

Ειδική διάλεξη 3: Εισαγωγή σε περιβαλλοντικές ροές – Υπολογιστική ρευστομηχανική και τύρβη

Οργάνωση παρουσίασης

- Θα εξετάσουμε την σημασία του αριθμού Reynolds στη φύση της ροής
- Θα δούμε τα πιο βασικά αριθμητικά εργαλεία για την προσομοίωση τυρβωδών ροών
- Πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα
- Παραδείγματα

Εξίσωση Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

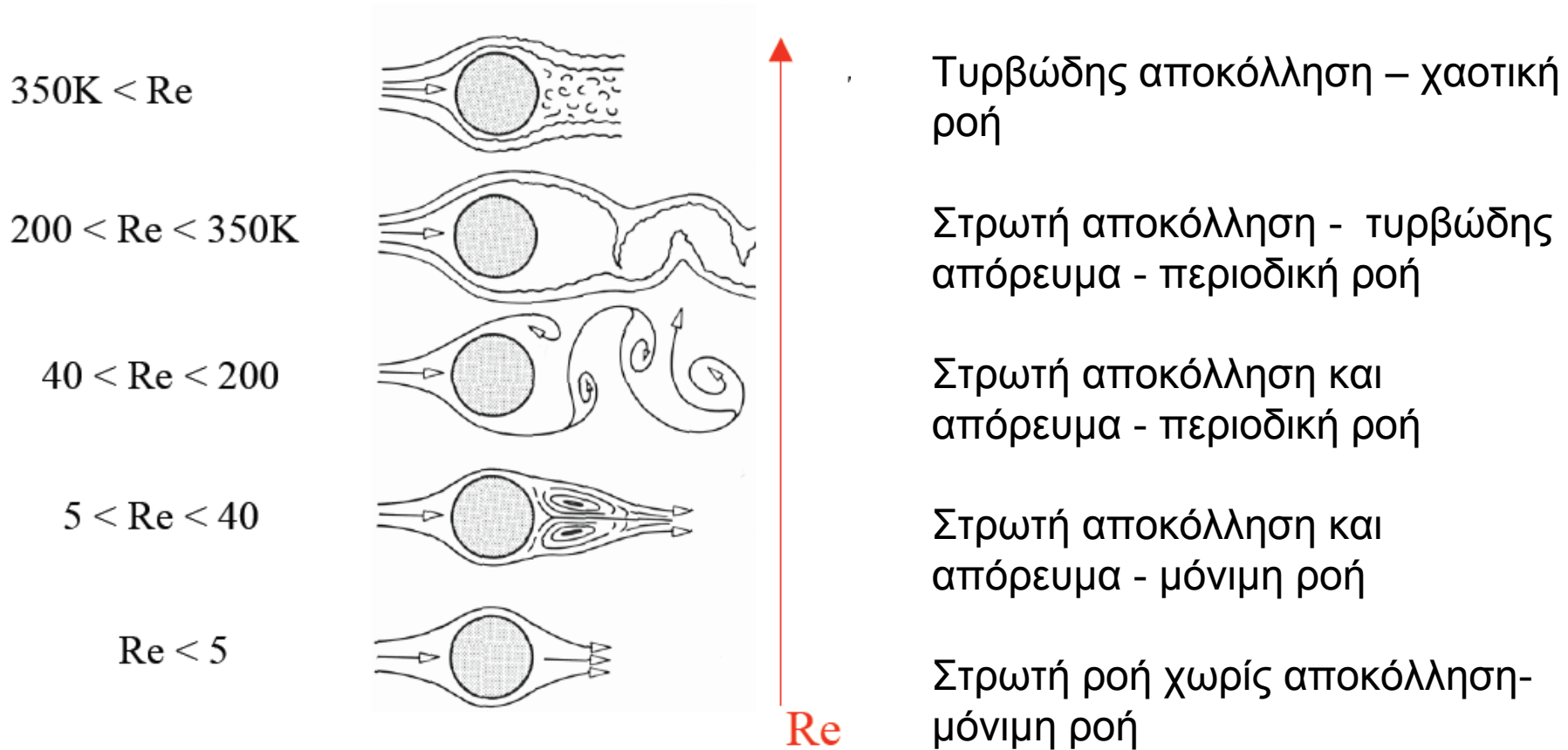
Η εξίσωση Navier-Stokes (για ένα ασυμπίεστο ρευστό) σε αδιάστατη μορφή περιέχει μία παράμετρο: τον αριθμό Reynolds:

$$\text{Re} = \rho V_{\text{ref}} L_{\text{ref}} / \mu = V_{\text{ref}} L_{\text{ref}} / \nu$$

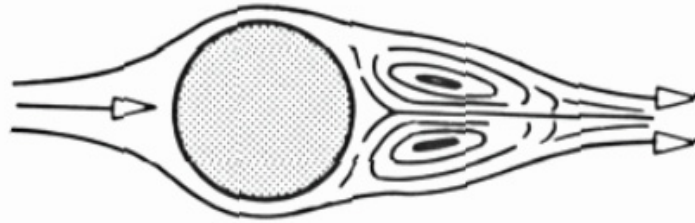
Είναι ένα μέτρο της σχετικής επίδρασης των μηχανισμών συναγωγής και διάχυσης στη ροή

Τι συμβαίνει όταν αυξάνουμε τον αριθμό Reynolds;

Επίδραση του αριθμού Reynolds



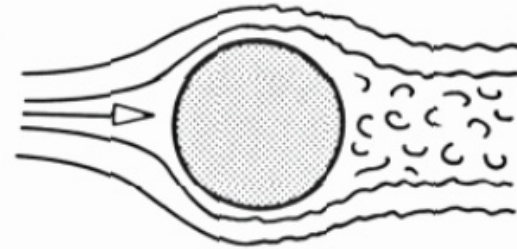
Στρωτή vs. τυρβώδης ροή



Στρωτή ροή

Η ροή χαρακτηρίζεται από το σχήμα του εμποδίου και τις διαστάσεις του (μεγάλες χωρικές κλίμακες)

Εύκολο να υπολογιστεί



Τυρβώδης ροή

Η ροή χαρακτηρίζεται από το σχήμα του εμποδίου και τις διαστάσεις του (μεγάλες χωρικές κλίμακες) και από τη κίνηση και δημιουργία μικρών δινών (μικρές χωρικές κλίμακες)

Δύσκολη προσομοίωση

Γιατί η προσομοίωση είναι δύσκολη;

Η κίνηση δεν είναι περιοδική

Η κίνηση του ρευστού χαρακτηρίζονται από τυχαίες χωρικές μεταβολές (3D)

Δεν υπάρχει μεγάλη σύνδεση με τις αρχικές και τις οριακές συνθήκες

Περιλαμβάνει ένα μεγάλο εύρος χωρικών κλιμάκων (δύνες)

Άρα, η προσομοίωση της τυρβώδης ροής πρέπει να είναι πάντα τρισδιάστατη, με μεγάλη χρονική ακρίβεια και χρησιμοποιώντας πολύ μεγάλα υπολογιστικά πλέγματα

Θεωρία Kolmogorov – χαρακτηριστικές κλίμακες

Χαρακτηριστικό μήκος: $\frac{L}{\eta} = O(Re^{3/4})$, και σε τρεις διαστάσεις
(κύβος με ακμή L): $O(Re^{9/4})$

