Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Περιεχόμενα

Αυτόνομες Εξισώσεις

Αυτόνομες Εξισώσεις

Εξισώσεις της μορφής

$$y' = f(y) \tag{1}$$

ονομάζονται **αυτόνομες**. Στόχος μας είναι να μελετήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων αυτόνομων εξισώσεων.

Παρατηρήσεις:

- Η εξίσωση (1) είναι **διαχωρίσιμη**.
- Οι ρίζες της εξισώσεως $f(y) = 0$ είναι ταυτόχρονα ειδικές λύσεις της ΔΕς (1). Οι λύσεις αυτές είναι σταθερές και ονομάζονται λύσεις ισορροπίας ή κρίσιμα σημεία της ΔΕς.

Αυτόνομες Εξισώσεις

Μοντέλο εκθετικής ανάπτυξης ή συρρίκνωσης:

$$y' = ry, \qquad y(0) = y_0$$

Η σταθερά r ονομάζεται ρυθμός ανάπτυξης εάν $r > 0$ ή ρυθμός συρρίκνωσης εάν $r < 0$.

Παρατήρηση:

- Η λύση ισορροπίας είναι

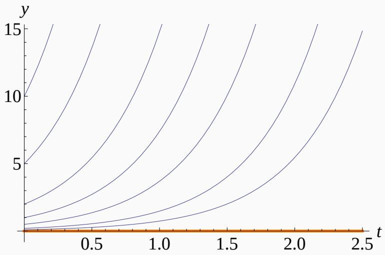
$$ry = 0 \Rightarrow y = 0$$

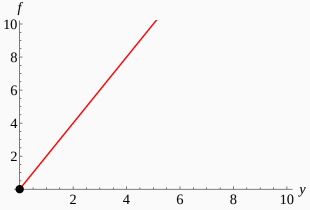
Παράδειγμα ($r > 0$):

$$y' = 2y, \qquad y(0) = y_0$$

Λύση ισορροπίας: $y(t) = 0$.

Ολοκληρωτικές καμπύλες:





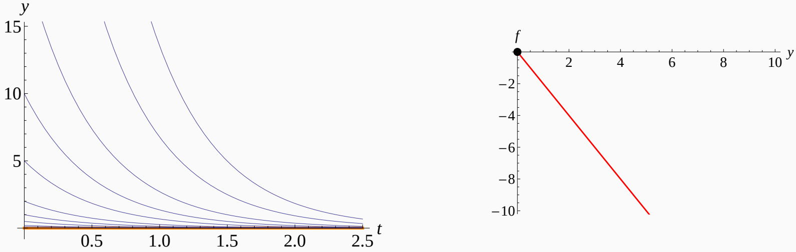
- Η $y(t) = 0$ είναι ασταθής λύση ισορροπίας.

Παράδειγμα ($r < 0$):

$$y' = -2y, \qquad y(0) = y_0$$

Λύση ισορροπίας: $y(t) = 0$.

Ολοκληρωτικές καμπύλες:



- Η $y(t) = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση ισορροπίας.

Αυτόνομες Εξισώσεις

Μοντέλο εκθετικής ανάπτυξης ή συρρίκνωσης:

$$y' = ry, \qquad y(0) = y_0 \tag{2}$$

Λύση ισορροπίας: $y(t) = 0$.

Λύση του ΠΑΤ (2):

$$y = y_0 e^{rt}$$

Παρατηρήσεις: Για κάθε $y_0 > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} y = \infty \quad \text{για} \quad r > 0, \qquad \lim_{t\to\infty} y = 0 \quad \text{για} \quad r < 0$$

Επομένως, η λύση ισορροπίας $y(t) = 0$ είναι

- ασταθής για $r > 0$
- ασυμπτωτικά ευσταθής για $r < 0$

Μοντέλο λογιστικής ανάπτυξης ή συρρίκνωσης:

$$y' = (r - ay)y \quad \text{ή} \quad y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \qquad y(0) = y_0$$

όπου r, a και $K = r/a$ είναι σταθερές. Η σταθερά r ονομάζεται εγγενής ρυθμός ανάπτυξης ($r > 0$) ή συρρίκνωσης ($r < 0$).

