τα διανύσματα $z_1, \ldots z_n$ του $\mathbb{R}^k$ (που δεν δίνεται ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα) και τους συντελεστές $a_1,\ldots,a_n$.

- Τα διανύσματα $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{R}^k$, ορίζουν ένα πίνακα Z που είναι κxn, και έχει για στήλες του τα διανύσματα αυτά με τη σειρά εμφάνισής τους. Αντιστρόφως, κάθε πίνακας κxn, ορίζει τα διανύσματα του γραμμικού συνδυασμού που είναι οι στήλες του. Έτσι έχουμε ταύτιση *«διανύσματα $z_{1,\ldots,}z_n \in \mathbb{R}^k \Leftrightarrow$ πίνακας V κxn»*, με z_j = στήλη j του Z.

- Οι συντελεστές $a_1,\ldots,a_n$ ορίζουν ένα διάνυσμα $a=\left[a_1, \quad \ldots \quad ,a_n\right]^T \in \mathbb{R}^n$. (εν γένει n$\neq$k οπότε και $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^k$). Αντιστρόφως, ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ ορίζει τους n συντελεστές που είναι οι συνιστώσες του. Έτσι, έχουμε ταύτιση, *«συντελεστές $a_1,\ldots,a_n \Leftrightarrow$ διάνυσμα $a=\left[a_1, \quad \ldots \quad ,a_n\right]^T \in \mathbb{R}^n$ ».*

- Τότε από τον κανόνα του πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε και την ταύτιση γραμμικός συνδυασμός = γινόμενο του πίνακα των διανυσμάτων επί το διάνυσμα των συντελεστών»:

$$v = a_1 z_1 + \ldots\ldots + a_1 z_n = Z a \tag{1.5}$$

- Παρατηρούμε και ότι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες ενός πίνακα Z (από τα διανύσματα z_j, «ο χώρος στηλών» του πίνακα) δηλαδή όλοι οι δυνατοί γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων στηλών του πίνακα (που ανήκουν στον $\mathbb{R}^k$) ταυτίζεται με όλα τα γινόμενα Zα$\in \mathbb{R}^k$ (για όλα τα δυνατά διανύσματα $a \in \mathbb{R}^n$). Ο χώρος των στηλών του Z είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^k$ και μπορεί να είναι γνήσιος υποχώρος.

Εάν επιπλέον, υπάρχει «αριστερός αντίστροφος» του Z με πολλαπλασιασμό της (1.5) από αριστερά με τον αντίστροφο αυτό βρίσκουμε το διάνυσμα των συντελεστών a όταν έχει δοθεί το v (και ζητούνται οι συντελεστές του).

$$a = Z_{\alpha\rho}^{-1} v \tag{1.6}$$

<u>*Άσκηση 1.13*</u> Δείξτε ότι εάν τα $z_1,\ldots,z_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα υπάρχει ο $Z_{\alpha\rho}^{-1}$. Επομένως τότε προκύπτει από την (1.6) ότι το διάνυσμα των συντελεστών στην (1.5) είναι ένα και μοναδικό.

1.11 «<u>Βάση=Πίνακας</u>». Εάν στην προηγούμενη ενότητα k=n, και τα $z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού έχουν πλήθος n, αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ ενώ ο Z είναι τετραγωνικός nxn και από τις ασκήσεις 1.6 και 1.13 υπάρχει ο Z^{-1}.

Άρα,

- «Βάση = τετραγωνικός πίνακας με αντίστροφο». Μια βάση $z_1,\ldots,z_n$ του $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί σε πίνακα Z που είναι nxn και έχει τα $z_1,\ldots,z_n$ για στήλες του (και αντίστροφα). Επιπλέον, ο Z είναι αντιστρέψιμος. Αντιστρόφως: Κάθε πίνακας Z που είναι nxn και οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, είναι αντιστρέψιμος και οι στήλες του αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.
- Αν ο Z είναι πίνακας που αντιστοιχεί σε βάση τότε ο χώρος των στηλών του δηλαδή όλα τα γινόμενα Za (για όλα τα $a \in \mathbb{R}^n$) αποτελούν όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $z_1,\ldots,z_n$ και αποτελούν ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$.

- Κάθε v$\in \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί «1-1» με κάθε $a \in \mathbb{R}^n$ όπου v = a_1z$_1$+ …..+ a_1z$_n$ = Za και a=Z^{-1}v. Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε το v όταν δίνεται το a και αντίστροφα, προσδιορίζουμε το διάνυσμα a των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού του v, στη δοθείσα βάση { z$_1$,…,z$_n$ } όταν δίνεται το v.

Εξειδίκευση: όταν z_j=e_j (η τυπική βάση) παρατηρούμε ότι ο πίνακας της βάσης είναι ό ταυτοτικός, Z=I. Οι παραπάνω σχέσεις, v=Zα και α=Z^{-1}v συμπίπτουν με την v=α, δηλαδή έχουμε το γνωστό αποτέλεσμα ότι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού στην τυπική βάση είναι απλά οι συνιστώσες του v.

1.12 <u>Αλλαγή Βάσης.</u> Έστω ότι χρειάστηκε να αλλάξει η βάση του $\mathbb{R}^n$ από την z_1, …, z_n με πίνακα Z στην $\tilde{z}_1,...,\tilde{z}_n$ με πίνακα $\tilde{Z}$. Αλλάζουν τώρα και οι συντελεστές στην έκφραση του V: από το διάνυσμα α στην

$$\mathrm{v} = a_1 z_1 + \ldots + a_1 z_n = Za, \qquad a = [a_1, \ \ldots \ , a_n]^T \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

στο διάνυσμα $\tilde{a}$ στην

$$\mathrm{v} = \tilde{\alpha}_1\tilde{z}_1 + \ldots + \tilde{\alpha}_n\tilde{z}_n = \tilde{Z}\tilde{\alpha}, \qquad \tilde{a} = [\tilde{a}_1, \ \ldots \ , \tilde{a}_n]^T \in \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

Πως συνδέονται τα δύο διανύσματα – συντελεστές; Από τις (1.7) και (1.8) έχουμε Z$a = \tilde{Z}\tilde{\alpha}$. Από το γεγονός ότι οι πίνακες βάσης είναι αντιστρέψιμοι βρίσκουμε τότε ένα από τα a, $\tilde{\alpha}$ συναρτήσει του άλλου, πχ βρίσκουμε πρώτα από την (1.7) ότι $\tilde{\alpha}=\tilde{Z}^{-1}\mathrm{v}$ και μετά από την (1.8) ότι

$$\tilde{\alpha}=\tilde{Z}^{-1}Z\alpha \tag{1.9}$$

2. *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ*

Παράδειγμα 2.1(Πολυώνυμα). Όταν λέμε «πολυώνυμο βαθμού κ» εννοούμε βαθμού μέχρι κ, όχι παραπάνω από κ (δηλαδή μπορεί να τύχει μερικοί συντελεστές να είναι μηδέν και αν ένας από αυτούς είναι ο συντελεστής του $x^κ$ τότε το πολυώνυμο θα έχει βαθμό μικρότερο από κ). Τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής x και βαθμού n-1 αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο συναρτήσεων διάστασης n αφού

α) κάθε τέτοιο πολυώνυμο γράφεται στη μορφή

$$P(x)=a_1 B_1(x)+a_2 B_2(x)+....+a_n B_n(x)$$

με $\quad B_1(x)=1, B_2(x)=x, ...B_n(x)=x^{n-1}$ και

β) οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις αφού

$$a_1 B_1(x)+.....+a_n B_n(x)=0$$

σημαίνει ότι $a_0+.....+a_n x^{n-1}=0$ για όλα τα x στο πεδίο ορισμού που έχουμε επιλέξει (π.χ. το (0,1) ή όλη την ευθεία $\mathbb{R}$), δηλαδή πρόκειται για πολυώνυμο που είναι εκ ταυτότητος μηδέν, δηλαδή $a_0=....a_n=0$. Άρα οι συναρτήσεις $B_1, ...B_n$ είναι βάση.
Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό ορίζονται κατά τα γνωστά και υλοποιούνται με πρόσθεση / πολλαπλασιασμό των συντελεστών των πολυωνύμων.
Η όλη κατάσταση απλοποιείται αμέσως αν θεωρήσουμε την αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχηση μεταξύ πολυωνύμων και συντελεστών του: αν δίνεται το πολυώνυμο τότε ορίζεται το διάνυσμα των συντελεστών του και αντιστρόφως, αν δίνεται ένα διάνυσμα τότε οι συνιστώσες του χρησιμοποιούνται ως συντελεστές και ορίζουν το πολυώνυμο. Έτσι στη θέση του πολυώνυμου p χρησιμοποιούμε το διάνυσμα των συντελεστών του $[a_1, ..., a_n]^T$. Τότε οι πράξεις πολυωνύμων γίνονται πράξεις στο διανυσματικό χώρο των διανυσμάτων μήκους n. Με τον ίδιο τρόπο, στα διανύσματα της τυπικής βάσης $E_1, ..., E_n$ που ορίσαμε για το χώρο διανυσμάτων αντιστοιχούν οι συναρτήσεις B_1, …,B_n που ορίσαμε προηγουμένως. Για παράδειγμα στο διάνυσμα βάσης $E_2=[0\ \ 0\ \ \ 1\ \ \ \ 0…0]^T$, από τη συμφωνία της αντιστοίχησης διανύσματος πολυωνύμου, αντιστοιχεί το πολυώνυμο $B_2(x) = 0+0x+1x^2+…+0x^{n-1} = x^2$.

Άσκηση 2.1 Έστω n=3 (πολυώνυμο βαθμού 2). Από τα προηγούμενα η διάσταση του χώρου των πολυωνύμων βαθμού 2 είναι 3. Μια βάση είναι η $B_1(x)=1,\ B_2(x)=x$ και $B_3(x)=x^2$. α) Δείξτε ότι και οι συναρτήσεις

$$Γ_1(x)=1 \qquad Γ_2(x)=x-1 \qquad Γ_3(x)=(x-1)(x-2)$$

επίσης είναι βάση του χώρου αυτού. β) Δίνεται το πολυώνυμο P, όπου $p(x)=3+5x+7x^2$. Ποιοι οι συντελεστές στην έκφραση του P ως γραμμικού συνδυασμού των Γ_1, Γ_2, Γ_3, δηλαδή ποια τα γ_1,γ_2,γ_3 στη μορφή

$p(x) = \gamma_1\ \Gamma_1(x) + \gamma_2\ \Gamma_2(x) + \gamma_3\ \Gamma_3(x)$; γ) Είδαμε πριν την αντιστοίχηση της βάσης B_j με την τυπική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τι αλλάζει όταν χρησιμοποιήσουμε τη νέα βάση των Γ_j;
Σημείωση: Όπως τα πολυώνυμα βαθμού n αντιστοιχούν «1-1» με τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ έτσι και στα στοιχεία κάθε γραμμικού χώρου διάστασης n (απ' ότι είδους στοιχεία και να αποτελείται ο χώρος αυτός) αντιστοιχούν τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αυτό θα δειχθεί στο μέρος 4 και δίνει τη δυνατότητα να «ταυτίσουμε» όχι μόνο πολυώνυμα αλλά κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης n με τον $\mathbb{R}^n$).