Χαρακτηριστικός χρόνος: $O(Re^{3/4})$

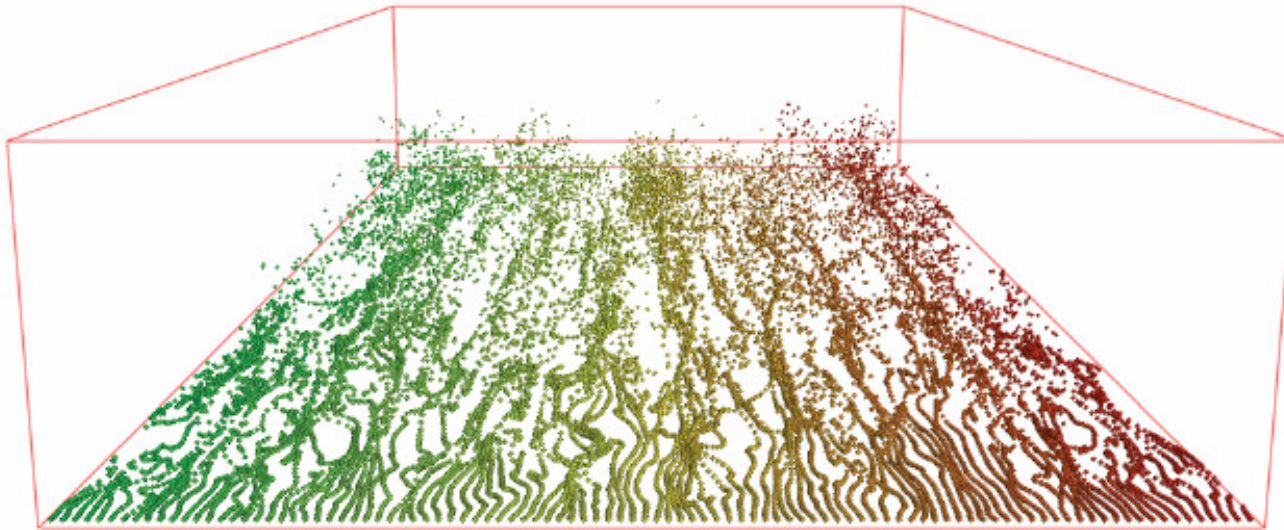
Έτσι, για άμεση προσομοίωση (DNS) ρευστού με όγκο L^3 και για ένα χαρακτηριστικό χρόνο, πρέπει να λύσουμε $O(Re^3)$ φορές τις εξισώσεις Navier-Stokes

Κόστος υπολογισμών

Παράδειγμα: DNS ισοτροπικής τύρβης σε υπολογιστή υποθέτοντας 1000 πράξεις για ανά κόμβο και βήμα

Re_λ	Re	N	N^3M	CPU	Time
25	94	104	1.3×10^9	20	min
200	6000	1260	5.2×10^{13}	20	months
800	96000	9218	2.1×10^{17}	5000	years

Ανάπτυξη τυρβώδους οριακού στρώματος

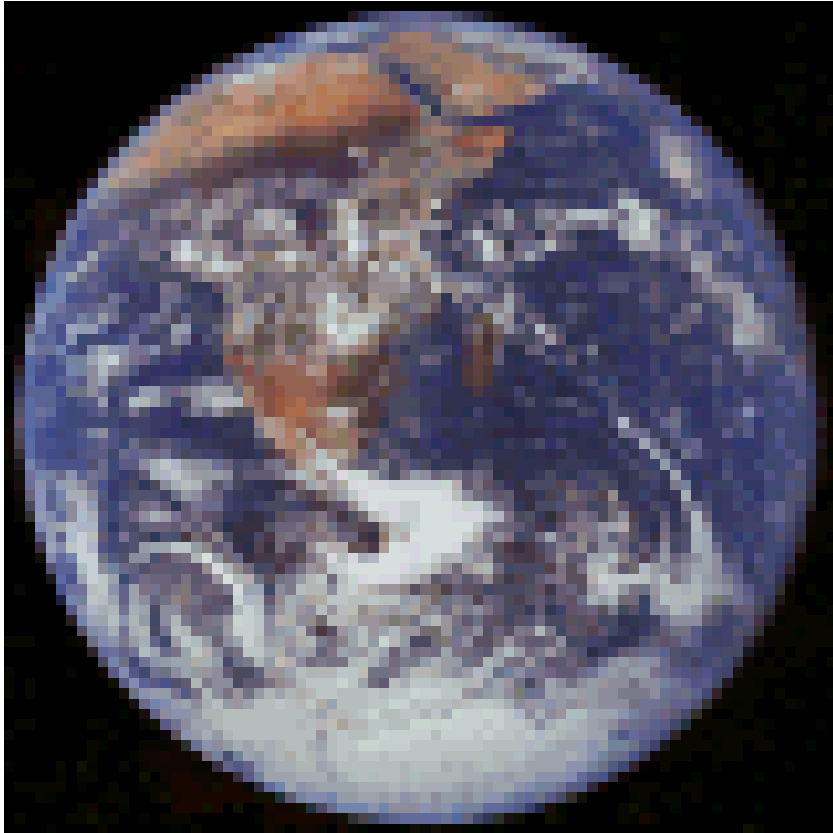


$$N \sim (Re_\tau)^{9/4} \sim 1 \times 10^7 \text{ για } Re_\tau = 800$$

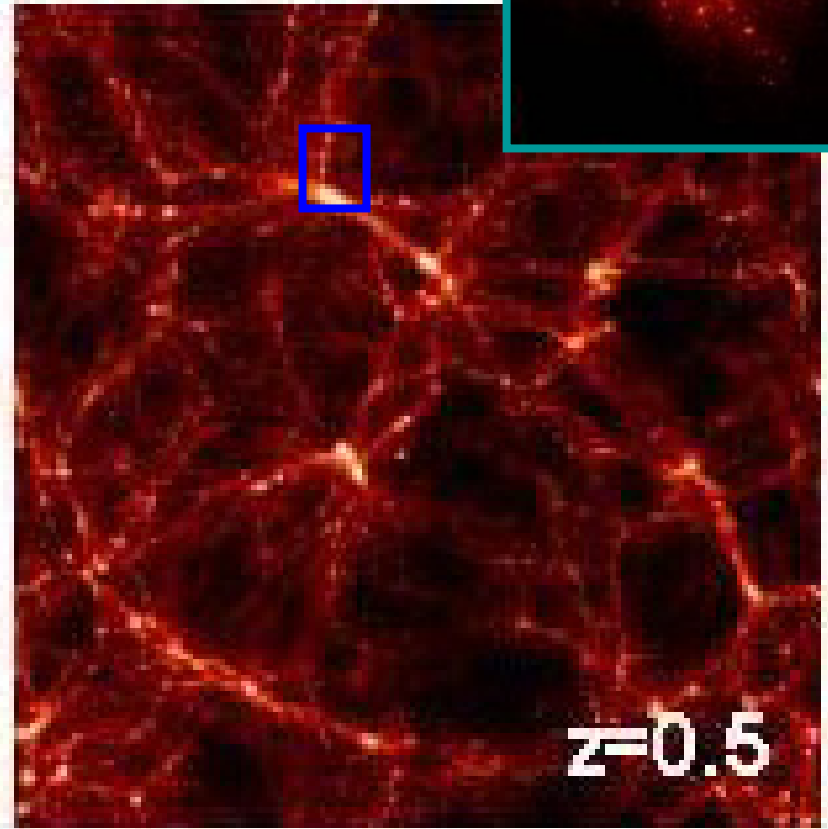
$$\Delta t \sim (Re_\tau)^{-1/2} \sim 1 \times 10^{-5} \text{ for } Re_\tau = 800$$

$$y^+ = \rho y_p u_\tau / \mu, u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$$

Χαρακτηριστικές κλίμακες (συνέχεια)



Geophysics:
 $L \sim 1000 \text{ km}$
 $\eta \sim 1 \text{ cm}$
NASA



Astrophysics
 $L \sim 10^9 \text{ ly.}$
 $\eta \sim ??$
R. Teyssier, CEA

Μετά το DNS....

