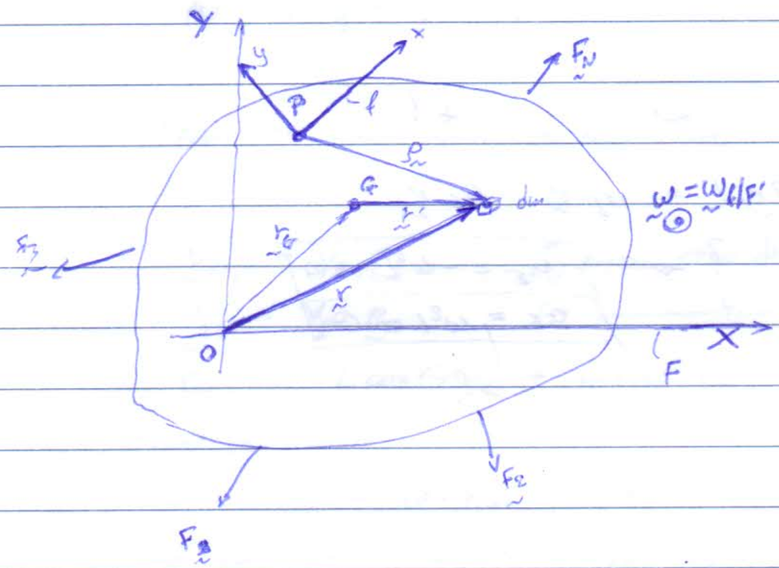
ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ



Το σώμα αποτελείται από η υλικά σημεία - κυβάκια.

f: κινούμενο - καρφωμένο πάνω στο σώμα.

$F_1, \dots, F_n$: δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

- Μάζα : $m = \int_V dm = \int_V \rho\, dV$ (1)

- Κέντρο βάρους : $r_G = \dfrac{\int r\, dm}{\int dm} = \dfrac{\int_V r\, dm}{m}$ (2) $\qquad r_G = \dfrac{\sum r_i m_i}{\sum m_i}$

  $L = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i$

- Ορμή : $L = \int_V v\, dm = \int_V \dot{r}\, dm$ (3)

- Στροφορμή : $H_P = \int_V \rho \times v\, dm$ (4).

r' : διάνυσμα πάνω στο σώμα που κινείται.

Ταχύτητα : $r = r_G + r' \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{r} = \dot{r}_G + (\dot{r}')_F \Rightarrow v = v_G + \omega \times r'$ (5)

$(3) \overset{(5)}{\Rightarrow} L = \int_V (v_G + \omega \times r')\, dm = v_G \underbrace{\int_V dm}_{m} + \int_V (\omega \times r')\, dm$

$\Rightarrow L = v_G \cdot m + \omega \times \underbrace{\int_V r'\, dm}_{0} \Rightarrow$

0, αφού $r'_G = 0$ (η θέση του G ως προς το G είναι 0)

$\Rightarrow \boxed{L = m v_G}$

$$\underset{\sim}{F} = \dot{\underset{\sim}{L}} = \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{L}) = \frac{d}{dt}(m\underset{\sim}{v_G}) \rightarrow \boxed{\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a_G}}$$ 1os Νόμος Euler.

$$\underset{\sim}{M_P} = \dot{\underset{\sim}{H_P}} + \underset{\sim}{v_P} \times (m\underset{\sim}{v_G})$$ → 2os Νόμος Euler.

Γνωρίζω ότι : ∘ $\underset{\sim}{H_P} = \overline{\underset{\sim}{H_P}} + \underset{\sim}{\rho_G} \times (m\underset{\sim}{v_G})$

∘ Αν $P \equiv G \rightarrow \underset{\sim}{H_G} = \overline{\underset{\sim}{H_G}}$, (αφού το $\rho_G = 0$)

Σχετική στροφορμή : $\overline{\underset{\sim}{H_P}} = \int_V \underset{\sim}{\rho} \times \dot{\underset{\sim}{\rho}}\, dm$

Γνωρίζω : $\dot{\underset{\sim}{\rho}} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\rho}$, αφού το διάνυσμα $\underset{\sim}{\rho}$ είναι καρφωμένο πάνω στο σώμα.

$$\overline{\underset{\sim}{H_P}} = \int_V \underset{\sim}{\rho} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\rho})\, dm$$

Ταυτότητα : $\underset{\sim}{a} \times (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c})\underset{\sim}{b} - (\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b})\underset{\sim}{c}$

$\underset{\sim}{\rho}$ " $\underset{\sim}{\omega}$ " $\underset{\sim}{\rho}$ "

Άρα $$\underset{\sim}{\rho} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{\rho}) = \underbrace{(\underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\rho})}_{\rho^2}\underset{\sim}{\omega} - (\underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\omega})\underset{\sim}{\rho} = \rho^2 \underset{\sim}{\omega} - (\underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\omega})\underset{\sim}{\rho}.$$

Περιγράφω όλα τα διανύσματα ως προς f (κινούμενο)

$\underset{\sim}{\omega} = \omega_x \underset{\sim}{e_x} + \omega_y \underset{\sim}{e_y} + \omega_z \underset{\sim}{e_z}$

$\underset{\sim}{\rho} = x \underset{\sim}{e_x} + y \underset{\sim}{e_y} + z \underset{\sim}{e_z}$

$\underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\omega} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$

$\rho^2 = \underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\rho} = x^2 + y^2 + z^2.$

Άρα : $$\overline{\underset{\sim}{H_P}} = \int_V \left[\rho^2 \underset{\sim}{\omega} - (\underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\omega})\underset{\sim}{\rho}\right] dm = \underset{\sim}{\omega} \int \rho^2 dm - \int (\underset{\sim}{\rho} \cdot \underset{\sim}{\omega})\underset{\sim}{\rho}\, dm =$$

$$= (\omega_x \underset{\sim}{e_x} + \omega_y \underset{\sim}{e_y} + \omega_z \underset{\sim}{e_z}) \int_V (x^2+y^2+z^2)\, dm - \int_V (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(x \underset{\sim}{e_x} + y \underset{\sim}{e_y} + z \underset{\sim}{e_z})\, dm$$

