ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Συμβολισμοί

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n},\ \text{όπου } m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών.
$\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός ακολουθίας

Ενας αρχικός (διαισθητικός) ορισμός της ακολουθίας πραγματικών αριθμών είναι ο εξής: *Ακολουθία είναι μια άπειρη συλλογή πραγματικών αριθμών με ορισμένη διάταξη.* Για παράδειγμα:
$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots$
$1,\ -1,\ 1, \ldots$
$2,\ 2,\ 2, \ldots$
$10,\ 20,\ 30, \ldots$
Παρατηρήστε ότι στα παραπάνω παραδείγματα, για να εκφράσουμε την απειρία των όρων χρησιμοποιούμε τις τρεις τελείες, που δεν μπορεί να θεωρηθεί αυστηρός συμβολισμός. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα και να δώσουμε αυστηρό ορισμό της ακολουθίας, κάνουμε χρήση της έννοιας της απεικόνισης .

Ορισμός 1. *Ακολουθία (πραγματικών αριθμών) λέγεται μια απεικόνιση*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Η παραπάνω απεικόνιση αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό n τον πραγματικό αριθμό $a(n)$. Μέ αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μια άπειρη 'συλλογή' πραγματικών αριθμών με ορισμένη διάταξη η οποία προέρχεται από την διάταξη των φυσικών αριθμών. Οι αριθμοί $a(n)$ λέγονται όροι της ακολουθίας. Για παράδειγμα:
Η απεικόνιση $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $a(n) = \frac{1}{n}$ ορίζει ακολουθία αριθμών με πρώτους όρους, δηλ. για $n = 1, 2, 3, \ldots$, τους $a(1) = 1$, $a(2) = \frac{1}{2}$, $a(3) = \frac{1}{3}, \ldots$.
Η απεικόνιση $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $a(n) = (-1)^{n+1}$ ορίζει ακολουθία αριθμών με πρώτους όρους τους $a(1) = 1$, $a(2) = -1$, $a(3) = 1, \ldots$.
Η απεικόνιση $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $a(n) = 2$ ορίζει ακολουθία αριθμών με πρώτους όρους τους $a(1) = 2$, $a(2) = 2$, $a(3) = 2, \ldots$.
Η απεικόνιση $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $a(n) = 10n$ ορίζει ακολουθία αριθμών με πρώτους όρους τους $a(1) = 10$, $a(2) = 20$, $a(3) = 30, \ldots$.

Συμβολισμός 1. *Εστω $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια ακολουθία.*
1. Συμβολίζουμε, για απλότητα, το $a(n)$ με a_n.
2. Συμβολίζουμε, για απλότητα, την απεικόνιση $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ με (a_n).

Επομένως, το αντίστοιχο της έκφρασης

' δίδεται η ακολουθία που ορίζεται από την απεικόνιση $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $a(n) = \frac{1}{n}$ '

θα είναι

$$\text{‘ δίδεται η ακολουθία } (a_n) \text{ με } a_n = \frac{1}{n} \text{ ’,}$$

ή απλούστερα

$$\text{‘ δίδεται η ακολουθία } (\tfrac{1}{n}) \text{ ’.}$$

Για μιά ακολουθία (a_n), οι αριθμοί $a_1, a_2, a_3, \ldots$ λέγονται *όροι της ακολουθίας*, ο δέ a_n, $n =$‘γενικό’, λέγεται *ο γενικός όρος της ακολουθίας*.

Παραδείγματα: Η ακολουθία (a_n) με $a_n = n^2$, δηλ. η ακολουθία (n^2) έχει πρώτους όρους τους $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9, \ldots$ και γενικό όρο τον n^2.
Η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, δηλ. η ακολουθία $(\frac{(-1)^n}{n})$ έχει πρώτους όρους τους $\frac{-1}{1} = -1$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{3}, \ldots$ και γενικό όρο τον $\frac{(-1)^n}{n}$.

Όριο ακολουθίας

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι: πού ‘τείνει’ η ακολουθία (a_n) όταν το n γίνεται όλο και μεγαλύτερο; Για παράδειγμα, για την ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{1}{n}$, όταν το n μεγαλώνει τότε ο όρος a_n μικραίνει και πλησιάζει το μηδέν. Επομένως, είναι φυσιολογικό να πούμε ότι η ακολουθία τείνει στο μηδέν. Αν όμως θέσουμε το ίδιο ερώτημα για τις ακολουθίες $((-1)^{n+1})$, $(10n)$, $(\frac{n}{n+1})$ η απάντηση δεν είναι προφανής. Η δυσκολία έγκειται στο ότι το παραπάνω ερώτημα δεν είναι αυστηρά διατυπωμένο, δηλ. δεν έχουμε δώσει αυστηρό ορισμό στην έννοια του ‘τείνει’. Γι’ αυτό χρειάζεται να εισάγουμε τον ορισμό του *ορίου μιας ακολουθίας*, ορισμός που υπήρξε σταθμός στα μαθηματικά. Ο τρόπος που ορίζεται το όριο μιας ακολουθίας είναι μαθηματικά αυστηρός, δύσκολα όμως εφαρμόσημος ως έχει. Αυτό είναι μια συνηθισμένη πρακτική στα μαθηματικά. Πολλές φορές οι ορισμοί εννοιών είναι δύσκολο να εφαρμοστούν ως έχουν. Όμως, με βάση τους ορισμούς, αποδεικνύουμε ιδιότητες που είναι ευκολόχρηστες και ουσιαστικά στην πράξη δουλεύουμε με αυτές. Η ανάγκη του αυστηρού ορισμού παραμένει διότι η θεωρία που αναπτύσσουμε πρέπει να είναι καλά θεμελιωμένη. Αρχίζουμε με μια προκαταρτική έννοια.

Ορισμός 2. *Εστω a πραγματικός αριθμός και r θετικός πραγματικός αριθμός. Γειτονιά του a ακτίνας $r > 0$, συμβολικά $D_a(r)$, ορίζεται να είναι το σύνολο*

$$D_a(r) = \{x \in \mathbb{R},\ \textit{με}\ |x - a| < r\}.$$

Ο θετικός αριθμός r λέγεται ακτίνα της γειτονιάς.

Δηλαδή, με άλλα λόγια, το σύνολο $D_a(r)$ περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς που η απόστασή τους από τον a είναι μικρότερη από r. Οσο μικραίνει η ακτίνα r τόσο μικρότερη γίνεται και η γειτονιά. Σημειώνουμε τη ισοδυναμία

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r.$$

Δίδουμε τώρα τον ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας γεωμετρικά.

Ορισμός 3 (Γεωμετρικός ορισμός του ορίου ακολουθίας)**.** *Εστω (a_n) ακολουθία και c πραγματικός αριθμός. Λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο τον αριθμό c (διαφορετικά: συγκλίνει στον αριθμό c, ή τείνει στον αριθμό c) όταν ισχύει το εξής:*

Αν δοθεί μια οποιαδήποτε γειτονιά $D_c(\epsilon)$ του c ακτίνας $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 (ο οποίος εξαρτάται από την επιλογή της παραπάνω γειτονιάς) γιά τον οποίο να ισχύει ότι $a_n \in D_a(\epsilon)$, $\forall n \geq n_0$.