Το DNS είναι δυνατό μόνο για μικρούς αριθμούς Reynolds (και απλή γεωμετρία)

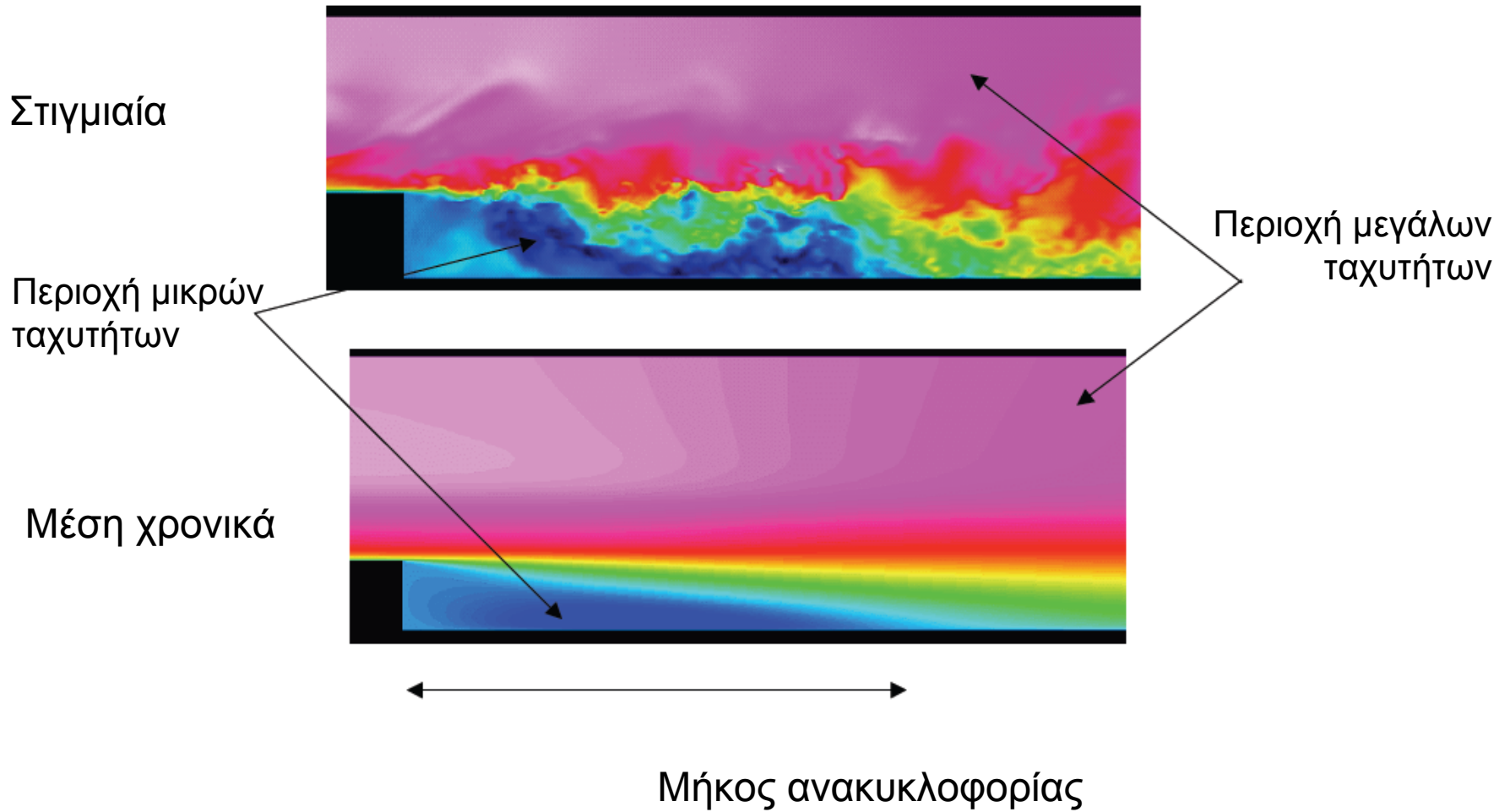
Οι (χρονικές και χωρικές) λεπτομέρειες που εξάγονται από το DNS δεν είναι απαραίτητες για σχεδιαστικούς λόγους (μόνο για την θεωρητική μελέτη ροών)

Οι μέσες χρονικά ποσότητες είναι συνήθως αρκετές για τους μηχανικούς

Ο προσδιορισμός των μεγάλων κλιμάκων της ροής (όχι στο επίπεδο των μικρότερων δυνών) είναι αρκετός για τις πρακτικές εφαρμογές

Μπορούμε να εξάγουμε τις μέσες χρονικά μεγάλες κλίμακες τις ροής με μικρό κόστος;

Ροή πίσω από βαθμίδα



Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Ορίζουμε τις Reynolds-averaged ποσότητες

$$u_i(x_k, t) = U_i(x_k) + u'(x_k, t)$$

$$U_i(x_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(x_k, t) dt$$

Αντικαθιστούμε και παίρνουμε τη μέση τιμή

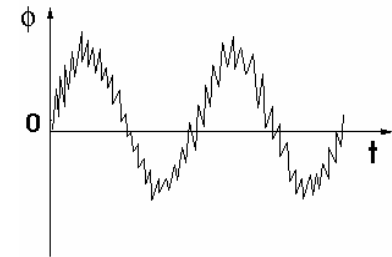
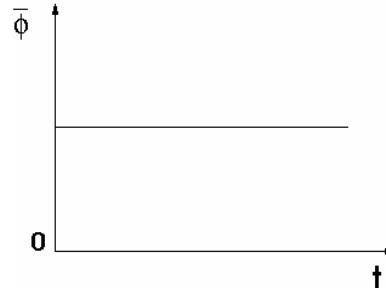
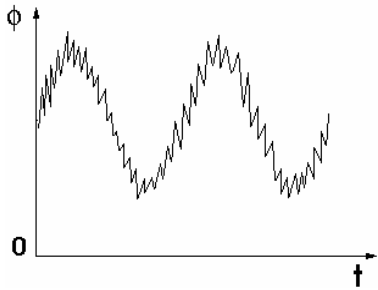
$$\cancel{\frac{\partial U_i}{\partial t}} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \left(\overline{-u'_i u'_j} \right)}{\partial x_j} \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$R_{ij} = \overline{-u'_i u'_j}$

Closure problem

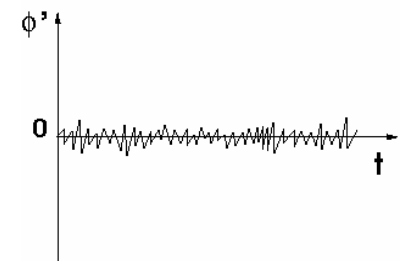
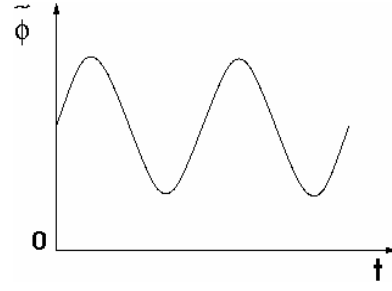
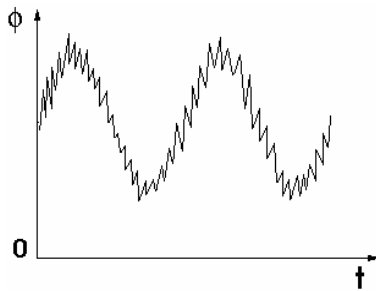
Equations Reynolds decomposition

➤ **Steady decomposition :** $\phi = \bar{\phi} + \phi'$



➤ **Unsteady decomposition:**

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi''$$



Coherent motion

Μοντέλα τύρβης

Ορίζουμε τις τάσεις Reynolds με βάση τις γνωστές (μέσες) ποσότητες

1) Υπόθεση Boussinesq

- απλή σχέση των τάσεων Reynolds και των κλίσεων ταχύτητας μέσω του «eddy viscosity» (παρόμοια με το μοριακό ιξώδες)
- ισοτροπικά (το eddy viscosity είναι δεν είναι διάνυσμα!)

2) Μοντέλα εξέλιξης των τάσεων Reynolds

- οι εξισώσεις διατήρησης προκύπτουν άμεσα από τις εξισώσεις NS
- ακόμη περιέχονται άγνωστες ποσότητες
- δεν υπάρχει προϋπόθεση για ισοτροπική ροή
- αρκετά περίπλοκα και ακριβά στη λύση τους

3) Μη-γραμμικά μοντέλα eddy viscosity (Algebraic Reynolds stress)

4) Μοντελοποιούμε άμεσα την απόκλιση των τάσεων Reynolds

Μοντέλα eddy viscosity

Σχέση Boussinesq: $R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} = 2 \frac{\mu_t}{\rho} S_{ij}$ με: $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(\mu + \mu_t)}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]$$

Γενικά στοιχεία για τον προσδιορισμό του eddy viscosity:

1) Διαστατικά επιχειρήματα

- Μονάδες σε [m²/s]

- Να ορίζει 2 από τις τρεις ποσότητες: ταχύτητα, μήκος, χρόνος

2) Φυσικά επιχειρήματα

- Ασυμπτωτική ανάλυση

- Συνέπεια με πειραματικές μετρήσεις

3) Αριθμητικά επιχειρήματα

- Απλό και εύκολο υπολογισμό

Κατηγορίες μοντέλων *eddy viscosity*

Διάφορα μοντέλα (περίπου 200) έχουν δημιουργηθεί για την λύση των μέσων εξισώσεων. Ανάλογα με τον αριθμό των επιπλέον εξισώσεων που λύνουν έχουμε:

1) Μηδενικής εξίσωσης/ αλγεβρικά μοντέλα:

Mixing Length, Cebeci-Smith, Baldwin-Lomax, κλπ

2) Μοντέλα μίας εξίσωσης:

Wolfstein, Baldwin-Barth, Spalart-Allmaras, k-model, κλπ

3) Μοντέλα δύο εξισώσεων:

k-ε, k-ω, k-τ, k-L, κλπ.

