Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Γραμμικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- Μια **γραμμική ΣΔΕ δευτέρας τάξεως** έχει τη γενική μορφή

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t)$$

ή την κανονική μορφή

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

- Η εξίσωση ονομάζεται **ομογενής** όταν $g(t) = 0$ και **μη ομογενής** όταν $g(t) \neq 0$.

- Το **γραμμικό ΠΑΤ δευτέρας τάξεως** έχει τη μορφή

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- Ο **γραμμικός διαφορικός τελεστής δευτέρας τάξεως** ορίζεται ως

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + p(t)\frac{d}{dt} + q(t)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό, η ΔΕ μπορεί να γραφεί εν συντομία ως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \longrightarrow L[y] = g(t)$$

- Λέμε ότι **δυο συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες** εάν η εξίσωση

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

έχει ως μοναδική λύση την $c_1 = c_2 = 0$. Διαφορετικά, λέμε ότι οι συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Γραμμικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως

Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης

Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης

Θεώρημα: Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

όπου οι συναρτήσεις $p(t)$, $q(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $I : \alpha < t < \beta$ και $t_0 \in I$. Τότε το ΠΑΤ έχει μία και μόνο μία λύση $y = \phi(t)$ στο I.

Σημείωση: Το θεώρημα εξασφαλίζει ότι

- Το ΠΑΤ έχει τουλάχιστον μία λύση.
- Το ΠΑΤ έχει μία ακριβώς λύση.
- Η λύση αυτή ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα I όπου οι $p(t)$, $q(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς.

Ομογενείς Εξισώσεις

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Βασικό ζήτημα: Πως υπολογίζεται η **λύση** $y = \phi(t)$ **του ΠΑΤ**

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \tag{1}$$

ή, ισοδύναμα, πως υπολογίζεται η **γενική λύση** $y = y(t)$ **της ΔΕς** $(1)_1$, εάν υποθέσουμε ότι η λύση του ΠΑΤ (1) υπάρχει και είναι μοναδική σε κάποιο διάστημα I;

Θεώρημα (Αρχή της Επαλληλίας): Εάν οι συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι λύσεις της ΔΕς

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $c_1 y_1 + c_2 y_2$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης λύση της ΔΕς.

Εύλογο ερώτημα: Θα μπορούσε η λύση του ΠΑΤ (1) να έχει τη μορφή $y = \phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$;

Απάντηση: Ναι, υπό την προυπόθεση ότι

$$W\left(y_1, y_2\right)\left(t_0\right) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \neq 0$$

Η συνάρτηση W ονομάζεται **Βροσκιανή** ορίζουσα των συναρτήσεων y_1 και y_2 στο σημείο t_0. Ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα: Έστω y_1 και y_2 είναι δυο ειδικές λύσεις της ΔΕς $(1)_1$. Τότε, η **λύση του ΠΑΤ** (1) έχει τη μορφή

$$y = \phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

εάν και μόνον εάν

$$W\left(y_1, y_2\right)\left(t_0\right) \neq 0$$

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Θεώρημα (Abel): Έστω ότι y_1 και y_2 είναι δυο ειδικές λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{2}$$

όπου οι $p(t)$ και $q(t)$ είναι συνεχείς σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I. Τότε η **Βροσκιανή** των y_1 και y_2 σε κάθε σημείο $t \in I$ είναι

$$W(y_1, y_2)(t) = c\, e^{-\int p(t)dt}$$

όπου c είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται απ΄ τις y_1 και y_2, αλλά όχι απ΄ το t. Επιπλέον, η Βροσκιανή των y_1 και y_2 είναι είτε διαφορετική του 0 σε κάθε $t \in I$ (εάν $c \neq 0$) ή ίση με το 0 σε κάθε $t \in I$ (εάν $c = 0$).

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Θεώρημα: Έστω ότι y_1 και y_2 είναι δυο ειδικές λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{3}$$

όπου οι $p(t)$ και $q(t)$ είναι συνεχείς σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I. Τότε, η **γενική λύση της ΔΕς** (3) στο I έχει τη μορφή

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

εάν και μόνον εάν

$$W(y_1, y_2)(t_*) \neq 0 \quad \text{σε κάποιο σημείο} \quad t_* \in I$$

Ορολογία: Όταν $W(y_1, y_2) \neq 0$ λέμε ότι οι y_1 και y_2 ορίζουν ένα **θεμελιώδες σύνολο λύσεων**.