Άσκηση 2.2 Ποιο το «επίπεδο» που παράγεται από τα πολυώνυμα $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$;

Παράδειγμα 2.2 Οι συναρτήσεις που ορίζονται στο $x\in[0,1]$ και είναι συνεχείς με πραγματικές τιμές, αποτελούν γραμμικό χώρο.
Πράγματι, το άθροισμα συναρτήσεων που ανήκουν στον παραπάνω χώρο δίνει συνάρτηση g που ανήκει σε αυτόν αφού είναι συνεχής και ορίζεται στο [0,1]. Το γινόμενο με κάποιον αριθμό *α* δίνει επίσης συνάρτηση συνεχή που ορίζεται στο [0,1] άρα ανήκει στον ίδιο χώρο.

Άσκηση 2.3 Αποδείξτε ότι όλοι οι nxn πίνακες με μηδενικά στην κύρια διαγώνιο αποτελούν υποχώρο του χώρου πινάκων nxn.

Παράδειγμα 2.3 Είναι τα $V=\{[a,b,c]^T$: με $a + b + c = 0\}$ και $W=\{[a,b,c]^T$: με $a \geq 0\}$ υποχώροι του $\mathbb{R}^3$;
Ο V είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί για τυχαία διανύσματα $x=[a_1,b_1,c_1]^T$ και $y=[a_2,b_2,c_2]^T$ του V έχουμε ότι το άθροισμα $x+y=[a_1,b_1,c_1]^T +[a_2,b_2,c_2]^T =[a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2]^T$ ανήκει στο V αφού $(a_1+a_2) + (b_1+b_2) + (c_1+c_2) = 0$. Επίσης, για ένα τυχαίο διάνυσμα $u=[a,b,c]^T$ του V και κ πραγματικό αριθμό έχουμε ότι το $\kappa[a,b,c]^T$ ανήκει και αυτό στο V διότι $ka+kb+kc=k(a+b+c)=\kappa*0=0$. Άρα ο V είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

Αντίθετα, ο W δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί μπορεί το τυχαίο διάνυσμα $x=[a_1,b_1,c_1]^T$ με $a_1 \geq 0$ να ανήκει στον W αλλά το γινόμενο κx με κ=-1 δίνει το διάνυσμα $y=(-a_1,-b_1,-c_1)$ που δεν ανήκει στον W, διότι τώρα $-\alpha<0$.

Παράδειγμα 2.4 Είναι τα διανύσματα $[1,2,3]^T$, $[0,1,2]^T$ και $[0,0,1]^T$ γραμμικώς ανεξάρτητα; Ποιο χώρο παράγουν;
Για να είναι τα παραπάνω διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα αρκεί ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα αυτά να μην είναι ιδιόμορφος ή διαφορετικά αρκεί ο χώρος στηλών του πίνακα αυτού να μπορεί να δώσει οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Κάτι τέτοιο συμβαίνει μόνο όταν το Ax=b έχει λύση για κάθε b. Επειδή ο A είναι κάτω τριγωνικός, εύκολα βρίσκουμε det(A)=1 που σημαίνει ότι είναι μη ιδιόμορφος. Άρα, τα διανύσματα στήλες είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους μπορούν να παράγουν οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Ο χώρος R(A) των στηλών ενός πίνακα nxk είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα k διανύσματα στήλες του Α. Είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ γιατί οι στήλες του ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος των γραμμών του Α είναι ο υποχώρος των στηλών του A^T δηλαδή ο $R(A^T)$. Ο μηδενοχώρος N(A) του Α είναι όλα τα διανύσματα $v \in \mathbb{R}^k$ για τα οποία Αv=0 (=το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^n$).

<u>Άσκηση 2.3</u> Δείξτε ότι οι R(A) και N(A) είναι διανυσματικοί χώροι.

<u>Άσκηση 2.4</u> Δείξτε ότι η διάσταση του χώρου των γραμμών ισούται με τη διάσταση του χώρου των στηλών. Βέβαια η διάσταση αυτή ισούται με τον αριθμό των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων στηλών του Α που ισούται με τον αριθμό των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων - γραμμών του Α (στηλών του A^T). Την κοινή αυτή διάσταση την αποκαλούμε τάξη του Α.

<u>Παράδειγμα 2.5</u> Έστω τώρα ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 1 \\ -2 & -10 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$. Ενδιαφερόμαστε για τους τρεις θεμελιώδεις υποχώρους του Α δηλαδή το χώρο στηλών R(A), το χώρο γραμμών $R(A^T)$ και το μηδενοχώρο N(A). Επίσης, μας ενδιαφέρει η τάξη του Α.

Ο πίνακας Α έχει διάσταση 3x5 και υπό «φυσιολογικές» συνθήκες πολλαπλασιάζοντας ένα διάνυσμα από αριστερά θα το απεικόνιζε από τον $\mathbb{R}^5$ στον $\mathbb{R}^3$. Όμως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Προχωρώντας στη διαδικασία της απαλοιφής παρατηρούμε ότι η τρίτη γραμμή μηδενίζεται. Κάτι τέτοιο είναι φυσιολογικό αφού η τρίτη γραμμή έχει προκύψει από το γραμμικό συνδυασμό -2*(πρώτη)+2(δεύτερη) δηλαδή οι τρεις γραμμές δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Έτσι, η τάξη του πίνακα Α είναι 2 που είναι συγχρόνως και η διάσταση του χώρου στηλών και του χώρου γραμμών. (Η μέγιστη τάξη που θα μπορούσε να έχει ο Α είναι 3 και όχι 5(=πλήθος στηλών) αφού δε μπορούν να υπάρχουν 5 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα διάστασης 3!) Αν ήταν 3 τότε πράγματι θα είχαμε την απεικόνιση $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$. Όμως με την τάξη να είναι ίση με δύο η απεικόνιση «εκφυλίζεται» στην $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$. Ο μηδενοχώρος του Α αποτελείται από όλα εκείνα τα διανύσματα x για τα οποία Ax=0. Έχοντας ουσιαστικά μόνο δύο ανεξάρτητες εξισώσεις (περιορισμούς για τις μεταβλητές) και πέντε μεταβλητές προκύπτουν τρεις βαθμοί ελευθερίας (δηλαδή λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς τον ένα άγνωστο οπότε έχουμε μείωση κατά ένα. Μετά αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση και λύνουμε ως προς κάποιον άλλο άγνωστο οπότε με αυτόν τον τρόπο έχουμε γράψει δύο από τους αγνώστους συναρτήσει των υπολοίπων τριών.) Άρα, η διάσταση του μηδενοχώρου είναι 3 όπως είναι αναμενόμενο από τη θεωρία (Παράγραφος 2.4 σελ109: n-r=5-2=3).

<u>Παράδειγμα 2.6.</u> Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $s_j(x)=\sin(\pi jx)$ j=1,…,n είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Για να αποδειχθεί το ζητούμενο αρκεί να ισχύει $\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(\pi jx) = 0$ μόνο αν a_j=0 για κάθε j=1,…,n.

Σημείωση: Η απόδειξη έχει άμεση σχέση με την καθετότητα (εσωτερικό γινόμενο=0) όπως αναλύεται στην ενότητα 3.

Πολλαπλασιάζουμε με sin(πkx) και ολοκληρώνουμε στο διάστημα (0,1). Γράφοντας το γινόμενο των ημίτονων ως διαφορά συνημίτονων βρίσκουμε:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\cos(\pi(j-k)x)-\cos(\pi(j+k)x)\right]=0 .$$

Για j≠k το ολοκλήρωμα (η διαφορά των δύο επιμέρους ολοκληρωμάτων) κάνει μηδέν, ενώ για j=k το ολοκλήρωμα ισούται με 1. Δηλαδή όλοι οι όροι αριστερά είναι ίσοι με μηδέν εκτός από τον όρο με k=j που είναι $\alpha_k * \frac{1}{2} * 1$. Άρα η προηγούμενη σχέση δίνει α_k =0, δηλαδή οι συναρτήσεις s_κ(x)=sin(πκx) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

3. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΜΕΤΡΟ

3.1 Ορισμός εσωτερικού γινομένου. Σε ένα οποιοδήποτε γραμμικό χώρο V (όχι μόνο στον $\mathbb{R}^n$) το εσωτερικό (ή βαθμωτό) γινόμενο είναι το αποτέλεσμα μιας απεικόνισης που: 1) σε κάθε ζεύγος στοιχείων του γραμμικού χώρου V αντιστοιχεί έναν αριθμό (ένα βαθμωτό μέγεθος) του σώματος F, (π.χ. έναν πραγματικό αριθμό αν F = $\mathbb{R}$ ή ένα μιγαδικό αριθμό αν F = $\mathbb{C}$) και 2) ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) έως και (δ) που αναφέρονται στη συνέχεια. Γενικά, το εσωτερικό γινόμενο των v, w $\in$ V θα το συμβολίζουμε με <v,w>. Βέβαια <v,w> $\in$ F (=$\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$,…).

α). Το εσωτερικό γινόμενο ενός στοιχείου με τον εαυτό του είναι πάντα μη αρνητικό και μηδέν όταν v=0. Άρα πάντα <v,v> $\geq$ 0 και <v,v> = 0 μόνον εάν v=0.

β). $<\mathrm{v}, w> = \overline{<w, \mathrm{v}>}$, δηλαδή η αντιμετάθεση απαιτεί να πάρουμε τη συζυγή ποσότητα. Αν βέβαια F=$\mathbb{R}$ τότε $\overline{<w,\mathrm{v}>}$=<w,v> άρα ισχύει η αντιμεταθετικότητα.

γ). $<\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2, w>$ = $<\mathrm{v}_1, w>$+$<\mathrm{v}_2, w>$

δ). <αv,w> = α<v,w>

Από τις (γ) και (δ) προκύπτει και η $<a_1\mathrm{v}_1+a_2\mathrm{v}_2, w> = a_1<\mathrm{v}_1, w>+a_2<\mathrm{v}_2, w>$ και αντιστρόφως από αυτήν με $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ προκύπτει η (γ) και με a_2=0 προκύπτει η (δ).

Άσκηση 3.1. Στο χώρο V των διανυσμάτων μήκους n, με πραγματικές συνιστώσες, ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων v=[v(1),………v(n)]^T και w=[w(1),….w(n)] την ποσότητα <v,w>=v(1)w(1)+…..+v(n)w(n). Η ποσότητα αυτή συμβολίζεται και με v^{T}w. Αν οι συνιστώσες είναι μιγαδικές τότε ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο την ποσότητα, $<\mathrm{v, w}>=\overline{\mathrm{v(j)}}w(1)+...+\overline{\mathrm{v(n)}}\mathrm{w(n)}, |\mathrm{x}|=\sqrt{x*x}=\sqrt{x^2}$ όπου $\overline{\mathrm{v(j)}}$ είναι ο συζυγής του $\mathrm{v(j)}$. Τότε το $<\mathrm{v, w}>$ συμβολίζεται και με $\overline{\mathrm{v}}^T$w ή και v^Hw.

