ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 14: Εισαγωγή στη ροή ρευστών

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Εξετάσαμε οριακές συνθήκες για προβλήματα αγωγής-συναγωγής

  Είσοδος, έξοδος

Οργάνωση παρουσίασης

- Θα εξετάσουμε πως υπολογίζουμε την ροή ρευστών
  » Σχήματα σειριακά
  » Πως να εισάγουμε την πίεση στη συνέχεια

- Θα δούμε που μπορούμε να αποθηκεύουμε την πίεση και την ταχύτητα
  » Προβλήματα που σχετίζονται με την θέση των μεταβλητών στο υπολογιστικό πλέγμα

- Θα εξετάσουμε το μετατοπισμένο πλέγμα (staggered mesh) ως αρχική λύση για την επιλογή των μεταβλητών σε δομημένα πλέγματα

Εισαγωγή στη ροή ρευστών

- Μέχρι στιγμής έχουμε υποθέσει ότι το πεδίο της ροής είναι γωνστό

- Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να το υπολογίσουμε

- Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι μια ειδική περίπτωση εξίσωσης αγωγής-συναγωγής με $\varphi = u$, v ή w, και $\Gamma = \mu$ και ένα κατάλληλο S

- Άρα που βρίσκεται το πρόβλημα;

Μόνιμη δισδιάστατη εξίσωση Navier-Stokes

- Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Navier-Stokes ως:

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\rho \mathbf{V} u) &= \nabla\cdot(\mu\nabla u) - \nabla p\cdot\mathbf{i} + S_u \\
\nabla\cdot(\rho \mathbf{V} v) &= \nabla\cdot(\mu\nabla v) - \nabla p\cdot\mathbf{j} + S_v
\end{aligned}
$$

- Για Νευτωνικά ρευστά ξέρουμε ότι:

$$S_u = f_u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu\nabla\cdot\mathbf{V})$$

$$S_v = f_v + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu\nabla\cdot\mathbf{V})$$

Που βρίσκεται το πρόβλημα;

- Η εξίσωση NS είναι μη-γραμμική
  - » Δεν είναι από μόνο του πρόβλημα
  - » Μπορεί να κάνει επαναλήψεις Picard

- Έχει πάνω από μία εξισώσεις ορμής (x,y,z)
  - » Δεν είναι πρόβλημα
  - » Μπορεί να λυθεί η κάθε μια σειριακά

- Όροι πηγής;
  - » Ο τανυστής των τάσεων μπορεί να υπολογιστεί

- Το κυριότερο πρόβλημα είναι ότι η πίεση δεν είναι γνωστή!
  - » Πρέπει να βρεθεί κάποιος τρόπος υπολογισμού της
  - » Ποια ΜΔΕ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Προβλήματα στον υπολογισμό της πίεσης

- Υπάρχουν δύο διαφορετικά προβλήματα που πρέπει να λυθούν
  - » Που πρέπει να αποθηκεύσουμε την πίεση σε σχέση με την ταχύτητα
  - » Πως να βρούμε μια εξίσωση για την πίεση

- Σε προβλήματα 3D, έχουμε 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους
  - » 3 ταχύτητες, 1 πίεση
  - » 3 εξισώσεις ορμής και μία εξίσωση συνέχειας

- Γενικά είναι δυνατόν να λυθεί

Η μορφή Στροβιλότητας – Ροϊκής συνάρτησης

- Χρησιμοποιήθηκε στις δεκαετίες 70’s-80’s
  - » Λύνουμε μια ΜΔΕ για την ροϊκή συνάρτηση Ψ και μία ΜΔΕ για την συνιστώσα της στροβιλότητας ξ σε 2D
  - » Η διαδικασία απαλείφει την πίεση από μεταβλητή
  - » Λύνουμε για δύο ΜΔΕ παρά για τρεις σύμφωνα με μορφή των εξισώσεων με πρωταρχικές μεταβλητές (*primitive variable formulations,* u, v, p)

- Για τριδιάστατες ροές δεν μπορεί να υπάρχει ορισμός της ροϊκής συνάρτησης

- Εναλλακτική μορφή σε 3D είναι της Στροβιλότητας-διανύσματος δυναμικού
  - » έχει 6 αγνώστους (3 για στροβιλότητα, 3 για το διάνυσμα του δυναμικού)
  - » Λιγότερές μεταβλητές (u,v,w,p) όταν λύνουμε για primitive variables
- Δυσκολία για να βρεθούν οριακές συνθήκες

- Η μορφή των αρχικών μεταβλητών είναι η συνηθέστερη σήμερα

Σειριακή επίλυση

- Η προσέγγιση μας είναι να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (coupled) με κάποιου είδους σειριακό αλγόριθμο