→

($\omega_x x^2 e_x - \omega_x x^2 e_x = 0$ φεύγουν).

$$\Rightarrow \Big[\omega_x \underbrace{\int_V (y^2+z^2)\,dm}_{I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int_V xy\,dm}_{-I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int_V xz\,dm}_{-I_{xz}}\Big] e_x + [\sim]\, e_y + [\sim]\, e_z \Rightarrow$$

τριπλά ολοκληρώματα - γεωμετρικές ποσότητες ανεξάρτητες της κίνησης εξαρτώνται από τη θέση του συστήματος f πάνω στο σώμα.

Τελικά $\Rightarrow$

$$\bar{H}_p = (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\, e_x + (I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)\, e_y + (I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\, e_z$$

$$\left.\begin{aligned}
I_{xx} &= \int (y^2+z^2)\,dm \\
I_{yy} &= \int (x^2+z^2)\,dm \\
I_{zz} &= \int (x^2+y^2)\,dm \\
I_{xy} &= -\int xy\,dm \\
I_{xz} &= -\int xz\,dm \\
I_{yz} &= -\int yz\,dm
\end{aligned}\right\}$$

Γεωμετρικές Ποσότητες.

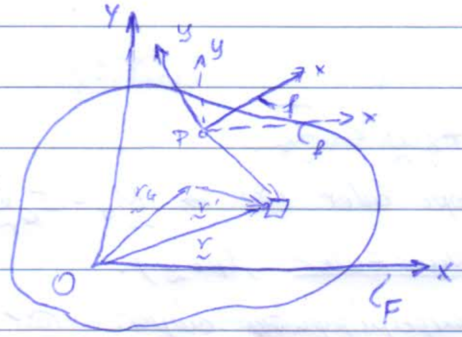
$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Τανυστής μαζικής ροπής αδράνειας του σώματος
(Είναι συμμετρικός)

$$I \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{p,x} \\ \bar{H}_{p,y} \\ \bar{H}_{p,z} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\,\omega = \bar{H}_p .$$

14/12/2012



$\cancel{H_P = I_P\, \omega}$

$(\star)\ \left(\dot{\varphi}\right)_F = \left(\dot{\varphi}\right)_\ell + \underset{\ell/F}{\omega} \times \varphi$

γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

∃ πολλοί τρόποι να καρφώσουμε το ℓ στο σώμα.

$$\bar{H}_P = I_P\, \omega \quad (1)$$

$$I = \text{Τανυστής } 2^{ης} \text{ τάξης} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ & I_{yy} & I_{yz} \\ \text{συμ.} & & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Αναφέρεται στο F

$\dot{\bar{H}}_G = \left(\dot{\bar{H}}_G\right)_F$

$2^{ος}$ Νόμος Euler

$M_P = \dot{H}_P + V_P \times m V_G$

Αν $P \equiv G \rightsquigarrow M_G = \dot{H}_G$

Επίσης γνωρίζω $H_G = \bar{H}_G$.

$\Rightarrow \boxed{M_G = \dot{\bar{H}}_G}$ (2) $2^{ος}$ Νόμος Euler

$(1) \xrightarrow{P \equiv G} \bar{H}_G = I_G\, \omega. \quad (3)$

Αντικατάσταση στη (2) $\rightarrow \bar{H}_G = \left(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z\right) e_x +$
$+ (\ldots)\, e_y + (\ldots)\, e_z \Rightarrow$

($(\star)$ Παρατηρώ ότι : $\left(\dot{\bar{H}}_G\right)_F = \left(\dot{\bar{H}}_G\right)_\ell + \omega_{\ell/F} \times \bar{H}_G$ (4))

$\Rightarrow \left(\dot{\bar{H}}_G\right)_\ell = (\quad)^{\cdot} e_x + (\quad)\underbrace{\left(\dot{e}_x\right)_\ell}_{0} + \ldots$

$(3) \Rightarrow (\dot{\underset{\sim}{H}}_G)_b = I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}}$

Άρα: $(4) \Rightarrow (\dot{\underset{\sim}{H}}_G)_F = I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{H}_G$.

οποτε με αντικαταστασυ στον 2° νομο Euler $(2) \Rightarrow \underset{\sim}{M}_G = I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{H}_G \Rightarrow$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{\underset{\sim}{M}_G = I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{\omega} \times (I_G \underset{\sim}{\omega})}$ 2ος Νομος Euler, (με $\underset{\sim}{\omega}$).

, Για απαραμόρφωτο σώμα. → H/W. που το χρησιμοποιησαμε

b: πανω στο σωμα: καθηλωμενο στο κεντρο βαρους. διανυσματικη σχεση → 3 σχεσεις

— Προσδιορίζουμε το $\underset{\sim}{\omega}$. → $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

ολοκληρώνοντας → γωνιες Euler ? → προσανατολισμό.

1ος Νόμος : $\underset{\sim}{F} = m \, \underset{\sim}{a}_G$

F: ακινητο

→ βρισκουμε το a, → ολοκληρωνοντας: ταχυτητα υ →

→ ολοκληρωνοντας: θεση

ΔΕ. μη γραμμική.

$$\underset{\sim}{M}_G = \underbrace{I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}}}_{\text{όρος γραμμικος στο } \omega} + \underbrace{\underset{\sim}{\omega} \times (I_G \underset{\sim}{\omega})}_{\text{μη γραμμικός όρος στο } \omega}$$

$$I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ \text{—} & & \\ \text{—} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$$

$$I_G \underset{\sim}{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\omega} \times (I_G \underset{\sim}{\omega}) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \times & \times & \times \end{vmatrix}.$$

Ο 2ος Νομος του Euler σε μορφη συνιστωσων γραφεται (σύστημα b).

$$M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + I_{xy} \dot{\omega}_y + I_{xz} \dot{\omega}_z + (\omega_y \times - \omega_z \times) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + I_{xy} (\dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x) + I_{yz} (\dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_z \omega_y + I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2)$$

$M_y = \dots$ βιβλιο

$M_z = \dots$ βιβλιο.