Δείξτε ότι πράγματι και στις δύο περιπτώσεις αυτό το <v,w> ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού του εσωτερικού γινομένου.

Άσκηση 3.2 α) Δείξαμε σε παράδειγμα του Μέρους 2 ότι οι συναρτήσεις που ορίζονται στο x$\in$[0,1] και είναι συνεχείς με πραγματικές τιμές, αποτελούν γραμμικό χώρο. Τον συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$[0,1]. β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g $\in \mathbb{C}$[0,1] ορίζουμε την ποσότητα (τον πραγματικό αριθμό): <f,g> = $\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Αποδείξτε ότι ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του ορισμού, άρα ότι πρόκειται για εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρήστε επίσης την αντιστοιχία μεταξύ των εσωτερικών γινομένων στις Ασκήσεις 3.1 και 3.2 : αν οι f, g ήταν ορισμένες μόνο για n τιμές των x, τις $x_1,\ldots x_n$ τότε θα είχαμε v=f=[f(x_1),…f(x_n)]^T w=g=[g(x_1),…,g(x_n)]^T και με άθροισμα στη θέση του ολοκληρώματος θα είχαμε σύμπτωση των δυο εσωτερικών γινομένων. Επειδή όμως οι f και g ορίζονται για συνεχείς τιμές του x έχουμε (κατ' αντιστοιχία με το

<v,w> της Άσκησης 3.1) τη συνεχή άθροιση των γινομένων f(x)g(x), δηλαδή το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

3.2 <u>Μέτρο.</u> Έστω v ένα τυχαίο στοιχείο ενός γραμμικού χώρου V. Μέτρο (μήκος, μέγεθος, norm) του v είναι το αποτέλεσμα $\|\mathrm{v}\|$ μιας απεικόνισης V$\to\mathbb{R}$ που έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

α) Το μέτρο $\|\mathrm{v}\|$ είναι θετικός αριθμός για κάθε v$\in$V, εκτός εάν v=0 οπότε το μέτρο του είναι μηδέν. Ισχύει δηλαδή $\|\mathrm{v}\|\geq 0$ και $\|\mathrm{v}\|=0$ μόνον όταν v=0.

β) Για κάθε βαθμωτό μέγεθος α$\in$F(=$\mathbb{R}$ ή =$\mathbb{C}$), ισχύει
$\|a\mathrm{v}\|=|a|\ \|\mathrm{v}\|$

γ) Ισχύει η τριγωνική ιδιότητα
$\|\mathrm{v}+w\|\leq\|\mathrm{v}\|+\|w\|$

<u>Άσκηση 3.3</u> Δείξτε ότι

$$\big|\|\mathrm{v}\|-\|w\|\big|\leq\|\mathrm{v}\pm w\|\leq\|\mathrm{v}\|+\|w\|.$$

<u>Άσκηση 3.4.</u> Θεωρείστε το χώρο V των διανυσμάτων μήκους n. Για κάθε v=[v(1),……v(n)]^T ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες:

$$\|\mathrm{v}\|_1=|\mathrm{v}(1)|+....+|\mathrm{v}(n)|$$

$$\|\mathrm{v}\|_2=\sqrt{|\mathrm{v}(1)|^2+.....+|\mathrm{v}(n)|^2}$$ (το « Ευκλείδειο μέτρο»)

$$\|\mathrm{v}\|_\infty=\max(|\mathrm{v}(1)|,....,|\mathrm{v}(n)|).$$

Δείξτε ότι και οι τρεις αυτές ποσότητες ικανοποιούν τις ιδιότητες του μέτρου άρα είναι και οι τρεις μέτρα. Παρατηρήστε ότι το Ευκλείδειο μέτρο $\|\mathrm{v}\|_2$ δίνεται και από τη σχέση $\|\mathrm{v}\|_2=\sqrt{<\mathrm{v},\mathrm{v}>}$, με τον ορισμό του γινομένου που δίνεται στην Άσκηση 3.1. Έτσι, το Ευκλείδειο μέτρο αντιγράφει αυτό που ισχύει για το μέγεθος (απόλυτη) τιμή των πραγματικών αριθμών δηλαδή $|\mathrm{x}|=\sqrt{x*x}=\sqrt{x^2}$. Παρατηρήστε επίσης ότι :

α) για n=1 (οπότε V=$\mathbb{R}$, η ευθεία των πραγματικών αριθμών) και τα τρία μέτρα συμπίπτουν με τη γνωστή μας απόλυτη τιμή ενός αριθμού που μετράει το μέγεθός του.
β) για n=2 και n=3 το $\|\mathrm{v}\|_2$ συμπίπτει με το γεωμετρικό (Ευκλείδειο) μήκος του διανύσματος v.

Άσκηση 3.5. Θεωρείστε το χώρο συναρτήσεων $\mathbb{C}[0,1]$ της άσκησης 3.2. Ποια είναι τα αντίστοιχα με την Άσκηση 3.4 μέτρα για κάθε συνάρτηση f$\in \mathbb{C}[0,1]$;

$\|f\|_1 =$

$\|f\|_2 =$

$\|f\|_\infty =$

Αποδείξτε ότι πράγματι, και οι τρεις αυτές ποσότητες είναι μέτρα. Όπως και με τα διανύσματα, το Ευκλείδειο μέτρο $\|f\|_2$ δίνεται από τη σχέση $\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >}$, όπου $< f, f >$ είναι το εσωτερικό γινόμενο που έχει ορισθεί στην Άσκηση 3.2).

3.3 Καθετότητα Έστω ένας χώρος V εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και δύο διανύσματα u, v που ανήκουν στο χώρο αυτό. Ορίζουμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι *κάθετα ή ορθογώνια* μεταξύ τους όταν και μόνο όταν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν δηλαδή, <u, v>=<v, u>=0. Ο ορισμός αυτός αφορά οποιονδήποτε τέτοιο χώρο. Εάν εξειδικεύσουμε στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ βεβαιωθείτε ότι τότε δύο διανύσματα ικανοποιούν τον ορισμό αυτό και είναι πράγματι κάθετα με τη συνήθη γεωμετρική έννοια.

Όταν όλα τα στοιχεία-διανύσματα ενός υποσυνόλου S του V είναι κάθετα μεταξύ τους τότε ο S ονομάζεται ορθογώνιο υποσύνολο του V και εάν επιπλέον κάθε διάνυσμα του S έχει μοναδιαίο μήκος τότε λέγεται ορθοκανονικό σύνολο. Τα ορθογώνια διανύσματα γίνονται εύκολα ορθοκανονικά: διαιρούμε το καθένα με το μέτρο του. Το εσωτερικό τους γινόμενο εξακολουθεί να είναι μηδέν, άρα η καθετότητα διατηρείται.

Παράδειγμα 3.1. Η τυπική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ορθοκανονική. Πράγματι, η standard βάση του $\mathbb{R}^3$ αποτελείται από τα διανύσματα:
$e_1=[1, 0, 0]^T$, $e_2=[0, 1, 0]^T$, $e_3=[0, 0, 1]^T$ που είναι προφανές πως έχουν μέτρο 1 και $< e_1, e_2>=0$, $< e_1, e_3>=0$ και $< e_2, e_3>=0$.

Σημείωση: Ένας πίνακας λέγεται ορθοκανονικός ή ορθογώνιος όταν είναι τετραγωνικός και οι στήλες του είναι ορθοκανονικά διανύσματα.

Άσκηση 3.6. Να βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα προς τα $v=[1, 2, 1]^T$ και $v=[2, 0, 1]^T$.

Άσκηση 3.7. Να δείξετε ότι τα διανύσματα ενός ορθογώνιου υποσυνόλου μη μηδενικών διανυσμάτων, ενός γραμμικού χώρου V εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

3.4 <u>Ανάλυση σε Ορθογώνια Βάση.</u> Δίνεται η ορθογώνια βάση $z_1, z_2, \ldots z_n$ και το διάνυσμα v. Ποιοι οι συντελεστές στην $v = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$; Πολλαπλασιάζοντας τη ζητούμενη εξίσωση με z_j j=1,…n προκύπτει:

$$v^T z_j = \langle \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n, z_j \rangle = \alpha_1 z_1^T z_j + \ldots + \alpha_n z_n^T z_j \qquad (3.1)$$

αλλά επειδή η βάση είναι ορθογώνια τα επιμέρους γινόμενα μηδενίζονται και μόνο το $z_j^T z_j$ δίνει αποτέλεσμα $||z_j||^2$. Άρα, μπορούμε να βρούμε τον α_j:

$$v^T z_j = \alpha_j \, ||z_j||^2 \rightarrow \alpha_j = \frac{v^T z_j}{|| z_j ||^2}.$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και τους υπόλοιπους συντελεστές. Αν επιπλέον η βάση ήταν ορθοκανονική τότε απλά:

$$\alpha_j = v^T z_j = \langle z_j, v \rangle$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστροφο πίνακα του Z (δηλαδή τον πίνακα που έχει για στήλες του τα διανύσματα της βάσης). Ο Z^{-1} είναι εύκολο να βρεθεί αφού τα $z_1, \ldots, z_n$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Πράγματι, ο Z^{-1} ισούται με τον Z^T με κάθε γραμμή του j, να διαιρείται με το τετράγωνο του μέτρου της z_j.

3.5 <u>Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt.</u> Η μέθοδος Gram Schmidt αφορά χώρους πεπερασμένης διάστασης εφοδιασμένους με εσωτερικό γινόμενο και έχει ως στόχο να μετατρέψει μια τυχαία βάση σε ορθοκανονική. Το σκεπτικό πίσω από τη μέθοδο είναι απλό. Ας είναι $v_1, \ldots v_n$ τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα της αρχικής βάσης και $u_1, \ldots u_n$ τα διανύσματα της ορθοκανονικής (δηλαδή τα διανύσματα που θα παραχθούν από τα v_i, θα έχουν μέτρο 1 και θα είναι κάθετα μεταξύ τους). Επιλέγουμε ως πρώτο διάνυσμα της νέας μας βάσης το v_1 διαιρώντας το όμως με το μέτρο του για να έχει μέτρο μονάδα, δηλαδή $u_1 = v_1/||v_1||$. Τώρα, για να βρούμε το u_2, παίρνουμε το v_2 και το αναλύουμε σε δύο συνιστώσες. Μία κάθετη και μια παράλληλη στο v_1. Αυτές σίγουρα θα υπάρχουν αφού τα διανύσματα ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα. Μας ενδιαφέρει να κρατήσουμε την κάθετη συνιστώσα άρα αρκεί να αφαιρέσουμε την παράλληλη:

$$x_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

Διαιρούμε τέλος με το μέτρο του x_2 οπότε $u_2 = x_2/||x_2||$. Όμοια πράττουμε και για το n-οστό διάνυσμα δηλαδή αφαιρούμε εκείνες τις συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των διανυσμάτων που έχουν ήδη βρεθεί:

$$x_n = v_n - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} - \ldots - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 \quad \text{οπότε}$$

$$u_n = x_n/||x_n||$$

Σημείωση: Δείτε το παράδειγμα του βιβλίου στη σελίδα 201.

