ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 16: Ο αλγόριθμος SIMPLE (συνέχεια)

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Εξετάσαμε λύσεις για την εισαγωγή της πίεσης στην εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστες ροές
- Κάναμε εισαγωγή στον αλγόριθμο SIMPLE

Οργάνωση παρουσίασης

- Θα εξετάσουμε τις λεπτομέρειες του αλγόριθμου SIMPLE
- Θα δούμε διάφορα βοηθητικά θέματα
  » Υποχαλάρωση και σύγκλίση
- Οριακές συνθήκες
  » Θα δούμε τη φύση της πίεσης για αδιάστατες ροές

Αλγόριθμος SIMPLE

- Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
- Προτάθηκε από τον Patankar και Spalding (1972)
- Η ιδέα είναι να αρχίσουμε με την διακριτή εξίσωση της συνέχειας
- Να αντικαταστήσουμε σε αυτή τις διακριτές εξισώσεις για τη u και v ορμή

  » Οι διακριτές εξισώσεις ορμής έχουν όρους διαφοράς πίεσης
- Άρα μπορεί να βρεθεί μια εξίσωση για τις διακριτές πιέσεις

  » Ο αλγόριθμος SIMPLE στην ουσία λύνει για μια σχετική ποσότητα που ονομάζεται διόρθωση πίεσης

Αλγόριθμος SIMPLE (συνέχεια)

- Λύνουμε τις εξισώσεις της ορμής υποθέτοντας ένα πεδίο πιέσεων p* --το αποτέλεσμα είναι να πεδία ταχυτήτων u* και v*

  » Δεν ικανοποιούν την συνέχεια επειδή p* είναι λάθος

- Προτείνουμε διορθώσεις σε ταχύτητες και πίεση έτσι ώστε οι διορθωμένες ταχύτητες να ικανοποιούν την συνέχεια

- Υποθέτουμε ότι οι διορθωμένες ποσότητες είναι:

$$
\begin{aligned}
u &= u^* + u' \\
v &= v^* + v'
\end{aligned}
$$

$$p = p^* + p'$$

Διορθώσεις ταχύτητας

Διορθώσεις πίεσης

Αλγόριθμος SIMPLE (συνέχεια)

- Επίσης προϋποθέτει ότι οι διορθωμένες ταχύτητες και πιέσεις ικανοποιούν την εξίσωση της ορμής:

$$a_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \Delta y (p_P - p_E) + b_e$$

$$a_n v_n = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + \Delta x (p_P - p_N) + b_n$$

- Αφαιρώντας τις ποσότητες με το αστέρι από τις παραπάνω έχουμε:

$$a_e u'_e = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + \Delta y (p'_P - p'_E)$$

$$a_n v' = \sum_{nb} a_{nb} v'_{nb} + \Delta x (p'_S - p'_P)$$

Εξίσωση διορθωμένης πίεσης

- Κάνουμε την προσέγγιση:

$$
\begin{aligned}
a_e u'_e &\approx \Delta y \left(p'_P - p'_E \right) \\
a_n v'_n &\approx \Delta x \left(p'_S - p'_P \right)
\end{aligned}
$$

Τα διώχνουμε

$\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$ και $\sum_{nb} a_{nb} v'_{nb}$

Εξίσωση διορθωμένης πίεσης (συνέχεια)

- Ορίζουμε:

$$d_e = \frac{\Delta y}{a_e}$$

$$d_n = \frac{\Delta x}{a_n}$$

έτσι έχουμε

$$u'_e = d_e \left(p'_P - p'_E\right)$$

$$v'_n = d_n \left(p'_P - p'_S\right)$$

και

$$u_e = u^*_e + d_e \left(p'_P - p'_E\right)$$

$$v_n = v^*_n + d_n \left(p'_P - p'_S\right)$$

Εξίσωση διόρθωσης πίεσης

• Οι ποσότητες με το αστέρι δεν ικανοποιούν την διακριτή εξίσωση της συνέχειας:

$$(\rho u^*)_e \Delta y - (\rho u^*)_w \Delta y + (\rho v^*)_n \Delta x - (\rho v^*)_s \Delta x \neq 0$$

$$F_e^* - F_w^* + F_n^* - F_s^* \neq 0$$

• Όμως οι διορθωμένες ταχύτητες την ικανοποιούν

$$F_e^* + F_e' - F_w^* - F_w' + F_n^* + F_n' - F_s^* - F_s' = 0$$

Εξίσωση διόρθωσης πίεσης (συνέχεια)