Euler

I αναφερονται στο b με αρχη το G

M αναφερονται σε ροπες ως προς G

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$: συνιστωσες του ω ως προς b.

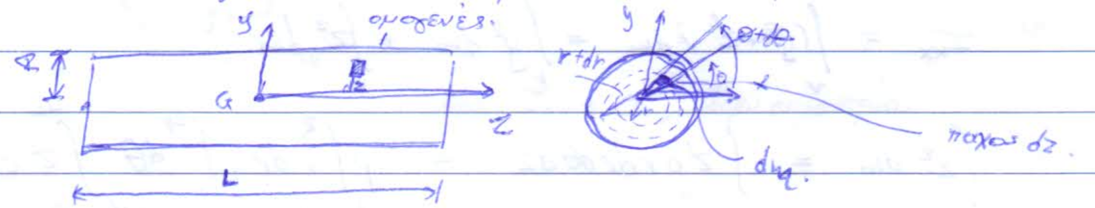
~ Το Ι - Ροπές Αδράνειας Σωμάτων ~

$\boxed{\text{Κύλινδρος}}$ — ράβδος, πλάκα κυκλική, δακτύλιος, κέλυφος

μπορεί να γίνει

* στο βιβλίο → στο παράρτημα.

Τανυστής Μαζικής Ροπής Αδράνειας Κυλίνδρου.



$$I_{zz} = \int_V (x^2+y^2)\,dm$$ ⤳ με το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

$$dm = \rho\,dV = \rho\,dz\,\underbrace{dr\,(r\,d\theta)}_{dA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{dm = \rho\,dV} = \rho\,\underbrace{r\,dr\,d\theta\,dz}_{dV}, \quad \boxed{dV = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2+y^2)\,dm, \quad \begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

για ημικύκλιο $\theta \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow I_{zz} = \int_V r^2 \rho r\,dr\,d\theta\,dz = \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 \rho\,dr\,d\theta\,dz$$

Για να καλύψω τον χώρο του κυλίνδρου : $r \in [0, R]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$z \in [-L/2, L/2]$.

$$\Rightarrow I_{zz} = \rho \underbrace{\int_0^R r^3\,dr}_{\frac{R^4}{4}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} dz}_{L} \Rightarrow$$

πρόβλημα αν $\rho = \rho(r,\theta,z)$

πχ: $\rho = \cos(r\theta)$.

Αν $\rho = r^2\cos\theta \cdot e^z$: δεν ∃ πρόβλημα.

$$\Rightarrow I_{zz} = \rho\,\frac{R^4 \pi L}{2}.$$

ρ = σταθερό : κύλινδρος ομογενές σώμα

Το γράφουμε ως προς μάζα.

$m = \rho V = \rho \pi R^2 L$

Επομένως: $I_{zz} = \dfrac{\rho R^4 \pi L}{2} = \underbrace{\rho \pi R^2 L}_{m} \dfrac{R^2}{2} \rightarrow \boxed{I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2}$.

— $I_{xx} = \int_V (y^2+z^2)\, dm = \int_V y^2\, dm + \int_V z^2\, dm$

○ $\int_V z^2\, dm = \int z^2 \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz = \rho \underbrace{\int_0^R r\, dr}_{\frac{R^2}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} z^2\, dz}_{\left.\frac{z^3}{3}\right|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3}} =$

$= \rho \dfrac{R^2}{2} 2\pi \left[\dfrac{(L/2)^3}{3} - \dfrac{(-L/2)^3}{3}\right] =$

$= \rho \dfrac{R^2}{2} 2\pi \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{L}{2}\right)^3 = \rho R^2 \pi \dfrac{L^3}{12}$

$m = \rho \pi R^2 L$

$\Big\} = m \dfrac{L^2}{12}$.

○ $\int_V y^2\, dm = \int (r\sin\theta)^2 \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz = \rho \underbrace{\int_0^R r^3\, dr}_{R^4/4} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} dz}_{L}$

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} \rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta =$

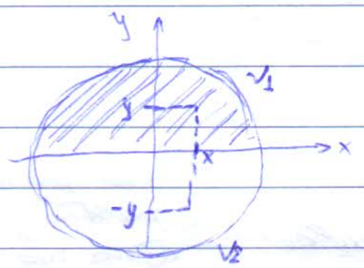
$= \int_0^{2\pi} \dfrac{1}{2} d\theta - \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta = \dfrac{2\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\underbrace{\left.\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{2\pi}}_{0} = \pi$

Άρα $\int y^2\, dm = \rho \dfrac{R^4}{4} \pi L = m \dfrac{R^2}{4}$

Οπότε $\boxed{I_{xx} = m\dfrac{R^2}{4} + m\dfrac{L^2}{12}}$ ~~$= \left(3m\frac{R^2}{12} + m\frac{L^2}{12}\right) = \frac{4mR^2}{12} = \frac{mR^2}{3}$~~

— Από συμμετρία περιμένω πως και $\boxed{I_{yy} = m\dfrac{R^2}{4} + m\dfrac{L^2}{12}}$.

$$I_{xy} = -\int_V xy\,dm = -\int_{V_1} xy\,dm - \int_{V_2} xy\,dm =$$



$$= -\int_{V_1} xy\,dm - \int_{V_2} x(-y)\,dm = 0.$$

από συμμετρία

Άρα $I_{xy} = 0$, λόγω συμμετρίας.