4) Μοντέλα τριών εξισώσεων:

k-ε-A

5) Μοντέλα τεσσάρων εξισώσεων:

v2-f model

Μοντέλο Μηδενικής εξίσωσης

Prandtl Mixing Length

$$\mu_t == \rho L_{mix}^2 S = \rho L_{mix}^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

Προκύπτει από διαστατικά επιχειρήματα και αναλογία με την μοριακή διάχυση

Ο ορισμός του L είναι διαφορετικός σε κάθε πρόβλημα (οριακά στρώματα, στρώματα ανάμιξης, κλπ.)

Η eddy viscosity είναι μηδέν όταν η κλίση της ταχύτητας είναι μηδέν

Δεν υπάρχει επίδραση από την “ιστορία”; Καθαρά τοπικό μοντέλο

Το L μπορεί να γίνει “universal” όταν χρησιμοποιούνται ad hoc συναρτήσεις απόστασης από τον τοίχο, κλίσης πίεσης, κλπ.

Μοντέλο μίας εξίσωσης: k-model

$$TKE = k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

Μια εξίσωση από το k μπορεί να προέλθει άμεσα από την εξίσωση NS

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{convection}} = \underbrace{R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{production}} - \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}_{\text{dissipation}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Viscous diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j}}_{\text{turbulent diffusion}} \right)$$

Υποθέτουμε ότι το $k^{1/2}$ είναι η είναι μια ταχύτητα. Πρέπει ακόμη να ορίσουμε την χωρική κλίμακα L όπως προηγουμένως για να ορίσουμε το eddy viscosity. 4 από τους 7 όρους της εξίσωσης του k χρειάζονται επιπλέον υποθέσεις

- Η παραγωγή υπολογίζεται από την υπόθεση Boussinesq
- Η διάχυση μοντελοποιείται (χρησιμοποιώντας διαστατικά επιχειρήματα) ως $k^{3/2}/L$
- Η τυρβώδης μεταφορά και η διάχυση της πίεσης μοντελοποιούνται μαζί:

$$\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j} \approx - \frac{\mu_t}{\rho \sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

k-model (συνέχεια)

Τελική μορφή:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad \epsilon \approx f(k, L_{mix})$$

Το μόνο πλεονέκτημα σε σχέση με το μοντέλο μηδενικής εξίσωσης είναι η εισαγωγή την επίδρασης από την ιστορία.

Τα μοντέρνα μοντέλα μίας εξίσωσης έχουν εγκαταλείψει την εξίσωση του k και βασίζονται στην ad-hoc εξίσωση μεταφοράς του eddy viscosity άμεσα.

Μοντέλο Spalart-Allmaras:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = P_{\tilde{\nu}} - \epsilon_{\tilde{\nu}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right]$$

Μοντέλο δυο εξισώσεων: οικογένεια k-φ

Το κυριότερο πρόβλημα του μοντέλου μίας εξίσωσης για το k είναι η ανικανότητα αναπαράστασης των δύο διαστάσεων που χρειάζονται για τον υπολογισμό του eddy viscosity; Τα μοντέλα δύο εξισώσεων προσπαθούν να αναπαραστήσουν τις δύο κλίμακες ανεξάρτητα.

- Όλα τα μοντέλα χρησιμοποιούν την εξίσωση μεταφοράς για την κινητική ενέργεια της τύρβης k
- Διάφορες μεταβλητές διατήρησης έχουν χρησιμοποιηθεί

ε : ρυθμός τυρβώδους διάχυσης

L : τυρβώδης κλίμακα μήκους

ω : αντίστροφο της τυρβώδους χρονικής κλίμακας scale

ω^2

g

ψ

τ

παράδειγμα:

$$\ell = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \longrightarrow \nu_t = c_\mu k^{1/2} \ell = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Μοντέλο k-ε

Η εξίσωση για το k είναι η ίδια όπως πριν:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\mu_t}{\rho} S^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

Η εξίσωση για το ε μπορεί να προσδιοριστεί από την NS αλλά περιέχει αρκετές ποσότητες που δεν μπορούν να προσδιοριστούν

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\epsilon}{k} \left(C_{1\epsilon} \frac{\mu_t}{\rho} S^2 - C_{2\epsilon} \epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]$$

Το eddy viscosity υπολογίζεται ως:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

Υπάρχουν 5 ελεύθερες σταθερές

$$\sigma_k, \sigma_\epsilon, C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon}, C_\mu$$

Υπολογισμός των σταθερών

Οι σταθερές μπορούν να υπολογιστούν μελετώντας απλές ροές:

1. Decaying homogeneous isotropic turbulence

$$C_{2\varepsilon}$$

2. Homogeneous shear flow

$$C_{1\varepsilon} \quad C_{2\varepsilon}$$

3. Logarithmic Layer

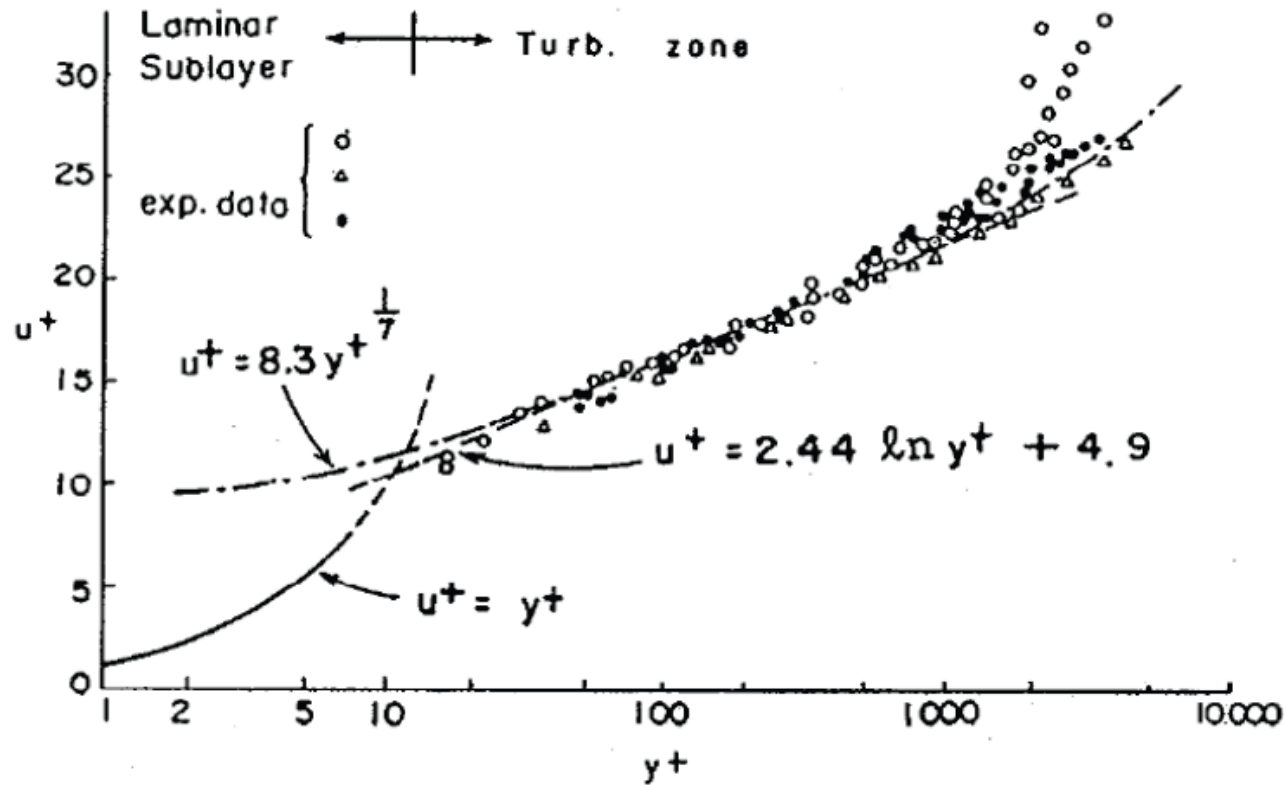
$$C_{1\varepsilon} \quad C_{2\varepsilon}, C_{\mu}, \sigma_{\varepsilon}$$

4. ...

