ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 6: Εξίσωση διάχυσης (συνέχεια)

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

Εξετάσαμε την εξίσωση διάχυσης σε δύο διαστάσεις (2D) σε Καρτεσιανό δομημένο πλέγμα. Συγκεκριμένα,

- Εισάγαμε την έννοια της συνδυασμένης μετάδοσης θερμότητας (Conjugate heat transfer)
- Μελετήσαμε την γραμμικοποίηση των όρων πηγής
- Εξετάσαμε τη μέθοδο της υποχαλάρωσης (Under-relaxation)

Οργάνωση παρουσίασης

Θα συνεχίσουμε:

- Εξετάζοντας ειδικές περιπτώσεις γραμμικών επιλυτών

  » αλγόριθμο τριδιαγώνιου πίνακα (TDMA)

  » line-by-line (TDMA)

- Εξετάζοντας την χρονικά μεταβαλλόμενη (unsteady) αγωγή

• Θα μελετήσουμε γραμμικούς επιλυτές για δομημένα πλέγματα σε δύο διαστάσεις

• Ας θεωρήσουμε την μονοδιάστατη διακριτή εξίσωση γύρω από το σημείο P:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b$$

$$\begin{aligned} a_E &= \Gamma_e/(\delta x_e) \\ a_W &= \Gamma_w/(\delta x_w) \\ a_P &= a_E + a_W \\ b &= \overline{S}\Delta x \end{aligned}$$

Γραμμικοί επιλυτές (συνέχεια)

• Γράφουμε ξανά την εξίσωση χρησιμοποιώντας το παρόμοιο συμβολισμό

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i$$

• Έχουμε μία εξίσωση όπως αυτή για κάθε σημείο του πλέγματος $i = 1, 2, 3, \ldots, N$

• Για $i = 1$, $c_1=0$.

• Επίσης, $b_N = 0$

Αλγόριθμο τριδιαγώνιου πίνακα (TDMA)

• Για κάθε i σημείο του πλέγματος:

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i$$

• Για τα σημεία όπου υπάρχουν οριακές συνθήκες: $c_1=0; b_N=0$

• Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για το σημείο 1 γράφουμε $\varphi_1= f(\varphi_2)$.

• Αντικαθιστούμε το φ_1 στην εξίσωση για το φ_2 και το εξαλείφουμε γράφοντας $\varphi_2= f(\varphi_3)$

• Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι την N-οστη εξίσωση και βρίσκουμε το φ_N

• Αντικαθιστούμε ανάποδα και βρίσκουμε τα φ_{N-1}…. φ_1

$$\begin{bmatrix} x & x & & \\ x & x & x & \\ & x & x & x \\ & & x & x \end{bmatrix}$$

• Σημείωση: η μέθοδος είναι παρόμοια με τις άμεσες μεθόδους (πχ. Gaussian elimination)

TDMA (συνέχεια)

- Σχηματίζοντας την διαδικασία, ορίζουμε τους συντελεστές P_i και Q_i έτσι ώστε:

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i$$

- Είναι εύκολο να δειχθεί ότι:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \\ Q_i &= \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \end{aligned}$$

- $P_1 = b_1/a_1$; $P_N = 0$
- $\varphi_N = Q_N$

TDMA (συνέχεια)

Διαδικασία επίλυσης:

- Στην προς τα εμπρός επανάληψη, βρίσκουμε τα P_i, Q_i, $i=1,2\ldots N$
- Στο τέλος της διαδικασίας βρίσκουμε $\varphi_N = Q_N$
- Στην προς τα πίσω επανάληψη, χρησιμοποιούμε

$$\phi_i = P_i\phi_{i+1} + Q_i$$

Γνωστό

Άγνωστο

- Συνεχίζοντας την ανάποδη επανάληψη βρίσκουμε τα $\varphi_{N-1}, \ldots, \varphi_1$