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Θεώρημα: Εάν η Βροσκιανή $W(f,g) \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις f και g είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα: Συνοψίζοντας, κάθε μια απ΄ τις ακόλουθες προτάσεις συνεπάγεται τις άλλες τρεις

1. Η γενική λύση της ομογενούς ΔΕς $L[y] = 0$ έχει τη μορφή
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
2. Οι συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
3. Η Βροσκιανή $W(y_1, y_2)(t_*) \neq 0$ σε κάποιο σημείο $t_* \in I$.
4. Η Βροσκιανή $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ σε κάθε σημείο $t \in I$.

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί η γενική λύση της εξισώσεως

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0$$

με δεδομένες τις ειδικές λύσεις

$$y_1(t) = t, \qquad y_2(t) = t^2$$

Γενική Λύση:

- Βροσκιανή των y_1 και y_2

$$W(y_1, y_2) = t^2 \neq 0 \qquad \forall \qquad t \neq 0$$

- Οι συναρτήσεις y_1 και y_2 ορίζουν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για κάθε $t \neq 0$.
- Γενική λύση της ΔΕς

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί η γενική λύση της εξισώσεως

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad k \neq 0$$

με δεδομένες τις ειδικές λύσεις

$$y_1(t) = \cos kt, \qquad y_2(t) = \sin kt$$

Γενική Λύση:

- Βροσκιανή των y_1 και y_2

$$W(y_1, y_2) = k \neq 0 \qquad \forall \qquad t \in \mathbb{R}$$

- Οι συναρτήσεις y_1 και y_2 ορίζουν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
- Γενική λύση της ΔΕς

$$y(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές

Θεωρούμε τη ΔΕ

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4}$$

όπου $a \neq 0$, b και c είναι σταθερές.

Παρατήρηση: Η ΔΕ (4) έχει **λύσεις της μορφής** $y = e^{rt}$ για κάθε r το οποίο ικανοποιεί τη δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{5}$$

Η (5) ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** (ΧΕ) της (4).

Επομένως, δυο **ειδικές λύσεις** της ΔΕς (4) είναι οι

$$y_1 = e^{r_1 t}, \qquad y_2 = e^{r_2 t}$$

όπου

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta > 0$

Εάν

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

τότε οι ρίζες της ΧΕς είναι

$$r_1 \neq r_2 \quad \text{και} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

Επίσης

$$W(y_1, y_2) = (r_2 - r_1)\, e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0 \quad \text{για} \quad r_1 \neq r_2$$

Επομένως, για $\Delta > 0$, η **γενική λύση** της ΔΕς (4) είναι

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

όπου

$$y_1 = e^{r_1 t}, \qquad y_2 = e^{r_2 t}$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta > 0$

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -2, \quad r_2 = -3$$

Γενική λύση της ΔΕς:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

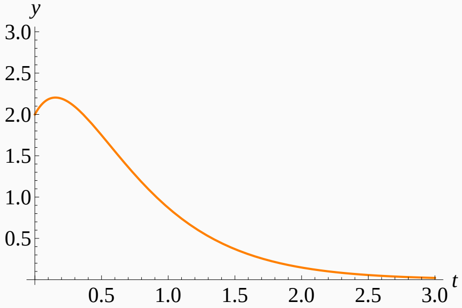
Λύση του ΠΑΤ:

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta > 0$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$



Παρατήρηση:

- Η λύση τείνει στο 0 καθώς το t τείνει στο ∞.

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta > 0$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$4r^2 - 8r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 3/2, \quad r_2 = 1/2$$

Γενική λύση της ΔΕς:

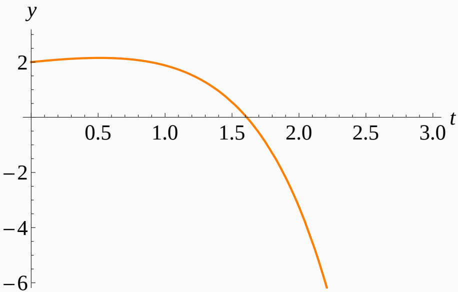
$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}$$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}$$



Παρατήρηση:

- Η λύση τείνει στο $-\infty$ καθώς το t τείνει στο ∞.