- Θεωρούμε:
  » την εξίσωση της u-ορμής για την ταχύτητα u
  » την εξίσωση της v- ορμής για την ταχύτητα v
  » την εξίσωση συνέχειας ως διαφορική εξίσωση για την πίεση

- Πιθανός επαναληπτικός αλγόριθμος:
  » διακριτοποιούμε και λύνουμε την u στο πεδίο, υποθέτοντας ως γνωστά τα v, p από την προηγούμενη επανάληψη
  » ομοίως λύνουμε για τη v από την διακριτή εξίσωση για την v ορμή
  » ομοίως λύνουμε για την p από την διακριτοποίηση της συνέχειας
  » Συνεχίζουμε έως την σύγκλιση

Εξίσωση για την πίεση

- Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{V} \right) = 0$$

- Για συμπιεστή ροή, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε ως βάση για να βρούμε μια εξίσωση κατάστασης. Για παράδειγμα για ένα τέλειο αέριο:

$$\rho = {}^{P}\!/_{RT}$$

- Τι κάνουμε όμως για ασυμπίεστες ροές;
  » Δεν υπάρχει σύνδεση πίεσης και πυκνότητας
  » Δεν υπάρχει κάποιος προφανής τρόπος για να εισάγουμε την πίεση στη εξίσωση της συνέχειας

Σειριακά vs. Άμεσα σχήματα

• Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε ότι το πρόβλημα του υπολογισμού της πίεσης για ασυμπίεστα ρευστά είναι συνυφασμένω με το σειριακό αλγόριθμο επίλυσης

• Μόνο για σειριακούς αλγόριθμους είναι απαραίτητο να βρούμε μια διαφορική εξίσωση για κάθε άγνωστη μεταβλητή

» u-ορμή για την ταχύτητα u; v-ορμή για την ταχύτητα v, εξίσωση συνέχεια για την πίεση, εξίσωση ενέργειας για την θερμοκρασία, κλπ

• Για αλγόριθμο άμεσης επίλυσης, δεν είναι απαραίτητο το παραπάνω ταίριασμα

Άμεσα σχήματα

• Διακριτοποιούμε τις εξισώσεις ορμής για την u και v συνιστώσα και την εξίσωση της συνέχειας για κάθε υπολογιστικό κελί

• Συνθέτουμε ένα μεγάλο πίνακα: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

• Το διάνυσμα της λύσης είναι:

$$\mathbf{x} = \left[u_1, u_2, \ldots, u_N, v_1, v_2, \ldots, v_N, p_1, p_2, \ldots, p_N\right]^T$$

• Δεν υπάρχει ανάγκη να δούμε ποιος άγνωστος λύνεται από ποια ΜΔΕ

• Δυστυχώς είναι πολύ ακριβό για πρακτικά προβλήματα

Προβλήματα στον υπολογισμό της πίεσης

- Υπάρχει πρόβλημα όταν χρησιμοποιούμε σειριακή επίλυση για τον υπολογισμό της πίεσης

- Επειδή δεν υπάρχει η πίεση στην εξίσωση τις συνέχειας

  » Πρέπει να βρούμε ένα τρόπο για να εισάγουμε την πίεση στη συνέχεια

  » Η επίλυση αυτού του προβλήματος θα μας οδηγήσει στη λύση

Προβλήματα στον υπολογισμό της πίεσης (συνέχεια)

- Ένα άλλο πρόβλημα υπάρχει σχετικά με την αποθήκευση της πίεσης και της ταχύτητας
  - » Η πιο απλή επιλογή είναι να αποθηκεύσουμε την πίεση και τις ταχύτητες στα κέντρα του κελιού
  - » Αποδεικνύετε ότι αυτού του είδους η αποθήκευση που ονομάζεται “co-located” δημιουργεί προβλήματα
  - » Δίνει λύσεις πίεσης/ταχύτητας με χωρικές ανωμαλίες
  - » Είναι στοιχείο της διακριτοποίησης, και δεν υπάρχει τρόπος αποφυγής
  - » Δεν υπάρχει τρόπος να το αποφύγουμε επιλέγοντας διαφορετικούς τρόπους λύσης

Μόνιμη δισδιάστατη εξίσωση Navier-Stokes

• Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Navier-Stokes ως:

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}u) &= \nabla\cdot(\mu\nabla u)-\nabla p\cdot\mathbf{i}+S_u \\
\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}v) &= \nabla\cdot(\mu\nabla v)-\nabla p\cdot\mathbf{j}+S_v
\end{aligned}
$$

• Για Νευτωνικά ρευστά ξέρουμε ότι:

$$S_u = f_u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu\nabla\cdot\mathbf{V})$$