<u>Άσκηση 3.8</u> Να ορθοκανονικοποιήσετε τα διανύσματα $v_1=[1, 0, 1]^T$,$v_2= [1, 2, 1]^T$ και $v_3= [1, 3, 4]^T$ αφού πρώτα βεβαιωθείτε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

4. ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

4.1 Ορισμός. Ο μετασχηματισμός $L:V\to W$, όπου V και W είναι γραμμικοί χώροι, καλείται γραμμικός εφόσον ισχύουν οι δύο ιδιότητες

$$\begin{aligned} L(\alpha v) &= \alpha L(v) \\ L(v_1+v_2) &= L(v_1) + L(v_2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

για κάθε αριθμό α (για κάθε α στο σώμα F) και για κάθε v, v_1, $v_2 \in V$. Συχνά απλοποιούμε το συμβολισμό γράφοντας Lv αντί για L(v), στην περίπτωση που ο L είναι γραμμικός.

Εύκολα προκύπτει ότι οι δύο ιδιότητες του ορισμού είναι ισοδύναμές με την ιδιότητα

$$L(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2) = \alpha_1 Lv_1 + \alpha_2 Lv_2, \tag{4.2}$$

για όλα τα α_1, $\alpha_2 \in$ F και $v_1, v_2 \in$ V. Η αλλεπάλληλη εφαρμογή της ιδιότητας αυτής δίνει

$$L(\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n)= \alpha_1 Lv_1+\ldots+\alpha_n Lv_n \tag{4.3}$$

για κάθε πεπερασμένο φυσικό αριθμό n, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in F$, $v_1,\ldots,v_n \in V$. Επομένως: *η εικόνα ενός γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων είναι ο γραμμικός συνδυασμός των εικόνων τους*.

Σημειώστε ότι Lv_j είναι η εικόνα του v_j και ανήκει στον W. Η 4.3 συνεπάγεται ότι αν γνωρίζουμε μόνο τις εικόνες $Lv_1, \ldots, Lv_n$ των $v_1, \ldots, v_n$ γνωρίζουμε την εικόνα οποιουδήποτε στοιχείου.

4.2 Παραδείγματα γραμμικών μετασχηματισμών.

Πολλαπλασιασμός πίνακα σε διάνυσμα. Αν ο Α είναι πίνακας mxn και το v διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, έχει νόημα ο πολλαπλασιασμός και το γινόμενο είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων mx1. Άρα ο Α, θεωρούμενος ως μετασχηματισμός απεικονίζει τα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$ στο χώρο $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ v &\to Av \end{aligned}$$

Λόγω των ισχυόντων κανόνων του πολλαπλασιασμού πινάκων ισχύουν οι ιδιότητες του ορισμού και ο Α είναι γραμμικός.

Παραγώγιση. Ας είναι Χ ένας χώρος πραγματικών συναρτήσεων, π.χ. ορισμένων στο (0,1) με τιμές στο $\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμες. Αν είναι Υ ο χώρος που περιέχει τις παραγώγους f' των συναρτήσεων αυτών τότε και οι δυο χώροι αυτοί είναι γραμμικοί.

Θεωρείστε το μετασχηματισμό – παραγώγιση

$$D: X \to Y$$

$$f \to Df = f'$$

Πρόκειται για γραμμικό μετασχηματισμό αφού από τους κανόνες παραγώγισης ισχύει

$$D(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2' = \alpha_1 Df_1 + \alpha_2 Df_2$$

<u>*Ολοκλήρωση.*</u> Ομοίως, και εφόσον οι συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες, ο μετασχηματισμός – ολοκλήρωση

$$L: \ f \to \int f(x)dx$$

είναι γραμμικός λόγω των κανόνων ολοκλήρωσης:

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \int (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx = \alpha_1 Lf_1 + \alpha_2 Lf_2$$

<u>*Βέλτιστη προσέγγιση.*</u> Ας είναι X ένας γραμμικός χώρος (πιθανόν με άπειρη διάσταση, όπως π.χ. ένας χώρος συναρτήσεων), και S ένας υποχώρος του πεπερασμένης διάστασης n, με βάση B_1 ,…..B_n. Θεωρείστε το μετασχηματισμό L που σε κάθε στοιχείο $v \in X$ αντιστοιχεί τη βέλτιστη προσέγγιση του v από τα στοιχεία του S, δηλαδή εκείνο το στοιχείο Lv του S που ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|v - Lv\|$, δηλαδή

$$\|v - Lv\| \le \|v - w\| \quad \forall w \in S$$

Εάν το μέτρο $\|.\|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$, τότε η βέλτιστη προσέγγιση Lv είναι τέτοια ώστε το v-Lv να είναι κάθετο σε όλα τα στοιχεία του S γι' αυτό και το Lv καλείται (ορθογώνια) προβολή του v στον S.

4.3 <u>Σύνθεση (γινόμενο) μετασχηματισμών και αντίστροφοι.</u>

<u>Σύνθεση (γινόμενο):</u> ως σύνθεση S=KM δύο μετασχηματισμών K και M (που μπορεί και να μην είναι γραμμικοί) ορίζεται ο μετασχηματισμός S που έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την αλλεπάλληλη εφαρμογή πρώτα του M και μετά του K, δηλαδή S(x)=K(M(x)), για κάθε x στο πεδίο ορισμού του M:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "M"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & M(x) \arrow[r, "K"] & KM(x)=(KM)(x)=S(x) \end{tikzcd}$$

Για να έχει νόημα ο ορισμός αυτός πρέπει ο K να ορίζεται στο πεδίο των εικόνων του M. Δηλαδή, αν M: $V \to W$ τότε ο K πρέπει να ορίζεται στο W και αν οι τιμές του K είναι σε ένα σύνολο Z, η σύνθεση S=KM ορίζεται από το αρχικό σύνολο V στο τελικό σύνολο Z. Παρατηρούμε ότι επαγωγικά και χωρίς ανάγκη παρενθέσεων μπορούμε να ορίσουμε συνθέσεις με πιο πολλούς όρους: $S=K_r\ldots K_1$. Εδώ, πρώτα εφαρμόζεται ο K_1 και διαδοχικά οι υπόλοιποι μέχρι τον K_r. Ο K_{j+1} ορίζεται στο πεδίο τιμών του K_j, ο S ορίζεται στο πεδίο ορισμού του K_1 με τιμές στο πεδίο τιμών του K_r. Αν $K_r=\ldots=K_1$ τότε γράφουμε $S=K^r$.

<u>Αντίστροφος:</u> *Αριστερός Αντίστροφος* του μετασχηματισμού M είναι ένας μετασχηματισμός $M_{\alpha\rho}^{-1}$ για τον οποίο ο μετασχηματισμός $M_{\alpha\rho}^{-1}M$ είναι ταυτοτικός δηλαδή $M_{\alpha\rho}^{-1}M(x)=x$. Με άλλα λόγια ο $M_{\alpha\rho}^{-1}$ διορθώνει - ακυρώνει την ενέργεια του M. Αυτά έχουν νόημα υπό προϋποθέσεις, πχ αν M(x)=M(y), για x≠y δηλαδή αν ο M δεν είναι «1-1», ο $M_{\alpha\rho}^{-1}$ «δεν θα ξέρει» που να επαναφέρει την εικόνα M(x)=M(y) (στο x ή στο y;). Επίσης, ο $M_{\alpha\rho}^{-1}$ σύμφωνα με τις απαιτήσεις σύνθεσης μετασχηματισμών, πρέπει να ορίζεται στο πεδίο τιμών του M και να έχει ως πεδίο τιμών του το πεδίο ορισμού του M. Σχηματικά:

$$V \xrightarrow{M} W \xrightarrow{M_{\alpha\rho}^{-1}} V$$

$$x \longrightarrow M(x) \longrightarrow M_{\alpha\rho}^{-1}(M(x)) = (M_{\alpha\rho}^{-1}M)(x) = x$$

$$V \underset{M_{\alpha\rho}^{-1}}{\overset{M}{\rightleftarrows}} W$$

$$M_{\alpha\rho}^{-1}M(x) = x \underset{M_{\alpha\rho}^{-1}}{\overset{M}{\rightleftarrows}} M(x)$$

Ο *δεξιός αντίστροφος* ορίζεται ομοίως, ώστε τώρα ο $MM_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$ να είναι ταυτοτικός. Ισχύουν τα αντίστοιχα με τον αριστερό αντίστροφο. Σημειώστε τώρα, ότι ο M είναι αριστερός αντίστροφος του $M_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$, άρα τώρα ο M ορίζεται στο πεδίο τιμών του $M_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$.

Άμεση εφαρμογή έχουμε για τη χρησιμότητα του αριστερού αντιστρόφου: Αν M(x)=b και γνωρίζουμε τον $M_{\alpha\rho}^{-1}$ τότε «πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή με $M_{\alpha\rho}^{-1}$ από αριστερά» (=εφαρμογή του $M_{\alpha\rho}^{-1}$ πάνω στο M(x) και στο b) βρίσκουμε το x από τη σύνθεση $M_{\alpha\rho}^{-1}(M\ (\mathrm{x}))$) = $M_{\alpha\rho}^{-1}(b)$ ή x = $M_{\alpha\rho}^{-1}$b.

Αν M : $V \longrightarrow V$ τότε δεν υπάρχει πρόβλημα για τα πεδία ορισμού και τιμών των M, $M_{\alpha\rho}^{-1}$, $M_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$ και υπό προϋποθέσεις μπορεί να ισχύει: $M_{\alpha\rho}^{-1}= M_{\delta\varepsilon\xi}^{-1}$. Ο μοναδικός αυτός μετασχηματισμός είναι ο *αντίστροφος* του M, συμπίπτει με τον M^{-1} και ικανοποιεί την $M^{-1}M=MM^{-1}=I$. Βεβαιωθείτε ότι τα προαναφερόμενα εξειδικεύονται και δίνουν τα περιεχόμενα της Ενότητας 1.3 όταν στη θέση των μετασχηματισμών έχουμε πίνακες.

4.4 <u>Πυρήνας ή Μηδενοχώρος</u> του L: $V \longrightarrow W$ είναι το σύνολο των στοιχείων του V που απεικονίζονται στο μηδενικό στοιχείο του W, δηλαδή όλα τα $v \in V$ για τα οποία Lv=0.

<u>Άσκηση 4.2</u> Αποδείξτε ότι ο πυρήνας ενός γραμμικού μετασχηματισμού είναι διανυσματικός υποχώρος του V.

4.5 <u>Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης Lx=b.</u> Έστω L: $V \longrightarrow W$, γραμμικός μετασχηματισμός όπου V και W είναι γραμμικοί χώροι. Ο L ορίζεται για όλα τα $v \in V$. Για το σύνολο όμως L(v) των εικόνων που δημιουργεί ο L, δηλαδή όλα τα $w \in W$ για τα οποία υπάρχει $v \in V$ με L(v)=w, ισχύει $L(v) \subseteq W$ σχέση που απλά βεβαιώνει ότι οι εικόνες ανήκουν στον W. Μπορεί L(V)=W (κάθε $w \in W$ να είναι εικόνα κάποιου $v \in V$). Μπορεί όμως και να ισχύει: $L(v) \neq W$, άρα να υπάρχουν $w \in W$ που δεν ανήκουν στο L(V), δεν είναι εικόνες κάποιου $v \in V$.

