ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 4: Εξίσωση διάχυσης

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

1. Εξετάσαμε τις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων

2. Είδαμε τρόπους λύσης του γραμμικού συστήματος

3. Ορίσαμε τις ιδιότητες της ακρίβειας (accuracy), συνέπειας (consistency), ευστάθειας (stability) και σύγκλισης (convergence) του αριθμητικού σχήματος

Οργάνωση παρουσίασης

Θα συνεχίσουμε:

- Εφαρμόζοντας την μέθοδο των περασμένων όγκων στην εξίσωση της μόνιμης διάχυσης σε Καρτεσιανό δομημένο πλέγμα
- Θα εξετάσουμε τις ιδιότητες τις τελικής διακριτοποίησης
- Θα εξετάσουμε πως να διακριτοποιούμε οριακές συνθήκες

Μόνιμη διάχυση (steady-state diffusion) σε δύο διαστάσεις

- Θεωρούμε μόνιμη διάχυση με ένα όρο πηγής:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S$$

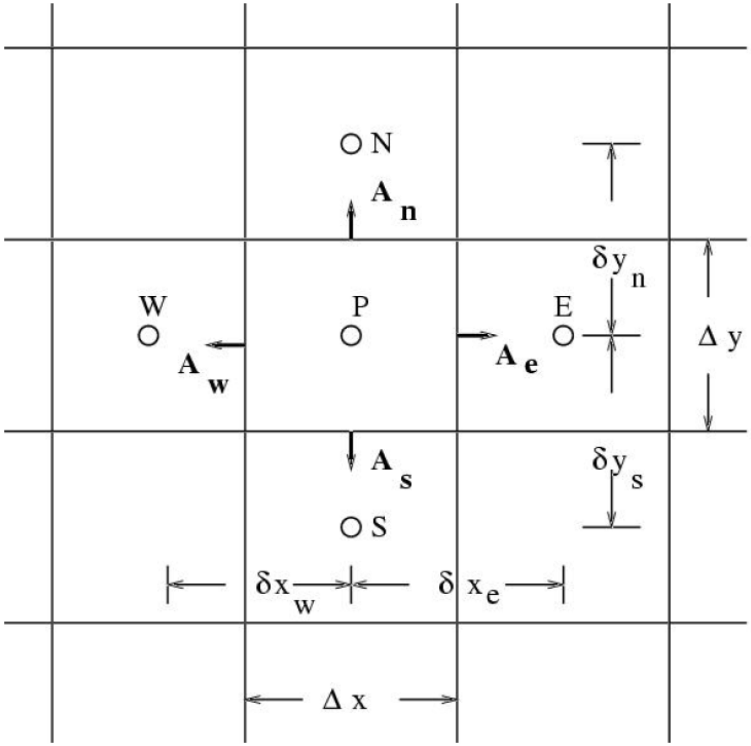
  - Όπου

$$\mathbf{J} = -\Gamma \nabla \varphi$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$$

- Ολοκληρώνοντας στον όγκο ελέγχου έχουμε:

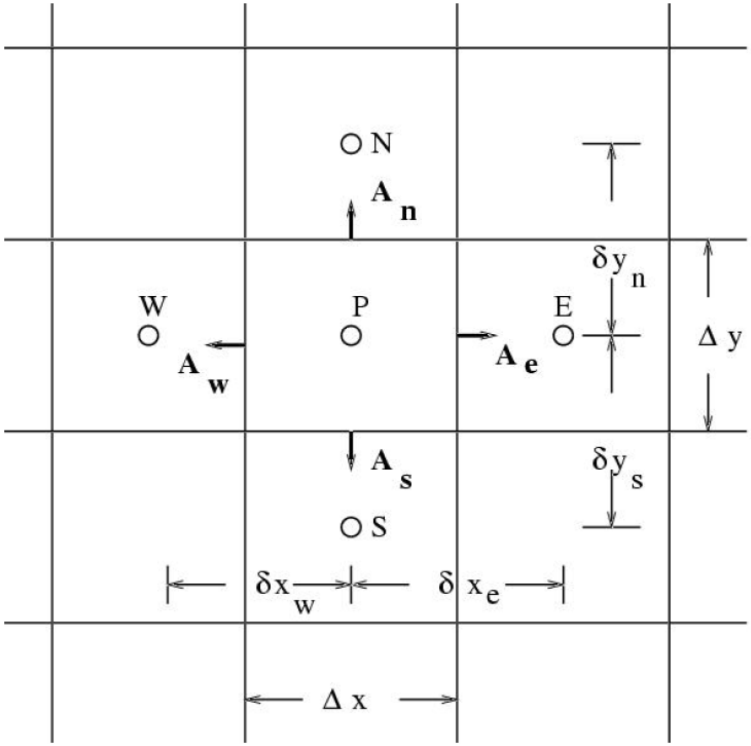
$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \int_{\Delta V} S dV$$