Παρομοίως: $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Λόγω συμμετρίας.

Οπότε: Για τον κύλινδρο: $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mL^2$

$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Άρα I: διαγώνιος: $I = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + m\frac{L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + m\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$

$$I = m\begin{bmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}.$$

– Ράβδος: κύλινδρος $R \ll L$.

$$I = mL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\sim mL^2 \begin{bmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{R}{L}\right)^2}_{\simeq 0} \end{bmatrix}$$

<u>Άρα</u> $\Rightarrow$ $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}mL^2$, $I_{zz} = 0$, για ράβδο. → ως προς το κέντρο βάρους της ράβδου, x, y : κάθετα στον άξονα της ράβδου.

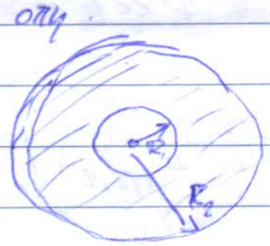
— Δίσκος : $L \ll R \Rightarrow \frac{L}{R} \ll 1$.

$$I = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{L}{R^2}\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}+\frac{L}{R^2}\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \simeq mR^2 \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

Άρα: $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mR^2$ (δεν έχουμε εξάρτηση από το πάχος του δίσκου).
$I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$, για δίσκο.

— Κύλινδρος με οπή.

Έχει διατομή: 

$V = V_2 - V_1$ — όγκος κυλίνδρου με ακτίνα R_1.

όγκος κυλίνδρου με ακτίνα R_2

$$I_{xx} = \int_V (y^2+z^2)\,dm = \int_{V_2-V_1} (y^2+z^2)\,dm = \int_{V_2} (y^2+z^2)\,dm - \int_{V_1} (y^2+z^2)\,dm =$$

$$= (I_{xx})_2 - (I_{xx})_1 .$$

Γενικεύω : εαν $V = \Sigma \pm V_i \rightarrow I = \Sigma \pm (I)_i$

V_i θετικά ή αρνητικά.

$$I_{xx} = (I_{xx})_2 - (I_{xx})_1 = \frac{1}{4} m_2 R_2^2 + m_2 \frac{L^2}{12} - \left(\frac{1}{4} m_1 R_1^2 + m_1 \frac{L^2}{12}\right)$$

η μάζα του γεμάτου κυλίνδρου

$L_1 = L_2 = L$

$m = m_2 - m_1$

$$I_{xx} = \underbrace{\frac{1}{4} m_2 R_2^2 - \frac{1}{4} m_1 R_1^2}_{\frac{1}{4} m (R_1^2 + R_2^2)^*} + \underbrace{\frac{m_2 L^2}{12} - \frac{m_1 L^2}{12}}_{(m_2 - m_1)\frac{L^2}{12} = m\frac{L^2}{12}}$$

$$\boxed{\boxed{I_{xx} = \frac{1}{4} m (R_1^2 + R_2^2) + m \frac{L^2}{12}} = I_{yy}}$$

Παρομοίως $I_{zz} = \checkmark$ Βιβλίο

$= \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$.

(*) Απόδειξη : $m_2 = \rho \pi R_2^2 L$, $m_1 = \rho \pi R_1^2 L$, $m = m_2 - m_1$.

- Κέλυφος : κύλινδρος με οπή $\rightarrow R_2 - R_1 = t \rightarrow$ πάχος κελύφους. μικρό πάχος

$t << R_1$ ή R_2

$$I_{xx} = \frac{1}{2} m R^2 + m \frac{L^2}{12}$$

μέσο ~~πάχος~~ ακτίνα

$R = \frac{R_1 + R_2}{2} \approx R_1 \approx R_2$

$I_{zz} = m R^2$, για το κέλυφος

- Δακτύλιος : κέλυφος με $L << R$.

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} m R^2$

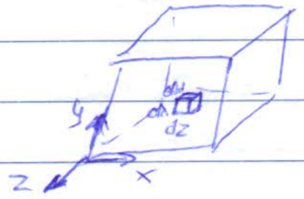
$I_{zz} = m R^2$

~

$\boxed{\text{Σφαίρα}}$

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \dots$

Άσκηση: Να βρεθούν τα I_{xx} I_{yy} I_{zz}



$dm = \rho\, dx dy dz$, ολοκλήρωμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Πέμπτη $6^{00}-8^{00}$

Εξισώσεις Euler.

$\underset{\sim}{F} = m \underset{\sim}{a}_G$

$\underset{\sim}{M} = \dots$

$M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) + I_{xz}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) + (I_{zz}-I_{yy})\omega_z\omega_y +$

$+ I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2)$.

$M_y = \dots$

$M_z = \dots$

Κύλινδρος: $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \Rightarrow f$ = κύριο σύστημα συντεταγμένων.

Για ένα κύριο σύστημα f ο 2ος Νόμος Euler:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_z\omega_y \\ M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x \\ M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y \end{aligned}\right\}$$

Εξισώσεις Euler, για κύριο σύστημα f $\boxed{I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0}$

↳ Μη γραμμικές ΔΕ.

Ειδική Περίπτωση Κίνησης : Επίπεδη Κίνηση

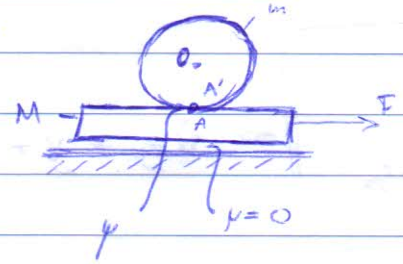
$z \perp$ επίπεδο κίνησης του f.

$\underset{\sim}{\omega} = \omega_x \underset{\sim}{e}_x + \omega_y \underset{\sim}{e}_y + \omega_z \underset{\sim}{e}_z$

$\underset{\sim}{\omega} = \omega\, \underset{\sim}{e}_z$

(κυλινδρος) 18/12/2012

Άσκηση 1η

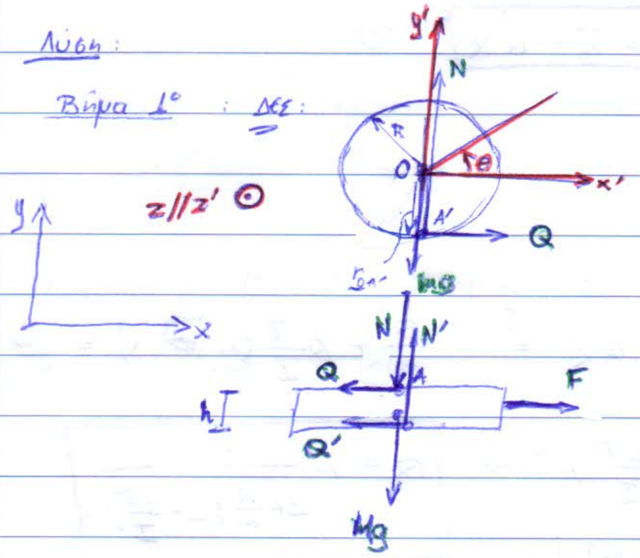


Ζητείται: η μέγιστη δύναμη F για την οποία ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει

κυλιση χωρις ολίσθηση : $\boxed{Q \leq \mu N}$ => $F \leq \ldots$

Λύση:

Βήμα 1ο : ΔΕΣ:



- Γενική Επίπεδη Κίνηση -

- Μεταφορική Κίνηση -

$Q' = 0$, αφού $\mu = 0$.

Βήμα 2ο : Συστημα συντεταγμένων - Εξισώσεις Κίνησης.

Κύλινδρος: $F_x = m a_x$, $F_y = m a_y$, $M_{z'} = I \alpha$ =>

Πλάκα: (Μεταφορική κίνηση) $\ddot{x}_A$

$F_x = m a_x \Rightarrow F - Q = M \ddot{x}_A$ (1)

$F_y = m a_y \Rightarrow N' - Mg - N = M\ddot{y}_A$ (2), $\ddot{y}_A = 0$

$M_z = I\alpha \Rightarrow \alpha = 0$

όλες οι ροπές περνουν απ' το ίδιο σημείο ($h \approx 0$).

$$\Rightarrow \begin{cases} Q = m\ddot{x}_0 & (3) \\ N - mg = m\ddot{y}_0 \Rightarrow \boxed{N - mg = 0} \; (4) \Rightarrow N = mg \\ +Q R = I\alpha & (5) \end{cases}$$

$\ddot{y}_0 = 0$, $I_z = \frac{1}{2} m R^2$

↙ ως προς το συστημα που ειναι κολλημενο στο σωμα.

(2) $\Rightarrow \boxed{N' = Mg + N} = (m + M) g$

5 εξισώσεις με 6 αγνώστους : $Q, \ddot{x}_0, \alpha, N, \ddot{x}_A, N'$ (και F → (7))

Βήμα 3ο : Κινηματικός Περιορισμός.

Χωρίς ολίσθηση $\Rightarrow \underset{\sim}{v}_A = \underset{\sim}{v}_{A'}$

Μεταφορική κίνηση. $\underset{\sim}{v}_A = \dot{x}_A \underset{\sim}{e}_x$

Γενική χωρική κίνηση $\underset{\sim}{v}_{A'} = \underset{\sim}{v}_0 + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{0A'}$

(το μαύρο κοινό ανάμεσα στα 2 σώματα είναι οι ταχύτητες)

$\Rightarrow \dot{x}_A \underset{\sim}{e}_x = \underset{\sim}{v}_0 + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{0A'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}_A \underset{\sim}{e}_x = \dot{x}_0 \underset{\sim}{e}_x + (\omega \underset{\sim}{e}_z) \times (-R \underset{\sim}{e}_y) \Rightarrow \dot{x}_A \underset{\sim}{e}_x = \dot{x}_0 \underset{\sim}{e}_x - \omega R \underset{\sim}{e}_x \Rightarrow \boxed{\dot{x}_A = \dot{x}_0 + \omega R}$

Παραγωγίζοντας $\Rightarrow \ddot{x}_A = \ddot{x}_0 + \dot{\omega} R \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_A = \ddot{x}_0 + \alpha R}$ (6)

Βήμα 4ο : Επίλυση

$(5) \Rightarrow \alpha = Q\frac{R}{I}$

$(3),(6) \Rightarrow \ddot{x}_A = \frac{Q}{m} + \alpha R \overset{(5)}{=} \frac{Q}{m} + Q\frac{R}{I}R \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_A = \frac{Q}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}$

$(1) \Rightarrow F - Q = M\left(\frac{Q}{m}\right)\left(1+\frac{mR^2}{I}\right) \Rightarrow \boxed{Q = F\frac{1}{1+\frac{M}{m}\left(1+\frac{MR^2}{I}\right)}}$

(2 για κύλινδρο)

Άρα : $\ddot{x}_A = \frac{F}{m}\frac{\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}{\left(1+\frac{M}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)\right)}$

$(3) \Rightarrow \ddot{x}_0 = \frac{Q}{m} \Rightarrow \ddot{x}_0 = \frac{F}{m}\frac{1}{1+\frac{M}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}$ → ολοκληρώνοντας : ταχύτητα θέση.

$(5) \Rightarrow \alpha = \frac{QR}{I} \Rightarrow \alpha = \frac{FR}{I}\frac{1}{1+\frac{M}{m}\left(1+\frac{MR^2}{I}\right)}$ → ολοκληρώνοντας : γωνιακή ταχύτητα προσανατολισμό

$(4) \Rightarrow N = mg$

$(2) \Rightarrow N' = mg + Mg = (m+M)g$

Πεμπτη 6-8

Κυλινδρος δεν ολισθαίνει:

$$Q \leq \mu N \rightarrow F \frac{1}{1+\frac{M}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)} \leq \mu \cdot mg \rightarrow \boxed{F \leq \mu mg\left[1+\frac{M}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)\right]}$$

λόγω μαζών

χαρακτηριστικό σώματος που περιστρέφεται.