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta < 0$

Εάν

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

τότε οι ρίζες της ΧΕς είναι συζηγείς μιγαδικοί αριθμοί

$$r_1 = \lambda + i\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\mu$$

όπου

$$\lambda = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}, \quad \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \in \mathbb{R}$$

Επομένως, για $\Delta < 0$, οι δυο **ειδικές λύσεις** της ΔΕς (4) είναι

$$y_1 = e^{(\lambda+i\mu)t}, \quad y_2 = e^{(\lambda-i\mu)t}$$

Ερώτηση: Πως ορίζεται η συνάρτηση e^z για $z \in \mathbb{C}$;

Παρένθεση: Ο Τύπος του Euler

Υπενθύμιση: Το ανάπτυγμα Talor της συναρτήσεως e^t γύρω απ' το σημείο $t = 0$ είναι

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Εάν υποθέσουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το t με it στην πιο πάνω σχέση, τότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

Παρένθεση: Ο Τύπος του Euler

Ορισμός:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως ο **τύπος του Euler**.

Παρατήρηση: Για $t = \pi$, ο τύπος του Euler συνεπάγεται ότι

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{ή} \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

"*The most remarkable formula in Mathematics*" Richard Feynman.

Γενικεύσεις:

$$e^{i(\mu t)} = \cos(\mu t) + i \sin(\mu t)$$

$$e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i(\mu t)} = e^{\lambda t} \cos(\mu t) + i e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta < 0$

Επομένως, για $\Delta < 0$, οι δυο **ειδικές λύσεις** της ΔΕς (4) είναι

$$y_1 = e^{\lambda t}\cos(\mu t) + ie^{\lambda t}\sin(\mu t), \qquad y_2 = e^{\lambda t}\cos(\mu t) - ie^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

οι οποίες είναι **μιγαδικές συναρτήσεις**.

Παρατήρηση: Λόγω της ομογένειας και γραμμικότητας της διαφορικής εξισώσεως, οι **πραγματικές συναρτήσεις**

$$\overline{y}_1 = e^{\lambda t}\cos(\mu t), \qquad \overline{y}_2 = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

είναι επίσης **ειδικές λύσεις** της ΔΕς (4).

Επιπλέον

$$W(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0 \quad \text{για} \quad \mu \neq 0$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta < 0$

Επομένως, για

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

η **γενική λύση** της ΔΕς (4) είναι

$$y = c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

όπου

$$\overline{y}_1 = e^{\lambda t}\cos(\mu t), \qquad \overline{y}_2 = e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

με

$$\lambda = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}, \quad \mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \in \mathbb{R}$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta < 0$

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$$

Γενική λύση της ΔΕς:

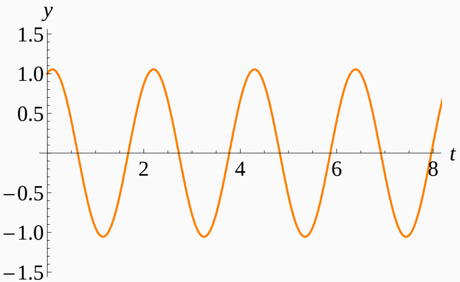
$$y = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = \cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t)$$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = \cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t)$$



Παρατήρηση:

- Η λύση είναι μια ταλάντωση με σταθερό πλάτος.

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta < 0$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$16r^2 - 8r + 145 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4} \pm 3i$$

Γενική λύση της ΔΕς:

$$y = c_1 e^{t/4} \cos(3t) + c_2 e^{t/4} \sin(3t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

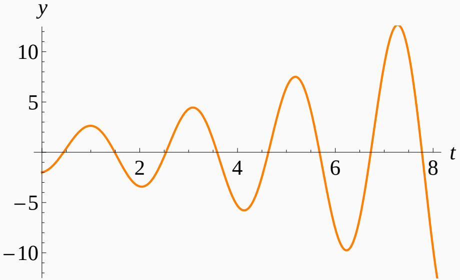
Λύση του ΠΑΤ:

$$y = -2e^{t/4} \cos(3t) + \frac{1}{2} e^{t/4} \sin(3t)$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta < 0$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = -2e^{t/4}\cos(3t) + \frac{1}{2}e^{t/4}\sin(3t)$$



Παρατήρηση:

- Η λύση είναι μια ταλάντωση με αυξανόμενο πλατος.