<u>Άσκηση 4.3</u> Δείξτε ότι το σύνολο των εικόνων L(V) είναι γραμμικός χώρος (υποχώρος του W).

Δίνεται τώρα $b \in W$ και ζητείται $x \in V$ τέτοιοι ώστε

$$Lx = b$$

- *Ύπαρξη λύσης:* Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει λύση x είναι το είναι το b να ανήκει στο σύνολο των εικόνων που δημιουργεί ο L, $b \in L(V)$ (προφανώς). Θα συναντήσουμε την περίπτωση όπου $b \notin L(V)$ και όπου πλέον θα αναζητήσουμε $x \in V$ για το οποίο ελαχιστοποιείται η απόσταση $||Lx-b||$.
- *Μοναδικότητα λύσης.* Λόγω της γραμμικότητας ισχύει: $L(x_1-x_2)=Lx_1-Lx_2$. Άρα, $L(x_1-x_2)=0 \Leftrightarrow Lx_1=Lx_2$. Άρα, η διαφορά x_1-x_2 δύο στοιχείων του V ανήκει στο μηδενοχώρο του L $\Leftrightarrow$ αυτά δίνουν την ίδια εικόνα. Επομένως, $Lx_1=b$ και $Lx_2=b \Leftrightarrow (x_1-x_2)$ ανήκει στο μηδενοχώρο του L. Άρα, δεν υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις $\Leftrightarrow$ ο μηδενοχώρος περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο του V, δηλαδή έχει διάσταση μ=0.

4.6 <u>Κάθε χώρος V διάστασης κ < ∞ «είναι» ο</u> $\mathbb{R}^k$, με την εξής έννοια: Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε μια βάση του V που υποχρεωτικά θα έχει κ στοιχεία $v_1,\dots,v_\kappa$. Τότε κάθε $v \in V$ γράφεται στη μορφή

$$v = \alpha_1 v_1+\dots+\alpha_\kappa v_\kappa \tag{4.4}$$

με μοναδικό τρόπο, δηλαδή για κάθε v υπάρχει το διάνυσμα των συντελεστών

$$\alpha=[\alpha_1,\dots\alpha_\kappa]^T.$$

και είναι ένα και μοναδικό. Έτσι, κάθε $v \in V$ ορίζει ένα και μοναδικό διάνυσμα $\alpha \in \mathbb{R}^k$. Αντιστρόφως κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^k$ ορίζει ένα και μοναδικό διάνυσμα $v \in V$. Από την (4.4) επομένως, ο μετασχηματισμός L: $V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ με Lv=α είναι «1-1» και έχει αντίστροφο τον L^{-1}: $\mathbb{R}^k \longrightarrow V$ με $L^{-1}\alpha = v$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο L είναι και γραμμικός βάσει της (4.4) και των ιδιοτήτων των πράξεων στους γραμμικούς χώρους. Μπορούμε επομένως να κάνουμε πράξεις με τα διανύσματα του $\mathbb{R}^k$ και ταυτόχρονα να παράγουμε τα αποτελέσματα των πράξεων στον V. Με την έννοια αυτή όλοι οι γραμμικοί χώροι διάστασης κ είναι «ταυτόσημοι» με τον $\mathbb{R}^k$.

<u>Παράδειγμα</u>, Έστω V ο γραμμικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού n-1, που έχει διάσταση n. Μια βάση του είναι:

$$z_1(x)=1,\ z_2(x)=x,\ \ldots,\ z_n(x)=x^{n-1}$$

και κάθε στοιχείο του χώρου, κάθε πολυώνυμο βαθμού n-1 γράφεται στη μορφή:

$$v(x)=\alpha_1+\ldots+\alpha_n x^{n-1}=\alpha_1 z_1(x)+\ldots+\alpha_n z_n(x) \tag{4.5}$$

Κάθε πολυώνυμο $v\in V$ ορίζει ένα και μοναδικό διάνυσμα συντελεστών $\alpha=[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]^T$, για τη συγκεκριμένη βάση των $z_j(x)=x^{(j-1)}$ j=1…n. Αντίστροφα, κάθε διάνυσμα $\alpha\in\mathbb{R}^n$ ορίζει τους συντελεστές της (4.5) άρα και ένα μοναδικό πολυώνυμο v. Επίσης, από την (4.5) παρατηρούμε πως όταν $v=z_j$ το διάνυσμα συντελεστών είναι το e_j της τυπικής βάσης. Άρα, έχουμε μια «1-1» αντιστοιχία με τα πολυώνυμα του V και τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ (συντελεστών των πολυωνύμων) με $z_j \longleftrightarrow e_j$. Τώρα, μεταφέρουμε τις πράξεις του διανυσματικού χώρου V σε πράξεις του $\mathbb{R}^n$: το άθροισμα πολυωνύμων και το γινόμενο αριθμού με πολυώνυμο υπολογίζονται στο διάνυσμα των συντελεστών, δηλαδή στον $\mathbb{R}^n$, και το διάνυσμα αποτέλεσμα δίνει τους συντελεστές για το αντίστοιχο πολυώνυμο (άθροισμα πολυωνύμων ή γινόμενο αριθμού επί πολυώνυμο).

4.7<u>«Μετασχηματισμός=Πίνακας(εκπρόσωπος)»</u>Ένας γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης εκπροσωπείται από έναν πίνακα, με την έννοια ότι η εικόνα κάθε στοιχείου δίνεται από το γινόμενο του πίνακα επί το διάνυσμα των συντελεστών του στοιχείου όταν αυτό εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός μιας βάσης. Ακριβέστερα :

Έστω L: V $\to$ W, όπου οι V και W έχουν πεπερασμένη διάσταση n και k αντίστοιχα. Ας είναι $z_1,\ldots,z_n$ μια βάση του V και $y_1,\ldots,y_\kappa$ μια βάση του W. Τότε κάθε $v\in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$v = a_1 z_1 +\ldots+ a_n z_n \tag{4.6}$$

ορίζοντας το διάνυσμα των συντελεστών $a=[a_1,\ldots,a_n]^T\in\mathbb{R}^n$. Ομοίως, η εικόνα Lv του V, αφού ανήκει στο W, γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$Lv=\beta_1 y_1 +\ldots+ \beta_\kappa y_k , \tag{4.7}$$

με διάνυσμα των συντελεστών το $\beta=[\beta_1\ldots,\beta_k]^T\in\mathbb{R}^k$. Πως συνδέονται τα αντίστοιχα διανύσματα; Θα δούμε ότι

$$\beta =Aa, \tag{4.8}$$

όπου A είναι πίνακας kxn. Έτσι μπορούμε να αγνοούμε τον L και να βρίσκουμε τις εικόνες μέσω του A: εάν για $v \in V$ γνωρίζουμε το διάνυσμα των συντελεστών του, βρίσκουμε το β από την (4.8) και μετά από την (4.7) την εικόνα Lv.

Για την εύρεση του A παρατηρούμε ότι αφού ο L είναι γραμμικός, η (1) δίνει

$$Lv=a_1Lz_1+\ldots+a_nLz_n. \tag{4.9}$$

Όμως τα Lz_j, j=1,…,n, ανήκουν στον W άρα εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $y_1,\ldots,y_k$ που είναι βάση του W. Ας είναι $\sigma_j=[\sigma_j(1),.., \sigma_{j(}n)]^T$ το διάνυσμα των συντελεστών του Lz_j στον γραμμικό συνδυασμό, δηλαδή

$$Lz_j = \sigma_j(1)y_1+\ldots+\sigma_j(k)y_k \ \ , \ j=1,..,n \tag{4.10}$$

Αντικαθιστώντας τα Lz_j στην (4.9) από την (4.10) εκφράζουμε την εικόνα Lv σαν γραμμικό συνδυασμό, της βάσης των $y_1,\ldots,y_n$, δηλαδή βρίσκουμε την (4.7) με

$$\beta_m= a_1\sigma_1(m) + a_2\sigma_2(m) +\ldots+ a_n\sigma_n(m) \ , \ m=1,\ldots,k.$$

Επομένως ισχύει η (4.8) με τον A να έχει για στήλες του τα διανύσματα των συντελεστών σ_j της (4.10).

Εξειδικεύσεις Δεν είναι ανάγκη να ισχύει $V=\mathbb{R}^n$ και $W=\mathbb{R}^k$ αφού στη θέση των στοιχείων των δύο αυτών χώρων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα των συντελεστών τους όταν εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί στην αντίστοιχη βάση. Ας είναι τώρα $V=\mathbb{R}^n$ και $W=\mathbb{R}^k$. Τότε τα ίδια τα στοιχεία των βάσεων είναι διανύσματα και ορίζουν αντίστοιχους πίνακες που είναι τετραγωνικοί και αντιστρέψιμοι. Έτσι αν Z είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα βάσης $z_1,\ldots,z_n$ του $\mathbb{R}^n$ και Y ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα βάσης του $\mathbb{R}^k$, οι Z και Y είναι τετραγωνικοί nxn και kxk αντίστοιχα και έχουν αντίστροφο. Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα χρησιμοποιώντας τώρα και τους πίνακες Y, Z και μετά εξειδικεύουμε για περιπτώσεις που αφορούν τις βάσεις αυτές.

Κάθε $v\in \mathbb{R}^n$ και η εικόνα του $Lv\in \mathbb{R}^k$ δίνονται από τις σχέσεις

$$v = a_1z_1 +\ldots+ a_nz_n=Za \ \ , \text{ με } \ a=[a_1,\ldots,a_n]^T \text{ και } a=Z^{-1}v \tag{4.11}$$

$$Lv = \beta_1y_1 +\ldots+ \beta_kz_k = Y\beta \ , \text{ με } \beta=[\ \beta_1,\ldots,\beta_k]^T \text{ και } \beta=Y^{-1}(LV) \tag{4.12}$$

Η εφαρμογή του L στην (4.11) δίνει

$$Lv = a_1(Lz_1)+\ldots+a_1(Lz_n) = \Gamma a, \tag{4.13}$$

Όπου ο Γ έχει για στήλες του τα $Lz_{1,\ldots,}Lz_n$, άρα είναι kxn. Επιπλέον, αφού τα y είναι η βάση του $\mathbb{R}^k$ έχουμε και τις αντίστοιχες εκφράσεις της (4.10)

$$Lz_j = \sigma_j(1)y_1+\ldots+\sigma_j(k)y_k=Y\sigma_j \qquad j=1,..,n, \tag{4.14}$$

Για τις εικόνες της βάσης Z του $\mathbb{R}^n$. Η (4.14) δίνει τις στήλες του Γ της (4.13) οπότε

$$\Gamma = YA \tag{4.15}$$

όπου ο A έχει για στήλες του τα διανύσματα σ_j. Τότε βρίσκουμε τη γνωστή μας σχέση

$$\beta = Aa, \tag{4.16}$$

Αφού από τις (4.12), (4.13) και (4.15) έχουμε

$$\beta = Y^{-1}(Lv) = Y^{-1}(\Gamma a) = Y^{-1}Y\,Aa = Aa \tag{4.17}$$

<u>Εξειδίκευση 1</u> Αν δεν υπάρχει απαίτηση για χρήση κάποιας συγκεκριμένης βάσης $y_1,\ldots,y_k$ του $\mathbb{R}^k$ και υπάρχει απαίτηση μόνο για χρήση της βάσης $z_1,\ldots,z_n$ του $\mathbb{R}^n$, τότε περιοριζόμαστε στις σχέσεις (4.15) και (4.16) και εκπρόσωπος του L είναι ο A=Γ, αφού δίνει την εικόνα Lv με τον πολλαπλασιασμό Γa.Υπενθυμίζεται ότι οι στήλες του A είναι τώρα οι εικόνες Lz, που δεν έχουν εκφρασθεί μέσω των διανυσμάτων-συντελεστών σ_j στη βάση $y_1,\ldots,y_n$. Αυτό ισοδυναμεί με το να έχουμε εμείς επιλέξει (αφού δεν υπήρχε περιορισμός) την τυπική βάση στην θέση των $y_1,\ldots,y_n$. Τότε Y=I, άρα στην (4.14), $Lz_j = \sigma_j$ και ο A της (4.16) που έχει στήλες τα σ_j συμπίπτει με τον Γ της (4.15).