Περιγραφικά αυτό εκφράζεται ως εξής: δοσμένης μιας οποιασδήποτε γειτονιάς του c (οσοδήποτε μικρής) τότε μπορούμε να παραλείψουμε κάποιους, πεπερασμένους το πλήθος, αρχικούς όρους της ακολουθίας ώστε όλοι οι υπόλοιποι όροι να περιέχονται σε αυτή την γειτονιά. Τό πόσους αρχικούς όρους παραλείπουμε, εξαρτάται από το μέγεθος της γειτονιάς που δίδεται. Οσο μικρότερη η γειτονιά τόσο περισσότεροι οι αρχικοί όροι που παραλείπουμε.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό 2 μπορούμε να μεταφράσουμε τον παραπάνω γεωμετρικό ορισμό του ορίου στον κάτωθι αλγεβρικό.

Ορισμός 4 (Αλγεβρικός ορισμός του ορίου ακολουθίας)**.** *Εστω (a_n) ακολουθία και c πραγματικός αριθμός. Λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο τον αριθμό c (διαφορετικά: συγκλίνει στον αριθμό c, ή τείνει στον αριθμό c) όταν ισχύει το εξής:*

Αν δοθεί ένας οποιοσδήποτε θετικός $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 (ο οποίος εξαρτάται από την επιλογή του ϵ) γιά τον οποίο να ισχύει ότι $|a_n - c| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Ο γεωμετρικός ορισμός είναι πιο εποπτικός, όμως ο αλγεβρικός είναι αυτός με τον οποίο μπορούμε να δουλέψουμε στην πράξη. Οτι το n_0 εξαρτάται από την επιλογή του ϵ, το παριστούμε με $n_0 = n_0(\epsilon)$.

Συμβολισμός 2. *Για να δηλώσουμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο τον αριθμό c χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = c \;\text{ ή }\; \lim_{n\to\infty} a_n = c. \;\text{ Απλούστερα }\; \lim(a_n) = c \;\text{ ή }\; \lim a_n = c,$$

Ορισμός 5. *Εστω (a_n) ακολουθία. Λέμε την (a_n) συγκλίνουσα ή ότι συγκλίνει, άν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $\lim a_n = c$. Διαφορετικά λέμε την (a_n) αποκλίνουσα ή ότι αποκλίνει.*

Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα με όρια ακολουθιών. Υπενθυμίζουμε πρώτα έναν συμβολισμό. Αν $a \in \mathbb{R}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, συμβολίζουμε με $[a]$ το ακέραιο μέρος του a, που ορίζεται ως ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος του a. Δηλαδή,

$$[a] = \text{μέγιστο}\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq a\}.$$

Για παράδειγμα, $[2.5] = 2$, $[4.97] = 4$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4, [6] = 6$, $[0.25] = 0, [-0.5] = -1$. Σημειώνουμε ότι $[a] \leq a < [a] + 1$.

Παράδειγμα 1. Δείξτε ότι $\lim \frac{1}{n} = 0$.
Η ακολουθία είναι η (a_n) με $a_n = \frac{1}{n}$. Θα εφαρμόσουμε τον αλγεβρικό ορισμό. Εστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$, τότε ζητάμε έναν φυσικό αριθμό $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε να ισχύει

$$|\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon,\ \forall n \geq n_0\,.$$

Αν $\epsilon > 1$ διαλέγουμε $n_0 = 1$. Τότε, πράγματι, $\forall\ n \geq n_0 = 1$ έχουμε

$$\frac{1}{n} \leq 1 < \epsilon.$$

Αν $\epsilon \leq 1$ τότε ορίζουμε $\epsilon' = \frac{1}{\epsilon} \geq 1$ και διαλέγουμε $n_0 = [\epsilon'] + 1$. Τότε, πράγματι, $\forall\ n \geq n_0$ έχουμε

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{[\epsilon'] + 1} < \frac{1}{\epsilon'} = \epsilon.$$

Παρατηρήστε στο παραπάνω παράδειγμα ότι όσο μικρότερο ειναι το ϵ, δηλ. όσο μικρότερη είναι η γειτονιά του $c = 0$, τόσο μεγαύτερο είναι το n_0, δηλ. τόσο μεγαλύτερο πλήθος από τους αρχικούς όρους της ακολουθίας πρέπει να παραλείψουμε ώστε οι υπόλοιποι να ανήκουν στην δοθείσα γειτονιά.

Παράδειγμα 2. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = (-1)^{n+1}$ αποκλίνει.
Θα χρησιμοποιήσουμε την επαγωγή εις άτοπον. Εστω ότι η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό c. Υποθέτουμε κατ΄ αρχάς ότι $c \geq 0$. Από τον ορισμό, θα πρέπει όταν δοθεί κάποιος πραγματικός $\epsilon > 0$, για παράδειγμα πάρε $\epsilon = \frac{1}{2}$, να μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε να ισχύει

$$|a_n - c| = |(-1)^{n+1} - c| < \epsilon = \frac{1}{2},\ \forall n \geq n_0\,.$$

Ομως αυτό δεν είναι εφικτό, διότι για οποιονδήποτε φυσικό n_0, όταν διαλέξουμε $n = 2n_0 \geq n_0$ θα έχουμε

$$|a_n - c| = |(-1)^{2n_0+1} - c| = |-1 - c| = 1 + c > \frac{1}{2}\,.$$

Ομοίως φτάνουμε σε άτοπο αν το $c \leq 0$.

Παράδειγμα 3. Εστω c πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε την ακολουθία (a_n) με $a_n = c$. Αυτή λέγεται σταθερή ακολουθία. Ευκολα φαίνεται από τον ορισμό ότι το όριό της είναι το c.

Πρόταση 1. *Εστω ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει. Τότε το όριό της είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Εστω ότι $\lim a_n = c$ και $\lim a_n = c'$ με $c \neq c'$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c' > c$. Εστω $\epsilon = \frac{c'-c}{2} > 0$. Τότε αφού $\lim a_n = c$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - c| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Επίσης, αφού $\lim a_n = c'$ υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - c'| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0'$. Εστω $n_1 = \text{μέγιστο}(n_0, n_0')$. Τότε γιά κάθε $n \geq n_1$ θα έχουμε

$$|a_n - c| < \epsilon = \frac{c' - c}{2} \Longrightarrow a_n < c + \frac{c' - c}{2} = \frac{c' + c}{2}$$

και επίσης

$$|a_n - c'| < \epsilon = \frac{c' - c}{2} \Longrightarrow c' - \frac{c' - c}{2} = \frac{c' + c}{2} < a_n\,.$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούν σε άτοπο. □

Πρόταση 2. *Το όριο μιας ακολουθίας είναι ανεξάρτητο των πρώτων όρων της. Δηλαδή, αν (a_n) ακολουθία και $N \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την ακολουθία (a_n') με $a_n' = a_{N+n}$. Τότε*

$$\textit{η ακολουθία } (a_n) \textit{ συγκλίνει στον } c \Longleftrightarrow \textit{ η ακολουθία } (a_n') \textit{ συγκλίνει στον } c$$

Απόδειξη. '$\Longrightarrow$' Εστω ότι η (a_n) συγκλίνει στο c, δείχνουμε ότι η (a'_n) συγκλίνει στο c. Πράγματι έστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$, ζητάμε n_0 τέτοιο ώστε $|a'_n - c| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Η (a_n) συγκλίνει και επομένως για το παραπάνω ϵ υπάρχει ένα m_0 τέτοιο ώστε $|a_n - c| < \epsilon$, $\forall n \geq m_0$. Επιλέγουμε $n_0 =$ μέγιστο$(1, m_0 - N)$. Τότε $\forall n \geq n_0 \Rightarrow N + n \geq m_0$ και άρα $|a'_n - c| = |a_{N+n} - c| < \epsilon$. Αναλόγως γίνεται και η απόδειξη του αντιστρόφου. □

Παράδειγμα 4. Η ακολουθία (b_n) με $b_n = \frac{1}{n+1}$ έχει όριο το μηδέν. Πράγματι, από το παράδειγμα 1 γνωρίζουμε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{1}{n}$ έχει όριο το μηδέν. Από την άλλη μερια, παρατηρήστε ότι $b_n = a_{n+1}$. Ομοίως, αν n_0 ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, έχουμε ότι $\lim \frac{1}{n+n_0} = 0$.