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta = 0$

Εάν

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,$$

τότε η ΧΕ έχει μια πραγματική (διπλή) ρίζα

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$$

Σε αυτή την περίπτωση, δυο **ειδικές λύσεις** της ΔΕς (4) είναι οι

$$y_1 = e^{r_1 t}, \qquad y_2 = te^{r_1 t}$$

Η Βροσκιανή των y_1 και y_2 είναι

$$W(y_1, y_2) = e^{2r_1 t} \neq 0$$

και, επομένως, η **γενική λύση** της ΔΕς (4) είναι

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 te^{r_1 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta = 0$

Παράδειγμα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(r+2)^2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

Γενική λύση της ΔΕς:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

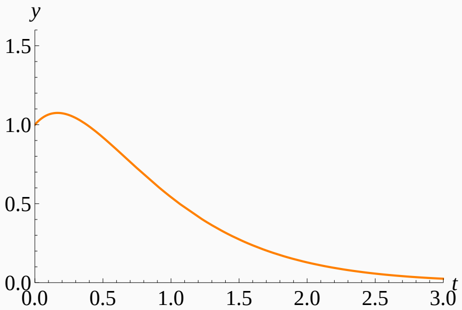
Λύση του ΠΑΤ:

$$y = (1+3t)e^{-2t}$$

ΟΕς με Σταθερούς Συντελεστές: Η Περίπτωση $\Delta = 0$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = (1 + 3t)e^{-2t}$$



Παρατήρηση:

- Η λύση τείνει στο 0 καθώς αυξάνει το t.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $p(t)$ και $q(t)$ είναι συνεχείς σέ κάποιο ανοιχτό διάστημα I. Έστω επίσης ότι $y_1 = y_1(t)$ είναι μια ειδική λύση της ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{6}$$

Τότε, η συνάρτηση

$$y_2 = y_1 \int \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} dt$$

είναι επίσης λύση της εξισώσεως (6). Επιπλεόν, οι y_1 και y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και, επομένως, η γενική λύση της ομογενούς εξισώσεως (6) είναι η

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Μη Ομογενείς Εξισώσεις

Μη Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Αναζητούμε τη **γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως**

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

όπου οι συναρτήσεις $p(t)$, $q(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα I.

Υπενθύμιση: Η γενική λύση της ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

έχει τη μορφή

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

όπου οι y_1 και y_2 συνιστούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

Μη Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Θεώρημα: Η γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{7}$$

έχει τη μορφή

$$y = y_H + y_p$$

όπου

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

και y_p είναι μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (7).

Η Μέθοδος των Απροσδιόριστων Συντελεστών:

- Υποθέτουμε μια γενική μορφή για την ειδική λύση y_p της εξισώσεως $L[y] = g(t)$ η οποία εξαρτάται από ορισμένους άγνωστους (απροσδιόριστους) αρχικά συντελεστές.
- Προσπαθούμε να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές απαιτώντας $L[y_p] = g(t)$.

Σημειώσεις:

- Εάν δε μπορούμε να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές έτσι ώστε $L[y_p] = g(t)$, τότε πρέπει να υποθέσουμε μια γενικότερη μορφή για την y_p και να προσπαθήσουμε ξανά.
- Η μέθοδος εφαρμόζεται συνήθως σε εξισώσεις των οποίων το ομογενές μέρος $L[y] = 0$ έχει σταθερούς συντελεστές και η $g(t)$ είναι μια πολυωνυμική, εκθετική ή τριγωνομετρική συνάρτηση, ή ένας συνδυασμός τέτοιων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1 \tag{8}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (8):

$$y_p = At^2 + Bt + C, \qquad A = -1, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{11}{8}$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (8):

$$y = y_H + y_p$$

ΜΟΕς: Η Μέθοδος των Απροσδιόριστων Συντελεστών

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} \tag{9}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (9):