Μόνιμη διάχυση (συνέχεια)

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης (θεώρημα Gauss) έχουμε:

$$\int_{A} \mathbf{J} \cdot dA = \int_{\Delta V} S dV$$

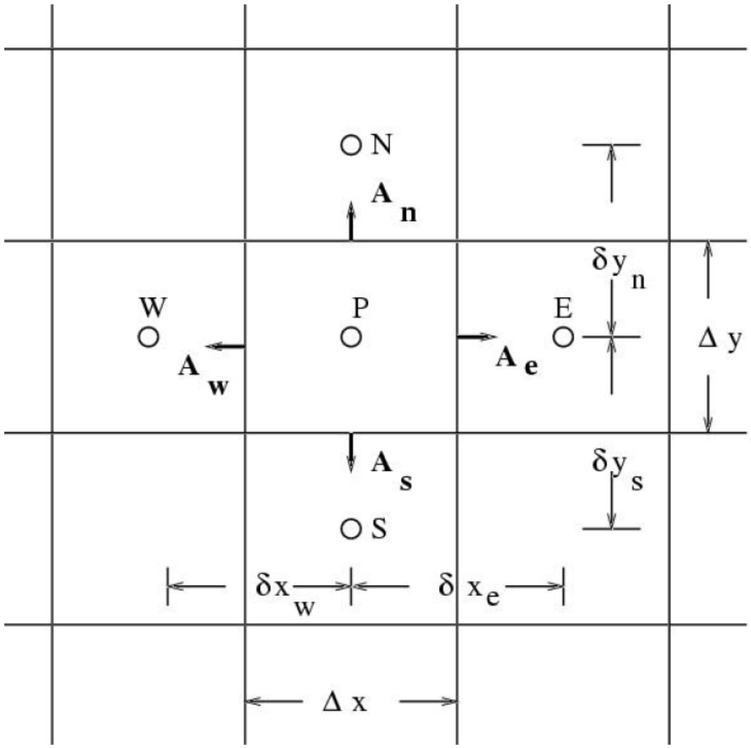


Γράφουμε το ολοκλήρωμα στον όγκο ελέγχου και έχουμε:

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_e+\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_w+\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_n+\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_s=\overline{S}\Delta V$$

ή σε συμπυκνωμένη μορφή:

$$\sum_{f=e,w,n,s}\mathbf{J}_f\cdot\mathbf{A}_f=\overline{S}\Delta V$$

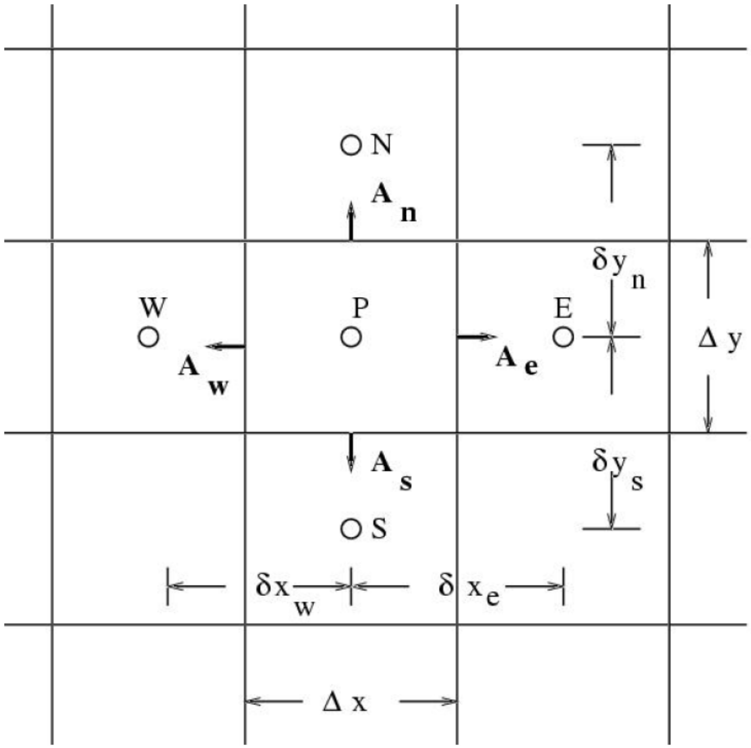


Ισορροπία διακριτοποιημένων ροών (συνέχεια)

Τα διανύσματα των πλευρών (area vectors) δίνονται από:

$$\mathbf{A}_e = \Delta y \mathbf{i}$$

$$\mathbf{A}_w = -\Delta y \mathbf{i}$$



Τελικά οι ροές δίνονται ως:

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e = -\Gamma_e \Delta y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e$$

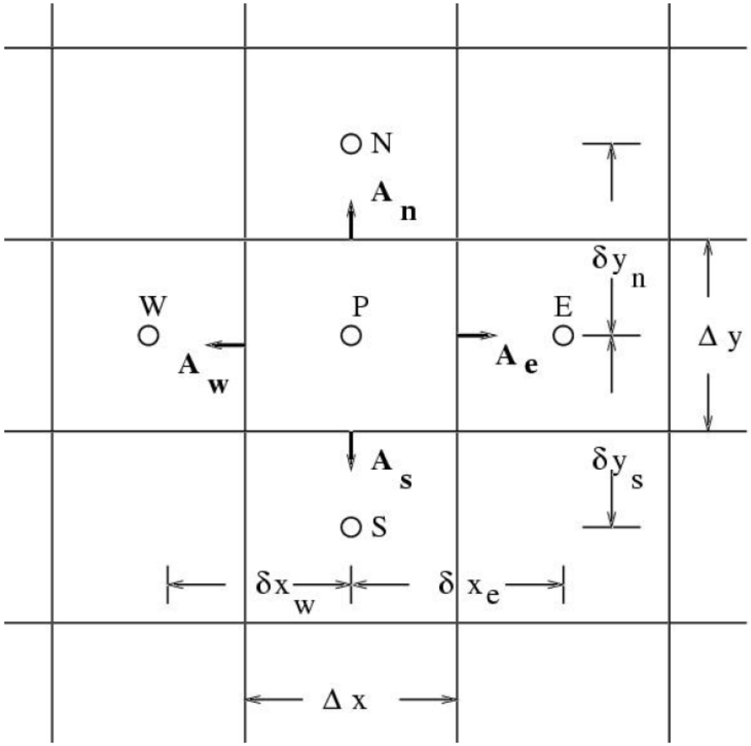
$$\mathbf{J}_w \cdot \mathbf{A}_w = \Gamma_w \Delta y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_w$$

Διακριτοποίηση

Υποθέτουμε ότι η ποσότητα φ μεταβάλλετε γραμμικά μεταξύ των κέντρων των κελιών, τότε:

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e = -\Gamma_e \Delta y \frac{\varphi_E - \varphi_P}{(\delta x)_e}$$

$$\mathbf{J}_w \cdot \mathbf{A}_w = \Gamma_w \Delta y \frac{\varphi_P - \varphi_W}{(\delta x)_w}$$



Σημειώσεις

- Υπάρχει συμμετρία μεταξύ των (P,E) και (P,W) στις εκφράσεις των ροών
- Διαφορετικά πρόσημα στους όρους (P,E) και (P,W).

Γραμμικοποίηση πηγών

Ο όρος πηγής μπορεί να διακριτοποιηθεί ως:

$$\overline{S} = S_c + S_p \varphi_p$$

Θεωρούμε ότι $S_p < 0$, θα δούμε αργότερα το λόγο

Τελική γραμμική εξίσωση

$$a_p\varphi_p = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W + a_N\varphi_N + a_S\varphi_S + b$$

Όπου:

$$a_E = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

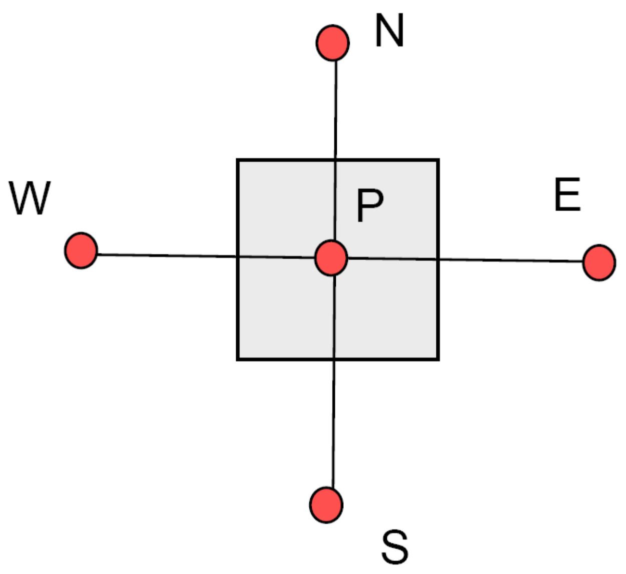
$$a_W = \Gamma_w \frac{\Delta y}{(\delta x)_w}$$

$$a_N = \Gamma_n \frac{\Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$a_S = \Gamma_s \frac{\Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p\Delta x\Delta y$$

$$b = S_C\Delta x\Delta y$$



Σχόλια

- Η διακριτή εξίσωση δείχνει την ισορροπία του γινομένου ροή*επιφάνεια με την παραγωγή μέσα στον όγκο ελέγχου

- Όπως και στην περίπτωση της μονοδιάστατης ροής χρειαζόμαστε ροές στις πλευρές του κελιού

- Οι ροές μπορούν να γραφούν σε σχέση με τις τιμές στο κέντρο του κελιού υποθέτοντας κάποιου είδους προφίλ για τη φ.

Σχόλια (συνέχεια)

• Ο φορμαλισμός που χρησιμοποιήθηκε είναι συντηρητικός: Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις προέκυψαν θέτοντας την αρχή της διατήρησης. Οι ροές ισορροπούν τους όρους πηγής για οσοδήποτε αραιό πλέγμα.

• Για ένα δομημένο πλέγμα, κάθε σημείο P συνδέεται με τα τέσσερα γειτονικά του. Τα σημεία στις γωνίες του κελιού δεν εισάγονται στη διακριτοποίηση.

Ιδιότητες της διακριτοποίησης

• Οι συντελεστές a_P και a_{nb} έχουν το ίδιο πρόσημο: Αυτό σημαίνει ότι όταν οι τιμές στα γειτονικά σημεία του φ αυξάνονται, και το φ αυξάνεται

• Αν $S = 0$:

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb} \qquad \varphi_p = \sum_{nb} \left(\frac{a_{nb}}{a_p} \varphi_{nb} \right)$$

• Άρα η ποσότητα φ είναι περιορισμένη (bounded) από τις τιμές των γειτονικών σημείων, κάτι που είναι σε συνέπεια με τις γενικές ιδιότητες των ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων

Ιδιότητες της διακριτοποίησης (συνέχεια)