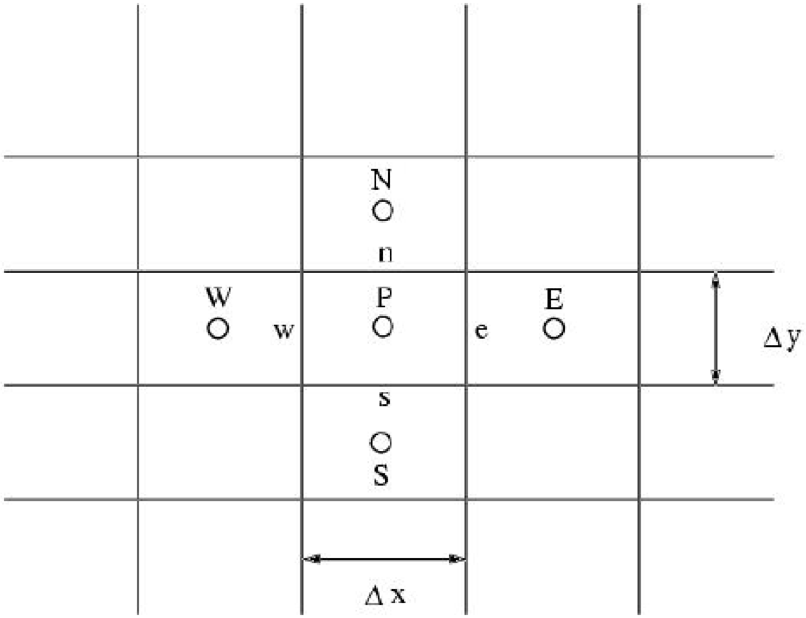
$$S_v = f_v + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu\nabla\cdot\mathbf{V})$$

Αποθήκευση τύπου Co-Located για την πίεση - ταχύτητα

- Η κλίση της πίεσης είναι στην πραγματικότητα ένας όρος πηγής, αλλά ας τον χρησιμοποιήσουμε ξεχωριστά μιας και δεν είναι γνωστός εκ των προτέρων, *a priori*

- Θεωρούμε ομοιόμορφο Καρτεσιανό πλέγμα 2D

- Αποθηκεύουμε (δοκιμαστικά) τα u,v,p στα κέντρα των κελιών



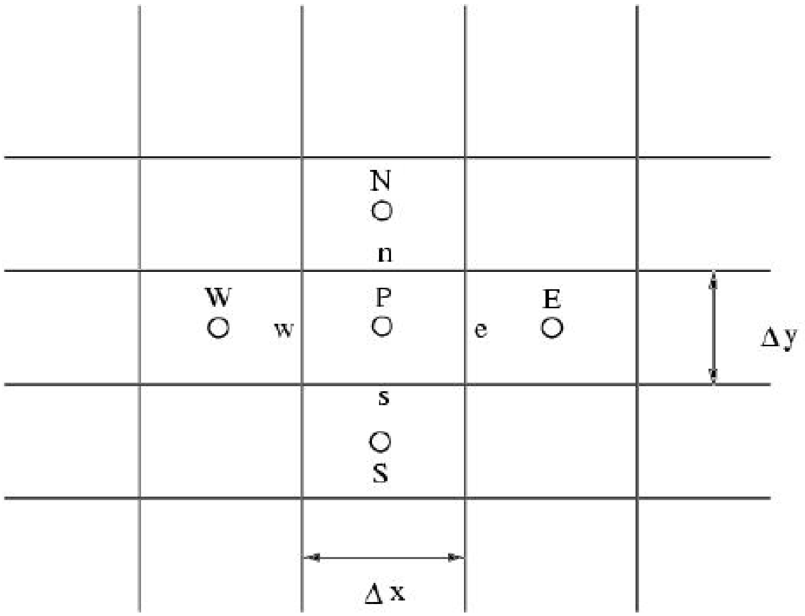
Ο όρος της κλίσης πίεσης

- Η ολοκλήρωση με όγκους ελέγχου προϋποθέτει τον υπολογισμό του

$$\int_{\Delta\mathcal{V}} \nabla p \, d\mathcal{V} = \int_A p \, d\mathbf{A}$$

- Σε διακριτή μορφή γράφεται ως:

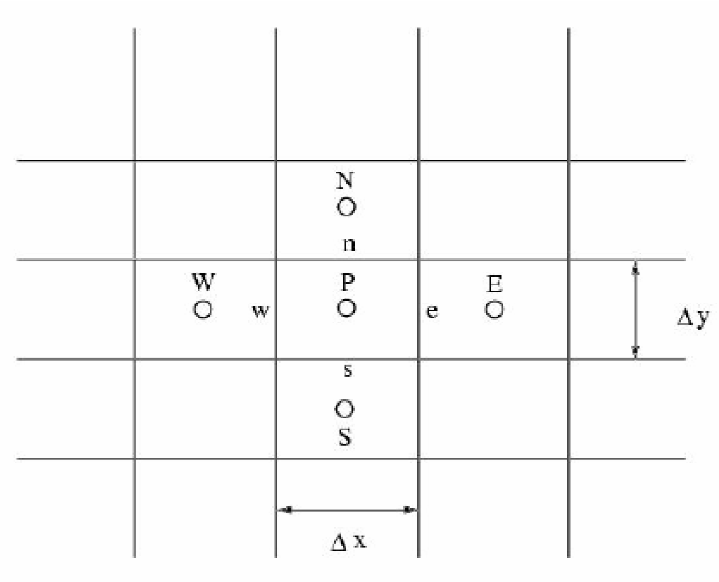
$$\int_A p \, d\mathbf{A} = \sum_f p_f \mathbf{A}_f$$



Ο όρος της κλίσης πίεσης (συνέχεια)

• επιφανειακά διανύσματα :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_e &= \Delta y\mathbf{i}\\ \mathbf{A}_w &= -\Delta y\mathbf{i}\\ \mathbf{A}_n &= \Delta x\mathbf{j}\\ \mathbf{A}_s &= -\Delta x\mathbf{j}\end{aligned}$$



• Για την εξίσωση της u-ορμής έχουμε

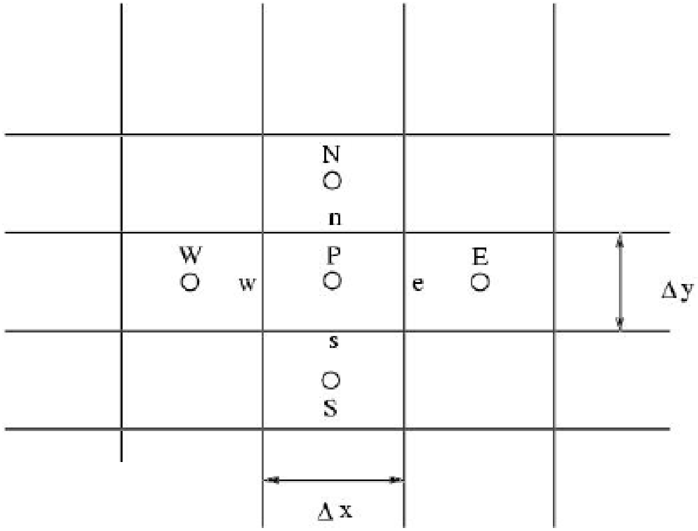
$$-\mathbf{i}\cdot\int_{\Delta\mathcal{V}}\nabla p\, d\mathcal{V} = -\mathbf{i}\cdot\sum_f p_f \mathbf{A}_f$$

$$-\mathbf{i}\cdot\sum_f p_f \mathbf{A}_f = (p_w - p_e)\Delta y$$

Ο όρος της κλίσης πίεσης (συνέχεια)

- η κλίση πίεσης για την v-ορμή

$$-\mathbf{j}\cdot\sum_f p_f \mathbf{A}_f = (p_s - p_n)\Delta x$$



- Διακριτοποιώντας τους άλλους όρους όπως πριν:

$$\begin{aligned} a_P u_P &= \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} u_{\mathrm{nb}} + (p_w - p_e)\Delta y + b_u \\ a_P v_P &= \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} v_{\mathrm{nb}} + (p_s - p_n)\Delta x + b_v \end{aligned}$$

Ο όρος της κλίσης πίεσης (συνέχεια)

• Χρειαζόμαστε την πίεση στις πλευρές, αλλά είναι διαθέσιμη μόνο στα κέντρα του κελιού

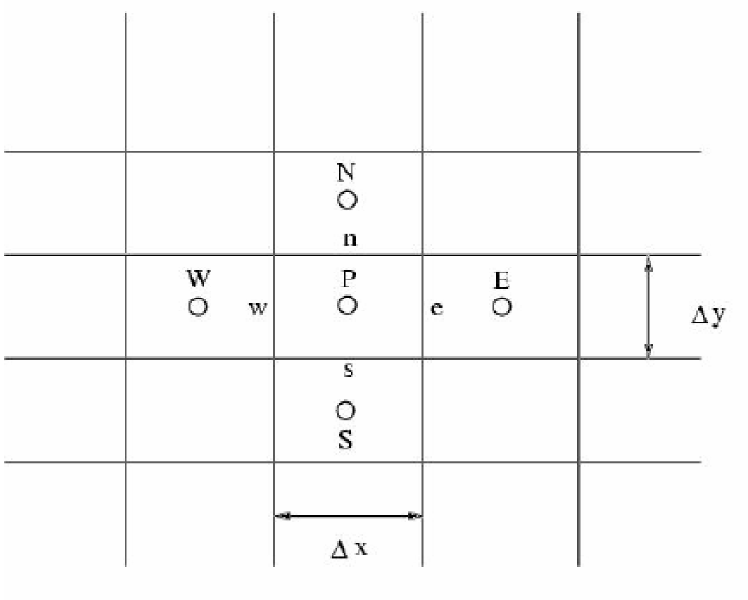
• Για τις πλευρές έχουμε:

