Διάλεξη 1: Εξισώσεις διατήρησης

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Οργάνωση παρουσίασης

1. Ιστορία της υπολογιστικής ρευστομηχανικής
2. Εξισώσεις διατήρησης
3. Γενική εξίσωση μεταφοράς
4. Συντηρητική μορφή
5. Χαρακτηριστικά γενικής εξίσωσης μεταφοράς
6. Εξίσωση συνέχειας
7. Εξίσωση ενέργειας
8. Εξίσωση ορμής
9. Εξίσωση μεταφοράς συστατικών
10. Επίλογος

Ιστορία της υπολογιστικής ρευστομηχανικής

Πρώτη εργασία υπολογιστικής ρευστομηχανικής (CFD) από τον L.F. Richardson (1910)

•Χρήση ανθρώπων στους υπολογισμούς

•Επαναληπτική επίλυση της εξίσωσης Laplace χρησιμοποιώντας μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για τη ροή γύρο από κύλινδρο, κλπ.

•προσδιορισμός λάθους

Lewis F. Richardson
(1881-1953)

"So far I have paid piece rates for the operation (Laplacian) of about n/18 pence per coordinate point, n being the number of digits …one of the quickest boys averaged 2000 operations (Laplacian) per week for numbers of 3 digits, those done wrong being discounted …" Richardson, 1910

Ιστορία της υπολογιστικής ρευστομηχανικής

• Μέθοδοι χαλάρωσης (1920-50)

• Βασικό άρθρο από τους Courant, Friedrichs και Lewy για τις υπερβολικές εξισώσεις (1928)

• Ανάλυση ευστάθειας κατά Von Neumann για παραβολικά προβλήματα (1950)

• Οι Harlow και Fromm (1963) υπολόγισαν χρονικά μεταβαλλόμενη ροή (vortex street) με υπολογιστή.

• Δημοσίευσαν ένα άρθρο στο Scientific America (1965) για τη χρήση του CFD σε αριθμητικά πειράματα.

John von Neumann
(1903-1957)

Richard Courant (1888-1972)

• 1960-1970, δημιουργία κωδίκων οριακού στρώματος (boundary layer) πχ, GENMIX από τους Patankar και Spalding στα 1972

• Τεχνικές επίλυσης για ασυμπίεστες ροές στη δεκαετία 1970 (πχ. αλγόριθμοι SIMPLE από Patankar και Spalding)

• O Jameson υπολόγισε ροή τύπου Euler σε ένα ολόκληρο αεροπλάνο (1981)

Εξισώσεις διατήρησης

1. Όλες σχεδόν οι φυσικές διεργασίες που μας ενδιαφέρουν διέπονται από εξισώσεις διατήρησης

    Διατήρηση μάζας, ορμής, ενέργειας

2. Μπορούν να γραφούν με όρους ειδικής ποσότητας (δηλαδή ανά μονάδα μάζας)

    Ορμή ανά μονάδα μάζας (ταχύτητα)

    Ενέργεια ανά μονάδα μάζας e

3. Θεωρούμε μια ειδική ποσότητα φ

    Μπορεί να είναι ορμή ανά μονάδα μάζας, ενέργεια ανά μονάδα μάζας..

4. Γράφουμε την εξίσωση διατήρησης για την ποσότητα φ στον όγκο ελέγχου (control volume) μεγέθους Δx x Δy x Δz

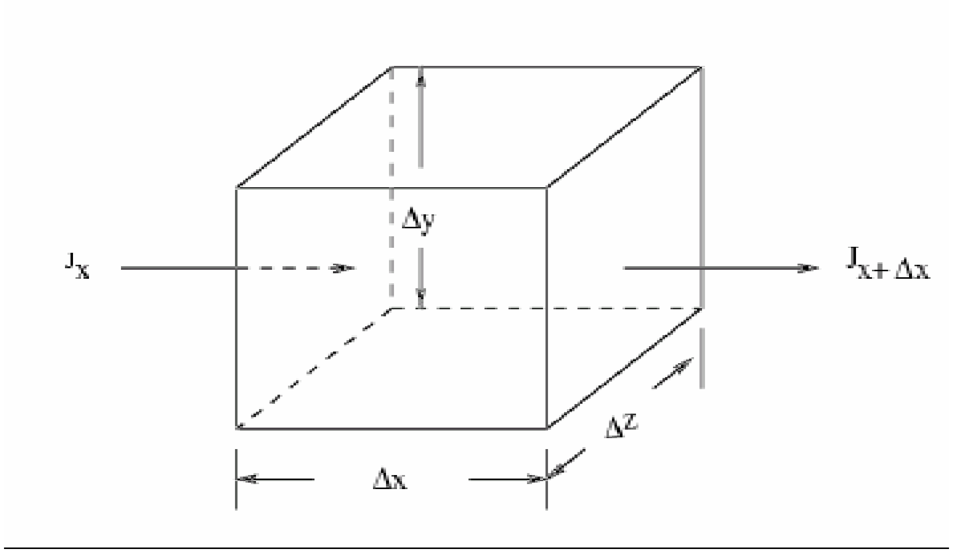
Εξισώσεις διατήρησης (συνέχεια)

Μεταβολή της *φ* στον όγκο ελέγχου σε κάθε χρονικό βήμα *Δt* =

Καθαρή εισροή της ποσότητας *φ* στον όγκο ελέγχου

\- Καθαρή εκροή της ποσότητας *φ* από τον όγκο ελέγχου

\+ Καθαρή γέννηση (generation) της *φ* μέσα στον όγκο ελέγχου



Εξισώσεις διατήρησης (συνέχεια)