- Αντικαθιστούμε από τις διορθώσεις των ρυθμών ροής:

$$
\begin{aligned}
&F_e^* + \rho_e d_e \Delta y \left(p'_P - p'_E\right) - F_w^* - \rho_w d_w \Delta y \left(p'_W - p'_P\right) \\
&+F_n^* + \rho_n d_n \Delta x \left(p'_P - p'_N\right) - F_s^* - \rho_s d_s \Delta x \left(p'_S - p'_P\right) \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

- Συλλέγουμε όρους στη διόρθωση πίεσης p’ για να φτιάξουμε μια εξίσωση διόρθωσης πίεσης

Εξίσωση διόρθωσης πίεσης (συνέχεια)

$$a_P p'_P = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b$$

$$\begin{aligned}
a_E &= \rho_e d_e \Delta y \\
a_W &= \rho_w d_w \Delta y \\
a_N &= \rho_n d_n \Delta x \\
a_S &= \rho_s d_s \Delta x \\
a_P &= \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} \\
b &= F_w^* - F_e^* + F_s^* - F_n^*
\end{aligned}$$

- Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείτε στην ισότητα

- Ο όρος b είναι η ποσότητα στην οποία οι ταχύτητες με το αστέρι δεν ικανοποιούν την συνέχεια

Διάγραμμα επίλυσης στο σχήμα SIMPLE

1. Υποθέτουμε ταχύτητες και την πίεση p*

2. Λύνουμε τη διακριτοποιημένη εξίσωση u ορμής για να βρούμε το u* χρησιμοποιώντας το p* στον υπολογισμό της πτώσης πίεσης

3. Λύνουμε τη διακριτοποιημένη εξίσωση v ορμής για να βρούμε το v * χρησιμοποιώντας το p* στον υπολογισμό της πτώσης πίεσης

4. Βρίσκουμε τους συντελεστές της εξίσωσης p'. Πιο συγκεκριμένα, βρίσκουμε τον όρο b στην εξίσωση του p' χρησιμοποιώντας u* και v*:

$$b = F_w^* - F_e^* + F_s^* - F_n^*$$

Διάγραμμα επίλυσης στο σχήμα SIMPLE (συνέχεια)

5. Λύνουμε την εξίσωση του p’ για να βρούμε την διόρθωση πίεσης σε όλους τους όγκους ελέγχου του πεδίου μας

6. Διορθώνουμε ταχύτητα και πίεση:

$$u = u^* + u'$$
$$v = v^* + v'$$

$$p = p^* + p'$$

7. Σε αυτό το σημείο, οι ταχύτητες ικανοποιούν την συνέχεια αλλά όχι την ορμή

8. Λύνουμε για τα άλλα φ

9. Ελέγχουμε για σύγκλιση. Αν υπάρχει σύγκλιση, τελειώνουμε. Αν όχι, πάμε στο βήμα 2.

Συζήτηση

• Η εξίσωση της διόρθωσης πίεσης ωθεί τα πεδία της ταχύτητας και της πίεσης στο να ικανοποιήσουν τις εξισώσεις της συνέχειας και της ορμής μέσα από ένα σετ πεδίων *divergence-free*

• Στο βήμα 7, οι διορθωμένες ταχύτητες (u, v) ικανοποιούν την διακριτή εξίσωση της συνέχειας ακριβώς για κάθε επανάληψη

» Όμως δεν ικανοποιούν την ορμή

• Σημειώστε πως χρησιμοποιούνται τα *divergence-free* πεδία ταχυτήτων για να λύσουν για τη γενική ποσότητα φ στο βήμα 8

» Αν δεν γινόταν αυτό, θα ήταν δύσκολο να έχουμε φραγμένο φ κατά την διάρκεια των επαναλήψεων ακόμη και για το σχήμα UDS!

Επίδραση της προσέγγισης

• Διώχνοντας τους όρους $\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$, $\sum_{nb} a_{nb} v'_{nb}$ στην εξίσωση του p' δεν αλλάζει την τελική απάντηση

• Στη σύγκλιση, u' και v' είναι μηδέν

• Ομοίως, το p' γίνεται μια σταθερά
  » Μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να γίνει μηδέν για όλες τις οριακές συνθήκες της ταχύτητας

• Έτσι, οι προσεγγίσεις στις ενδιάμεσες εξισώσεις (αυτές που έχουν τονισμένες τις μεταβλητές τους) δεν μπορούν να αλλάξουν την τελική λύση