Άρα: $F_{MAX} = \mu m g \left[1+\frac{M}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)\right]$

2. Να βρεθούν οι ποσότητες: $Q, \ddot{x}_1, \alpha, N, \ddot{x}_A$, όταν F (γνωστή) $> F_{MAX}$

Βήμα 3°: Κινηματικοί περιορισμοί → Αλλάζουν $v_A \neq v_{A'}$ (ολισθαίνει)

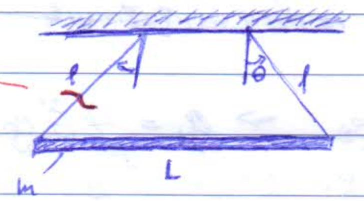
Νέα εξίσωση: $Q = \mu N$ (6)'

Άρα οι (1) - (5), (6)' Αποτελούν σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους $Q, \ddot{x}_1, \alpha, N, \ddot{x}_A, N'$.

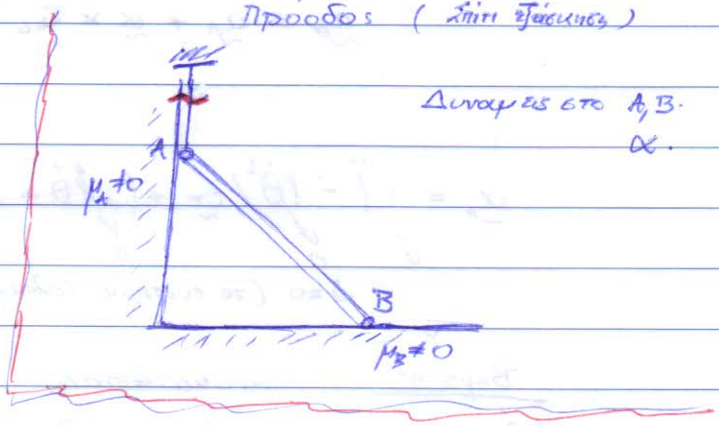
$\boxed{H/W}$

~

Άσκηση 2η

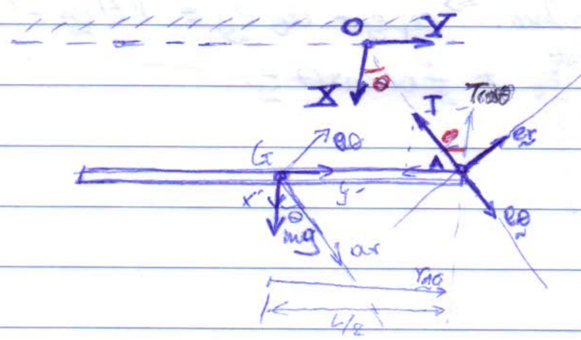


Πρόοδος (σπίτι εξάσκηση) HW



Δυνάμεις στο A, B.
α.

Βήμα 1°: ΔΕΣ



Γενική Επίπεδη Κίνηση

$r_{AG} = \frac{L}{2}(-\sin\theta\, e_r - \cos\theta\, e_\theta)$

Σημείο A ⇝ Κυκλική Κίνηση.

Βήμα 2° — Εξισώσεις Κινήσεως - Συστήμα Συντεταγμένων | 2° Νόμος Euler : ΣΣ καρφωμένο στο ΚΒ (G). $c f'$

$$F_r = m\, a_r \quad (1)$$
$$F_\theta = m\, a_\theta \quad (2)$$
Για το σώμα

a_r, a_θ : επιταχύνσεις του ΚΒ του σώματος στιγμιαία στην κατεύθυνση r και θ.

f' : ΣΣ με κέντρο το κέντρο βάρους, καρφωμένο πάνω στο σώμα.

$$M_{z'} = I_{z'}\,\alpha \quad (3)$$

Για ράβδο $I = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \approx 0 \end{bmatrix}$ → άξονας z: άξονας της ράβδου

$I_{z'} = \dfrac{mL^2}{12}$ αφού z' : άξονας κάθετος στον άξονα της ράβδου

$(1) \Rightarrow -T + mg\cos\theta = m\,a_r \quad (1)$

$(2) \Rightarrow -mg\sin\theta = m a_\theta \quad (2)$

$(3) \Rightarrow +T\cos\theta \frac{L}{2} = \frac{mL^2}{12}\,\alpha$

SOS : εύρεση ροπής αδράνειας σε σύνθετα σώματα.

θέλουμε να σχετίσουμε αυτά.

↳ 3 εξισώσεις - 4 άγνωστους : T, a_r, a_θ, α.

Βήμα 3° Κινηματικός Περιορισμός (Γενική Επίπεδη Κίνηση της Ράβδου)

$$\underset{\sim}{a_G} = \underset{\sim}{a_A} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{AG}} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{AG}} \quad (*)$$
→ (Διανυσματική εξίσωση) (2 εξισώσεις)

$\omega = 0$: τη θέση του ξεκινάμε

$$\underset{\sim}{a_A} = (\ddot{l} - l\dot{\theta}^2)\,\underset{\sim}{e_r} + (2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta})\,\underset{\sim}{e_\theta} \Rightarrow \underset{\sim}{a_A} = l\ddot{\theta}\,\underset{\sim}{e_\theta}$$

ή $\underset{\sim}{a_A} = \alpha \times r_{OA} - \omega^2 r_{OA}$

(εισάγεται μια επιπλέον άγνωστη η $\ddot{\theta}$!)

$\dot{\theta} = 0$ (το σύστημα (ολόκληρο) ξεκινά από ηρεμία).