<u>Εξειδίκευση 2</u> Αν δεν απαιτείται συγκεκριμένη βάση $z_1,\ldots,z_n$ ούτε για τον $\mathbb{R}^n$ όπως και πριν, είναι σαν να χρησιμοποιούμε την τυπική βάση και για τον $\mathbb{R}^n$. Έχουμε Z=I και ο A=Γ της (4.16) έχει για στήλες του τις εικόνες της τυπικής βάσης του $\mathbb{R}^n$, που βέβαια (οι εικόνες) ανήκουν στον $\mathbb{R}^k$.

<u>*Άσκηση 4.4*</u> Βρείτε τον πίνακα του μετασχηματισμού της προβολής ενός διανύσματος του R^3 στο επίπεδο. Γιατί ισχύει $L^r = L$ (ο ταυτοτικός μετασχηματισμός) για κάθε $r \geq 2$; Επίσης, (χωρίς να βρεθεί ο L) γιατί αναμένεται αυτός να μην έχει αντίστροφο;

4.8 <u>Αλλαγή Βάσης.</u> Στην ενότητα 4.7, περιορισθήκαμε στην περίπτωση V = $\mathbb{R}^n$ και W = $\mathbb{R}^k$, αφού άλλωστε ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης r «ταυτίζεται» με τον $\mathbb{R}^r$, μέσω της αντιστοίχησης 1–1 κάθε στοιχείου του με το διάνυσμα-συντελεστών του (διάνυσμα του $\mathbb{R}^r$) ως προς μια οποιαδήποτε βάση του. Άλλωστε και η σχέση β=Aa που καθιερώνει τον A ως εκπρόσωπο του L, αφορά ακριβώς αυτά τα διανύσματα – συντελεστές.

Έστω λοιπόν ο γραμμικός μετασχηματισμός L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Ισχύουν οι σχέσεις (4.6)-(4.17) της Ενότητας 4.7. Έστω τώρα ότι κρίθηκε σκόπιμο (και αυτό συμβαίνει συχνά στην πράξη) να αλλάξουμε τις βάσεις που χρησιμοποιούμε. Ας είναι $\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_n$ και $\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_k$ οι νέες βάσεις, με πίνακες $\tilde{Z}$, $\tilde{Y}$ αντίστοιχα. Ας είναι $\tilde{a}$ και $\tilde{\beta}$ τα αντίστοιχα των α και β, δηλαδή $\tilde{a}$ είναι το διάνυσμα των συντελεστών του v και $\tilde{\beta}$ του Lv στις νέες βάσεις. Τώρα θέλουμε να βρούμε το νέο εκπρόσωπο, τον πίνακα $\tilde{A}$ που αντιστοιχεί στην (4.16) αυτά και συνδέει τα διανύσματα – συντελεστές στη νέα βάση

$$\tilde{\beta} = \tilde{A}\,\tilde{a}. \tag{4.18}$$

Μπορούμε βέβαια να κατασκευάσουμε τον $\tilde{A}$ εξ αρχής όπως κάναμε και με τον Α: να βρούμε τις εικόνες L$\tilde{z}$, και τα διανύσματα σ_j της έκφρασής τους στη βάση των $\tilde{y}_j$ και να τα θέσουμε ως στήλες του $\tilde{A}$. Αυτό όμως δεν είναι σκόπιμο να γίνεται κάθε φορά που αλλάζουν οι βάσεις, ενώ είναι χρήσιμο (και πρακτικά) να γνωρίζουμε και την σχέση του νέου εκπροσώπου $\tilde{A}$ με τον παλαιό Α που ήδη έχουμε κατασκευάσει. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των $\tilde{A}$ και Α;

Χρησιμοποιούμε απλά τις σχέσεις (4.6)-(4.17) και τις αντίστοιχές τους για τις νέες βάσεις και τα νέα διανύσματα. Αρχίζουμε με το $\tilde{\beta}$ και προσπαθούμε να τα εκφράσουμε συναρτήσει του Α και των πινάκων των βάσεων Y, Z, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta} &= \tilde{Y}^{-1}(Lv) && \text{από την (4.17), για τη βάση } \tilde{Y}\\
&= \tilde{Y}^{-1}\Gamma\alpha && \text{από την (4.13)}\\
&= \tilde{Y}^{-1}YA\alpha && \text{από την (4.15)}\\
&= \tilde{Y}^{-1}YAZ^{-1}v && \text{από την (4.11)}\\
&= \tilde{Y}^{-1}YAZ^{-1}\tilde{Z}\tilde{a} && \text{από την (4.11), για τη βάση } \tilde{Z}.
\end{aligned}
$$

Έτσι συγκρίνοντας με την απαίτηση $\tilde{\beta} = \tilde{A}\alpha$ καταλήγουμε ότι

$$\tilde{A} = (\tilde{Y}^{-1}Y)\,A\,(Z^{-1}\tilde{Z}) \tag{4.19}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η σχέση δίνει και μια γενίκευση των αποτελεσμάτων της Ενότητας 4.7: αν οι βάσεις δεν έχουν αλλάξει, δηλαδή αν $\tilde{Y}$ = Y και $\tilde{Z}$ = Z τότε $\tilde{A}$ =A.

Επίσης, η σχέση (4.19) μπορεί εύκολα να παραχθεί από το απλό αποτέλεσμα της Ενότητας 1.12, που αφορά την αλλαγή βάσης στον ίδιο χώρο. Είχαμε βρει ότι αν Z, $\tilde{Z}$ είναι δυο βάσεις του $\mathbb{R}^n$ και α, $\tilde{\alpha}$ τα αντίστοιχα διανύσματα – συντελεστές στην έκφραση του ίδιου V$\in\mathbb{R}^n$ στις βάσεις αυτές, τότε

$$\tilde{a} = \tilde{Z}^{-1}Z\alpha \quad \text{και} \quad \alpha = Z^{-1}\tilde{Z}\tilde{a}$$

Ομοίως και για τον $\mathbb{R}^k$ ισχύει $\tilde{\beta} = \tilde{Y}^{-1}Y\beta$.

Αφού είχαμε β=Αα βρίσκουμε αμέσως

$$\beta = (\tilde{Y}^{-1}Y)\,\beta = (\tilde{Y}^{-1}Y)\,A\alpha = (\tilde{Y}^{-1}Y)A(Z^{-1}\tilde{Z})\tilde{a}.$$

4.9 <u>Μετασχηματισμοί ομοιότητας και η περίπτωση των ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων.</u> Δυο πίνακες Α και Β καλούνται όμοιοι όταν υπάρχει πίνακας Μ που έχει αντίστροφο M^{-1} και

$$B = M^{-1}AM \qquad (4.20)$$

Οι Α και Β έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές γιατί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο (οι ρίζες του οποίου είναι ιδιοτιμές): Υπενθυμίζεται ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα Γ είναι το $p(\lambda)= \det(\Gamma- \lambda I)$.

Ισχύει

$$B\text{-}\lambda I = M^{-1}AM - \lambda I = M^{-1}AM\text{-}\lambda M^{-1}IM = M^{-1}(A- \lambda I)M$$

(δηλαδή και οι $B - \lambda I$ και $A\text{-}\lambda I$ είναι επίσης όμοιοι και με τον ίδιο Μ). Άρα,

$$\det(B\text{-}\lambda I) = \det(M^{-1})\det(A- \lambda I)\det(M)=\det(A\text{-}\lambda I),$$

αφού $\det(M^{-1})\det(M)=\det(M^{-1}M)=\det(I)=\lambda$. Άρα οι Α και Β έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο οπότε και τις ίδιες ιδιοτιμές.

Τα ιδιοδιανύσματα διαφέρουν, αφού $Ax = \lambda x$ συνεπάγεται $AM^{-1}Mx =\lambda x$ ή $(MAM^{-1})(Mx) = \lambda(Mx)$ ή $B(Mx) = \lambda(Mx)$. Άρα αν x ιδιοδιάνυσμα του $A \Leftrightarrow Mx$ ιδιοδιάνυσμα του Β.

Οι μετασχηματισμοί ομοιότητας έχουν ιδιαίτερη χρησιμότητα όταν ο αρχικός πίνακας Α (έστω ότι είναι nxn) έχει ιδιοδιανύσματα $x_1,\ldots,x_n$ που είναι μεταξύ τους κάθετα. Η διαίρεση του x_j με το μέτρο του, αντικαθιστά το x_j από το $x_j/\left\|x_j\right\|$ που έχει μέτρο 1 αλλά δεν αλλάζει την ορθογωνιότητα. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x_j είναι ορθοκανονικά:

$$x^T_j x_m = \begin{cases} 0 \text{ αν } m \neq j \\ \left\|x_j\right\|^2 = 1, \text{ αν } m=j. \end{cases}$$

Θεωρούμε ως πίνακα Μ αυτόν που έχει για στήλες του τα διανύσματα αυτά. Αφού τα x_j (ως ορθοκανονικά) είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα, ο Μ είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον όμως ο αντίστροφος είναι απλά ο M^T και δεν χρειάζεται να ανευρεθεί: Διότι η γραμμή m του M^T είναι το x_m^T και το x_m είναι η στήλη m του Μ. Άρα $(M^TM)(m,j) = x_m^T x_j = 0$ αν $m \neq j$ και $=1$ αν $m=j$, άρα $M^TM=I$, άρα $M^{-1}=M^T$.