Line-by-line TDMA

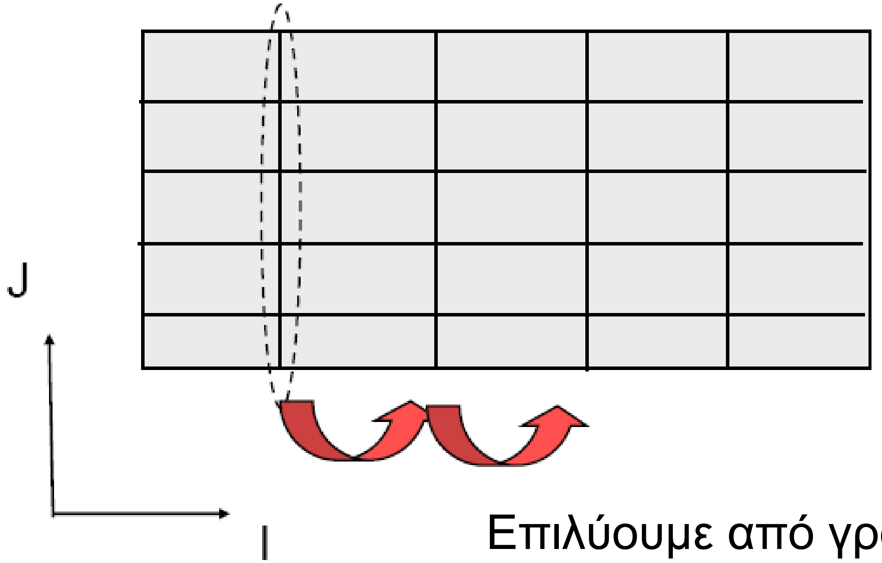
- Χρησιμοποιείται για πολυδιάστατα προβλήματα σε δομημένα πλέγματα
- Υποθέτουμε ότι οι τιμές στις γραμμές σε κάθε πλευρά είναι προσωρινά γνωστές
- Σε κάθε γραμμή, χρησιμοποιούμε τη TDMA για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα
- Επαναλαμβάνουμε την λύση πάνω στις γραμμές ξανά και ξανά έως ότου να έχουμε σύγκλιση
- Η διεύθυνση που εφαρμόζουμε τη TDMA ονομάζεται “διάβαση TDMA (traverse)”
- Η διεύθυνση όπου οι γραμμές επιλύονται σειριακά ονομάζεται “Sweep”
- Μερικές φορές η μέθοδο ονομάζεται Line Gauss Seidel (LGS)

Line-by-line TDMA

$$a_{ij}\phi_{ij} = b_{ij}\phi_{ij+1} + c_{ij}\phi_{ij-1} + g_{ij} + d_{ij}\phi^{*}_{i+1j} + e_{ij}\phi^{*}_{i-1j}$$

Εφαρμόζουμε TDMA
σε κάθε γραμμή

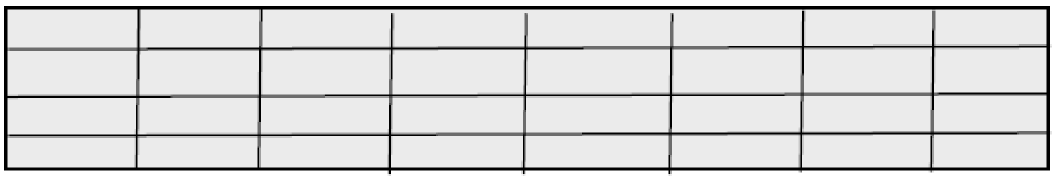
Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για τις άλλες διευθύνσεις