Βήμα 4° Αντικατάσταση

Επιλέγω σύστημα συντεταγμένων το πολικό. $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $a_r \underset{\sim}{e_r} + a_\theta \underset{\sim}{e_\theta} = l\ddot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta} + (\alpha\, \underset{\sim}{e_z}) \times \left[\frac{L}{2}(-\sin\theta\, \underset{\sim}{e_r} - \cos\theta\, \underset{\sim}{e_\theta})\right]$

$\Rightarrow a_r \underset{\sim}{e_r} + a_\theta \underset{\sim}{e_\theta} = l\ddot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta} - \frac{L}{2}\alpha \sin\theta\, \underset{\sim}{e_\theta} + \frac{L}{2}\alpha\cos\theta\, \underset{\sim}{e_r}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_r &= \frac{L}{2}\alpha\cos\theta \quad (4) \\ a_\theta &= l\ddot{\theta} - \frac{L}{2}\alpha\sin\theta \quad (5) \end{aligned}}$$

$(3) \xrightarrow{\text{λυνω ως προς } \alpha} \quad T = \frac{mL^2}{12\cos\theta}\,\frac{2}{L}\,\alpha$

$(3),(4) \longrightarrow (1) \Rightarrow \boxed{-\frac{mL^2}{12\cos\theta}\,\frac{2}{L}\,\alpha + mg\cos\theta = m\frac{L}{2}\,\alpha\cos\theta}$

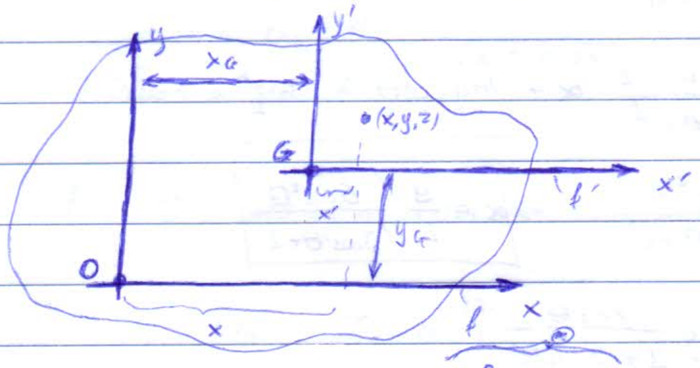
$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{6g\cos^2\theta}{L(3\cos^2\theta+1)} \quad \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{g}{L}\,\frac{(6\cos^2\theta)}{(3\cos^2\theta+1)}}$

$(3) \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{T = mg\,\frac{\cos\theta}{1+3\cos^2\theta}}$

$(1) \xrightarrow{T} a_r.$

20/12/2012

Νόμος Steiner (Ροπές Αδράνειας)



ℓ' κεντροβαρικό σύστημα

ℓ οποιοδήποτε άλλο

ℓ // ℓ'

$\sqrt{z_G^2+y_G^2}$: η απόσταση των 2 αξόνων.

y_G η απόσταση των αξόνων στην κατεύθυνση

z_G —— " —— z.

$$I_{xx} = I_{x'x'} + m\overbrace{(z_G^2 + y_G^2)}^{*}$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + m\overbrace{(x_G^2 + z_G^2)}^{**}$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + m(x_G^2 + y_G^2)$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} - m x_G y_G$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} - m y_G z_G$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} - m z_G x_G$$

(*) απόσταση μεταξύ των (παράλληλων) αξόνων x, x' (στο τετράγωνο).

(**) απόσταση y, y'.

$$I_{xx} = \int_V (y^2+z^2)\,dm = \int_V [(y'+y_G)^2+(z'+z_G)^2]\,dm = \int_V (y'^2+2y'y_G+y_G^2)+(z'^2+2z'z_G+z_G^2)\,dm$$

$x = x' + x_G$

$y = y' + y_G$

$z = z' + z_G$

$$= \underbrace{\int_V (y'^2+z'^2)\,dm}_{I_{x'x'}} + \underbrace{\int_V (y_G^2+z_G^2)\,dm}_{(y_G^2+z_G^2)m} + \underbrace{2\int_V (y_G y' + z_G z')\,dm}_{2y_G\underbrace{\int y'\,dm}_{y_{G/\ell'}m \,=\, 0} + 2z_G\underbrace{\int_V z'\,dm}_{=0}}$$

$$= I_{x'x'} + m(y_G^2 + z_G^2)$$

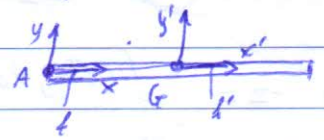
Και ομοίως για I_{zz}, I_{yy}

$$I_{xy} = -\int_V xy\,dm = -\int_V (x'+x_G)(y'+y_G)\,dm = -\int_V (x'y' + x'y_G + y'x_G + x_G y_G)\,dm =$$

$$= \underbrace{-\int_V x'y'\,dm}_{I_{x'y'}} - \underbrace{\int x_G y_G\,dm}_{x_G y_G m} - \underbrace{y_G\int x'\,dm}_{0} - \underbrace{x_G\int y'\,dm}_{0} = I_{x'y'} - m x_G y_G.$$

Και ομοίως για I_{yz}, I_{zx}.