$$
\begin{aligned}
p_e &= \frac{p_E + p_P}{2} \\
p_w &= \frac{p_W + p_P}{2} \\
p_n &= \frac{p_N + p_P}{2} \\
p_s &= \frac{p_S + p_P}{2}
\end{aligned}
$$

Ο όρος της κλίσης πίεσης (συνέχεια)

- Η γραμμική παρεμβολή οδηγεί στους εξής όρους πίεσης

$$
\begin{aligned}
(p_w - p_e)\Delta y &= (p_W - p_E)\Delta y \\
(p_s - p_n)\Delta x &= (p_S - p_N)\Delta x
\end{aligned}
$$



Σημειώστε ότι p_P δεν εμφανίζεται στους όρους της κλίσης πίεσης για τον όγκο ελέγχου P

Διακριτοποίηση της εξίσωσης συνέχειας

- Υποθέτουμε την εξίσωση της συνέχειας σε δυο διαστάσεις

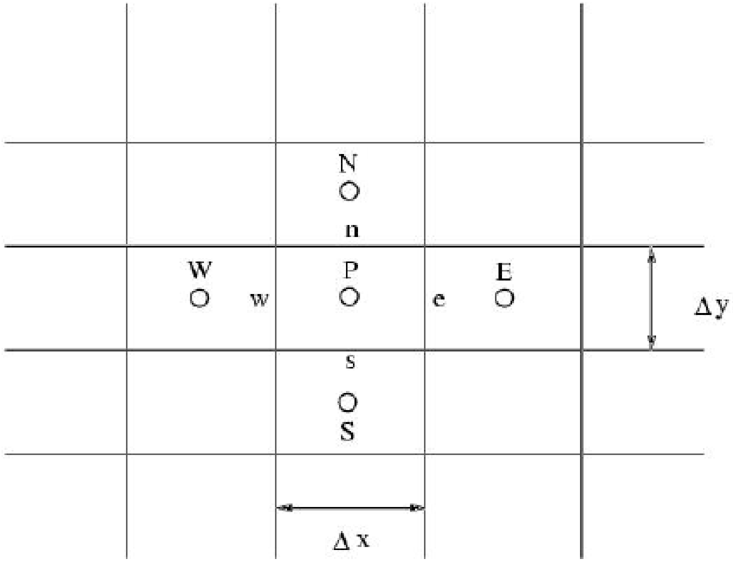
$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

- Ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου

$$\int_{\Delta \mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V})\, d\mathcal{V} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

- Γράφουμε την διακριτή μορφή:

$$\int_A \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = \sum_f (\rho \mathbf{V})_f \cdot \mathbf{A}_f$$



Εξίσωσης συνέχειας (συνέχεια)

- Διάνυσμα ταχύτητας: $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Διακριτή εξίσωση συνέχειας:

$$(\rho u)_e \Delta y - (\rho u)_w \Delta y + (\rho v)_n \Delta x - (\rho v)_s \Delta x = 0$$

- Χρειάζεται ταχύτητα στις πλευρές, ενώ είναι στα κέντρα του κελιού
  - » Την υπολογίζουμε με γραμμική παρεμβολή στις πλευρές

Εξίσωσης συνέχειας (συνέχεια)

- Γραμμική παρεμβολή

$$
\begin{aligned}
(\rho u)_e &= \frac{(\rho u)_P + (\rho u)_E}{2} \\
(\rho u)_w &= \frac{(\rho u)_W + (\rho u)_P}{2} \\
(\rho v)_n &= \frac{(\rho v)_P + (\rho v)_N}{2} \\
(\rho v)_s &= \frac{(\rho v)_S + (\rho v)_P}{2}
\end{aligned}
$$

- Διακριτή εξίσωση συνέχειας:

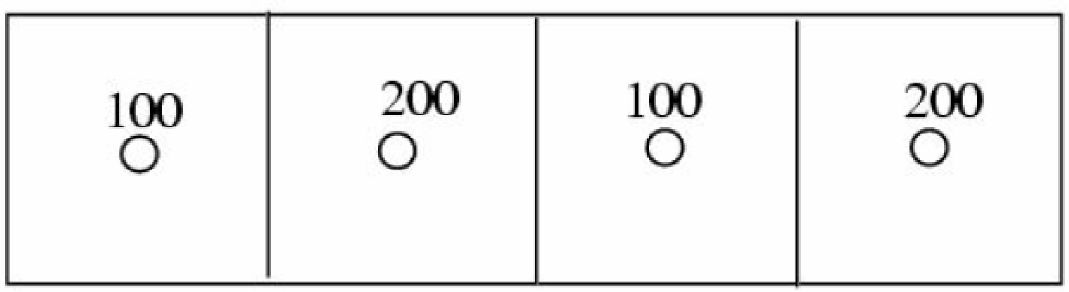
Σημείωση: δεν εμφανίζονται τιμές του u και v στο σημείο P στον όγκο ελέγχου

$$(\rho u)_E \Delta y - (\rho u)_W \Delta y + (\rho v)_N \Delta x - (\rho v)_S \Delta x = 0$$

Πρόβλημα σε δομές ροής τύπου σκακιέρας

- Τα πεδία ταχυτήτων με δομές τύπου σκακιέρας θα φαίνονται από την εξίσωση συνέχειας ως ομοιόμορφα πεδία ροής

- Τα πεδία πίεσης με δομή σκακιέρας θα φαίνονται επίσης από την εξίσωση της ορμής ως ομοιόμορφα



Πρόβλημα σε δομές ροής τύπου σκακιέρας (συνέχεια)

- Ας υποθέσουμε ότι η δομή της ροής που έχουμε ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας

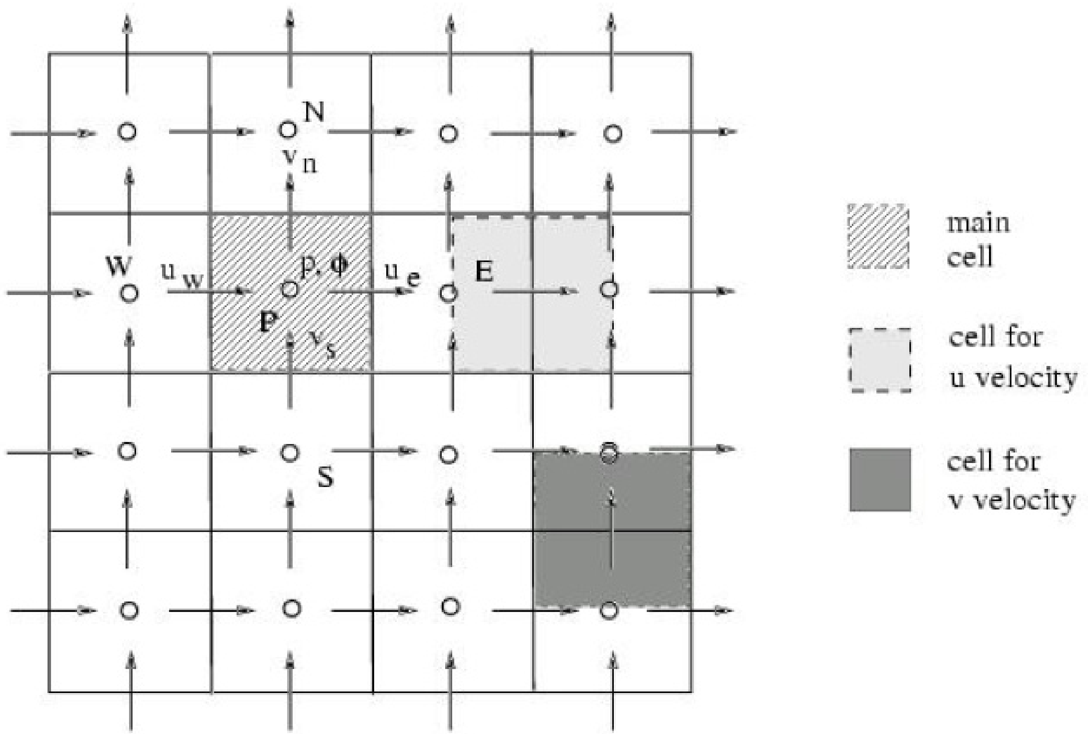
- Αυτό σημαίνει ότι οι όροι πηγής στην εξίσωση της ορμής έχουν μια δομή

- Η πίεση είναι μέρος της λύσης,
  - » Μπορούμε να βρούμε ένα πεδίο πίεσης όπου ικανοποιεί ακριβώς τον όρο πηγής στην εξίσωση της ορμής
  - » Λύση της διακριτοποιημένης εξίσωσης μπορεί να επιτευχθεί, αλλά το αποτέλεσμα δεν είναι φυσικό