Πόρισμα 1. *Αν δύο ακολουθίες διαφέρουν μόνον κατά τους πρώτους όρους τους τότε έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την σύγκλιση.*

Πρόταση 3. $\lim a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim |a_n| = 0$

Απόδειξη. Πραγματι αυτό ισχύει διότι $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$. □

Σημείωση 1. Το παραπάνω δεν ισχύει όταν το όριο της ακολουθίας είναι $\neq 0$. Πράγματι η ακολουθία (a_n) με $a_n = (-1)^{n+1}$ δεν έχει όριο (είναι αποκλίνουσα), όμως η $(|a_n|)$ είναι η ακολουθία με $|a_n| = 1$ και άρα έχει όριο το 1.

Παράδειγμα 5. $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$ διότι $\lim \frac{1}{n} = 0$, βλ. παράδειγμα 1.

Οταν έχουμε μια ακολουθία (a_n) τίθενται δύο βασικά ερωτήματα: Το πρώτο είναι αν η ακολουθία είναι συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα. Και το δεύτερο: στην περίπτωση που η ακολουθία (a_n) είναι συγκλίνουσα τότε να βρεθεί το όριό της. Σημειώνουμε ότι πολλές φορές μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα χωρίς όμως να είμαστε σε θέση να προσδιορίζουμε το όριό της!!. Οπως έχουμε πεί, με απλή εφαρμογή του ορισμού είναι, εν γένει, δύσκολο να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα. Αυτό όμως που θα κάνουμε είναι να μελετήσουμε ιδιότητες των συγκλινουσών ή αποκλινουσών ακολουθιών που θα μας βοηθήσουν στην πράξη να μελετήσουμε τις ακολουθίες.

Ορισμός 6. *Μια ακολουθία (a_n) λέγεται φραγμένη αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $M \geq 0$ τέτοιος ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Σημειώνουμε ότι

$$|a_n| \leq M \Longleftrightarrow -M \leq a_n \leq M \ , \forall n \in \mathbb{N} \, .$$

Πρόταση 4. *Η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνον αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί M_1, M_2 τέτοιοι ώστε $M_1 \leq a_n \leq M_2 \ , \forall n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Αν η ακολουθία είναι φραγμένη τότε υπάρχει αριθμός M με $-M \leq a_n \leq M$. Τότε διάλεξε $M_1 = -m$, $M_2 = M$. Αντίστροφα, αν υπάρχουν αριθμοί M_1, M_2 τέτοιοι ώστε $M_1 \leq a_n \leq M_2$ τότε διάλεξε $M =$ μέγιστο$(|M_1|, |M_2|)$. □

Θεώρημα 1. *Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Εστω ότι η (a_n) συγκλίνει στον αριθμό c. Τότε αν διαλέξουμε $\epsilon = 1$ θα υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $|a_n - c| < 1$, $\forall n \geq n_0$ δηλαδή $c - 1 < a_n < c+1$, $\forall n \geq n_0$. Διαλέγουμε $M_2 =$ μέγιστο$(c+1, a_1, \ldots, a_{n_0-1})$ και $M_1 =$ ελάχιστο$(c-1, a_1, \ldots, a_{n_0-1})$. Τότε $M_1 \leq a_n \leq M_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Σημείωση 2. Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία (a_n) με $a_n = (-1)^{n+1}$ είναι φραγμένη, όμως δεν συγκλίνει, βλ. παράδειγμα 2.

Πόρισμα 2. *Αν η ακολουθία (a_n) δεν είναι φραγμένη τότε είναι αποκλίνουσα.*

Δίδουμε τους παρακάτω ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

Ορισμός 7.

1. *Μια ακολουθία (a_n) λέγεται φραγμένη από κάτω αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M_1 τέτοιος ώστε $M_1 \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

2. *Μια ακολουθία (a_n) λέγεται φραγμένη από πάνω αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M_2 τέτοιος ώστε $a_n \leq M_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Το M_1 (αντ. M_2) στον παραπάνω ορισμό λέγεται ένα κάτω φράγμα (αντ. άνω φράγμα) της ακολουθίας. Από την πρόταση 4 έχουμε ότι μια ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνον άν είναι φραγμένη από κάτω και από πάνω.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια σχετική πρόταση.

Πρόταση 5. *Εστω (a_n) μια συγκλίνουσα ακολουθία και M πραγματικός αριθμός με την ιδιότητα $M \leq a_n$, $\forall n \geq m_0$ (αντ. $a_n \leq M$, $\forall n \geq m_0$) για κάποιον φυσικό m_0. Τότε $M \leq \lim a_n$ (αντ. $\lim a_n \leq M$).*

Απόδειξη. Με εις άτοπον επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι $\lim a_n = c < M$. Τότε για $\epsilon = \frac{M-c}{2} > 0$ υπάρχει ένας φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $|a_n - c| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Επομένως $a_n < c + \epsilon = c + \frac{M-c}{2} = \frac{M+c}{2} < \frac{M+M}{2} = M$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι τότε αν $n \geq$ μέγιστο(n_0, m_0) θα έχουμε $M \leq a_n < M$. □

Ιδιότητες των ορίων

Εστω (a_n), (b_n) ακολουθίες.

Αθροισμα των (a_n) και (b_n) λέγεται η ακολουθία $(a_n + b_n)$.
Διαφορά της (a_n) μείον (b_n) λέγεται η ακολουθία $(a_n - b_n)$.
Γινόμενο των (a_n) και (b_n) λέγεται η ακολουθία $(a_n b_n)$.
Πηλίκον της (a_n) δια της (b_n) λέγεται η ακολουθία $(\frac{a_n}{b_n})$, με την προϋπόθεση ότι $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Τετραγωνική ρίζα της ακολουθίας (a_n) λέγεται η ακολουθία $(\sqrt{a_n})$, με την προϋπόθεση ότι $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 6. Αν $a_n = 1, b_n = \frac{1}{n}$ τότε το άθροισμά τους είναι η ακολουθία $(\frac{n+1}{n})$ και η διαφορά της (a_n) μείον (b_n) είναι η ακολουθία $(\frac{n-1}{n})$. Αν $a_n = n^2, b_n = n^2 + 1$ τότε το πηλίκον της (a_n) δια της (b_n) είναι η ακολουθία $(\frac{n^2}{n^2+1})$.