Υπάρχει όμως ακόμη μια πολύ σημαντική συνέπεια αυτής της επιλογής του Μ: ο $B = M^{-1}AM$ είναι διαγώνιος. Μάλιστα, τα στοιχεία της διαγωνίου του Β είναι οι ιδιοτιμές του Α. Αυτό μπορεί εύκολα να επαληθευτεί χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα και το γεγονός ότι το x, είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές λ_j. Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων, η στήλη j του ΑΜ είναι το γινόμενο του Α επί τη στήλη j του Μ, δηλαδή το διάνυσμα $Ax_j = \lambda_j x_j$. Τότε το στοιχείο B(m, j), που δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής m του $M^{-1}= M^T$ με τη στήλη j του ΑΜ, είναι

$$B(m,j) = x_m^T(\lambda_j x_j) = \lambda_j\, x_m^T x_j = \begin{cases} 0 \text{ αν } m \neq j \\ \lambda_j \text{ αν } m = j \end{cases} \qquad (4.21)$$

4.10 <u>Αλλαγή βάσης, στην περίπτωση αρθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων, για την επίλυση συστήματος.</u> Έστω το σύστημα

$$A\alpha = b, \qquad (4.22)$$

Όπου ο A είναι nxn και x, b διάνυσματα του $\mathbb{R}^n$. O A είναι γραμμικός μετασχηματισμός (A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), που μεταφέρει κάθε x$\in \mathbb{R}^n$ στο Ax$\in \mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με την ενότητα 4.7, με k=n, $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$, ο A εκπροσωπείται βέβαια από τον εαυτό του, με επιλογή της τυπικής βάσης για τον $\mathbb{R}^n$ και τον $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$. Έχουμε Y =Z =I και $Y^{-1}=Z^{-1}=I$. Αλλάζουμε τώρα βάση και παίρνουμε ως νέα βάση στον $\mathbb{R}^n$ και στον $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A, τα x_j της προηγούμενης ενότητας 4.9. Ο νέος πίνακας που εκπροσωπεί το μετασχηματισμό του A είναι ο $\tilde{A}$ για τον οποίο

$$A\tilde{\alpha} = \tilde{b} \qquad (4.23)$$

Όπου τώρα $\tilde{a}$ και $\tilde{b}$ είναι οι συντελεστές του v=α και της εικόνας του, Aα =b, στη νέα βάση. <u>Ισχύει δηλαδή ότι</u> ο πίνακας της νέας βάσης είναι ο M, σύμφωνα και με την Ενότητα 4.9.

$$\alpha = \tilde{\alpha}_1 x_1 + \ldots + \tilde{\alpha}_n x_n = M\tilde{\alpha} \qquad \tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n]^T \qquad (4.24)$$

$$b = \tilde{b}_1 x_1 + \ldots + \tilde{b}_n x_n = M\tilde{b} \qquad \tilde{b} = [\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n]^T \qquad (4.25)$$

Με το συμβολισμό της Ενότητας 4.8, ισχύει $\tilde{Y}$ =M, $\tilde{Z}$ =M άρα σύμφωνα με την (14)

$$\tilde{A} = (\tilde{Y}^{-1}Y)\, A\, (Z^{-1}\tilde{Z}) = M^{-1}IAIM = M^{-1}AM \qquad (4.26)$$

Άρα ο $\tilde{A}$ (= B της Ενότητας 4.8) είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A. Τότε το σύστημα

$$\tilde{A}\,\tilde{\alpha} = \tilde{b} \qquad (4.27)$$

λύνεται αμέσως και δίνει τις συνιστώσες του $\tilde{a}$ με απλή διαίρεση των αντίστοιχων συνιστωσών του $\tilde{b}$ με την αντίστοιχη ιδιοτιμή,

$$\tilde{\alpha}_j = \tilde{b}_j / \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n \qquad (4.28)$$

Άρα έχουμε την παρακάτω απλή μέθοδο επίλυσης του Aα = b:

Βήμα 1. Αναλύουμε το δοθέν (γνωστό) b στη νέα βάση, δηλαδή βρίσκουμε το $\tilde{b}$ της (4.25), από τη σχέση

$$\tilde{b} = M^{-1}b = M^{T}b$$

(απλός πολλαπλασιασμός γνωστού πίνακα επί διάνυσμα που όμως και αυτός μπορεί να επιταχυνθεί με χρήση FFT σε ορισμένες περιπτώσεις).

Βήμα 2. Λύνουμε εύκολα το σύστημα (4.27), δηλαδή απλά βρίσκουμε το $\tilde{a}$ από την (4.28), με n διαιρέσεις δια λ_j, j =1,….,n.

Βήμα 3. Με γνωστό το $\tilde{\alpha}$ βρίσκουμε το ζητούμενο α = M$\tilde{\alpha}$. Πάλι, όπως και στο βήμα 1 έχουμε απλό πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα που, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να επιτευχθεί με χρήση FFT.

Σημείωση 1 Σε ορισμένες περιπτώσεις συμβαίνει ο M να είναι συμμετρικός, οπότε $M^{-1} = M^{T} = M$. Τότε τα βήματα 1 και 3 έχουν τον ίδιο πολλαπλασιαστή πίνακα και επομένως εκτελούνται από το ίδιο υποπρόγραμμα.

Σημείωση 2 Τυπικά, η ίδια διαδικασία, μπορεί να ακολουθηθεί χωρίς τη γνώση των περι αλλαγής βάσεων κλπ.

$$A\alpha = b \Leftrightarrow AMM^{-1}\alpha = b \Leftrightarrow M^{-1}AM\,(M^{-1}\alpha) = M^{-1}b$$

ή

$$(M^{-1}AM)\,\tilde{\alpha} = \tilde{b} \qquad (4.29)$$

όπου

$$\tilde{\alpha} := M^{-1}\alpha \quad \text{άρα } \alpha = M\tilde{\alpha} \qquad (4.30)$$

$$\text{και} \quad \tilde{b} = M^{-1}b \qquad (4.31)$$

Μετά ακολουθούμε τα ίδια βήματα 1 έως 3 που προαναφέρονται.

5. ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Για την προσαρμογή (ή λείανση) δεδομένων/μετρήσεων.

Στην πράξη, για πολύ σημαντικές εφαρμογές, γίνονται μετρήσεις τιμών μιας ποσότητας σε μια κλινική, για μια σφυγμομέτρηση, σε πειράματα κ.λ.π. Ζητούμενο είναι να βρεθεί ένας μαθηματικός τύπος για τη συνάρτηση που λαμβάνει αυτές τις τιμές. Οι κατά περίπτωση ειδικοί μπορούν συνήθως να προβλέψουν την μορφή που θα έχει η ζητούμενη συνάρτηση, άλλωστε αυτό γίνεται φανερό και από την απεικόνιση των δεδομένων.

Παράδειγμα 5.1 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις ακόλουθες μετρήσεις (τιμές) f_j για αντίστοιχες χρονικές στιγμές t_j:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{t_j}$	0	1	2	2.5	3	3.5	4	6	8
$\mathbf{f_j}$	0.98	2.52	4.04	4.77	5.44	6.28	6.96	9.99	13.01

(5.1)

Από την απεικόνιση των σημείων $P_j = (t_j, f_j)$ στο επίπεδο προκύπτει αμέσως ότι τα σημεία αυτά θα έπρεπε να ανήκουν σε μια ευθεία, άρα η f έχει τύπο της μορφής

$$f(t) = c_1+c_2\, t\,. \qquad (5.2)$$

Το πρόβλημα είναι ότι και οι μετρήσεις δεν μπορεί να είναι ακριβείς, οπότε τα σημεία P_j των μετρήσεων δε βρίσκονται ακριβώς πάνω σε μια ευθεία. Έτσι αναζητούμε μια ευθεία (αναζητούμε στην (5.2) τις σταθερές c_1, c_2) που να περνάει «όσο γίνεται κοντά» από όλα τα σημεία των μετρήσεων. Σε άλλες περιπτώσεις αντί για ευθεία χρειάζεται να προσδιορισθεί κάποια άλλη καμπύλη. Τα δεδομένα των μετρήσεων «προσαρμόζονται» τότε πάνω στην ευθεία ή την καμπύλη, περιγράφονται πάντα από μία συνάρτηση και έχουν μια «λεία» απεικόνιση. Γι’ αυτό και το πρόβλημα εύρεσης της καμπύλης (συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης της ευθείας) είναι γνωστό και ως πρόβλημα προσαρμογής ή και λείανσης δεδομένων.

Στο Παράδειγμα 5.1, αν οι μετρήσεις ήταν απόλυτα ακριβείς, όλα τα σημεία P_j, j = 1, ….,9 θα έπρεπε να ανήκουν στην ευθεία (5.2), δηλαδή τα c_1, c_2 θα ικανοποιούσαν τις εξισώσεις:

$$c_1 + t_j c_2 = f_j \qquad j = 1,\dots,9 \qquad (5.3)$$

Έχουμε δηλαδή 9 εξισώσεις με δύο αγνώστους. Μόνο δύο (ανεξάρτητες) από τις εξισώσεις αυτές θα δώσουν τιμές των αγνώστων παραμέτρων c_1, c_2 και οι τιμές αυτές (εν γένει) δεν περιμένουμε να ικανοποιούν τις υπόλοιπες εξισώσεις. Και αν επιλέγαμε δύο άλλες ανεξάρτητες εξισώσεις θα είχαμε δύο άλλες, διαφορετικές, τιμές των c_1, c_2. Γενικότερα, θα γνωρίζουμε μεν ότι η f έχει ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τύπο

$$f(t) = F(t,c_1,\dots,c_k) \qquad (5.4)$$

με k άγνωστες παραμέτρους $c_1,\dots,c_k$ αλλά η απαίτηση να βρίσκονται όλα τα σημεία $P_j = (t_j,f_j)$ των μετρήσεων πάνω στην καμπύλη (5.4) δίνει

$$f(t_j) = F(t_j,c_1,\ldots,c_k) = f_j, \qquad j = 1,\ldots.,n. \tag{5.5}$$

όπου ο αριθμός n των σημείων P_j (ο αριθμός των εξισώσεων) θα είναι πάντα μεγαλύτερος του αριθμού των αγνώστων. Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η f έχει τύπο της μορφής

$$f(t) = c_1\varphi_1(t) +\ldots+ c_k\varphi_\kappa(t) = F(t,c_1,\ldots,c_k), \tag{5.6}$$

όπου $\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa$ είναι συναρτήσεις γνωστές που εμείς έχουμε επιλέξει. Στην περίπτωση της ευθείας του παραδείγματος 5.1 κ=2 και $\varphi_1(t) = 1$ και $\varphi_2(t) = t_0$. Τότε οι εξισώσεις (5.5) γίνονται

$$\varphi_1(t_j)c_1 +\ldots+ \varphi_\kappa(t_j)c_k=f_j \qquad j = 1, \ldots.,n \tag{5.7}$$

ή

$$Ac =b, \tag{5.8}$$

όπου ο A είναι nxk με

$$A(j,q) = \varphi_q(t_j) \qquad j = 1,\ldots n, \qquad q = 1,\ldots.,k \tag{5.9}$$

είναι ο συντελεστής του αγνώστου c_q στην εξίσωση j και $b = [b_1,\ldots,b_n]^T \in IR^n$,

με

$$b_j = f_j, \qquad j = 1,\ldots.,n \tag{5.10}$$

Δεν περιμένουμε το σύστημα (5.6) να έχει λύση, για τους εξής λόγους:

- Απλά, μόνο κ ανεξάρτητες εξισώσεις από τις n δίνουν τις τιμές των k αγνώστων $c_1,\ldots.,c_k$ και μόνο «αν είμαστε τυχεροί» οι τιμές αυτές θα ικανοποιούν και τις υπόλοιπες εξισώσεις.
- Για όλα τα δυνατά διανύσματα $c = [c_1\ldots.,c_k]^T \in \mathbb{R}^k$, οι δυνατές εικόνες Ac που δημιουργεί ο A ανήκουν στον IR^n και είναι

$$Ac= c_1v_1+ \ldots.+c_kv_k, \tag{5.11}$$

όπου το διάνυσμα $v_q \in \mathbb{R}^n$ είναι η στήλη q του πίνακα A, q = 1,…, κ,

Επομένως, το σύνολο των εικόνων Ac είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τις στήλες $v_1,\ldots,v_k$ του A και, αφού k<n, ο S είναι γνήσιος υποχώρος του $\mathbb{R}^n$, δεν καλύπτει όλο τον $\mathbb{R}^n$. Έτσι, σε συμφωνία με τον προηγούμενο λόγο, μόνο «αν είμαστε τυχεροί» και το b ($\in \mathbb{R}^n$) ανήκει και στον S θα είχαμε λύση. Γενικά όμως, $b \notin S$.