Η με σύγκριση με πειραματικά δεδομένα

Το μοντέλο 'standard k-ε' έχει μια συγκεκριμένη επιλογή σταθερών (Launder & Sharma 1972)

Δομή του τυρβώδους οριακού στρώματος



Σε μεγάλους αριθμούς Reynolds το ιξώδης στρώμα είναι τόσο λεπτό που είναι πολύ δύσκολο να προσεγγιστεί με υπολογιστικό πλέγμα

Μοντελοποίηση της περιοχής του τοίχου

Από την φυσική πλευρά:

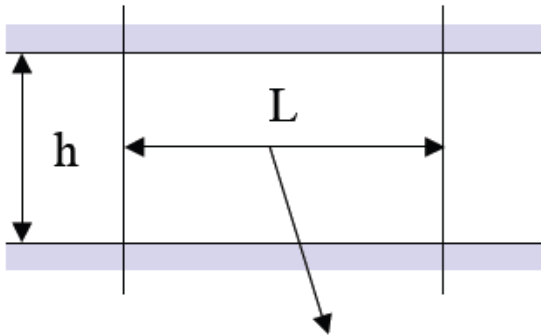
Είναι σημαντική επειδή ο τοίχος είναι η κύρια πηγή παραγωγής στροβιλότητας και τύρβης (τοπικό μέγιστο στην τυρβώδη κινητική ενέργεια, μεγάλες μεταβολές στη τυρβώδη διάχυση, κλπ.)

Για πρακτικές εφαρμογές:

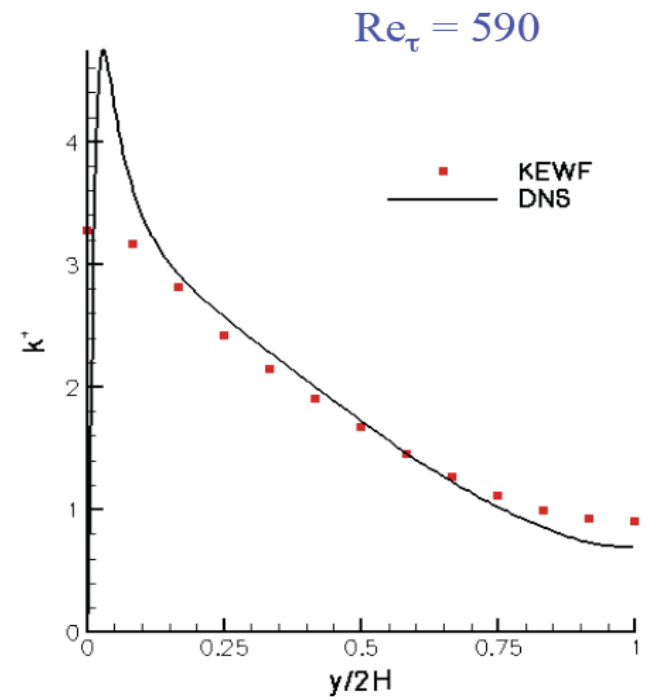
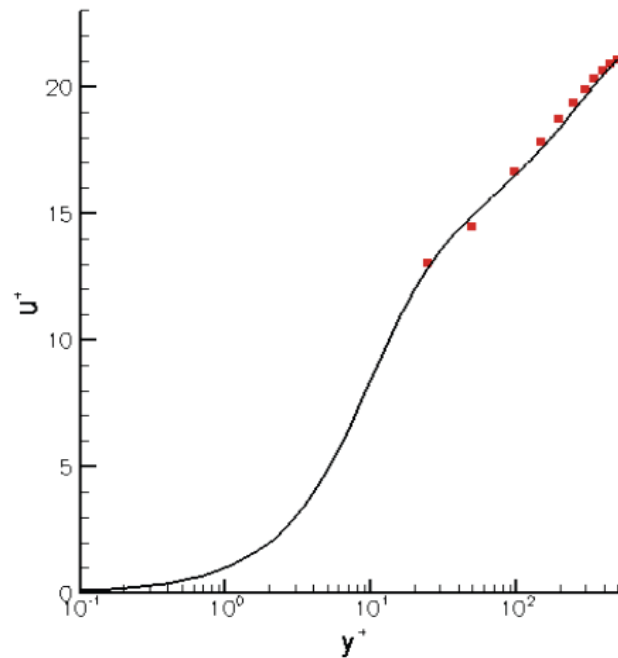
Οι ποσότητες στο τοίχο (κλίση ταχύτητας, πίεσης, κλπ.) είναι πολύ σημαντικές σε διάφορες εφαρμογές

Η αποκόλληση και επανακόλληση της ροής είναι στενά εξαρτημένες από την σωστή πρόβλεψη την ανάπτυξης της τύρβης κοντά στους τοίχους