Σημείωση 3. Στον παραπάνω ορισμό του πηλίκου ακολουθίας θέσαμε τον περιορισμό $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ἐτσι για παράδειγμα, αν $a_n = n$ και $b_n = (n-1)(n-5)$, τότε με βάση τον παραπάνω ορισμό το πηλίκον $(\frac{a_n}{b_n})$ δεν ορίζεται. Από την άλλη μεριά, το πρόβλημα υπάρχει μόνο στους όρους που αντιστοιχούν στις τιμές του $n = 1$ και 5, δηλ. πρόβλημα υπάρχει μόνο σε κάποιους - πεπερασμένους το πλήθος - αρχικούς όρους της ακολουθίας πηλίκον. Όπως όμως έχουμε δεί στην πρόταση 2, το όριο μιας ακολουθίας είναι ανεξάρτητο των αρχικων της όρων και επομένως είναι φυσιολογικό να περιλάβουμε στην μελέτη μας και ακολουθίες όπως την παραπάνω. Επεκτείνουμε επομένως τον ορισμό του πηλίκου δύο ακολουθιών ως εξής. Εστω (a_n), (b_n) ακολουθίες και έστω πεπερασμένοι μόνο το πλήθος όροι της b_n λαμβάνουν την τιμή μηδέν. Εστω m_0 ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο ισχύει ότι $b_n = 0$. Ορίζουμε τότε το πηλίκον της (a_n) δια της (b_n) ως την ακολουθία (c_n) με $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, αν $n > m_0$ και $c_n =$ οτιδήποτε, π.χ. $c_n = 1$, αν $n = 1, \ldots, m_0$. Διατηρούμε όμως τον συμβολισμό $(\frac{a_n}{b_n})$ για να δηλώσουμε το πηλίκον των δύο ακολουθιών. Επομένως, για παράδειγμα, άν $a_n = n$ και $b_n = (n-1)(n-5)$ τότε η ακολουθία πηλίκο $(\frac{n}{(n-1)(n-5)})$, είναι η ακολουθία (c_n) με $c_n = \frac{n}{(n-1)(n-5)}$, αν $n > 5$ και $c_1 = \cdots = c_5 = 1$. Όταν όμως η ακολουθία (b_n) έχει άπειρους το πλήθος όρους που λαμβάνουν την τιμή μηδέν, π.χ. $b_n = \cos\frac{n\pi}{2}$, τότε η ακολουθία πηλίκον δεν όρίζεται.

Το παρακάτω θεώρημα είναι ένα από τα κύρια εργαλεία για την εύρεση ορίου ακολουθιών.

Θεώρημα 2. *Εστω (a_n) και (b_n) συγκλίνουσες ακολουθίες με $\lim a_n = a$ και $\lim b_n = b$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b\,,$
2. $\lim(a_n - b_n) = a - b\,,$
3. $\lim(a_n b_n) = ab\,,$
4. *Αν $b \neq 0$, τότε $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$.*

Σημείωση 4. Σημειώνουμε ότι αν $b \neq 0$ τότε η ακολουθία b_n έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος όρων με τιμή μηδέν και επομένως η ακολουθία πηλίκον ορίζεται. Πράγματι, αφού $b \neq 0$, ας υποθέσουμε χ.β.γ. ότι $b > 0$. Η ακολουθία b_n έχει όριο το b και επομένως αν διαλέξουμε $\epsilon = b/2 > 0$ τότε υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $|b_n - b| < b/2,\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow b_n > b - b/2 = b/2 > 0,\ \forall n \geq n_0$.

Πρίν κάνουμε την απόδειξη της παραπάνω πρότασης ας δώσουμε κάποια πορίσματα και παραδείγματα.

Πόρισμα 3. *Εστω (a_n) ακολουθία που συγκλίνει στον πραγματικό a και έστω c πραγματικός αριθμός. Ισχύουν τα παρακάτω:*
$\lim(ca_n) = ca\,,$
$\lim(a_n - c) = a - c\,,$
Αν $a \neq 0$ τότε $\lim(\frac{1}{a_n}) = \frac{1}{a}$.

Παράδειγμα 7. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\frac{n+1}{n}$. Έχουμε $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Αφού $\lim 1 = 1$ και $\lim\frac{1}{n} = 0$, βλ. παράδειγμα 1, τότε $\lim\frac{n+1}{n} = 1 + 0 = 1$.

Παράδειγμα 8. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\frac{n}{n+1}$. Έχουμε $\frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Αφού $\lim 1 = 1$ και $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, βλ. παράδειγμα 4, τότε $\lim \frac{n}{n+1} = 1 - 0 = 1$.

Παράδειγμα 9. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\frac{1}{n^2}$. Έχουμε $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n}$. Αφού $\lim \frac{1}{n} = 0$, βλ. παράδειγμα 1, τότε $\lim \frac{1}{n^2} = 0 \cdot 0 = 0$.

Παράδειγμα 10. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\frac{1}{n^2-1}$. Έχουμε $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n-1}\frac{1}{n+1}$. Από την πρόταση 2 και το πόρισμά της, έχουμε ότι το όριο των ακολουθιών $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n+1}$ είναι το ίδιο με το όριο της ακολουθίας $\frac{1}{n}$, δηλαδή μηδέν. Επομένως, $\lim \frac{1}{n^2-1} = 0 \cdot 0 = 0$.

Παράδειγμα 11. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\frac{n^2+1}{n^2-1}$. *Πρώτος τρόπος εύρεσης του ορίου:* Έχουμε $\frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{n^2-1+2}{n^2-1} = 1 + \frac{2}{n^2-1}$. Από το παράδειγμα 10 έχουμε ότι $\lim \frac{1}{n^2-1} = 0$ και επομένως $\lim \frac{2}{n^2-1} = 0$. Συνεπώς, $\lim \frac{n^2+1}{n^2-1} = 1 + 0 = 1$. *Δεύτερος τρόπος εύρεσης του ορίου:* Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με n^2, έχουμε

$$\frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} .$$

Αφού $\lim \frac{1}{n^2} = 0$, παίρνουμε ότι $\lim \frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{1+0}{1-0} = 1$.

Σημείωση 5. Αν το $b = 0$ στην περίπτωση του πηλίκου της παραπάνω πρότασης τότε η συμπεριφορά της ακολουθίας πηλίκον $(\frac{a_n}{b_n})$ ως προς το όριο είναι απροσδιόριστη. Για παράδειγμα, αν $a_n = \frac{1}{n^2}$ και $b_n = \frac{1}{n}$ τότε $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$. Από την άλλη, αν $a_n = 1$ και $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ τότε η ακολουθία $(\frac{a_n}{b_n})$ δεν συγκλίνει.

Σημείωση 6. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον ακόλουθο συμβολισμό για να διατυπώσουμε τις ιδιότητες των ακολουθιών που αναφέρονται στο θεώρημα 2:
$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$,
$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$,
$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \, \lim b_n$,
$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.
Θα πρέπει όμως να έχουμε υπόψη μας ότι αυτή η γραφή ισχύει μόνον στην περίπτωση που τα όρια $\lim a_n$ και $\lim b_n$ υπάρχουν - και στην περίπτωση του πηλίκου να είναι το $\lim b_n \neq 0$. Έτσι, για παράδειγμα, μπορούμε να γράψουμε $\lim \frac{1}{n^3} = \lim \frac{1}{n} \lim \frac{1}{n^2}$, όμως δεν είναι σωστό να γράψουμε ότι $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim(-1)^n \lim \frac{1}{n}$. Για το τελευταίο παρατηρήστε ότι $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$, βλ. παράδειγμα 5, ενώ το $\lim(-1)^n$ δεν υπάρχει, βλ. παράδειγμα 2.

Γυρνάμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος 2·

Απόδειξη. Απόδειξη του 1: Έστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\epsilon' = \epsilon/2 > 0$. Αφού $\lim a_n = a$ και $\lim b_n = b$ υπάρχουν n_1, n_2 τέτοια ώστε $|a_n - a| < \epsilon'$, $\forall n \geq n_1$ και $|b_n - b| < \epsilon'$, $\forall n \geq n_2$. Επιλέγουμε $n_0 = \text{μέγιστο}(n_1, n_2)$. Τότε $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon' + \epsilon' = \epsilon$, $\forall n \geq n_0$.
Απόδειξη του 2: Ανάλογη με αυτή του 1.

Απόδειξη του 3: Αφού η ακολουθία (a_n) είναι συγκλίνουσα θα είναι φραγμένη, βλ. θεώρημα 1. Υπάρχει επομένως πραγματικός αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω τώρα ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(|b|+1)} > 0$ και $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2M} > 0$. Αφού $\lim a_n = a$ και $\lim b_n = b$ υπάρχουν n_1, n_2 τέτοια ώστε $|a_n - a| < \epsilon_1$, $\forall n \geq n_1$ και $|b_n - b| < \epsilon_2$, $\forall n \geq n_2$. Επιλέγουμε $n_0 =$ μέγιστο(n_1, n_2). Τότε $|(a_n b_n) - (ab)| = |(a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |b(a_n - a) + a_n(b_n - b)| \leq |b||a_n - a| + |a_n||b_n - b| < |b|\frac{\epsilon}{2(|b|+1)} + M\frac{\epsilon}{2M} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Απόδειξη του 4: Αρκεί να αποδείξουμε το ερώτημα στην ειδική περίπτωση όπου $a_n = 1$, δηλαδή ότι $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Η απόδειξη της γενικής περίπτωσης είναι συνέπεια της ειδικής περίπτωσης και της περίπτωσης 3: πράγματι, $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ και επομένως $\lim \frac{a_n}{b_n} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Για την απόδειξη της ειδικής περίπτωσης χρησιμοποιούμε την εξής παρατήρηση, η απόδειξη της οποίας συνάγεται από αυτά που αναφέρονται στην σημείωση 4: υπάρχει φυσικός n_1 με την ιδιότητα $b_n > \frac{|b|}{2}$, $\forall n \geq n_1$. Έστω τώρα ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\epsilon' = \frac{|b|^2}{2}\epsilon > 0$ (διότι $b \neq 0$). Αφού $\lim b_n = b$ υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|b_n - b| < \epsilon'$, $\forall n \geq n_2$. Επιλέγουμε $n_0 =$ μέγιστο(n_1, n_2). Τότε $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = ||b_n - b|\frac{1}{|b_n|}\frac{1}{|b|} < \epsilon' \frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|} = \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. □

Θεώρημα 3. *Εστω (a_n) ακολουθία με $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι η (a_n) συγκλίνει στον αριθμό c. Τότε $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{c}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι $c \geq 0$, βλ. 5, και επομένως η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{c}$ μπορεί να ορισθεί στους πραγματικούς. Αποδεικνύουμε την πρόταση πρώτα για την περίπτωση $c = 0$ εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου. Εστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\epsilon' = \epsilon^2 > 0$. Αφού $\lim a_n = 0$ υπάρχει ένας φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $|a_n| = a_n < \epsilon' = \epsilon^2$, $\forall n \geq n_0$. Συνεπώς, για το ίδιο n_0 θα έχουμε ότι $\sqrt{a_n} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Αποδεικνύουμε τώρα την πρόταση για την περίπτωση $c \neq 0$. Εστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\epsilon' = \epsilon\sqrt{c} > 0$. Αφού $\lim a_n = c$ υπάρχει ένας φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $|a_n - c| =< \epsilon'$, $\forall n \geq n_0$. Έχουμε $|a_n - c| = (|\sqrt{a_n} - \sqrt{c}|)(\sqrt{a_n} + \sqrt{c})$ συνεπώς $|\sqrt{a_n} - \sqrt{c}| = \frac{|a_n - c|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{c}} \leq \frac{|a_n - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\epsilon'}{\sqrt{c}} = \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. □

Παράδειγμα 12. Γνωρίζουμε ότι $\lim \frac{1}{n} = 0$ συνεπώς $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{0} = 0$.

Θεώρημα 4 (Εγκιβωτισμός)**.** *Έστω (a_n), (b_n) (c_n) ακολουθίες που συνδέονται με την σχέση $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq N$, όπου N κάποιος φυσικός αριθμός. Έστω, επίσης, ότι $\lim a_n = l = \lim c_n$. Τότε $\lim b_n = l$.*

Απόδειξη. Έστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Αφού $\lim a_n = l$ και $\lim c_n = l$ υπάρχουν n_1, n_2 τέτοια ώστε $|a_n - l| < \epsilon$, $\forall n \geq n_1$ και $|c_n - l| < \epsilon$, $\forall n \geq n_2$. Επομένως $l - \epsilon < a_n$, $\forall n \geq n_1$ και $c_n < l + \epsilon$, $\forall n \geq n_2$. Επιλέγουμε $n_0 =$ μέγιστο(N, n_1, n_2). Τότε $l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon$, $\forall n \geq n_0$ και συνεπώς $l - \epsilon < b_n < l + \epsilon$, $\forall n \geq n_0$, δηλαδή $|b_n - l| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. □

Παράδειγμα 13. $\lim \frac{\cos n}{n} = 0$. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim \frac{|\cos n|}{n} = 0$, βλ. πρόταση 3. Γνωρίζουμε ότι $|\cos n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν $0 \leq \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$. Αφού, $\lim 0 = 0$ και $\lim \frac{1}{n} = 0$ συνάγουμε $\lim \frac{|\cos n|}{n} = 0$.

Για το επόμενο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής την οποία συνοψίζουμε παρακάτω. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται προκειμένου να αποδείξουμε ότι μια πρόταση, η οποία εκφράζεται με την βοήθεια φυσικού αριθμού n, ισχύει για όλες - ή σχεδόν όλες - τις τιμές που δύναται να λάβει ο φυσικός αριθμός n. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $P(n)$ για να δηλώσουμε μιά πρόταση η οποία εκφράζεται με την βοήθεια φυσικού αριθμού n.

Μέθοδος μαθηματικής επαγωγής - πρώτη μορφή: Εστω n_0 κάποιος φυσικός αριθμός. Αν για μιά πρόταση $P(n)$ ισχύουν ότι

1. Η πρόταση αληθεύει για $n = n_0$.
2. Με την υπόθεση ότι γιά ένα $n \geq n_0$ η $P(n)$ είναι αληθής (επαγωγική υπόθεση) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $P(n+1)$ αληθεύει.

Τότε η πρόταση $P(n)$ αληθεύει γιά κάθε $n \geq n_0$.