Το πρόβλημα τώρα είναι να κατασκευάσουμε μόνο k εξισώσεις για τους k αγνώστους $c_{1,...,}$ c_k με τρόπο που οι τιμές των αγνώστων αυτών να δίνουν μια καμπύλη από την (5.6) τέτοια που να ελαχιστοποιείται η απόσταση των σημείων $P_j= (t_j,f_j)$ από την καμπύλη της f, με κάποια συγκεκριμένη έννοια. Οι προφανείς περιπτώσεις είναι:

- Να ελαχιστοποιήσουμε τη μέγιστη μεταξύ των αποστάσεων των σημείων P_j από την καμπύλη (έχοντας ορίσει ακριβώς τι εννοούμε ως απόσταση του P_j από την καμπύλη). Αν η μέγιστη απόσταση είναι «αρκετά μικρή» τότε και οι άλλες θα είναι αρκετά μικρές. Όμως η απόσταση αυτή δίνει ένα σύνολο μη γραμμικών εξισώσεων και εν γένει απορρίπτεται.
- Να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των αποστάσεων αυτών. Τότε πάλι θα είναι αρκετά μικρές όλες οι αποστάσεις αλλά πάλι θα έχουμε μη γραμμικές εξισώσεις και εν γένει η μέθοδος απορρίπτεται.

Έτσι καταλήγουμε στην ελαχιστοποίηση του Ευκλείδειου μέτρου των αποκλίσεων. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το «υπόλειμμα»

$$r = b-Ac \tag{5.12}$$

που είναι διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, $r = [r_1,\ldots,r_n]^T$. Συμβολίζοντας με $(Ac)_j$ τη συνιστώσα j του διανύσματος $Ac\in \mathbb{R}^n$, βρίσκουμε από τις (5.5) – (5.10) τη συνιστώσα

$$r_j = b_j-(Ac)_j = f_j-f(t_j), \tag{5.13}$$

η οποία μετράει κατά πόσο οι τιμές των αγνώστων (το διάνυσμα c) αποτυγχάνουν να ικανοποιήσουν την εξίσωση j. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το (Ευκλείδειο) μέγεθος του r. Αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το τετράγωνο του μεγέθους αυτού (για να αποφύγουμε τετραγωνική ρίζα), δηλαδή την ποσότητα

$$\begin{aligned}\|r\|^2 &= r_1^2+\ldots+r_n^2 = [b_1-(Ac)_j]^2 +\ldots+[b_n-(Ac)_n]^2 \\ &= [f_1-f(t_1)]^2+\ldots+[f_n-f(t_n)]^2 \qquad (5.14)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ελαχιστοποίηση αθροίσματος τετραγώνων των αποκλίσεων, γι' αυτό στην περίπτωση αυτή έχουμε τη «μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων». Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να επιτύχουμε την ελαχιστοποίηση:

<u>Τρόπος 1.</u> Να παρατηρήσουμε ότι κατά το δεύτερο λόγο που προαναφέραμε για τον οποίο το σύστημα Ac=b δεν περιμένουμε να έχει λύση, ισχύει γενικά $Ac\in S\subset \mathbb{R}^n$ αλλά $b\in \mathbb{R}^n$ με $b\notin S$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το $\|r\| = \|b-Ac\|$, δηλαδή να προσδιορίσουμε το διάνυσμα c ώστε η εικόνα Ac (που δεν μπορεί να ξεφύγει από το χώρο των στηλών S) να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στο b που βρίσκεται εκτός του S. Άρα θέλουμε το διάνυσμα b-Ac να είναι κάθετο στο χώρο S. Επειδή ο S παράγεται από τις στήλες του A αρκεί το b-Ac να είναι κάθετο στις στήλες αυτές, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο του b-Ac με τη στήλη q του A να είναι μηδέν για όλα τα q=1,…,k:

$$[b-Ac]^T v_q = 0, \quad q = 1,\ldots,k, \tag{5.15}$$

όπου v_q είναι το διάνυσμα στη στήλη q. Από την (5.9)

$$v_q= [\varphi_q(t_1)\ldots\varphi_q(t_n)]^T \tag{5.16}$$

και με χρήση των (5.10), (5.13) βρίσκουμε

$$[f_1- f(t_1)]\varphi_q(t_1) +\ldots+ [f_n-f(t_n)]\varphi_q(t_n) = 0 \quad q=1,\ldots,k$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές $f(t_j)$ από την (5,6), με $t=t_j$, βρίσκουμε το σύστημα

$$Bc = d \tag{5.17}$$

όπου ο B είναι kxk με

$$B(m,q) = \sum_{j=1}^{n} \phi_m(t_j)\phi_q(t_j) \quad m,q=1,\ldots,k \tag{5.18}$$

(ο συντελεστής του c_q στην εξίσωσή m) και το διάνυσμα d ανήκει στον $\mathbb{R}^k$ με

$$d(m) = \sum_{j-^{-1}}^{n} \phi_m (t_j)\, f_j \tag{5.19}$$

Παρατηρούμε ότι ο B συμμετρικός, B(m,q) =B(q,m), ή $B^T = B$.

<u>Τρόπος 2.</u> Παρατηρούμε ότι αν στην (5.14) αντικαταστήσουμε τις τιμές $f(t_j)$ από την (5.6) με $t=t_j$, η ποσότητα που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι συνάρτηση των $c_1,\ldots,c_1$ και περιέχει όρους c_q^2, $c_m c_q$, c_q, m,q = 1,…, k και σταθερές. Έτσι μπορούμε να επιτύχουμε την ελαχιστοποίηση από την απαίτηση οι μερικές παράγωγοι της ποσότητας αυτής ως προς $c_1,\ldots,c_k$ να είναι μηδέν

$$\frac{\partial \|r\|^2}{\partial c_m} = 0 \quad m =1,\ldots, k \quad . \tag{5.20}$$

Οι εξισώσεις (5.20) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα kxk. Λεπτομερέστερα, βρίσκουμε

$$\|r\|^2 = \sum_{j=1}^{n} [f_j-(c_1\varphi_1(t_j) + \ldots +c_k\varphi_k(t_j))]^2 \tag{5.21}$$

οπότε οι k εξισώσεις (5.20) γίνονται

$$\frac{\partial \|r\|^2}{\partial c_m} = \sum_{j=1}^{n} 2[f_j-(c_1\varphi_1(t_j) +\ldots+ c_k\varphi_k(t_j))]\, \varphi_m (t_j) = 0 \qquad m =1,\ldots k. \tag{5.22}$$

ή

$$\sum_{j=1}^{n} = [\ \varphi_1(t_j)\varphi_1(t_j)]c_1 + \ldots + [\varphi_k(t_j)\varphi_k(t_j)]c_k = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j)f_j \qquad m = 1,\ldots,k$$

ή

$$Bc = d,$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε τον ίδιο συμμετρικό B και τον ίδιο d που έδωσε και ο πρώτος τρόπος, με τις σχέσεις (5.18)-(5.19).

Επιπλέον, από τις σχέσεις (5.8), (5.9), (5.10) που περιγράφουν το αρχικό σύστημα, με τον A να είναι nxk και $b \in \mathbb{R}^n$, παρατηρούμε ότι

$$B = A^T A \qquad (5.23)$$

και

$$d = A^T b \qquad (5.24)$$

Έτσι το σύστημα (5.17) που χρειάζεται να λύσουμε είναι το

$$A^T A c = A^T b \qquad (5.25)$$

Αυτές είναι οι καλούμενες «κανονικές» εξισώσεις και βέβαια μπορούν να παραχθούν αμέσως με πολλαπλασιασμό του αρχικού συστήματος Ac=b από αριστερά με τον A^T.

Παράδειγμα 1.2 Το αποτέλεσμα τεσσάρων μετρήσεων (n=4) περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα

j =	1	2	3	4
t_j =	1	1.2	1.8	2
f_j =	5.16	5.70	6.98	7.37

Οι ειδικοί για το συγκεκριμένο θέμα στο οποίο αναφέρονται οι μετρήσεις γνωρίζουν (και το παρατηρούμε από τις συγκεκριμένες τιμές) ότι η f πρέπει να είναι ευθεία. Άρα παίρνουμε $\varphi_1(t) = 1$ και $\varphi_2(t) = t$ και θεωρούμε την

$$f(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = c_1 + c_2\, t$$

Η απαίτηση και τα τέσσερα σημεία των εξισώσεων να ανήκουν στην ευθεία της f δίνει το σύστημα

$$Ac = b$$

με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.2 \\ 1 & 1.8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5.16 \\ 5.70 \\ 6.98 \\ 7.37 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει 2 αγνώστους και 4 εξισώσεις και δεν έχει λύση. Η εφαρμογή της μεθόδου των ελάχιστων τετραγώνων δίνει τις κανονικές εξισώσεις

$$Bc = d$$

όπου

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9.68 \end{bmatrix},$$

και $$d = A^T b = \begin{bmatrix} 25.21 \\ 39.30 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι 2x2 και λύνεται εύκολα δίνοντας $c_1 = 3.0268$, $c_2 = 2.1838$
άρα

$$f(t) = 3.0268 + 2.1838t$$

__Άσκηση 5.1__ Να εφαρμοσθεί η μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων για την περίπτωση του Παραδείγματος 5.1

__Παρατήρηση__ Ο $B=A^TA$ μπορεί να μην έχει καλό δείκτη κατάστασης. Έτσι χρειάζεται προσοχή στην επιλογή των συναρτήσεων φ_q στην έκφραση (5.6) που επιλέγουμε για την f, αφού οι συναρτήσεις αυτές καθορίζουν τον B μέσω της (5.18). Η επιλογή πρέπει να αποσκοπεί στην δημιουργία ενός «καλού B». Αν για παράδειγμα επιλέγαμε τις φ_q ώστε τα αντίστοιχα διανύσματα $\varphi_q = [\varphi_q(t_1),..,\varphi_q(t_n)]^T$ να είναι μεταξύ τους κάθετα θα είχαμε διαγώνιο πίνακα B.