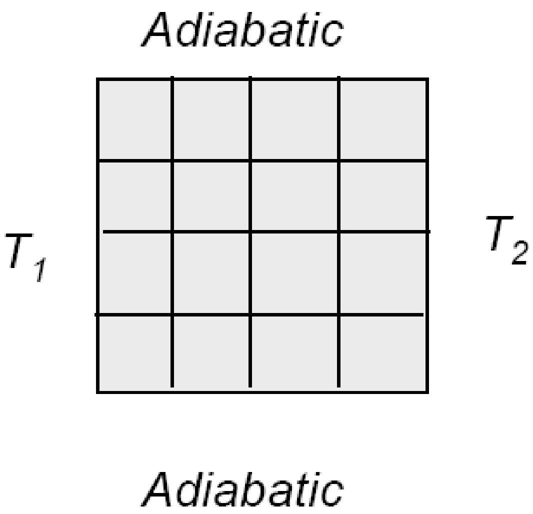


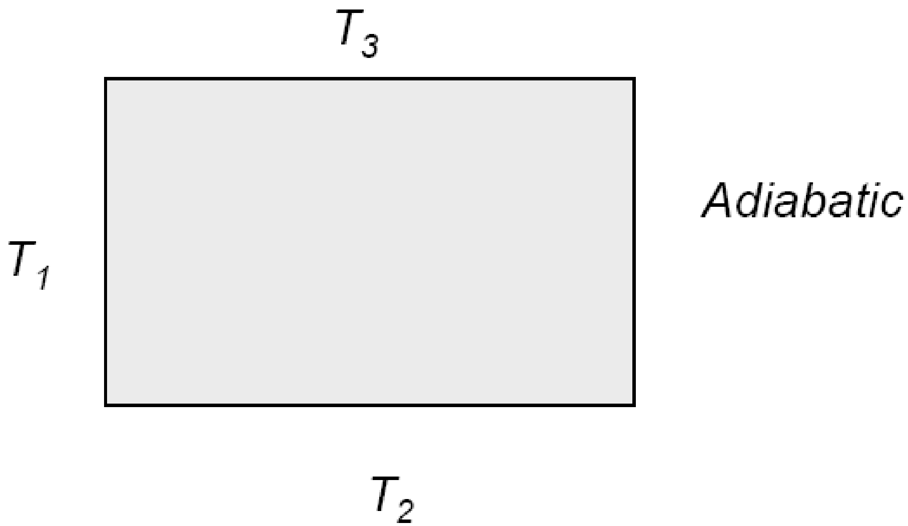
Επιλύουμε από γραμμή σε γραμμή

Line-by-line TDMA

Ποια διεύθυνση θα επιλέγαμε για να λύσουμε τη TDMA στις παρακάτω περιπτώσεις;



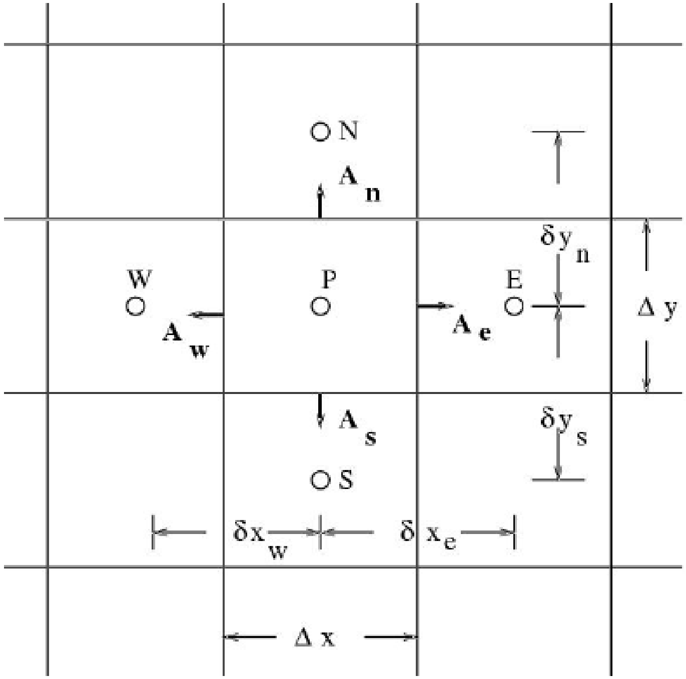




Χρονικά μεταβαλλόμενη διάχυση

Γενική εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot \mathbf{J} = S$$



Την ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου
και το χρονικό βήμα:

$$\int_{\Delta t}\int_{\Delta \mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)\, d\mathcal{V}\, dt + \int_{\Delta t}\int_{\Delta \mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J}\, d\mathcal{V}\, dt = \int_{\Delta t}\int_{\Delta \mathcal{V}} S\, d\mathcal{V}\, dt$$

Χρονικός όρος

• Γράφουμε τον όρο της χρονικής μεταβολής ως προς την τρέχουσα τιμή του (1) και μια προηγούμενη (0):

$$\boxed{\int_{\Delta\mathcal{V}} \left((\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0\right) d\mathcal{V}} + \int_{\Delta t}\int_A \mathbf{J}\cdot d\mathbf{A}dt = \int_{\Delta t}\int_{\Delta\mathcal{V}} S d\mathcal{V} dt$$

• Υποθέτουμε:

$$\int_{\Delta\mathcal{V}} \rho\phi d\mathcal{V} = (\rho\phi)_P \Delta\mathcal{V}$$

•Έτσι ο χρονικός όρος γίνεται: $\Delta\mathcal{V}\left((\rho\phi)_P^1 - (\rho\phi)_P^0\right)$

Όρος ροής

• Θεωρούμε το ολοκλήρωμα του όρου ροής

$$\int_{\Delta \mathcal{V}} \left((\rho\phi)^1 - (\rho\phi)^0 \right) d\mathcal{V} + \boxed{\int_{\Delta t} \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} dt} = \int_{\Delta t} \int_{\Delta \mathcal{V}} S d\mathcal{V} dt$$

•Γράφουμε τον όρο ως:

$$\int_{\Delta t} \sum_{\mathrm{f=e,w,n,s}} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{A}_f dt$$