Μέθοδος μαθηματικής επαγωγής - δεύτερη μορφή: Αν για μιά πρόταση $P(n)$ ισχύουν ότι

1. Η πρόταση αληθεύει για $n = n_0$.
2. Με την υπόθεση ότι γιά ένα $n \geq n_0$ η $P(n)$ είναι αληθής γιά κάθε φυσικό k με $n_0 \leq k \leq n$ (επαγωγική υπόθεση) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $P(n+1)$ αληθεύει.

Τότε η πρόταση $P(n)$ αληθεύει γιά κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 14. Δείξτε ότι $2^n \geq n^2$, για κάθε φυσικό $n \geq 4$. Χρησιμοποιούμε την πρώτη μορφή μαθηματικής επαγωγής με $n_0 = 4$. Η πρόταση ισχύει για $n = 4$ διότι $2^4 = 16 = 4^2$. Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για έναν φυσικό $n \geq 4$, δηλαδή $2^n \geq n^2$. Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για τον φυσικό $n+1$, δηλαδή ότι $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Πράγματι, $2^{n+1} = 2\,2^n \geq 2n^2$ από την επαγωγική υπόθεση. Από την άλλη μεριά ισχύει ότι $2n^2 \geq (n+1)^2$ για $n \geq 4$ διότι $2n^2 \geq (n+1)^2 \iff 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \iff n^2 - 2n + 1 \geq 2 \iff (n-1)^2 \geq 2$ που αληθεύει όταν $n \geq 3$ και επομένως και για $n \geq 4$.

Δίδουμε τώρα ένα δεύτερο παράδειγμα για το θεώρημα του εγκιβωτισμού.

Παράδειγμα 15. $\lim \frac{n}{2^n} = 0$. Από το παραπάνω παράδειγμα 14 έχουμε ότι $2^n \geq n^2$, για $n \geq 4$ και άρα $\frac{2^n}{n} \geq n$, για $n \geq 4$. Συνεπώς, $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$, για $n \geq 4$. Αφού, $\lim 0 = 0$ και $\lim \frac{1}{n} = 0$ συνάγουμε ότι $\lim \frac{n}{2^n} = 0$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν k_0 ένας φυσικός αριθμός τότε $\lim \frac{n^{k_0}}{2^n} = 0$.

Μονότονες ακολουθίες

Ορισμός 8. *Εστω (a_n) ακολουθία. Η (a_n) λέγεται αύξουσα (αντ. φθίνουσα) αν $a_{n+1} \geq a_n$ (αντ. $a_{n+1} \leq a_n$) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια ακολουθία λέγεται μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.*

Παρακάτω διατυπώνουμε το βασικό θεώρημα σύγκλισης για μονότονες ακολουθίες.

Θεώρημα 5. *Εστω (a_n) μια αύξουσα (αντ. φθίνουσα) ακολουθία που είναι φραγμένη από πάνω (αντ. κάτω). Τότε η (a_n) είναι συγκλίνουσα.*

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος. Διαισθητικά όμως μπορούμε να πισθούμε για την αλήθεια των παραπάνω ισχυρισμών. Αν για παράδειγμα έχω μία φραγμένη από πάνω ακολουθία έστω M ένα άνω φράγμα της. Τότε οι όροι της ακολουθίας συνεχώς αυξάνουν και δεν μπορούν να υπερβούν το M. Επομένως θα πρέπει να συγκεντρώνονται σε κάποιον αριθμό ($\leq M$) ο οποίος θα είναι και το όριο της ακολουθίας. Το θεώρημα αυτό είναι χαρακτηριστική περίπτωση μαθηματικού ισχυρισμού όπου αποδεικνύεται η ύπαρξη ενός πράγματος χωρίς να δίδεται τρόπος κατασκευής του. Επομένως με το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα χωρίς - πάντα - να μπορούμε να προσδιορίσουμε το όριό της.

Παράδειγμα 16. Έστω c πραγματικός αριθμός με $0 \leq c <\leq 1$ και ορίζουμε την ακολουθία (a_n) με $a_n = c^n$. Με το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι η ακολουθία συγκλίνει. Πράγματι είναι φραγμένη από κάτω (π.χ. ένα κάτω φράγμα της είναι το μηδέν) και, επίσης, είναι φθίνουσα: πράγματι $0 \leq c \leq 1 \Longrightarrow c^{n+1} \leq c^n \Longrightarrow a_{n+1} \leq a_n$. Αν όμως μας ζητηθεί να βρούμε το όριό της θα πρέπει να δουλέψουμε λίγο παραπάνω. Αν $c = 1$ τότε η ακολουθία είναι σταθερή και το όριό της είναι το 1. Αν $c = 0$ τότε η ακολουθία είναι, επίσης, σταθερή και το όριό της είναι το 0. Έστω λοιπόν ότι $0 < c < 1$. Τότε δείχνουμε ότι $\lim a_n = 0$. Πράγματι έστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε έναν φυσικό n_0 με την ιδιότητα $n_0 > \frac{\ln \epsilon}{\ln c}$. Σημειώνουμε ότι $\ln c < 0$ διότι $0 < c < 1$. Επίσης το $\ln \epsilon$ είναι ≥ 0 αν $\epsilon \geq 1$, διαφορετικά είναι και αυτό αρνητικός αριθμός. Τότε για $n \geq n_0$ θα έχουμε $|a_n - 0| < \epsilon \Longleftrightarrow c^n < \epsilon \Longleftrightarrow n \ln c < ln \epsilon \Longleftrightarrow n > \frac{\ln \epsilon}{\ln c}$ που ισχύει. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim c^n = 0$ όταν $-1 < c < 0$. Σημειώνουμε ότι άν $c = -1$ τότε η ακολουθία είναι η $(-1)^n$ που όπως έχουμε δεί αποκλίνει. Αν τώρα το $c > 1$ ή το $c < -1$ τότε μπορούμε σχετικά εύκολα να δείξουμε ότι η ακολουθία (c^n) δεν είναι φραγμένη επομένως αποκλίνει, βλ. πόρισμα 2. Συμπερασματικά έχουμε ότι η ακολουθία (c^n) συγκλίνει στο μηδέν όταν $-1 < c < 1$, συγκλίνει στο 1 όταν $c = 1$ και αποκλίνει για όλες τις άλλες τιμές του πραγματικού αριθμού c.

Παράδειγμα 17. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ συγκλίνει. Γι' αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Bernoulli που είναι η εξής: Αν x πραγματικός αριθμός με $x \geq -1$ τότε $(1+x)^n \geq 1+nx$, για κάθε φυσικό n. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ ισχύει διότι $1 + x = 1 + x$. Έστω ότι ισχύει για n, το δείχνουμε για $n+1$. Έχουμε, $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$, από επαγωγική υπόθεση και επειδή $1+x \geq 0$. Όμως, $(1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. Επανερχόμενοι στην ακολουθία, θα δείξουμε ότι είναι αύξουσα και φραγμένη. Για το αύξουσα:

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &\leq (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \Longleftrightarrow \\
(1+\frac{1}{n})^{-1} &\leq (\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}})^{n+1} = (\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2})^{n+1} \Longleftrightarrow \\
1-\frac{1}{n+1} &\leq (1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1},
\end{aligned}$$

