Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Γενική μορφή:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0$$

Κανονική μορφή:

$$y' = f\left(x, y\right)$$

Παραδείγματα:

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y' = y - x^2, \qquad y' = x^2 - y^2$$

Βασικά ζητήματα:

1. Ολοκληρωτικές καμπύλες.
2. Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης ΠΑΤν.
3. Μέθοδοι επίλυσης.

Ολοκληρωτικές Καμπύλες

Ολοκληρωτικές Καμπύλες

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Παρατήρηση:

- Η κλίση της $y = y(x)$ μπορεί να υπολογιστεί άμεσα απ΄ τη ΔΕ (1) σε κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου, χωρίς να είναι απαραίτητη η επίλυση της ΔΕς.

Ορολογία:

- Το πεδίο $f(x, y)$ ονομάζεται πεδίο διευθύνσεως.
- Οι λύσεις $y = y(x)$ ονομάζονται ολοκληρωτικές καμπύλες.

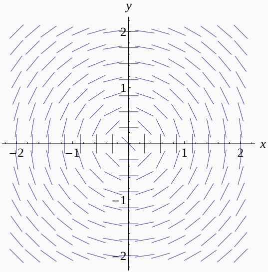
Σχεδιασμός πεδίου διευθύνσεως:

1. Σχεδιάζουμε ισοκλινείς καμπύλες $f(x, y) = c$
2. Σχεδιάζουμε το πεδίο διευθύνσεως σε κάθε ισοκλινή

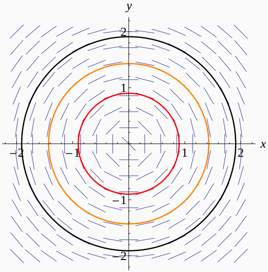
Ολοκληρωτικές Καμπύλες

Παράδειγμα 1:

$$y' = -\frac{x}{y}$$



Πεδίο διευθύνσεως



Ολοκληρωτικές καμπύλες

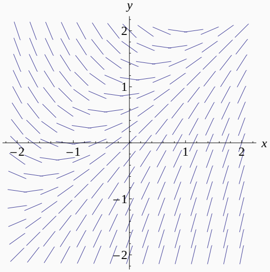
Λύση:

$$y^2 + x^2 = c$$

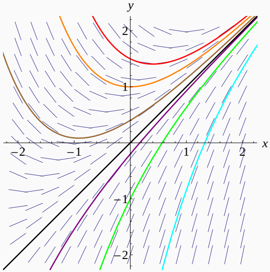
Ολοκληρωτικές Καμπύλες

Παράδειγμα 2:

$$y' = 1 + x - y$$



Πεδίο διευθύνσεως



Ολοκληρωτικές καμπύλες

Γενική λύση:

$$y(x) = x + ce^{-x}$$

Ολοκληρωτικές Καμπύλες

Παρατηρήσεις:

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες μιας ΔΕς της μορφής

$$y' = f\left(x, y\right)$$

- Δε μπορεί να τέμνονται μεταξύ τους.
- Δε μπορεί να εφάπτονται μεταξύ τους, υπό την προϋπόθεση ότι η λύση του ΠΑΤ=ΔΕ+ΑΤ είναι μοναδική (για κάθε ΑΤ).

Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης ΠΑΤν

Γραμμικά Προβλήματα

Θεώρημα: Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y' + p(t)y = g(t), \quad \alpha < t < \beta, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Εάν οι συναρτήσεις $p(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $I : \alpha < t < \beta$ και $t_0 \in I$, τότε το ΠΑΤ έχει μια και μόνο μια λύση $y = \phi(t)$ στο I.

Σημειώσεις:

- Οι συνθήκες είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.
- Η λύση μπορεί να είναι ασυνεχής ή να μην υπάρχει μόνο σε σημεία όπου μια τουλάχιστον εκ των $p(t)$ και $g(t)$ είναι ασυνεχής.

Γραμμικά Προβλήματα

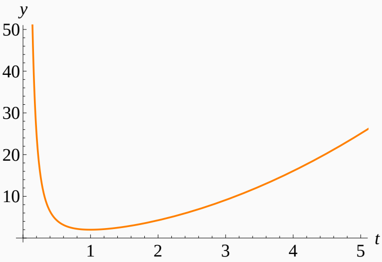
Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο το ΠΑΤ

$$ty' + 2y = 4t^2, \qquad y(1) = 2$$

έχει μοναδική λύση.

Λύση:

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0$$



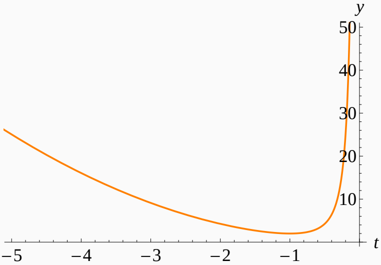
Παράδειγμα 1΄: Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο το ΠΑΤ

$$ty' + 2y = 4t^2, \qquad y(-1) = 2$$

έχει μοναδική λύση.

Λύση:

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t < 0$$



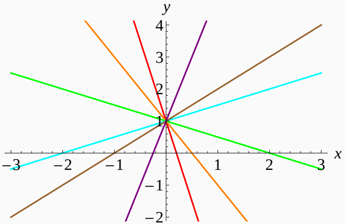
Γραμμικά Προβλήματα

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση

$$xy' = y - 1$$

Γενική λύση:

$$y(x) = 1 + c\,x, \qquad c \in \mathbb{R}$$



Παρατήρηση:

- Η ΔΕ έχει άπειρες λύσεις στο σημείο $(0, 1)$, ενώ σε κάθε άλλο σημείο του άξονα των y δεν έχει λύσεις.

Μη Γραμμικά Προβλήματα

Θεώρημα: Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y' = f(t, y), \quad \alpha < t < \beta, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Εάν οι συναρτήσεις $f(t, y)$ και $\partial f(t, y)/\partial y$ είναι συνεχείς στην περιοχή $R = \{(t, y) : \alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta\}$ και $(t_0, y_0) \in R$, τότε το ΠΑΤ έχει μια και μόνο μια λύση $y = \phi(t)$ στο διάστημα $J : t_0 - h < t < t_0 + h$, όπου $h > 0$ και $J \subset I$ $(I : \alpha < t < \beta)$.

Σημειώσεις:

- Οι συνθήκες είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.
- Η συνέχεια της f αρκεί για την ύπαρξη (αλλά όχι για τη μοναδικότητα) της λύσης.

Παράδειγμα 1:

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0, \qquad t \geq 0$$

Παρατηρήσεις:

- Η $f(t, y) = y^{1/3}$ είναι συνεχής παντού. Συνεπώς, το ΠΑΤ έχει λύσεις.
- Η $\partial f(t, y)/\partial y = (1/3)y^{-2/3}$ δεν ορίζεται στο $y = 0$. Συνεπώς, το θεώρημα δεν εγγυάται τη μοναδικότητα της λύσης.

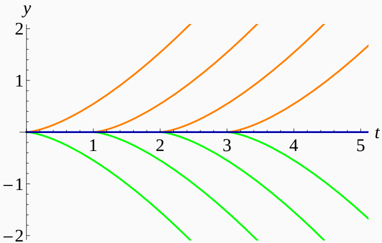
Μη Γραμμικά Προβλήματα

Παράδειγμα 1:

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0$$

Λύσεις:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 \\ \pm\left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, & t \ge t_0 \end{cases}$$



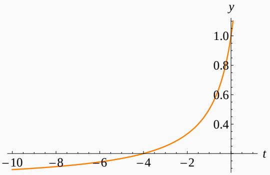
Μη Γραμμικά Προβλήματα

Παράδειγμα 2:

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1$$

Λύση:

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad -\infty < t < 1$$



Σημείωση:

- Το σημείο $t = 1$ είναι ιδιόμορφο σε αυτό το πρόβλημα. Αυτό, όμως, δεν είναι προφανές απ' τη ΔΕ.

Μη Γραμμικά Προβλήματα

Παράδειγμα 2΄:

$$y' = y^2, \qquad y(0) = y_0$$

Λύση:

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - t y_0}, \quad \begin{cases} -\infty < t < 1/y_0, & y_0 > 0 \\ 1/y_0 < t < +\infty, & y_0 < 0 \end{cases}$$

Σημείωση:

- Το ιδιόμορφο σημείο $t = 1/y_0$ εξαρτάται και απ΄ την ΑΤ.