Παρατήρηση:

- Οι λύσεις ισορροπίας είναι

$$r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y = 0 \Rightarrow y = 0, K$$

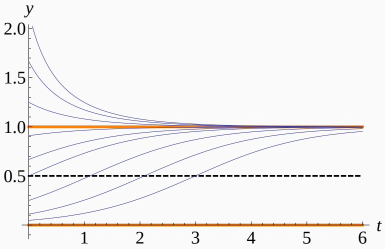
Αυτόνομες Εξισώσεις

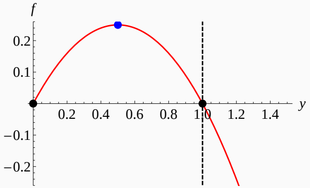
Παράδειγμα ($r > 0$):

$$y' = (1-y)y, \qquad y(0) = y_0$$

Λύσεις ισορροπίας: $y(t) = 0, 1$.

Ολοκληρωτικές καμπύλες:





- Η λύση ισορροπίας $y(t) = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Η λύση ισορροπίας $y(t) = 0$ είναι ασταθής.

Αυτόνομες Εξισώσεις

Μοντέλο λογιστικής με $r > 0$:

$$y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \qquad y(0) = y_0 \tag{3}$$

Λύσεις ισορροπίας: $y(t) = 0, K$.

Λύση του ΠΑΤ (3):

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

Παρατήρηση:

$$\lim_{t\to\infty} y = K \qquad \forall y_0 > 0$$

- Η λύση ισορροπίας $y(t) = K$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Η λύση ισορροπίας $y(t) = 0$ είναι ασταθής.

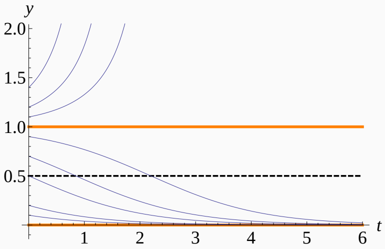
Αυτόνομες Εξισώσεις

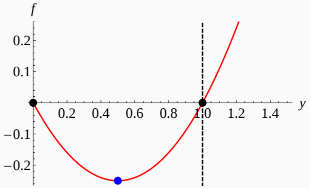
Παράδειγμα ($r < 0$):

$$y' = -(1-y)y$$

Λύσεις ισορροπίας: $y(t) = 0, 1$.

Ολοκληρωτικές καμπύλες:





- Η λύση ισορροπίας $y(t) = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Η λύση ισορροπίας $y(t) = 1$ είναι ασταθής.

Μοντέλο λογιστικής με $r < 0$:

$$y' = r\left(1 - \frac{y}{T}\right) y, \qquad y(0) = y_0 \tag{4}$$

Λύσεις ισορροπίας: $y(t) = 0, T$.

Λύση του ΠΑΤ (4):

$$y = \frac{y_0\, T}{y_0 + (T - y_0)e^{-rt}}$$

Παρατηρήσεις:

$$\lim_{t\to\infty} y = 0 \quad \text{για} \quad 0 < y_0 < T$$

$$\lim_{t\to t^*} y = \infty \quad \text{για} \quad y_0 > T \quad \left(t^* = -\frac{1}{r}\ln\frac{y_0}{y_0 - T}\right)$$

- Η λύση ισορροπίας $y(t) = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
- Η λύση ισορροπίας $y(t) = T$ είναι ασταθής.

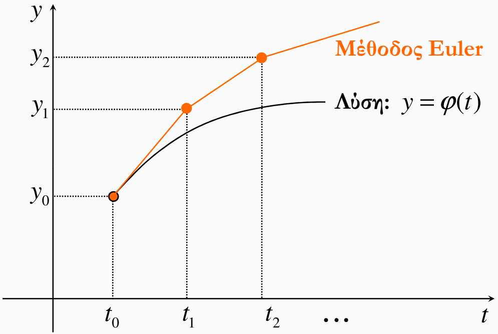
Αριθμητικές Λύσεις

Η Μέθοδος Euler

Πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου:



Η Μέθοδος Euler

Πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

Επαναληπτική διαδικασία:

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

όπου

$$f_n = f\left(t_n, y_n\right), \quad h = t_{n+1} - t_n = \text{σταθ.} \, \forall \, n = 0, 1, 2, ...$$

Η Μέθοδος Euler

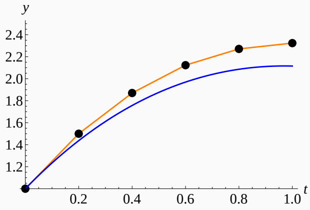
Παράδειγμα 1:

$$y' = 3 - 2t - \frac{1}{2}y, \qquad y(0) = 1$$

Ακριβής λύση:

$$y = \phi(t) = 14 - 4t - 13e^{-t/2}$$

Προσεγγιστική λύση για $h = 0.2$:



n	t_n	y_n	f_n	$\phi(t_n)$	Σφάλμα
0	0.0	1.0000	2.5000	1.0000	0 %
1	0.2	1.5000	1.8500	1.4371	4.3758 %
2	0.4	1.8700	1.2650	1.7565	6.4617 %
3	0.6	2.1230	0.7385	1.9694	7.8013 %
4	0.8	2.2707	0.2646	2.0858	8.8626 %
5	1.0	2.3236	-0.1618	2.1151	9.8590 %

Η Μέθοδος Euler

Προσεγγιστική λύση για διάφορες τιμές του h:

t	$\phi(t)$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.01$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0	2.1151	2.2164	2.1651	2.1399	2.1250
2.0	1.2176	1.3397	1.2780	1.2476	1.2295
3.0	-0.9007	-0.7903	-0.8459	-0.8734	-0.8898
4.0	-3.7594	-3.6707	-3.7152	-3.7373	-3.7506
5.0	-7.0671	-7.0003	-7.0337	-7.0504	-7.0604

Παρατηρήσεις:

- Για δεδομένο t, η ακρίβεια της προσέγγισης βελτιώνεται καθώς μειώνεται το h.
- Το σφάλμα είναι ανάλογο του h.

Εφαρμογές

Εφαρμογές: Κίνηση στο Πεδίο Βαρύτητας με Τριβή

Πρόβλημα: Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x = 0$ μέσα σε ένα μέσο στο οποίο συναντάει αντίσταση $F_a = -kv$, όπου $k =$ σταθ. > 0 και $v = \dot{x}$. Να υπολογιστούν η ταχύτητα $v = v(t)$ και η θέση $x = x(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου t.

Επίλυση:

- ΠΑΤ για την ταχύτητα:

$$v' + \frac{k}{m} v = g, \qquad v(0) = 0$$

- Λύση:

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Εφαρμογές: Κίνηση στο Πεδίο Βαρύτητας με Τριβή

Πρόβλημα: Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x = 0$ μέσα σε ένα μέσο στο οποίο συναντάει αντίσταση $F_a = -kv$, όπου $k =$ σταθ. > 0 και $v = \dot{x}$. Να υπολογιστούν η ταχύτητα $v = v(t)$ και η θέση $x = x(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου t.

Επίλυση:

- ΠΑΤ για την θέση:

$$x' = v, \qquad x(0) = 0$$

- Λύση:

$$x = \frac{mg}{k}\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]$$

Εφαρμογές: Νόμος Ψύξης του Newton

Πρόβλημα: Σώμα με θερμοκρασία T_0 τοποθετείται μέσα σε ένα ρευστό σταθερής θερμοκρασίας T_∞. Να υπολογιστεί η θερμοκρασία $T = T(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου t. Να υποτεθεί ότι ισχύει ο Νόμος ψύξης του Newton: Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του σώματος είναι ανάλογος με τη διαφορά μεταξύ της θερμοκρασίας του σώματος και εκείνης του περιβάλλοντος.

Επίλυση:

- ΠΑΤ για τη θερμοκρασία:

$$T' = -k\left(T - T_\infty\right), \qquad T(0) = T_0$$

- Λύση:

$$T = T_\infty + \left(T_0 - T_\infty\right) e^{-kt}$$

Εφαρμογές: Ραδιοχρονολόγιση με Βάση τον C^{14}

Πρόβλημα: Συγκεκριμένα οστά τα οποία ανακαλύφθηκαν σε αρχαιολογικές ανασκαφές υποβλήθηκαν σε κατάλληλες μετρήσεις απ΄ τις οποίες προέκυψε ότι η παρούσα ποσότητα Q_* του ισοτόπου του άνθρακα C^{14} στα οστά είναι το 8% της ποσότητας Q_0 την οποία συναντάει κανείς σε ζωντανούς οργανισμούς. Να υπολογιστεί η ηλικία των οστών. Να υποτεθεί ότι ο ρυθμός μείωσης του ισοτόπου του άνθρακα C^{14} στα οστά είναι ανάλογος της ποσότητας του ισοτόπου που είναι παρούσα, με συντελεστή αναλογίας $k = 1.24 \times 10^{-4}/$ χρόνο.

Επίλυση:

- ΠΑΤ για την ποσότητα C^{14}:

$$Q' = -kQ, \qquad Q(0) = Q_0$$

- Λύση:

$$Q = Q_0 e^{-kt} \Rightarrow t_* = 20369\text{έτη}$$