που ισχύει από την ανισότητα του Bernoulli για $x = \frac{1}{n+1}$. Για να δείξουμε ότι είναι φραγμένη, δείχνουμε κατ' αρχήν ότι η ακολουθία b_n με $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ είναι φθίνουσα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^{n+1} &\geq (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \iff \\ (\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}})^{n+1} &\geq 1+\frac{1}{n+1} \iff \\ (1+\frac{1}{(n+1)^2-1})^{n+1} &\geq 1+\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Η τελευταία αληθεύει, διότι από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε

$$(1+\frac{1}{(n+1)^2-1})^{n+1} \geq 1+\frac{n+1}{(n+1)^2-1} \geq 1+\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Έχουμε τώρα, για κάθε $n \geq 1$ την ανισότητα $a_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1} = b_n \leq b_1 = 2^2 = 4$. Επίσης, $a_1 = 2 < 4$ και επομένως $a_n \leq 4$ για κάθε $n \geq 1$ και άρα η (a_n) είναι φραγμένη από πάνω. Συνεπώς, η (a_n) έχει όριο, το οποίο συμβολίζουμε με e, δηλαδή

$$\lim(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Υπακολουθίες

Ορισμός 9. *Έστω ότι δίδεται μια ακολουθία (a_n). Επιλέγοντας μια ακολουθίας (k_n) φυσικών αριθμών (δηλ. $k_n \in \mathbb{N}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$) με την ιδιότητα $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$, μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία (a'_n) με $a'_n = a_{k_n}$. Ακολουθίες που ορίζονται όπως η (a'_n) λέγονται υπακολουθίες της (a_n).*

Παράδειγμα 18. Εστω (a_n) μια ακολουθία. Στην ακολουθία φυσικών αριθμών (k'_n) με $k'_n = 2n+1$ αντιστοιχεί η υπακολουθία (a'_n), με $a'_n = a_{2n+1}$, που καλείται υπακολουθία των περιττών όρων. Επίσης, στην ακολουθία φυσικών αριθμών (k''_n), με $k''_n = 2n$, αντιστοιχεί η υπακολουθία (a''_n) με $a''_n = a_{2n}$ που καλείται υπακολουθία των άρτιων όρων. Για παράδειγμα, αν $a_n = \frac{1}{n}$ τότε η υπαλοκουθία των περιττών όρων αντιστοιχεί στο $a'_n = \frac{1}{2n+1}$ και η ακολουθία των άρτιων όρων αντιστοιχεί στο $a''_n = \frac{1}{2n}$.

Το βασικό θεώρημα σχετικά με την σχέση ακολουθίας - υπακολουθίας ως προς την σύγκλιση είναι το εξής.

Θεώρημα 6. *Εστω (a_n) μια συγκλίνουσα ακολουθία με όριο τον αριθμό c. Τότε και κάθε υπακολουθία της είναι συγκλίνουσα με το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Εστω (a'_n) υπακολουθία της (a_n) με $a'_n = a'_{k_n}$. Έστω ότι δίδεται $\epsilon > 0$. Αφού $\lim a_n = c$ υπάρχει φυσικός n_0 με $|a_n - c| < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Σημειώνουμε ότι αφού $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ θα έχουμε $k_1 \geq 1, k_2 \geq 2, \ldots, k_n \geq n, \ldots$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|a'_n - c| = |a_{k_n} - c| < \epsilon$, διότι $k_n \geq k_{n_0} \geq n_0$. □

Το παραπάνω θεώρημα το χρησιμοποούμε, κυρίως, για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία αποκλίνει. Για παράδειγμα, αν βρούμε μια υπακολουθία της που αποκλίνει ή αν βρούμε δύο υπακολουθίες της που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια τότε, με βάση το θεώρημα η ακολουθία πρέπει να αποκλίνει.

Παράδειγμα 19. Η ακολουθία (a_n) με $a_n = (-1)^n$ αποκλίνει διότι η υπακολουθία των περιττών όρων της είναι η (a'_n), με $a'_n = (-1)^{2n+1} = -1$ που συγκλίνει στο -1, ενώ η υπακολουθία των άρτιων όρων της είναι η (a''_n), με $a''_n = (-1)^{2n} = 1$ που συγκλίνει στο 1.

Σύγκλιση στο $\pm\infty$

Ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες $((-1)^n)$, $(10n)$. Και οι δύο είναι αποκλίνουσες. Οι τιμές της πρώτης εναλλάσσονται στο 1 και το -1, επομένως δεν συγκεντρώνονται πουθενά. Οι τιμές της δεύτερης όλο και αυξάνουν και επομένως μπορούμε να πούμε ότι συγκεντρώνονται στο $+\infty$. Δίδουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 10. *Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$), όταν ισχύει το εξής: αν δοθεί ένας οποιοσδήποτε αριθμός $M > 0$ (αντ. $M < 0$) τότε μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό n_0 με την ιδιότητα $a_n > M$ (αντ. $a_n < M$) για κάθε $n \geq n_0$.*

Παράδειγμα 20. Η ακολουθία $(10n)$ συγκλίνει στο $+\infty$ και η ακολουθία $(-n)$ στο $-\infty$.

Σημείωση 7. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $\pm\infty$ τότε είναι αποκλίνουσα ακολουθία. Η (a_n) είναι συγκλίνουσα μόνον όταν έχει όριο κάποιον πραγματικό αριθμό.

Συνοψίζουμε παρακάτω τις ιδιότητες των ακολουθιών που συγκλίνουν στο $\pm\infty$. Το c συμβολίζει έναν πραγματικό αριθμό. Επίσης, η έκφραση 'απροσδιόριστο' σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

1. Αν $\lim a_n = +\infty$ και $\lim b_n = c$ τότε $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.
   π.χ. $\lim(n + \frac{1}{n}) = +\infty$.

2. Αν $\lim a_n = +\infty$ και $\lim b_n = c$ τότε $\lim(a_n b_n) = +\infty$ αν $c > 0$, $-\infty$ αν $c < 0$ και απροσδιόριστο αν $c = 0$.
   π.χ. για το απροσδιόριστο: $\lim(n\frac{1}{n}) = \lim 1 = 1$, ενώ $\lim(n\frac{(-1)^n}{n}) = \lim(-1)^n$ που δεν υπάρχει.

3. Αν $\lim a_n = +\infty$ και $\lim b_n = c$ τότε $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ αν $c > 0$, $-\infty$ αν $c < 0$ και απροσδιόριστο αν $c = 0$.
   π.χ. για το απροσδιόριστο: $\lim \frac{n}{\frac{1}{n}} = \lim n^2 = +\infty$, ενώ $\lim \frac{n}{\frac{(-1)^n}{n}} = \lim(-1)^n n^2$ που δεν υπάρχει.

4. Αν $\lim a_n = c$ και $\lim b_n = +\infty$ τότε $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

5. Αν $\lim a_n = \pm\infty$ και $\lim b_n = \pm\infty$ τότε $\lim \frac{a_n}{b_n}$ είναι απροσδιόριστο.
   π.χ. $\lim \frac{n^2}{n} = \lim n = +\infty$, $\lim \frac{-n}{n^2} = \lim \frac{-1}{n} = 0$.

6. Αν $\lim a_n = +\infty$ και $\lim b_n = +\infty$ τότε $\lim(a_n + b_n) = +\infty$. Όμως, $\lim(a_n - b_n)$ είναι απροσδιόριστο.
   π.χ. για το απροσδιόριστο: $\lim(n - n) = \lim 0 = 0$, $\lim(n^2 - n) = +\infty$, $\lim(n - (n + (-1)^n)) = \lim -(-1)^n$ που δεν υπάρχει.

Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και όταν το όριο είναι το $-\infty$.

Αναδρομικές ακολουθίες

Αναδρομικές ακολουθίες λέγονται οι ακολουθίες που ο γενικός τους όρος δεν δίδεται ως έκφραση του n αλλά προσδιορίζεται με αναδρομικό τύπο, για παράδειγμα ως εξής:

Παράδειγμα 21. Εστω (a_n) η ακολουθία με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Παρατηρήστε ότι για μια ακολουθία που δίδεται με αυτόν τον τρόπο, είναι εύκολο να βρούμε τους πρώτους όρους της, π.χ. $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{3}$, $a_3 = \sqrt{2 + a_2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \ldots$, αλλά εν γένει είναι δύσκολο να εκφράσουμε τον γενικό όρο a_n ως προς n. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να μελετήσουμε την παραπάνω ακολουθία ως προς την σύγκλιση. Η μελέτη βασίζεται στο θεώρημα 5 με το οποίο αφ' ενός εξασφαλίζουνε την ύπαρξη του ορίου και αφ' ετέρου μπορούμε να το υπολογίσουμε. Έτσι για την παραπάνω ακολουθία δουλεύουμε ως εξής:
Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι η ακολουθία είναι καλα ορισμένη διότι $a_n > 0$ για κάθε $n \geq 1$. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε με επαγωγή: Για $n = 1$ ισχύει διότι $a_1 = 1 > 0$. Εστω ότι ισχύει για n το αποδεικνύουμε για $n + 1$. Έχουμε, $a_n > 0$ άρα $2 + a_n > 0$ και επομένως $\sqrt{2 + a_n} = a_{n+1} > 0$.
Βήμα 2: Δείχνουμε ότι είναι αύξουσα, δηλ. ότι $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n$. Πάλι κάνουμε χρήση επαγωγής. Για $n = 1$ ισχύει διότι $a_2 = \sqrt{3} \geq 1 = a_1$. Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. έστω ότι $a_{n+1} \geq a_n$. Θα το δείξουμε για $n + 1$, δηλαδή δείχνουμε ότι $a_{n+2} \geq a_{n+1}$. Έχουμε $a_{n+2} \geq a_{n+1} \iff \sqrt{2 + a_{n+1}} \geq \sqrt{2 + a_n} \iff 2 + a_{n+1} \geq 2 + a_n \iff a_{n+1} \geq a_n$, που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.
Βήμα 3: Η ακολουθία είναι φραγμένη από πάνω. Δείχνουμε με επαγωγή ότι $a_n \leq 2$. Για $n = 1$ ισχύει διότι $a_1 = 1 \leq 2$. Έστω ότι ισχύει για n, δηλ. έστω ότι $a_n \leq 2$, δείχνουμε ότι ισχύει για $n + 1$ δηλ. ότι $a_{n+1} \leq 2$. Πράγματι έχουμε, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$, από την επαγωγική υπόθεση. Συνεπώς από το θεώρημα 5 η ακολουθία συγκλίνει.
Βήμα 4: Έστω λοιπόν $\lim a_n = c$, για κάποιον πραγματικό αριθμό c. Ο αναδρομικός τύπος που ορίζει την ακολουθία είναι ο $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Επομένως, αν τον θεωρήσουμε ως ισότητα ακολουθιών έχουμε ότι η αριστερή ακολουθία είναι η (a'_n) με $a'_n = a_{n+1}$ και επομένως από την πρόταση 2 έχουμε ότι $\lim a'_n = c$. Από την άλλη, η δεξιά ακολουθία είναι η (b_n) με $b_n = \sqrt{2 + a_n}$. Έχουμε ότι $\lim 2 + a_n = 2 + c$ και επομένως, από το θεώρημα 3, έχουμε ότι $\lim b_n = \sqrt{2 + c}$. Επομενως θα έχουμε ότι $c = \sqrt{2 + c} \Longrightarrow c^2 = 2 + c \Longrightarrow c^2 - c - 2 = 0 \Longrightarrow c = -1$ ή $c = 2$. Όμως, αφού όπως δείξαμε όλοι οι όροι της ακολουθία είναι θετικοί, το όριο δεν μπορεί να είναι το -1 και συνεπώς $\lim a_n = 2$.

Παράδειγμα 22. Έστω c ένας πραγματικός αριθμός με $0 < c < 1$ και έστω (a_n) η ακολουθία με $a_1 = c$ και $a_{n+1} = c(1 + a_n)$. Τότε δουλεύοντας όπως παραπάνω μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι 1) η (a_n) είναι αύξουσα: έχουμε $a_2 = c(1 + c) = c + c^2 \geq c = a_1$, άρα ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι ισχύει για n δηλ. ότι $a_{n+1} \geq a_n$ το δείχνουμε για $n+1$: πράγματι, $a_{n+2} = c(1 + a_{n+1})$ και $a_{n+1} = c(1 + a_n)$ συνεπώς, $a_{n+2} \geq a_{n+1} \iff c(1 + a_{n+1}) \geq c(1 + a_n) \iff a_{n+1} \geq a_n$ που ισχύει από επαγωγική υπόθεση. 2) η (a_n) είναι φραγμένη από πάνω: δείχνουμε ότι $a_n \leq \frac{c}{1-c}$, $\forall n$. Πράγματι, $a_1 = c \leq \frac{c}{1-c}$ διότι $0 < 1 - c < 1$. Έστω ότι $a_n \leq \frac{c}{1-c}$ τότε $a_{n+1} = c(1 + a_n) \leq c(1 + \frac{c}{1-c}) = \frac{c}{1-c}$. Επομένως, η (a_n) ως αύξουσα και φραγμένη από πάνω έχει όριο και έστω λοιπόν $\lim a_n = l$. Τότε από τον αναδρομικό τύπο θα πρέπει $l = c(1+l) \Longrightarrow l(1-c) = c \Longrightarrow l = \frac{c}{1-c}$, δηλαδή $\lim a_n = \frac{c}{1-c}$.

Το όριο της παραπάνω ακλουθίας μπορεί να βρεθεί και με διαφορετικό τρόπο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, ο αναδρομικός τύπος που ορίζει την ακολουθία είναι σχετικά απλός και έχουμε την δυνατότητα να εκφράσουμε τον γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως προς n. Πράγματι, μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι $a_n = c + c^2 + \cdots + c^n$: για $n = 1$ έχουμε $a_1 = c$ και άρα ισχύει. Έστω ότι $a_n = c + c^2 + \cdots + c^n$ τότε έχουμε $a_{n+1} = c(1 + a_n) = c(1 + c + c^2 + \cdots + c^n)$ και επομένως $a_{n+1} = c + c^2 + \cdots + c^{n+1}$. Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι

$$c + c^2 + \cdots + c^n = c(1 + c + \cdots + c^{n-1}) = c\,\frac{1-c^n}{1-c}\ .$$

Η παραπάνω ισότητα, στηρίζεται στην ταυτότητα $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$ και άρα, όταν $x \neq 1$, έχουμε ότι $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της ισότητας με x παίρνουμε το ζητούμενο. Συνεπώς, $\lim a_n = \lim c\,\frac{1-c^n}{1-c} = \frac{c}{1-c}$ διότι $\lim c^n = 0$, αφού $0 < c < 1$, βλ. παράδειγμα 16.