$$y_p = Ae^{2t}, \qquad A = -\frac{1}{2}$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (9):

$$y = y_H + y_p$$

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t \tag{10}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (10):

$$y_p = A\sin t + B\cos t, \qquad A = -\frac{5}{17}, \quad B = \frac{3}{17}$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (10):

$$y = y_H + y_p$$

Παράδειγμα 4: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t \tag{11}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (11):

$$y_p = Ae^t \sin 2t + Be^t \cos 2t, \qquad A = \frac{2}{13}, \quad B = \frac{10}{13}$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (11):

$$y = y_H + y_p$$

ΜΟΕς: Η Μέθοδος των Απροσδιόριστων Συντελεστών

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \tag{12}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (12):

$$y_p = Ate^{-t}, \qquad A = -\frac{2}{5}$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (12):

$$y = y_H + y_p$$

Παράδειγμα 6: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y''-3y'-4y = \left(4t^2-1\right)+\left(3e^{2t}\right)+(2\sin t)+\left(-8e^t\cos 2t\right)+\left(2e^{-t}\right) \tag{13}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (13):

$$y_p = \left(-t^2+\frac{3}{2}t-\frac{11}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}e^{2t}\right)+\left(-\frac{5}{17}\sin t+\frac{3}{17}\cos t\right)+ \left(\frac{2}{13}e^t\sin 2t+\frac{10}{13}e^t\cos 2t\right)+\left(-\frac{2}{5}e^{-t}\right)$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (13):

$$y = y_H + y_p$$

Η γενική μορφή της ειδικής λύσης $Y_i(t)$ της εξισώσεως

$$ay'' + by' + cy = g_i(t)$$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$	$t^s\left(A_n t^n + \ldots + A_0\right)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s\left(A_n t^n + \ldots + A_0\right)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s\left(A_n t^n + \ldots + A_0\right)e^{\alpha t}\cos\beta t + {}$ $+ t^s\left(B_n t^n + \ldots + B_0\right)e^{\alpha t}\sin\beta t$

Σημείωση:

- Σε κάθε περίπτωση, ο εκθέτης s τίθεται ίσος με το μικρότερο μη αρνητικό ακέραιο αριθμό ($s = 0, 1$ ή 2) ο οποίος εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχει (ούτε ένας) όρος της $Y_i(t)$ ο οποίος να είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως.

ΜΟΕς: Η Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων

Αναζητούμε μια **ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως**

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

όπου οι συναρτήσεις $p(t)$, $q(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς, υποθέτοντας ότι είναι γνωστή η γενική λύση

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Η Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (Lagrange):

- Υποθέτουμε ότι η λύση που αναζητούμε έχει τη μορφή
$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \tag{14}$$
όπου $u_1 = u_1(t)$ και $u_2 = u_2(t)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις.
- Υποθέτουμε επίσης ότι
$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \tag{15}$$
- Για να είναι η (14) λύση της ΜΟΕς, πρέπει να ισχύει ότι
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t) \tag{16}$$
- Λύνοντας το σύστημα των ΔΕν (15) και (16), βρίσκουμε ότι
$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + c_1, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + c_2$$

ΜΟΕς: Η Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $p(t)$, $q(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς σέ κάποιο ανοιχτό διάστημα I. Έστω επίσης ότι η γενική λύση της ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

είναι

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Τότε, μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

είναι η

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως

$$ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = te^t, \qquad y_1 = e^t \tag{17}$$

Ειδική λύση y_2 της ομογενούς:

$$y_2 = e^t \ln t$$

Ειδική λύση y_p της μη ομογενούς:

$$y_p = \frac{1}{4}t^2 e^t$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (17):

$$y = c_1 e^t + c_2 e^t \ln t + \frac{1}{4}t^2 e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = t \ln t, \qquad y_1 = t \tag{18}$$

Ειδική λύση y_2 της ομογενούς:

$$y_2 = t^2$$

Ειδική λύση y_p της μη ομογενούς:

$$y_p = -t \left[\ln t + \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (18):

$$y = c_1 t + c_2 t^2 - t \left[\ln t + \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Εφαρμογές: Ταλαντώσεις