• Για την ολοκλήρωση υποθέτουμε ότι ο όρος της ροής μεταβάλλεται γραμμικά σε κάθε χρονικό βήμα.

$$\int_{\Delta t} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dt = \left(f \mathbf{J}^1 \cdot \mathbf{A} + (1-f) \mathbf{J}^0 \cdot \mathbf{A} \right) \Delta t$$

Όρος ροής

• Για κάθε χρονικό βήμα διακριτοποιούμε τον όρο ροής σε σχέση με το προηγούμενο χρονικό βήμα

• Τρέχον χρόνος:

$$\mathbf{J}_e^1 \cdot \mathbf{A}_e = -\Gamma_e \Delta y \frac{\phi_E^1 - \phi_P^1}{(\delta x)_e}$$

$$\mathbf{J}_w^1 \cdot \mathbf{A}_w = \Gamma_w \Delta y \frac{\phi_P^1 - \phi_W^1}{(\delta x)_w}$$

•Παλαιότερος χρόνος:

$$\mathbf{J}_e^0 \cdot \mathbf{A}_e = -\Gamma_e \Delta y \frac{\phi_E^0 - \phi_P^0}{(\delta x)_e}$$

$$\mathbf{J}_w^0 \cdot \mathbf{A}_w = \Gamma_w \Delta y \frac{\phi_P^0 - \phi_W^0}{(\delta x)_w}$$

Όρος πηγής

• Πρέπει να υπολογιστεί:

$$\int_{\Delta t}\int_{\Delta \mathscr{V}} S\,d\mathscr{V}\,dt = \int_{\Delta t}\left(S_C + S_P\phi_P\right)\Delta\mathscr{V}\,dt$$

• Το χωρικό κομμάτι προσεγγίζεται ως:

$$\int_{\Delta \mathscr{V}}\left(S_C + S_P\phi\right)d\mathscr{V} = \left(S_C + S_P\phi_P\right)\Delta\mathscr{V}$$

•Επίσης, υποθέτουμε ότι οι όροι πηγής μεταβάλλονται γραμμικά σε κάθε χρονικό βήμα:

$$\int_{\Delta t}\left(S_C + S_P\phi_P\right)\Delta\mathscr{V}\,dt = f\left(S_C + S_P\phi_P\right)^1\Delta\mathscr{V}\Delta t + (1-f)\left(S_C + S_P\phi_P\right)^0\Delta\mathscr{V}\Delta t$$

Σύστημα διακριτών εξισώσεων

$$a_P\phi_P = \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}}\left(f\phi_{\mathrm{nb}} + (1-f)\phi^0_{\mathrm{nb}}\right) + b + \left(a^0_P - (1-f)\sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}}\right)\phi^0_P$$

$$\begin{aligned}
a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\
a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\
a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\
a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
a^0_P &= \frac{\rho \Delta \mathcal{V}}{\Delta t} \\
a_P &= f\sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} - fS_P\Delta\mathcal{V} + a^0_P \\
b &= \left(fS_C + (1-f)S^0_C + (1-f)S^0_P\phi^0_P\right)\Delta\mathcal{V}
\end{aligned}$$

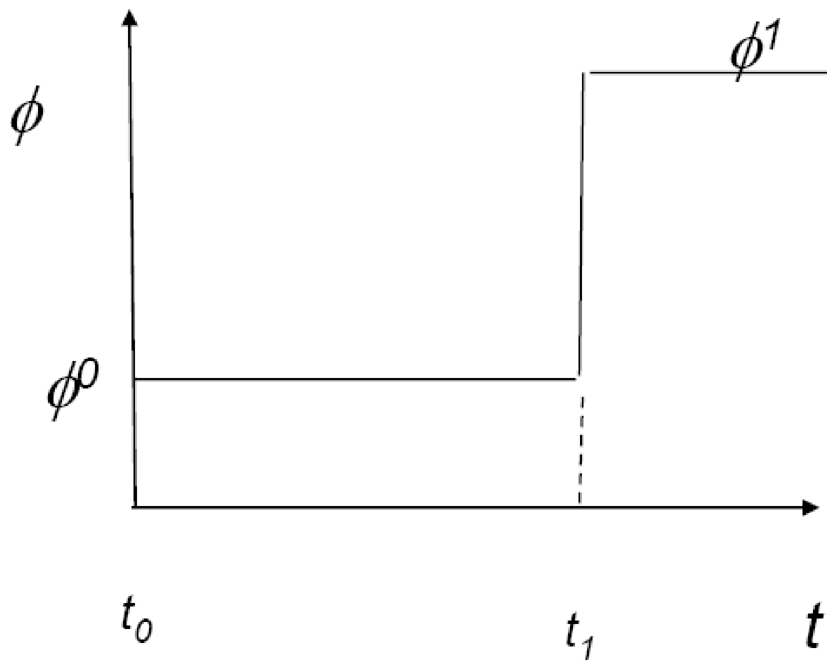
- Για διευκόλυνση έχουμε διώξει τους εκθέτες (1)