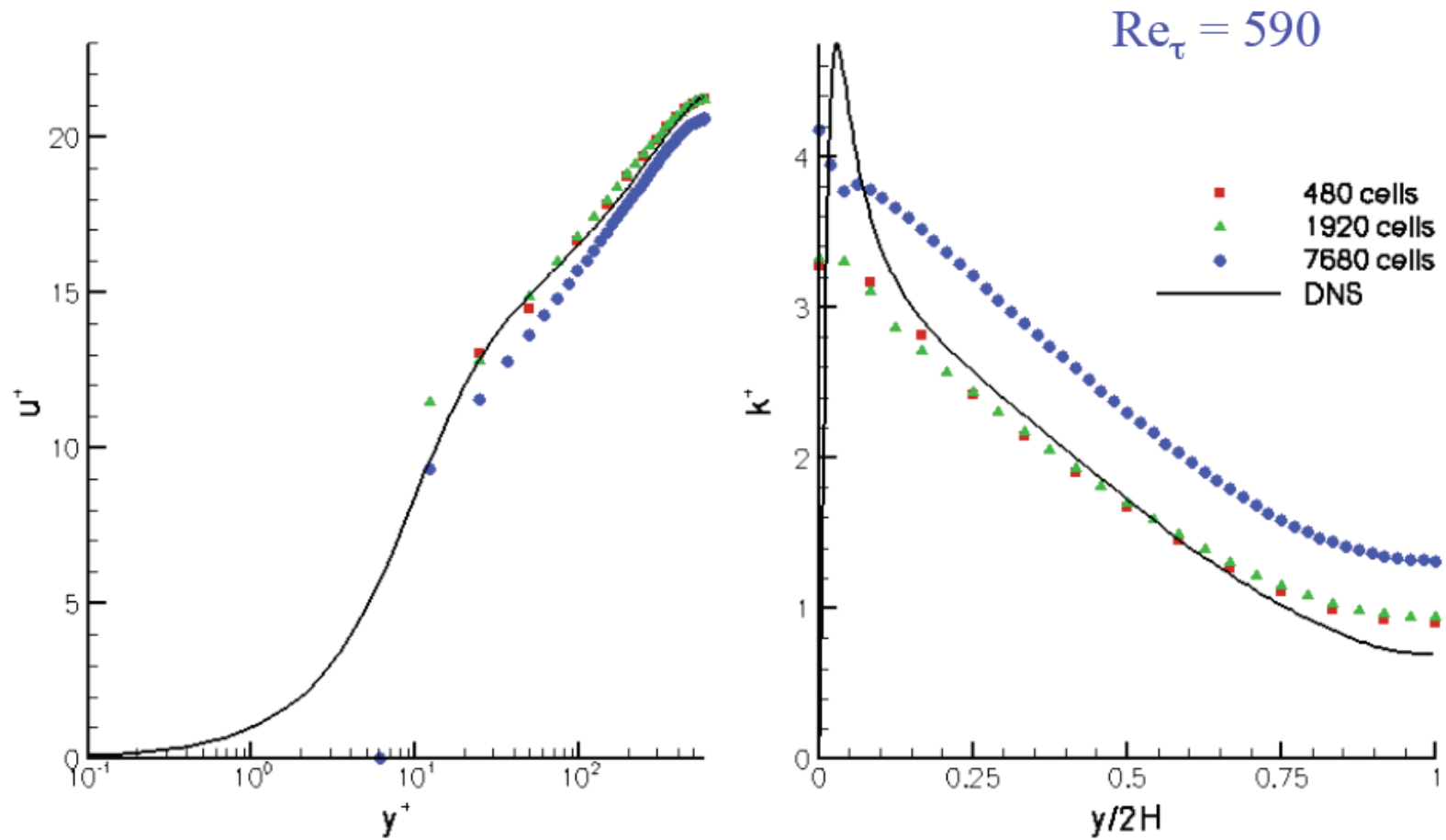
Παραδείγματα: Ροή σε κανάλι



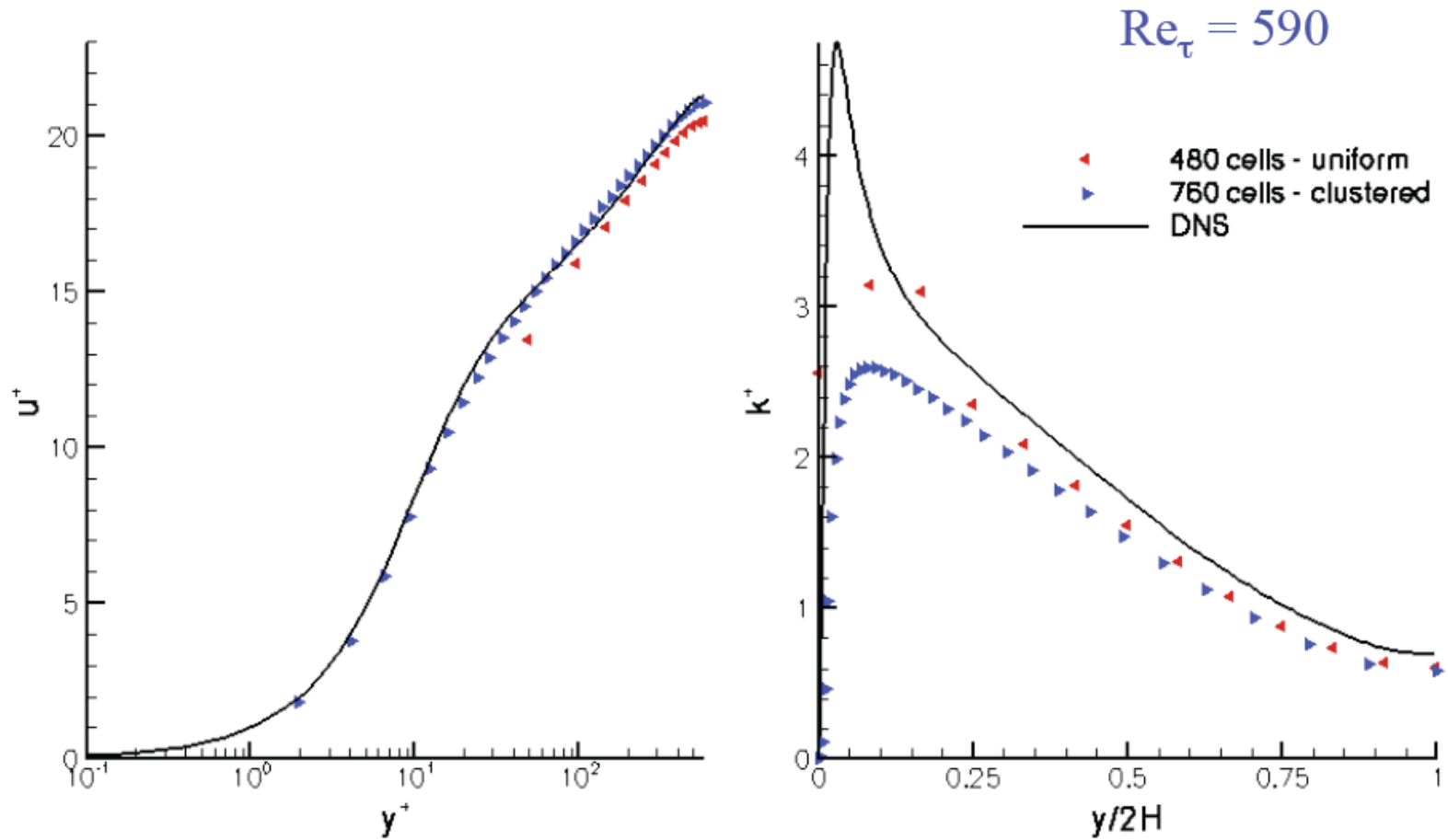
Περιοδικές συνθήκες



Επίδραση πλέγματος;



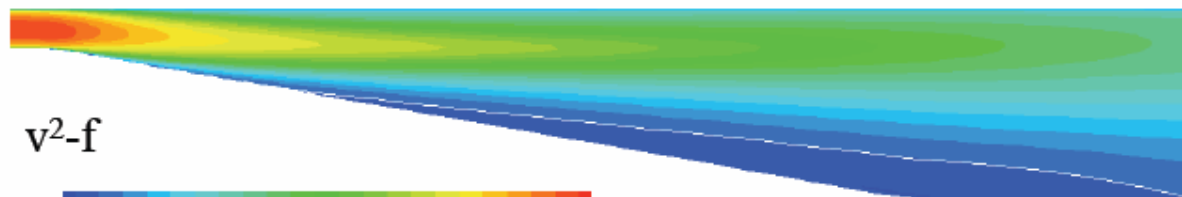
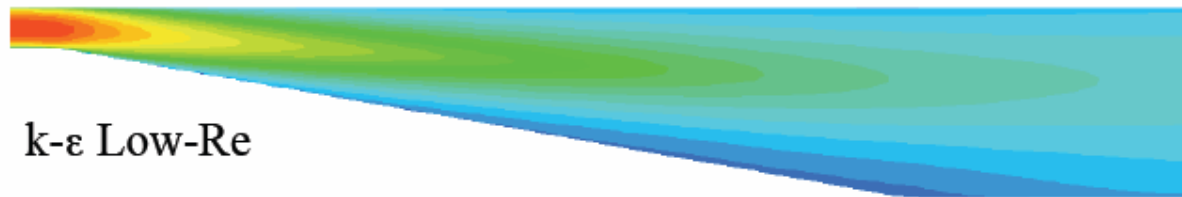
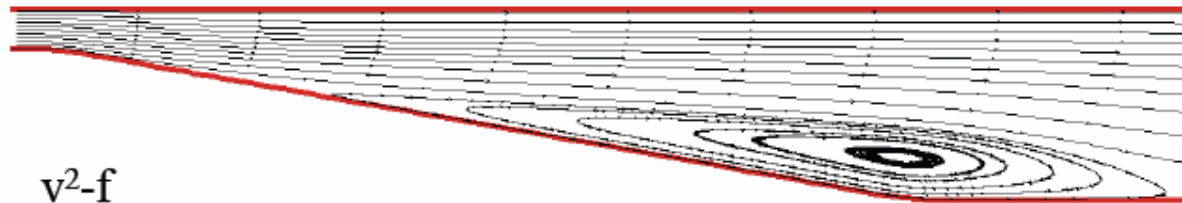
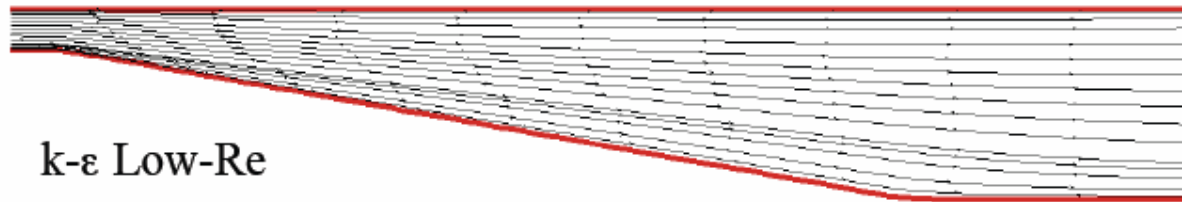
Επίδραση πλέγματος (συνέχεια)