- Στην πραγματικότητα, δεν είναι εύκολο να διαλέξουμε ακριβώς δομές με σχήμα σκακιέρας
  - » Το αποτέλεσμα είναι λύσεις με χωρικές ανωμαλίες στην λύση της πίεσης και της ταχύτητας

Μετατοπισμένο πλέγμα

- Αποθηκεύουμε την πίεση στο μέσο του κελιού
- Αποθηκεύουμε τις ταχύτητες σε μετατοπισμένους όγκους ελέγχου



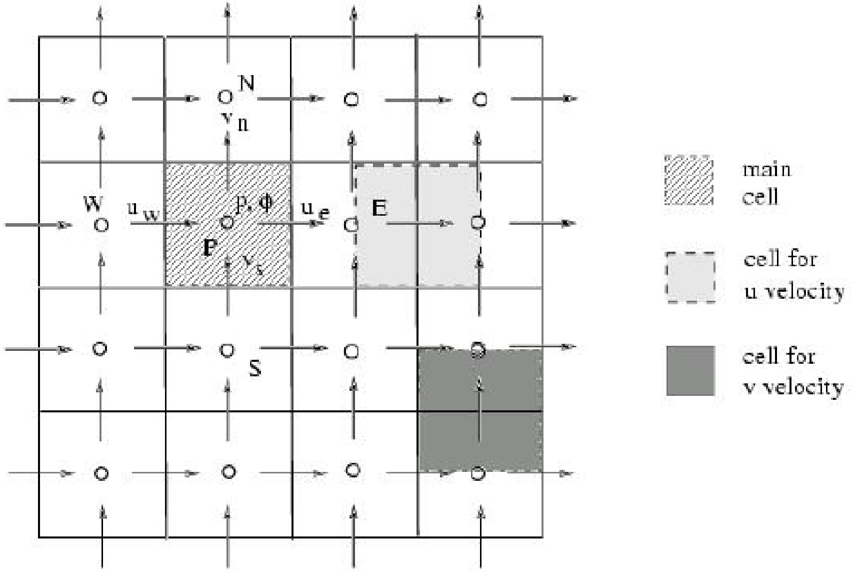
Μετατοπισμένο πλέγμα: Εξίσωση ορμής

• Η διαφορά πίεσης για την u_e είναι:

$$(p_P - p_E)\Delta y$$

• Η διαφορά πίεσης για την v_n είναι:

$$(p_P - p_N)\Delta y$$



• Δεν υπάρχει ανάγκη για την προσέγγιση της πίεσης στις πλευρές

» Είναι διαθέσιμη στις πλευρές του όγκου ελέγχου των εξισώσεων της ορμής

• Αποφεύγουμε δομές σκακιέρας για την πίεση

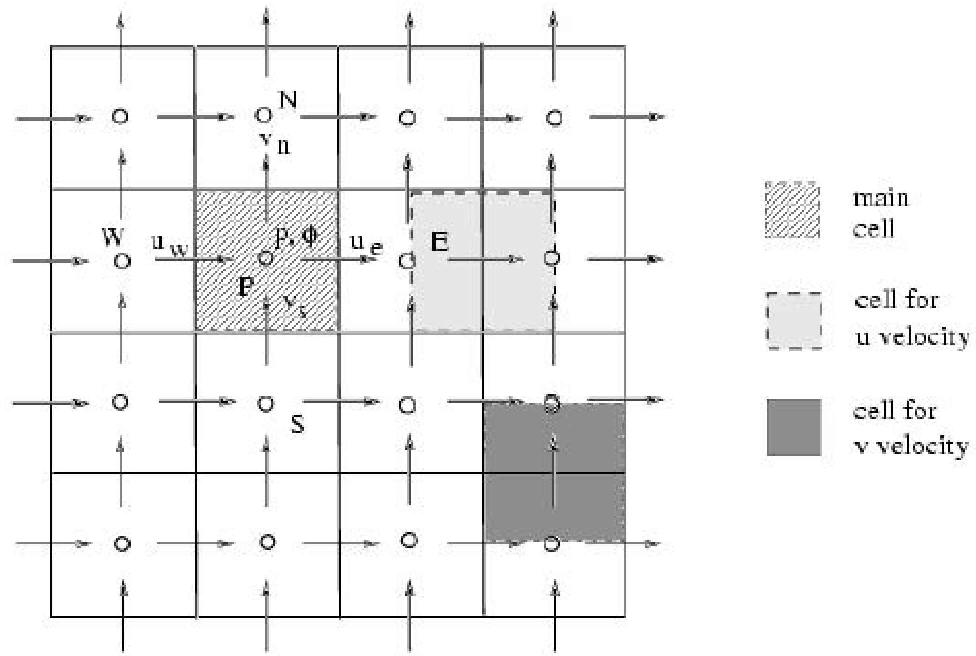
Μετατοπισμένο πλέγμα: Εξίσωση συνέχειας

- Διακριτοποιούμε την εξίσωση της συνέχειας στον κύριο όγκο ελέγχου:

$$(\rho u)_e \Delta y - (\rho u)_w \Delta y + (\rho v)_n \Delta x - (\rho v)_s \Delta x = 0$$