• Οπωσδήποτε, οι προσεγγίσεις μπορούν να αλλάξουν τον ρυθμό της σύγκλισης

Υπο-χαλάρωση

• Στην πραγματικότητα, οι διορθώσεις της ταχύτητας αποτελούνται από δύο μέρη:

$$a_e u'_e = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} u'_{\text{nb}} + \Delta y \left(p'_P - p'_E \right)$$

$$a_n v' = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} v'_{\text{nb}} + \Delta x \left(p'_S - p'_P \right)$$

Συνεισφορά πίεσης

Συνεισφορά ταχύτητας

• Διώχνοντας $\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$, $\sum_{nb} a_{nb} v'_{nb}$ σημαίνει ότι όλη η διόρθωση της ταχύτητας γίνεται μέσω την διόρθωσης της πίεσης

Υπο-χαλάρωση (συνέχεια)

• Οι διορθωμένες ταχύτητες πάντα ικανοποιούν την συνέχεια, ανεξαρτήτου προσέγγισης

• Όμως, μεγάλες διορθώσεις της πίεσης δημιουργούν προβλήματα στις επαναλήψεις για την πίεση

• Εφαρμόζουμε υποχαλάρωση της διόρθωσης της πίεσης για την διόρθωση του p*:

$$p = p^* + \alpha_p p'$$

• Δεν υποχαλαρώνουμε τις διορθώσεις της ταχύτητας επειδή, οι διορθωμένες ταχύτητες δεν θα ικανοποιούν την συνέχεια!

Υπο-χαλάρωση (συνέχεια)

• Αυτό σημαίνει ότι δεν χρησιμοποιούμε:

$$u = u^* + \alpha u'$$

• Λόγω της μη- γραμμικότητας, είναι απαραίτητο να υποχαλαρώνουμε την εξίσωση της ορμής:

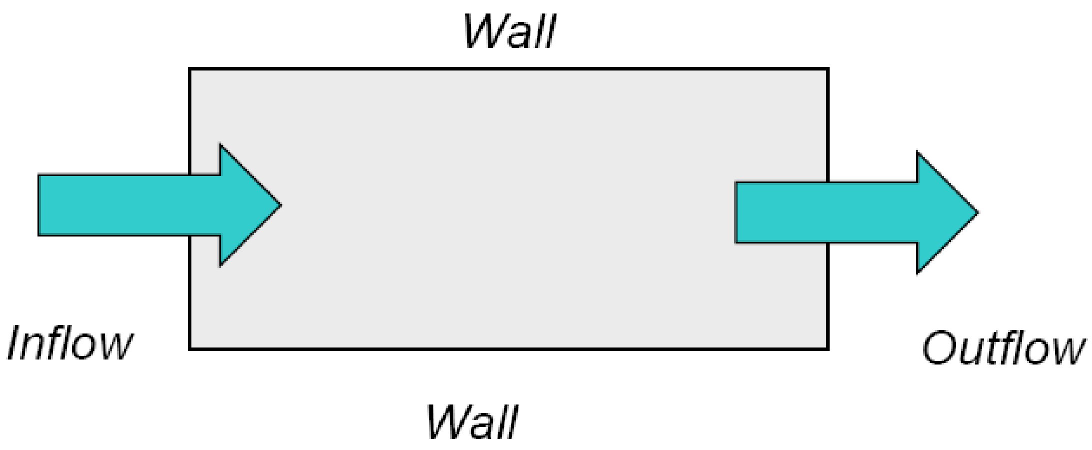
$$a_e u_e = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} u_{\text{nb}} + \Delta y (p_P - p_E) + b_e$$

$$\frac{a_e}{\alpha} \qquad\qquad \frac{(1-\alpha)}{\alpha} a_e u_e^*$$

Φύση της πίεσης για ασυμπίεστες ροές

• Υποθέτουμε ένα υπολογιστικό πεδίο με μόνο οριακές συνθήκες ταχύτητας:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}u) &= \nabla\cdot(\mu\nabla u) - \nabla p\cdot\mathbf{i} + S_u \\ \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}v) &= \nabla\cdot(\mu\nabla v) - \nabla p\cdot\mathbf{j} + S_v \end{aligned}$$