- Τι γίνεται σχετικά με το κριτήριο *Scarborough;*

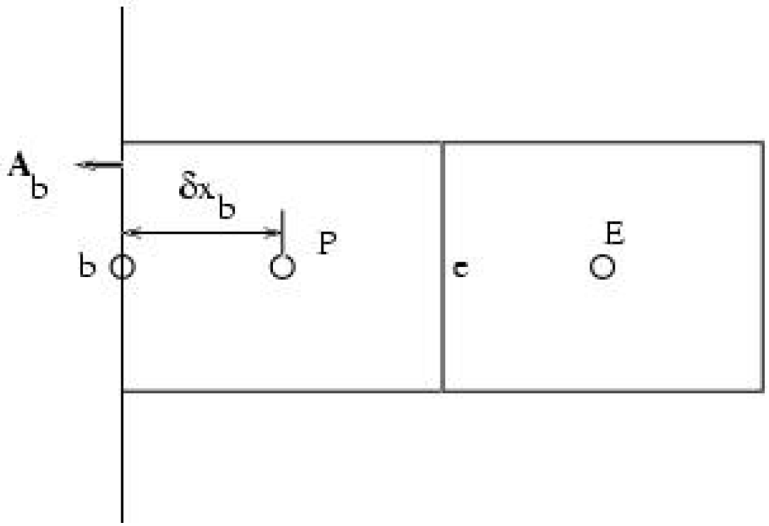
Ικανοποιείται στην ισότητα

$$\frac{|a_E| + |a_W|}{|a_P|} \quad \leq 1 \quad \text{Για όλα τα σημεία του πλέγματος}$$

$$< 1 \quad \text{Σε ένα τουλάχιστον σημείο}$$

Τι γίνεται σχετικά με αυτό;

Οριακές συνθήκες (BCs)



$$\mathbf{A}_b = -\Delta y \mathbf{i}$$

Ισορροπία ροών:

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_b + \left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_e + \left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_n + \left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_s = \overline{S}\Delta V$$

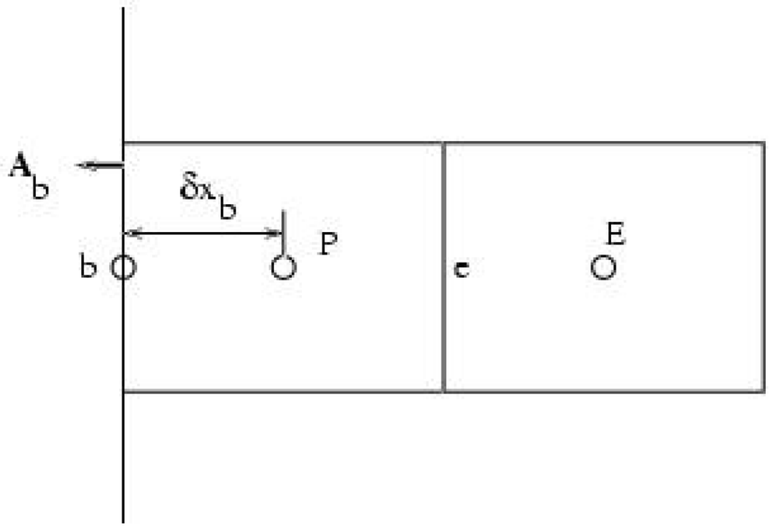
$$\mathbf{J}_b = -\Gamma_b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_b$$

Διαφορετικές οριακές συνθήκες απαιτούν διαφορετικές μορφές για το $\mathbf{J}_b$

Dirichlet BCs

- Στις οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet η τιμή της φ στο όριο είναι δεδομένη:

$$\varphi_b = \varphi_{\delta o\sigma\mu \acute{\varepsilon} \nu \eta}$$



$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = \Gamma_b \Delta y \frac{\varphi_P - \varphi_b}{(\delta x)_b}$$

- Βάζουμε αυτά τη τιμή για τη ροή στο ισοζύγιο της ισορροπίας ροών στο κελί κοντά στο τοίχο

Dirichlet BCs (συνέχεια)

$$a_p\varphi_p = a_E\varphi_E + a_N\varphi_N + a_S\varphi_S + b$$

Όπου:

$$a_E = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$a_N = \Gamma_n \frac{\Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$a_S = \Gamma_s \frac{\Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$a_b = \Gamma_b \frac{\Delta y}{(\delta x)_b}$$

$$a_p = a_E + a_N + a_S + a_b - S_p \Delta x \Delta y$$

$$b = a_b\varphi_b + S_C \Delta x \Delta y$$

Για τα κελιά που βρίσκονται κοντά στο όριο:

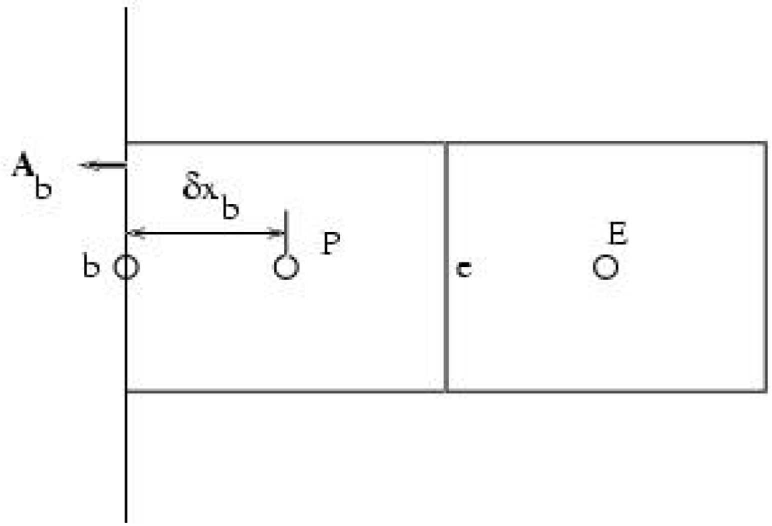
$$a_p > \sum_{nb} a_{nb}$$

Άρα το κριτήριο του Scarborough ικανοποιείται!

Επίσης, όταν δεν υπάρχουν όροι πηγής η τιμή του φ_P είναι φραγμένη μεταξύ των εσωτερικών και των οριακών τιμών.

Neumann BCs

• Στις οριακές συνθήκες τύπου Neumann η τιμή της ροής στο όριο είναι δεδομένη : $q_{b,given}$



$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = -q_{b,given}\Delta y$$

•Αντικαθιστούμε την τιμή της ροής J_b στην εξίσωση της ισορροπίας στο κελί με τη γνωστή ροή

Neumann BCs (συνέχεια)

$$a_p \varphi_p = a_E \varphi_E + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b$$

Όπου:

$$a_E = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$a_N = \Gamma_n \frac{\Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$a_S = \Gamma_s \frac{\Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$a_p = a_E + a_N + a_S - S_p \Delta x \Delta y$$

$$b = q_{b,given} \Delta y + S_C \Delta x \Delta y$$

Για τα κελιά που έχουν τις οριακές συνθήκες τύπου Neumann :

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb}$$

Άρα το κριτήριο του Scarborough δεν ικανοποιείται στην περίπτωση των οριακών συνθηκών τύπου Neumann !

Επίσης, ακόμη και όταν δεν υπάρχουν όροι πηγής η τιμή του φ_P δεν είναι φραγμένη μεταξύ των εσωτερικών και των οριακών τιμών. Αυτό είναι λογικό επειδή εισάγεται ροή μέσω του ορίου.

Οριακές τιμές και ροές

• Όταν επιλύσουμε για τις εσωτερικές τιμές της φ, μπορούμε να υπολογίσουμε τις οριακές τιμές τις ροής για τις οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = \Gamma_b \Delta y \frac{\varphi_P - \varphi_b}{\left(\delta x\right)_b}$$

• Ομοίως, για οριακές συνθήκες τύπου Neumann, μπορούμε να βρούμε τις τιμές στο όριο για τη φ χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\varphi_b = \frac{q_{b,given} - \left(\Gamma_b / \delta x_b\right)\varphi_P}{\left(\Gamma_b / \delta x_b\right)}$$

Επίλογος

- Στη παρούσα διάλεξη

  » Περιγράψαμε την διαδικασία διακριτοποίησης για την εξίσωση διάχυσης σε Καρτεσιανά υπολογιστικά πλέγματα

  » Είδαμε ότι η τελική διαδικασία διακριτοποίησης ικανοποιεί τις ιδιότητες των ελλειπτικών εξισώσεων

  » Επειδή όταν χρησιμοποιούμε οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet έχουμε το τελικό σύστημα με κυρίαρχη διαγώνιο μπορούμε να χρησιμοποιούμε επαναληπτικούς επιλυτές

- Την επόμενη φορά θα εξετάσουμε ένα ακόμη τύπο οριακών συνθηκών (Robbins ή μικτές οριακές συνθήκες), γραμμικοποίηση πηγών και συνδυασμένη μετάδοση θερμότητας (conjugate heat transfer)