



Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας

Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών

Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών

Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως

Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως

1. Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
2. Εξισώσεις της Μορφής $y'' = g(x)$
3. Αναγώγιμες Εξισώσεις
4. Γραμμικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- Μια ΣΔΕ δευτέρας τάξεως έχει τη **γενική μορφή**

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (1)$$

- ή (υπό προϋποθέσεις) την **κανονική μορφή**

$$y'' = f(x, y, y')$$

- Το αντίστοιχο **ΠΑΤ** δευτέρας τάξεως έχει τη μορφή

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (2)$$

- Γραμμική** ΣΔΕ 2ας τάξεως είναι κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \quad (3)$$

- Μη γραμμική** ΣΔΕ 2ας τάξεως είναι κάθε ΣΔΕ 2ας τάξεως η οποία δεν είναι γραμμική.

Εξισώσεις της Μορφής $y'' = g(x)$

Εξισώσεις της Μορφής $y'' = g(x)$

Εξισώσεις της μορφής

$$y'' = g(x)$$

λύνονται με **απευθείας ολοκλήρωση**:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int^x g(s)ds + c_1$$

$$\Rightarrow y(x) = \int^x \left[\int^s g(r)dr \right] ds + c_1x + c_2$$

όπου

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης οι οποίες υπολογίζονται απ' τις αρχικές συνθήκες.

Εξισώσεις της Μορφής $y'' = g(x)$

Πρόβλημα: Σώμα μάζας m αφήνεται (τη χρονική στιγμή $t = 0$) από ύψος $x = h$ και ακολουθεί **ελεύθερη πτώση χωρίς τριβή** υπό την επίδραση της βαρύτητας. Να υπολογιστεί η θέση $x = x(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου t .

Επίλυση:

- ΠΑΤ για την θέση του σώματος:

$$x'' = -g, \quad x(0) = h, \quad x'(0) = 0$$

Λύση:

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Εξισώσεις της Μορφής $y'' = g(x)$

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση

$$y'' = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Λύση:

$$y = \frac{t^3}{6} + 1$$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' = \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Λύση:

$$y = -\cos t + t + 1$$

Αναγώγιμες Εξισώσεις

Αναγώγιμες Εξισώσεις

Εξισώσεις **ανεξάρτητες του y** :

$$y'' = g(x, y') \quad (4)$$

Παρατήρηση:

- Κάνοντας την **αλλαγή μεταβλητής**

$$v = y'$$

η εξίσωση (4) γίνεται

$$v' = g(x, v)$$

η οποία είναι μια **εξίσωση πρώτης τάξεως** ως προς v .

Αναγώγιμες Εξισώσεις

Εξισώσεις **ανεξάρτητες του x** :

$$y'' = g(y, y') \quad (5)$$

Παρατήρηση:

- Κάνοντας την **αλλαγή μεταβλητής**

$$v = y'$$

η εξίσωση (5) γίνεται

$$\frac{dv}{dy} v = g(y, v)$$

η οποία είναι μια **εξίσωση πρώτης τάξεως** ως προς v με ανεξάρτητη μεταβλητή την y .

Αναγώγιμες Εξισώσεις

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' = 2yy', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

Λύση:

$$y = \frac{2}{1 - 2t}, \quad t < \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

Λύση:

$$y^2 = c_1x + c_2$$

Γραμμικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως
