Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Γενική μορφή:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0$$

Κανονική μορφή:

$$y' = f\left(x, y\right)$$

Παραδείγματα:

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y' = y - x^2, \qquad y' = x^2 - y^2$$

Βασικά ζητήματα:

1. Ολοκληρωτικές καμπύλες.
2. Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης ΠΑΤν.
3. Μέθοδοι επίλυσης.

Μέθοδοι Επίλυσης

1. Εξισώσεις της Μορφής $y' = g(x)$
2. Γραμμικές Εξισώσεις
3. Διαχωρίσιμες Εξισώσεις
4. Ακριβείς Εξισώσεις
5. Εξισώσεις Bernoulli
6. Ομογενείς Εξισώσεις

Εξισώσεις της Μορφής $y' = g(x)$

Εξισώσεις της Μορφής $y' = g(x)$

Άμεση ολοκλήρωση:

$$y' = g(x) \Rightarrow y = \int g(x)\, dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

δηλαδή, εάν γνωρίζουμε μια συνάρτηση $G = G(x)$ τέτοια ώστε $G'(x) = g(x)$, τότε

$$y(x) = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η ΔΕ

$$y' = 8e^{4x} + x$$

Λύση:

$$y = 2e^{4x} + \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Σημείωση: Η σταθερά c προσδιορίζεται απ΄ την αρχική συνθήκη.

Γραμμικές Εξισώσεις

Γραμμικές Εξισώσεις

Κανονική μορφή:

$$y' + p(t)y = g(t) \tag{1}$$

Παράδειγμα 1:

$$xy' + y = 1 \Rightarrow (xy)' = 1 \Rightarrow y = 1 + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 2:

$$y' = 3y + e^x \Rightarrow y' - 3y = e^x \Rightarrow e^{-3x}\left(y' - 3y\right) = e^{-3x}e^x$$

$$\Rightarrow \left(e^{-3x}y\right)' = e^{-2x} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}e^x + ce^{3x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ερώτηση: Πως λύνεται η γενική εξίσωση (1);

Η Μέθοδος του Ολοκληρωτικού Παράγοντα

Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων της μορφής:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

1. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση

   $$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

   Η $\mu(t)$ ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**.

2. Πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ με $\mu(t)$, με αποτέλεσμα

   $$(\mu(t)y)' = \mu(t)g(t)$$

3. Ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε ότι

   $$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)g(t)dt + c\right]$$

Παρατηρήσεις:

- Για την εφαρμογή της μεθόδου απαιτείται ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $\int p(t)dt$ και $\int \mu(t)g(t)dt$.
- Η μέθοδος βρίσκει εφαρμογή σε διαστήματα του t στα οποία οι συναρτήσεις $p(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς.
- Η απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης γραμμικών προβλημάτων βασίζεται σε αυτή τη μέθοδο.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ

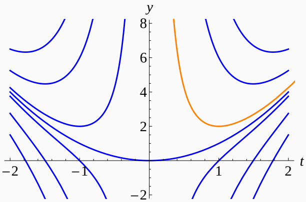
$$ty' + 2y = 4t^2, \qquad y(1) = 2$$

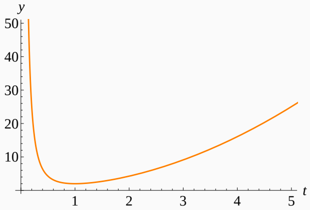
Ολοκληρωτικός παράγοντας:

$$\mu(t) = t^2$$

Λύση:

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0$$





Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ΠΑΤ

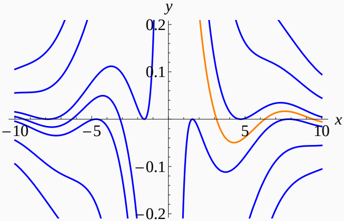
$$x^2 y' + 2xy = \cos x, \qquad y(\pi) = 0$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας:

$$\mu(x) = x^2$$

Λύση:

$$y(x) = \frac{\sin x}{x^2}, \qquad x > 0$$



Παράδειγμα 3: Να λυθεί το ΠΑΤ

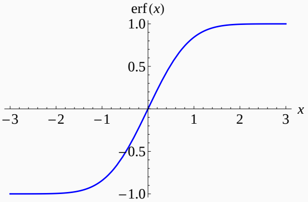
$$y' - 2xy = 1, \qquad y(0) = y_0$$

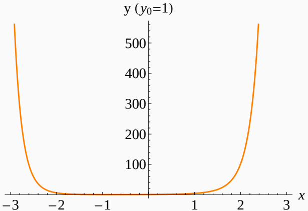
Ολοκληρωτικός παράγοντας:

$$\mu(x) = e^{-x^2}$$

Λύση:

$$y(x) = y_0 e^{x^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \mathrm{erf}(\mathrm{x}), \quad \mathrm{erf}(\mathrm{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2} \mathrm{dt}, \quad -\infty < \mathrm{x} < \infty$$





Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Παρατήρηση: Όταν η εξίσωση έχει τη μορφή

$$y' = M(x)N(y) \tag{2}$$

μπορούμε να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές, ως εξής

$$\frac{1}{N(y)}dy = M(x)dx$$

και, συνεπώς, να λύσουμε την εξίσωση με άμεση ολοκλήρωση.

Εξισώσεις της μορφής (2) ονομάζονται **διαχωρίσιμες**.

Σημείωση:

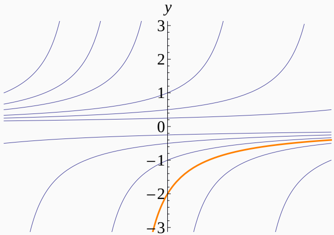
- Εξισώσεις της μορφής (2) είναι γραμμικές εάν $N(y) = \alpha y + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Διαφορετικά, είναι μη γραμμικές.

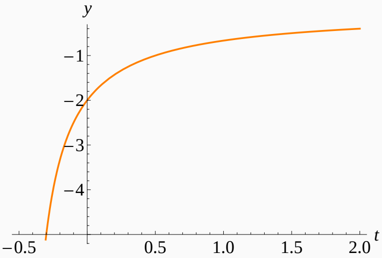
Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = y^2, \qquad y(0) = -2$$

Λύση:

$$y(t) = -\frac{1}{t+1/2} \quad -1/2 < t < \infty$$



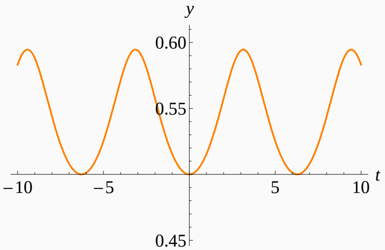


Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = y^5 \sin t, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

Λύση:

$$y(t) = \left(\frac{1}{4\cos t + 12}\right)^{1/4} \qquad -\infty < t < \infty$$

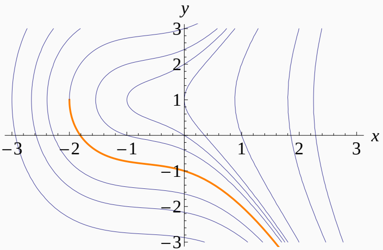


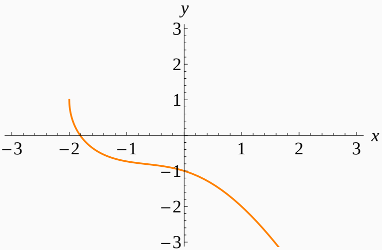
Παράδειγμα 3: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1$$

Λύση:

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}, \qquad x > -2$$





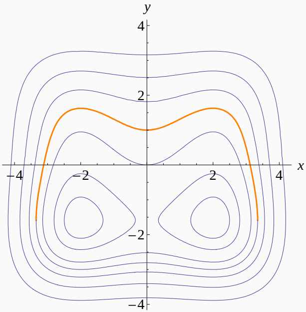
Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

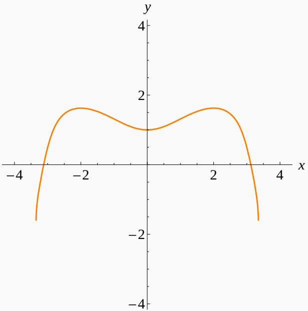
Παράδειγμα 4: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = \frac{4x - x^3}{4 + y^3}, \qquad y(0) = 1$$

Λύση:

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17, \qquad -3.35 < x < 3.35$$





Ακριβείς Εξισώσεις

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$(2x + y^2) + (2xy)y' = 0 \tag{3}$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση

$$v(x, y) = x^2 + xy^2$$

έχει την ιδιότητα

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2xy$$

Επομένως, η εξίσωση (3) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \tag{4}$$

Λύσεις:

$$x^2 + xy^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ακριβείς Εξισώσεις

Ορισμός: Λέμε οτι μια εξίσωση της μορρφής

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{5}$$

είναι **ακριβής** όταν υπάρχει συνάρτηση $v(x,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial v}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = N(x,y)$$

Με άλλα λόγια, ακριβής είναι μια εξίσωση η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \tag{6}$$

και, επομένως, οι λύσεις της δίνονται απ΄ την έκφραση

$$v(x,y) = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ακριβείς Εξισώσεις

Θεώρημα: Θεωρούμε την εξίσωση

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{7}$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις M, N, $M_y = \partial M/\partial y$ και $N_x = \partial N/\partial x$ είναι συνεχείς στην περιοχή

$$R = \{(x,y) : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}$$

Τότε, η εξίσωση (7) είναι ακριβής στην περιοχή R εάν και μόνον εάν

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in R \tag{8}$$

Ακριβείς Εξισώσεις

Μέρος Α: Εάν η εξίσωση (7) είναι ακριβής, τότε $M_y = N_x$.

Απόδειξη:

- Εφόσον η εξίσωση (7) είναι ακριβής, υπάρχει συνάρτηση $v(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial v}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = N(x, y)$$

- Επομένως,

$$M_y(x, y) = v_{xy}(x, y), \qquad N_x(x, y) = v_{yx}(x, y)$$

- Εφόσον οι M_y και N_x είναι συνεχείς, οι v_{xy} και v_{yx} είναι επίσης συνεχείς. Συνεπώς,

$$v_{xy}(x, y) = v_{yx}(x, y) \Rightarrow M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

Ακριβείς Εξισώσεις

Μέρος Β: Εάν $M_y = N_x$, τότε η εξίσωση (7) είναι ακριβής.

Απόδειξη: Με δεδομένο ότι $M_y = N_x$, υπολογίζουμε μια συνάρτηση $v(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial v}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = N(x, y)$$

Διαδικασία υπολογισμού της $v(x, y)$:

- Ολοκληρώνουμε την εξίσωση $v_x = M$ ως προς x:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = M(x, y) \Rightarrow v(x, y) = Q(x, y) + h(y)$$

όπου $Q(x, y)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = M(x, y)$$

Ακριβείς Εξισώσεις

- Εφαρμόζουμε τη συνθήκη $v_y = N$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} + h'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow h'(y) = N(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

  Παρατήρηση: Το δεξιό σκέλος της τελευταίας εξισώσεως είναι ανεξάρτητο του x.

- Υπολογίζουμε τη συνάρτηση $h(y)$ ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς y.

Ακριβείς Εξισώσεις

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2 e^y - 1)y' = 0$$

Παρατήρηση: Η εξίσωση είναι ακριβής διότι

$$M_y = N_x = \cos x + 2xe^y$$

Λύσεις:

$$y\sin x + x^2 e^y - y = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

Παρατήρηση: Η εξίσωση δεν είναι ακριβής διότι

$$M_y = 3x + 2y, \qquad N_x = 2x + y, \qquad M_y \neq N_x$$

Ακριβείς Εξισώσεις

Παρατήρηση: Εάν μια εξίσωση της μορφής

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{9}$$

δεν είναι ακριβής, τότε μπορούμε να αναζητήσουμε μια συνάρτηση $\mu(x, y)$ (ολοκληρωτικός παράγοντας) τέτοια ώστε η εξίσωση

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0 \tag{10}$$

να είναι ακριβής, δηλαδή η $\mu(x, y)$ πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \Rightarrow M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \tag{11}$$

Σημειώσεις:

- Ο ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x, y)$ προσδιορίζεται ως (μια) λύση της ΜΔΕς (11).
- Η εξίσωση (11) είναι, εν γένει, δύσκολο να λυθεί.

Ακριβείς Εξισώσεις

Ειδικές περιπτώσεις:

- Εάν η $(M_y - N_x)/N$ είναι μια συνάρτηση του x μόνο, τότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι επίσης μια συνάρτηση του x μόνο και υπολογίζεται απ΄ την επίλυση της εξισώσεως

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$

- Εάν η $(M_y - N_x)/M$ είναι μια συνάρτηση του y μόνο, τότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι επίσης μια συνάρτηση του y μόνο και υπολογίζεται απ΄ την επίλυση της εξισώσεως

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{M_y - N_x}{M}\mu$$

Ακριβείς Εξισώσεις

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

Παρατηρήσεις:

- Η εξίσωση δεν είναι ακριβής, διότι

$$M_y = 3x + 2y, \qquad N_x = 2x + y, \qquad M_y \neq N_x$$

- Όμως,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας:

$$\mu(x) = x$$

Λύσεις:

$$x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Εξισώσεις Bernoulli

Εξισώσεις Bernoulli:

$$y' + p(t)y = q(t)y^n \tag{12}$$

Παρατηρήσεις:

- Για $n = 0$ ή $n = 1$, η εξίσωση (12) είναι γραμμική.
- Για $n \neq 0, 1$, κάνοντας την **αλλαγή μεταβλητής**

$$w = y^{1-n} \tag{13}$$

η εξίσωση (12) γίνεται

$$w' + (1-n)p(t)w = (1-n)q(t) \tag{14}$$

η οποία είναι **γραμμική** ως προς w.

Εξισώσεις Bernoulli

Παράδειγμα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$ty' = y + t^2 y^2, \qquad y(1) = 2$$

Παρατήρηση: Εξίσωση Bernoulli με $n = 2$.

Λύση:

$$y(t) = \frac{6t}{5 - 2t^3}, \qquad t < \left(\frac{5}{2}\right)^{1/3}$$

Ομογενείς Εξισώσεις

Ομογενείς Εξισώσεις

Εξισώσεις της μορφής

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{15}$$

ονομάζονται **ομογενείς**.

Παρατήρηση:

- Κάνοντας την **αλλαγή μεταβλητής**

  $$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow y' = v + xv'$$

  η εξίσωση (15) γίνεται

  $$xv' = g(v) - v \tag{16}$$

  η οποία είναι **διαχωρίσιμη**.

Ομογενείς Εξισώσεις

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$y' = \frac{y - 4x}{x - y}$$

Παρατήρηση: Η εξίσωση είναι ομογενής διότι έχει τη μορφή

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{με} \qquad g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{(y/x) - 4}{1 - (y/x)}$$

Λύση:

$$(y - 2x)(y + 2x)^3 = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$