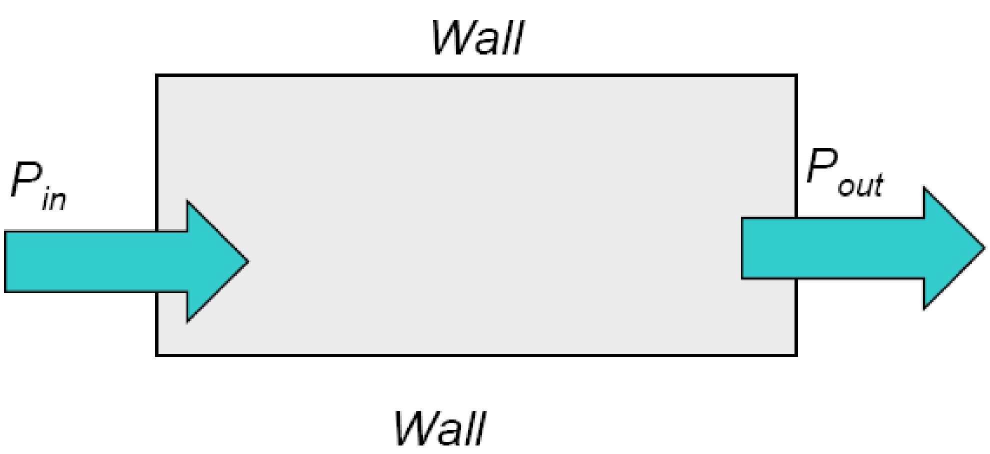
• Η πίεση δεν εμφανίζεται, παρά μόνο ως κλίση στην εξίσωση

• Η απόλυτη τιμή της πίεσης δεν λαμβάνεται υπεισέρχεται στο πρόβλημά

• Μόνο διαφορές πίεσης έχουν σημασία

Φύση της πίεσης για ασυμπίεστες ροές (συνέχεια)

• Τι γίνεται όταν έχουμε οριακές συνθήκες πίεσης;



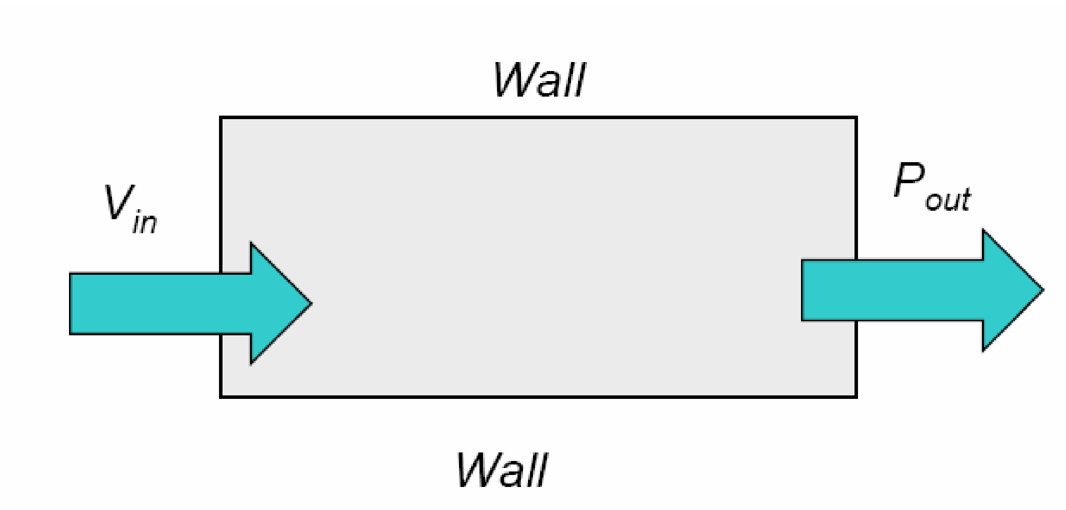
•*Έστω ότι* $P_{in} = 100$, $P_{out} = 50$.

• Υπολογίζουμε το πεδίο ταχυτήτων

• Θα αλλάζει το πεδίο ταχυτήτων αν $P_{in} = 200$, $P_{out} = 150$?

Η πίεση σε ασυμπίεστες ροές

• Τι γίνεται όταν έχουμε μικτές οριακές συνθήκες;



• *Έστω* $V_{in} = 10$, $P_{out} = 10$

• Θα ήταν διαφορετική η ταχύτητα που υπολογίζουμε αν $V_{in} = 10$, $P_{out} = 100$?

Συζήτηση

- Η πίεση δεν αλλάξει την πυκνότητα
  - » Οι απόλυτες τιμές της πίεσης δεν έχουν σημασία