Αποθήκευση της *φ*:

$$(\rho\varphi\Delta V)_{t+\Delta t} - (\rho\varphi\Delta V)_t$$

Παραγωγή:

$$S\Delta V\Delta t$$

Εισροή και εκροή:

$$(J_x - J_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z\Delta t + (J_y - J_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z\Delta t + (J_z - J_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y\Delta t$$

Ροές (Flux) διάχυσης και συναγωγής

Ροή διάχυσης: $$J_{diffusion,x} = -\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Ροή συναγωγής: $$J_{convection,x} = \rho u \varphi$$

Καθαρή ροή: $$J_x = \left(\rho u \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_x$$

Διάνυσμα ταχύτητας: $$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

Συντελεστής διάχυσης: Γ

Συνδυάζοντας…

$$\frac{(\rho\varphi)_{t+\Delta t}-(\rho\varphi)_t}{\Delta t}=\frac{(J_x-J_{x+\Delta x})}{\Delta x}+$$

$$\frac{(J_y-J_{y+\Delta y})}{\Delta y}+\frac{(J_z-J_{z+\Delta z})}{\Delta z}+S$$

Παίρνοντας το όριο Δ*x*, Δ*y*, Δ*z* και Δ*t* -> 0

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}=-\frac{\partial J_x}{\partial x}-\frac{\partial J_y}{\partial y}-\frac{\partial J_z}{\partial z}+S$$

Γενική εξίσωση μεταφοράς της ποσότητας φ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w\varphi)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+S$$

Σε διανυσματική μορφή:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\mathbf{V}\varphi=\nabla\cdot\left(\Gamma\nabla\varphi\right)+S$$

Συντηρητική μορφή

Υποθέτουμε μόνιμη κατάσταση (steady state). Η συντηρητική μορφή της εξίσωσης μεταφοράς είναι:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad \mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k}$$

Μη-συντηρητική μορφή:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \nabla \cdot \varphi = \Gamma \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \Gamma \cdot \nabla \varphi + S$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων (Finite volume method) πάντα χρησιμοποιεί την συντηρητική μορφή των εξισώσεων

Χαρακτηριστικά της γενικής εξίσωσης μεταφοράς

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} \varphi = \nabla \cdot \left(\Gamma \nabla \varphi\right) + S$$

Αποθήκευση *Συναγωγή* *Διάχυση* *Παραγωγή*

Όπου: φ είναι μια ειδική ποσότητα (πχ. θερμότητα ανά μονάδα μάζας)

V : διάνυσμα ταχύτητας

Γ : Συντελεστής διάχυσης

ρ: πυκνότητα

S: όρος πηγής (πχ. Παραγωγή θερμότητας ανά μονάδα όγκου W/m^3)

Εξίσωση συνέχειας

Όπου, $\varphi = 1$

$\Gamma = 0$

$S = 0$

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} \varphi = \nabla \cdot \left(\Gamma \nabla \varphi\right) + S$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{V}\right) = 0$$

Εξίσωση ενέργειας

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{V} h\right) = \nabla \cdot \left(k \nabla T\right) + S_h$$

h = ενθαλπία ανά μονάδα μάζας, J/kg

k = θερμική αγωγιμότητα

S_h = παραγωγή ενέργειας W/m3

Σημείωση: η ενθαλπία *h* υπάρχει στους όρους της συναγωγής και της αποθήκευσης. Το σύμβολο T στους όρους διάχυσης αντιπροσωπεύει τη θερμοκρασία.

Ερώτημα: Πώς μπορούμε να σχηματίσουμε την εξίσωση ενέργειας όπως η γενική εξίσωση μεταφοράς;

Εξίσωση ενέργειας (συνέχεια)

Καταστατική εξίσωση: $$dh = C_p dT$$

Αντικαθιστώντας: $$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{V} h\right) = \nabla \cdot \left(\frac{k}{C_p} \nabla h \right) + S_h$$

Άρα,

$\varphi = h$

$\Gamma = k/C_p$

$S = S_h$

Εξίσωση ορμής

Εξίσωση ορμής στη διεύθυνση *x*

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} u) = \nabla \cdot (\mu \nabla u) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Άρα,

φ= u

Γ= μ

$$S = S_u - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Σημείωση: Ο πηγαίος όρος S είναι πολύ βολικός για να περιγράφει οποιονδήποτε όρο δεν ταιριάζει με τους υπόλοιπους

Εξίσωση μεταφοράς συστατικών

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{V} Y_i \right) = \nabla \cdot \left(\Gamma_i \nabla Y_i \right) + R_i$$

Όπου:

Y_i = kg του συστατικού *i* ανά kg του μίγματος

Γ_i = συντελεστής διάχυσης του συστατικού *i του μίγματος*

R_i = πηγή αντιδράσεων

Επίλογος

Σε αυτή τη διάλεξη

- Περιγράψαμε τη διαδικασία δημιουργίας της εξίσωσης μεταφοράς της ποσότητας φ
- Αναγνωρίσαμε τα κοινά χαρακτηριστικά της μεταφοράς μάζας, ορμής, ενέργειας και χημικών συστατικών
- Ο συνδυασμός όλων των διαφορετικών εξισώσεων σε απλή μορφή είναι πολύ χρήσιμο
- Μπορούμε να κατασκευάσουμε μία απλή μέθοδο για να επιλύσουμε όλη αυτή την τάξη των εξισώσεων διατήρησης