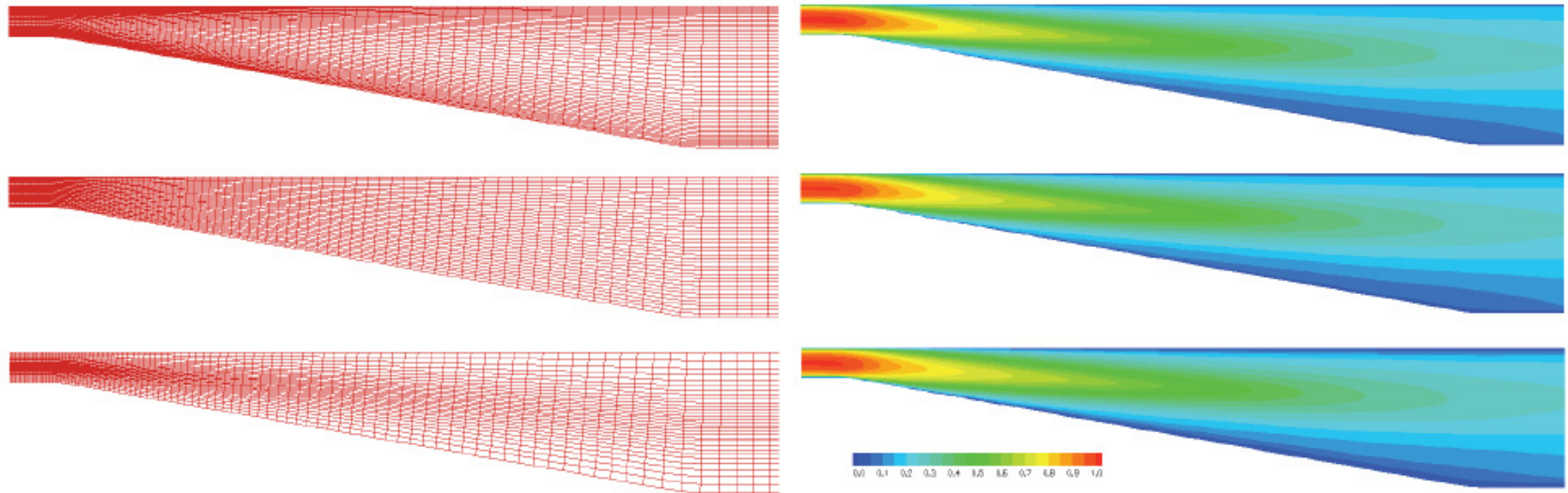
Παραδείγματα: Ροή σε διαχύτη



Επίδραση του μοντέλου



Επίδραση του μοντέλου



κ-ε με wall functions για διαφορετικά πλέγματα

Μείωση κόστους & μείωση αριθμού αγνώστων

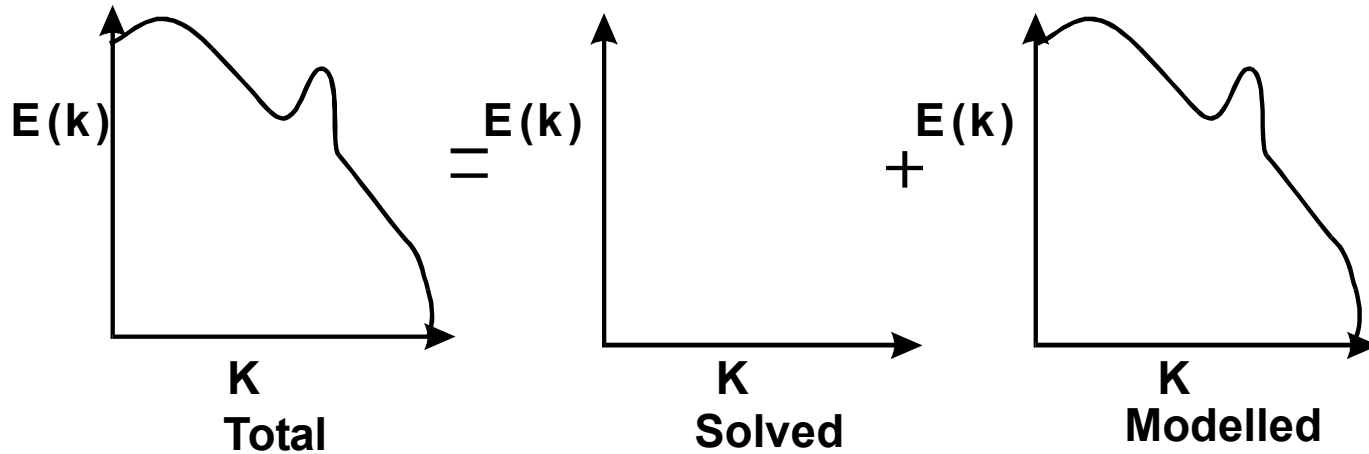
- Βασική ιδέα: μείωση κόστους = μείωση μικρών χωρικών κλιμάκων
- Έτσι:
 - Υπάρχει ανάγκη για ένα τελεστή διαχωρισμού μεταξύ Resolved και unresolved κλιμάκων
 - Μοντελοποίηση για την σύνδεση resolved/unresolved κλιμάκων
- Οικογένειες τελεστών
 - Statistical average → RANS
 - Μοντελοποίηση μικρών δινών → LES
 - Συνδυασμός → Hybrid RANS/LES

Χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων RANS & LES

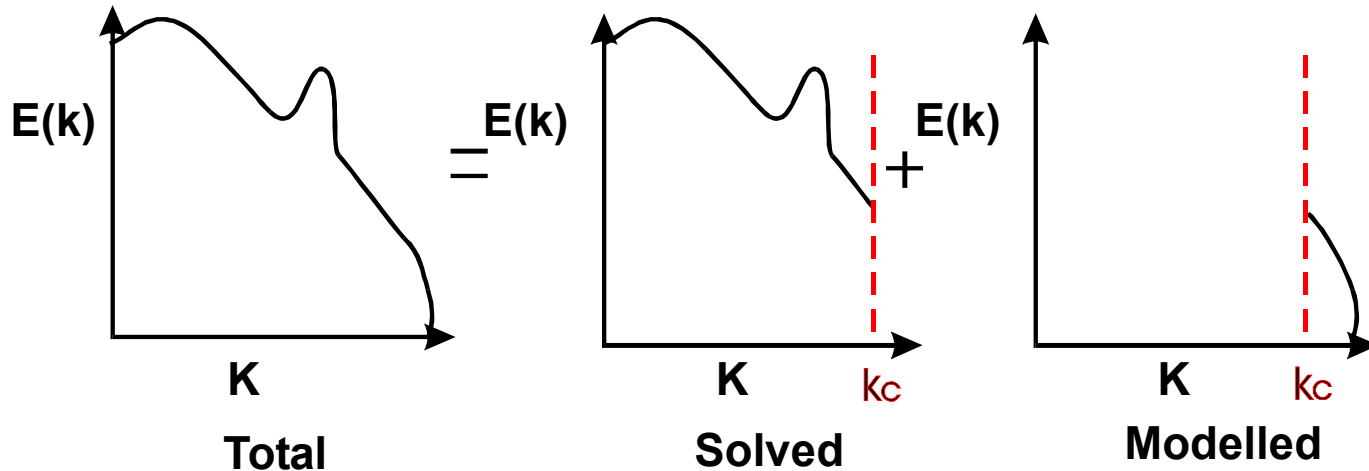
- RANS:
 - Διάσταση: 0D \rightarrow 4D (χρόνος + χώρος)
 - Μοντέλα: περίπλοκα, περιλαμβάνουν όλη την δυναμική της τύρβης
 - Αριθμητική μέθοδο: robust
 - Προτέρημα: 40-years « know how »
- LES:
 - Διάσταση: 4D
 - Μοντέλα: απλούστερα, δεν περιλαμβάνουν όρους παραγωγής τύρβης (TKE)
 - Αριθμητική μέθοδο: ακριβείς
 - Προτέρημα: αξιοπιστία, γραμμικό κέρδος σε σχέση με τον αριθμό των CPU

Χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων RANS & LES (συνέχεια)

RANS MODELS



SGS MODELS



LES – An alternative?

- Superior in wall-remote regions
- Resolution requirements rise only with $Re^{0.4}$
- Near wall, resolution requirement rise with Re^2
- Near-wall resolution can have strong effect on separation process
- Sensitivity to subgrid-scale modelling
- At high Re, increasing reliance on approximate near-wall treatments
 - Wall functions
 - Inverse cascade (MHD)
 - Immersed boundary method
- Spectral content of inlet conditions

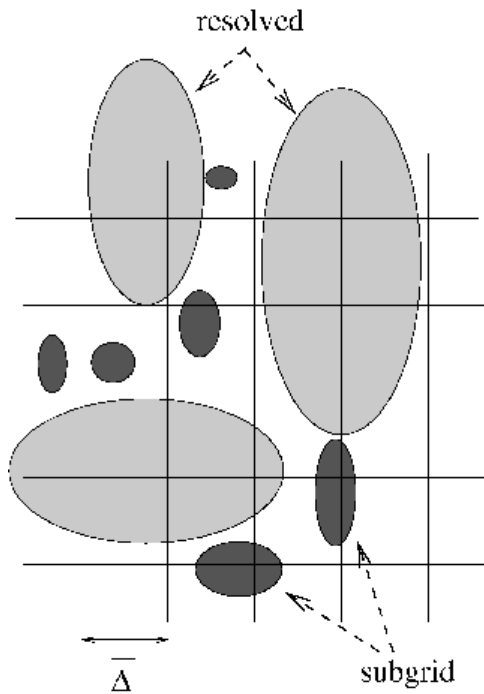
Achilles heels of LES

Large-Eddy Simulation (LES)

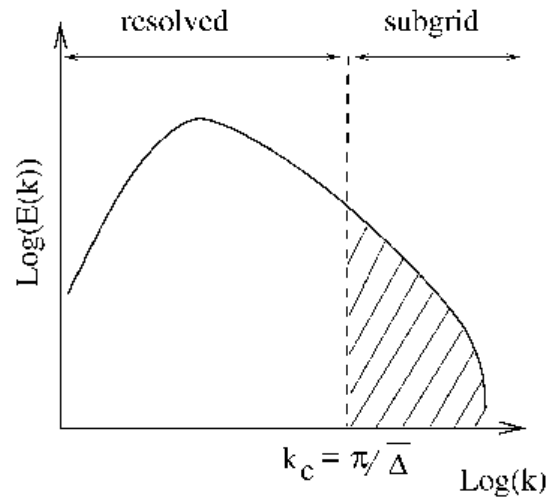
- Filters the NS (or/and magnetic induction) equations to remove small scales
- Resolve large, energy containing scales
- Models small scales
- Compromise between DNS and RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes)
- Used mostly in research for simple and moderate geometries; occasionally in industry

LES Filtering

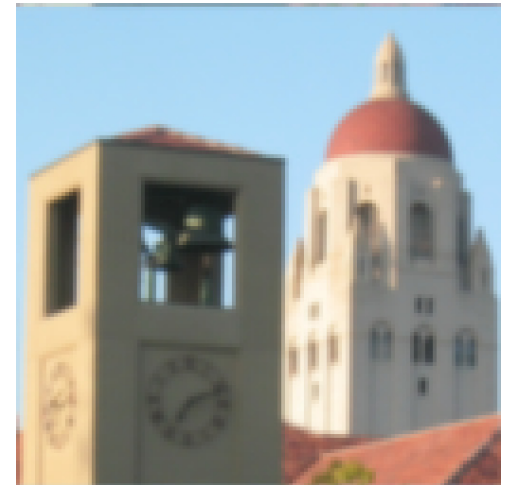
Smooths out small scales, retains large features



PHYSICAL SPACE



FOURIER SPACE



LES Filtering (συνέχεια)

- N-S filtered:
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

- Solution :

$$\tau_u = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

- Problem:

How to solve the term $\overline{u_i u_j}$

Similar to RANS Reynolds stress; must be modelled.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u} \bar{u}) = -\nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \nabla \cdot \tau_u$$

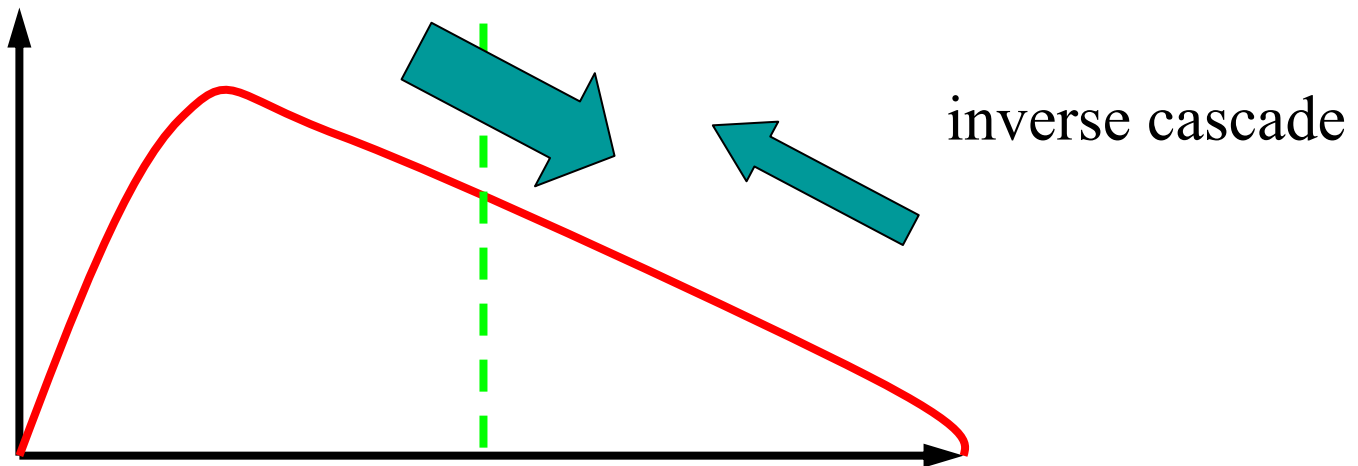
Functional models:

Surrogate for the mean action

Hyp 1: Kinetic energy balance is most important

Hyp 2: TKE cascade is dominant

→ dissipative action in the mean



Hyp 3: An eddy-viscosity model is adequate

Smagorinsky Model (1963)

- Algebraic scalar viscosity model
- Local equilibrium (production = dissipation)
- Infinite Reynolds number/inertial range
- Length scale : Δ
- Time scale : resolved gradient norm

$$\tau_u \approx 2 \left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_T \right) \bar{S}_{ij} \quad \nu_T = C_s \bar{\Delta}^2 |\bar{S}|$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}$$

Dynamic Smagorinsky Model

Germano et al. (1991), and Lilly (1992)

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij},$$

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j},$$

$$C_{ij} = \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{\overline{u_j} u'_i},$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}.$$

$$C_{ij} = \overline{u_i} \overline{u_j} - \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}}.$$

$$\mathcal{L}_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}.$$

The terms L_{ij} , C_{ij} and R_{ij} are called the Leonard stresses, the cross terms and the Reynolds stresses, respectively.

$$M_{ij} = \left(\hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij} - \Delta^2 |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij} \right)$$

$$C(x, y, z, t) = -\frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{2M_{ij} M_{ij}}$$

Επίλογος

Στη παρούσα διάλεξη είδαμε:

- » Τα βασικά χαρακτηριστικά της μοντελοποίησης της τυρβώδους ροής
- » Διάφορα μοντέλα τύρβης
- » Το μοντέλο των μεγάλων δινών