- Μόνο διαφορές της πίεσης είναι σημαντικές σε ασυμπίεστες ροές

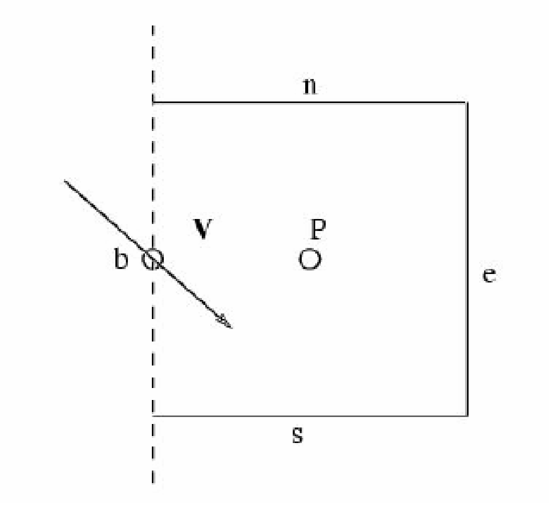
- Όταν όλες οι οριακές συνθήκες είναι ταχύτητας, η πίεση δεν μπορεί να προσδιορισθεί
  - »p και p+c είναι λύσεις

- Όταν έστω και μία οριακή συνθήκη πίεσης υπάρχει
  - » Οι τιμές της πίεσης μπορούν να υπολογιστούν
  - » Αλλά μόνο οι διαφορές της πίεσης καθορίζουν την λύση
  - » Αλλάζοντας οριακές συνθήκες για την πίεση ενώσω κρατάμε σταθερές τις διαφορές πίεσης δεν αλλάζει το αποτέλεσμα

Οριακές συνθήκες ταχύτητας

- Από την εξίσωση της συνέχειας γύρω από το οριακό κελί P:

$$F_e - F_b + F_n - F_s = 0$$



- ‘Οπου,

$$F_b = \rho_b u_b \Delta y$$

- Χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες ροής μάζας αμέσως, χωρίς διορθώσεις.

- Η αντίστοιχη εξίσωση της διόρθωσης πίεσης p’ θα έχει a_w=0

Εξίσωση του P’ στο όριο για οριακή συνθήκη ταχύτητα

$$a_P p'_P = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b$$

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y$$

$$a_W = 0$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x$$

$$a_P = a_E + a_N + a_S$$

$$b = F_b - F_e^* + F_s^* - F_n^*$$

Χρησιμοποιούμε αμέσως την οριακή τιμή

- Το κριτήριο του Scarborough ικανοποιείται στην ισότητα
- Τα p’ και p’+c είναι επίσης λύσεις αυτής της εξίσωσης, όπως και στο εσωτερικό
- Άρα, όταν έχουμε σύγκλιση, p’=σταθερό είναι μια λύση
- Το επίπεδο της πίεσης, άρα, προσδιορίζονται μόνο από μια σταθερά που προσθέτεται

Οριακές συνθήκες ταχύτητας (συνέχεια)

- Θεωρούμε ένα υπολογιστικό πεδίο με όλες τις οριακές συνθήκες ταχύτητας
  - » Οι οριακές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν συνολικά την συνέχεια της μάζας

- Έστω N οι κύριοι όγκοι ελέγχου
  - » Έχουμε N διακριτές εξισώσεις για την συνέχεια
  - » Μόνο οι N-1 είναι γραμμικά εξαρτημένες αφού ο Νοστος όγκος ελέγχου μπορεί να υπολογιστεί από την συνολική εξίσωση συνέχεια
  - » Άρα μόνο N-1 διαφορές πίεσης μπορούν να βρεθούν
  - » Άρα οι τιμές τις πίεσης είναι τυχαίες

Οριακές συνθήκες πίεσης

- Δεν θα δούμε τις λεπτομέρειες
- Στα σημεία όπου έχουμε δοσμένη την πίεση, p’=0
- Αυτό δίνει μια οριακή συνθήκη “Dirichlet” για την πίεση

Εξίσωση του P’ στο όριο για οριακή συνθήκη πίεσης

$$a_P p_P' = \sum_{nb} a_{nb} p_{nb}' + b$$

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y$$

$$a_b = \rho_b d_b \Delta y$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x$$

$$a_P = a_E + a_b + a_N + a_S$$

$$b = F^*_b - F^*_e + F^*_s - F^*_n$$

Υπολογίζεται από την εξίσωση ορμής στο όριο

- Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείτε στην ανισότητα
- Έχουμε p’ = 0 στο όριο. Άρα p’ και p’+c δεν είναι πια και τα δύο λύσεις της εξίσωσης.
- Στη σύγκλιση, p’=0 είναι μια λύση της εξίσωσης
- Η πίεση δεν μπορεί να είναι τυχαία
- Αλλά, μόνο διαφορές της πίεσης έχουν σημασία

Επίλογος

Στη παρούσα διάλεξη είδαμε:

» Τον τρόπο επίλυσης της μεθόδου SIMPLE

» Είδαμε τον ρόλο της πίεσης για ασυμπίεστες ροές

» Είδαμε πως να εισάγουμε οριακές συνθήκες