- Δεν υπάρχει λόγος για να προσεγγίσουμε τις ταχύτητες

Οι ταχύτητες είναι διαθέσιμες στις πλευρές όπου και χρειάζονται



Διακριτές εξισώσεις

- Συνέχεια:

$$(\rho u)_e \Delta y - (\rho u)_w \Delta y + (\rho v)_n \Delta x - (\rho v)_s \Delta x = 0$$

- U-ορμή:

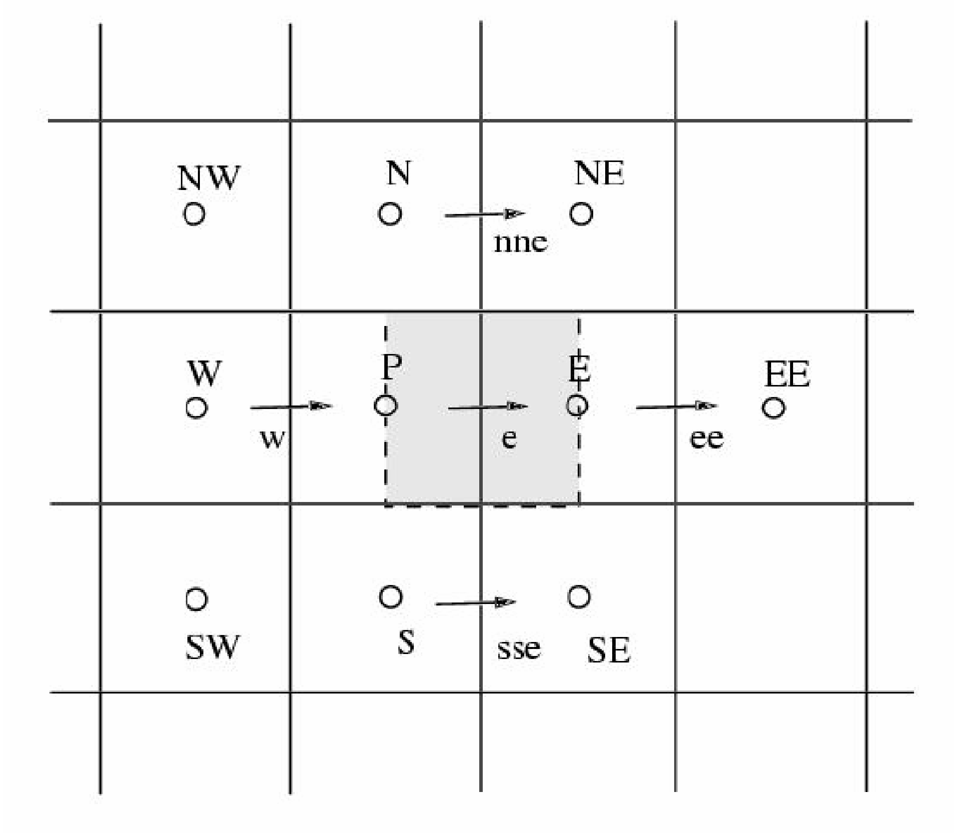
$$a_e u_e = \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} u_{\mathrm{nb}} + \Delta y (p_P - p_E) + b_e$$

- V-ορμή:

$$a_n v_n = \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} v_{\mathrm{nb}} + \Delta x (p_P - p_N) + b_n$$

Τα γειτονικά στοιχεία της εξίσωσης της ορμής

- Δείχνουμε τους γείτονες του u_e
- Οι γείτονες του v_n;



Επίλογος

Στη παρούσα διάλεξη είδαμε:

- Δύο διαφορετικά προβλήματα σχετικά με την εύρεση της πίεσης
- Το πρώτο έχει να κάνει με το πως βάζουμε την πίεση στην εξίσωση της συνέχεις για ασυμπίεστες ροές
  - » Δεν έχουμε ακόμη βρει κάποιο τρόπο
- Το δεύτερο θέμα έχει σχέση με την αποθήκευση της πίεσης σε σχέση με την ταχύτητα
  - » Είδαμε ότι η χρήση μετατοπισμένου πλέγματος αποτρέπει τα προβλήματα
  - » Επιπρόσθετη δυσκολία στη γεωμετρία των όγκων ελέγχου λόγω των διαφορετικών τύπων (3 για 2Δ και 4 για 3Δ)