- Προσέξτε τις παλιές τιμές της μεταβλητής στο σύστημα τον εξισώσεων

- Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή της εξίσωσης θα τη μελετήσουμε για συγκεκριμένες τιμές του συντελεστή προσέγγισης του χρόνουf (f = 0, 1, 0.5)

Ρητό σχήμα (Explicit)

- Ρητό (Explicit) ονομάζεται το σχήμα που προκύπτει θεωρώντας f = 0



Προφίλ που υποτίθεται για κάθε χρονικό βήμα

Σχήμα Explicit: Διακριτές εξισώσεις

$$a_P \phi_P = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} \phi_{\text{nb}}^0 + b + \left(a_P^0 - \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} \right) \phi_P^0$$

$$\begin{aligned}
a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\
a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\
a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\
a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
a_P^0 &= \frac{\rho \Delta \mathcal{V}}{\Delta t} \\
a_P &= a_P^0 \\
b &= \left(S_C^0 + S_P^0 \phi_P^0 \right) \Delta \mathcal{V}
\end{aligned}$$

- Το αριστερό μέρος της εξίσωσης (RHS) είναι συνάρτηση μόνο των παλαιών τιμών της φ
- Συνέπειες;

Ιδιότητες του σχήματος Explicit

• Το RHS είναι γνωστό από το προηγούμενο χρονικό βήμα (αρχικές συνθήκες)

• Δεν υπάρχει λόγος να λύσουμε γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για να βρούμε το φ_P

• Όταν η λύση γίνεται μόνιμη ισχύει ότι $\varphi_P = \varphi^0_P$. Σε αυτό το όριο, ξαναβρίσκουμε τις σταθερές διακριτές εξισώσεις.

  » Η μόνιμη κατάσταση (Steady state) δεν εξαρτάτε από την ιστορία των προηγούμενων χρονικών βημάτων

• Θα δείξουμε αργότερα ότι το σφάλμα αποκοπής είναι τάξης $O(\Delta t)$

Ιδιότητες του σχήματος Explicit (συνέχεια)

$$a_P \phi_P = \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} \phi_{\mathrm{nb}}^0 + b + \left(a_P^0 - \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} \right) \phi_P^0$$

- Τι γίνεται όταν $a_P^0 < \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}}$
- Πρέπει να διαλέξουμε το πλέγμα / χρονικό βήμα ώστε να δίνουν

$$a_P^0 \geq \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}}$$

- Προκύπτει (για τη μονοδιάστατη περίπτωση)

$$\Delta t \leq \frac{\rho (\Delta x)^2}{2\Gamma}$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα μέσω ανάλυσης *ευστάθειας Von Neumann*

Όρια ευστάθειας για το σχήμα Explicit

• Το ρητό σχήμα (Explicit) έχει τα παρακάτω όρια ευστάθειας (όρια Von Neumann):

$$\Delta t \leq \frac{\rho (\Delta x)^2}{2\Gamma} \qquad \textit{1-D}$$

$$\Delta t \leq \frac{\rho (\Delta x)^2}{4\Gamma} \qquad \textit{2-D}$$

$$\Delta t \leq \frac{\rho (\Delta x)^2}{6\Gamma} \qquad \textit{3-D}$$

Η τετραγωνική εξάρτηση από το πλέγμα περιορίζει πάρα πολύ την εφαρμογή της μεθόδου για πρακτικές εφαρμογές

Επίλογος

- Στη παρούσα διάλεξη
  - » Είδαμε τον αλγόριθμο του τριδιαγώνιου πίνακα (TDMA), που είναι μια άμεση μέθοδο επίλυσης τριδιαγώνιων συστημάτων
  - » Είδαμε πως ο αλγόριθμος TDMA, χρησιμοποιείται ως επαναληπτική μέθοδο για να λύσουμε προβλήματα σε πολλές διαστάσεις
  - » Αρχίσαμε να βλέπουμε την εξίσωση της χρονικά μεταβαλλόμενης διάχυσης