Εφαρμογή: Ράβδος (Ομογενής)



ℓ': $Gx'y'$: κεντροβαρικό σύστημα

$$I_{zz} = I_{z'z'} + m(x_G^2 + y_G^2) = I_{z'z'} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

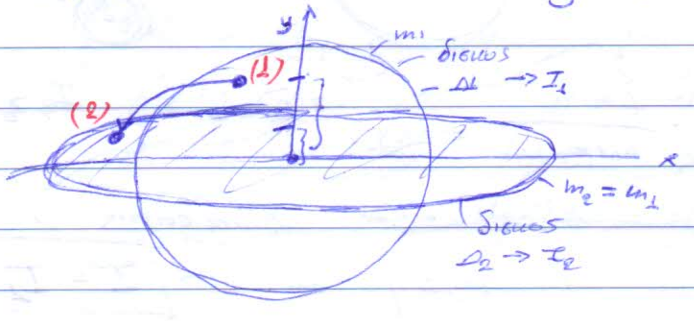
$x_G = \frac{L}{2}$, $y_G = 0$

Όμως: $I_{z'z'} = \frac{mL^2}{12}$

Άρα $I_{zz} = \frac{mL^2}{12} + \frac{3mL^2}{12} = \frac{mL^2}{3}$ → $\boxed{I_{zz} = \frac{mL^2}{3}}$ για ομογενή ράβδο.

Όταν δεν είναι ομογενής → Τελικό Διαγώνισμα !!! SOS

Παρατηρώ ότι: $I_{zz} = \frac{mL^2}{3} > \frac{mL^2}{12} = I_{z'z'}$ → Το I ως προς μη κεντροβαρικό άξονα είναι μεγαλύτερο.



Δίσκος: πολύ μικρό πάχος → z≈0

$I_x = \int (y^2 + z^2)\,dm$ → $I_x = \int y^2\,dm$ ($z = 0$)

$I_{2,x} < I_{1,x}$ πιο μακριά απ' τον άξονα → μεγαλύτερο z.

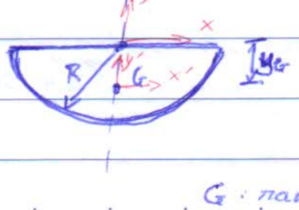
Ομοίως: $I_{2,y} > I_{1,y}$ και $I_{2,z} \overset{?}{} I_{1,z}$

↳ αφού $I_z = \int (x^2 + y^2)\,dm$, ποιοτικά δεν μπορούμε να πούμε κάτι.

Ροπή Αδράνειας για σύνθετο σώμα

- Εφαρμογή: Δίσκος Ημικυκλικός [Η/ω]

Σπίτι



Ζητείται: ροπή αδράνειας ως προς κεντροβαρικό άξονα z', κάθετο στο επίπεδο του δίσκου.

G: πάνω στον άξονα συμμετρίας.

$$y_G = \frac{\int y\,dm}{\int_m dm} = \ ?$$ πολικό σύστημα = . . σπίτι

$$I_{zz} = I_{z'z'} + m(\underbrace{x_G^2}_{0} + y_G^2)$$

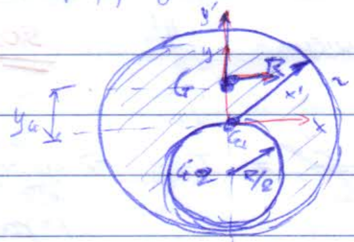
$I_{z'z'} = \int (x'^2 + y'^2)\,dm$ → Δεν βολεύει

$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,dm$ = πολικές συντ = . . .

Και βρίσκουμε το $I_{z'z'}$

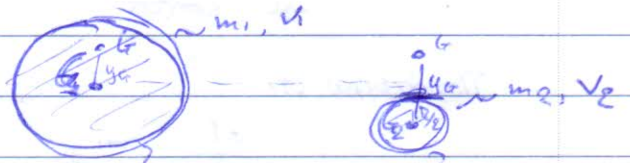
(ημιν)

Εφαρμογή 2



$I_{z'z'} = \ ?$

$m = \rho V$.



$I_{1,z} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$

$I_{2,z_2} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2$

$m = m_1 + m_2$

$V = V_1 - V_2$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_{G_i}}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 - m_2}.$$

1, 2, 3, . . . σώματα $V_1, V_2, V_3, \dots$ σαν να είναι υλικά σημεία

$$I = \int_V \dots dm = \int_{V_1 - V_2} \dots dm = \int_{V_1} \dots dm - \int_{V_2} \dots dm \to \boxed{I = I_1 - I_2}$$

Σώμα V_1: $I_G^{(1)} = I_{G_1}^{(1)} + m_1(x_G^2 + y_G^2) = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 y_G^2$

Ροπή Αδρ. του σωμ 1 ως προς το G

Σώμα V_2: $I_G^{(2)} = I_{G_2}^{(2)} + m_2\left[\underbrace{x_G^2}_{0} + \left(y_G + \frac{R}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 + m_2\left(y_G + \frac{R}{2}\right)^2$

$I_G = I_G^{(1)} - I_G^{(2)} = \dots = \dots = \frac{1}{2} m L^2$ ~ ποσότητα μήκους εξαρτώμ. από το R

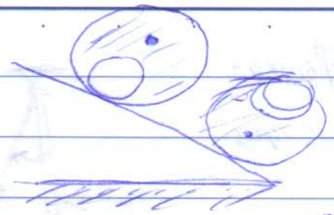
m_1 m_2

συνολική μάζα

κάτι τέτοιο

→ ίδιες εξισώσεις, αλλάζει η μαζική ροπή αδράνειας I.

(HW)



Το κεντρο βαρους δεν κανει ευθυγραμμη κινηση

~ ~ ~

4° θέμα: Σύνθετο σώμα - Και εξισώσεις κίνησης.

~ ~ ~

Αρχές Ωσης - Ορμής

?
$\hat{\underset{\sim}{F}} = \Delta \underset{\sim}{L}$

$\hat{\underset{\sim}{F}} = \underset{\sim}{0} \rightarrow \underset{\sim}{L}(t_1) = \underset{\sim}{L}(t_2)$ Αρχη Διατηρησης της Ορμης.

$\hat{F}_x = 0 \rightarrow L_x(t_1) = L_x(t_2)$ ΑΔΟ στην κατευθυνση x (ανα κατευθυνση)

Αρχές Στροφικής Ωσης - Στροφορμής

$\hat{\underset{\sim}{M}}_P = \Delta \underset{\sim}{H}_P$ για ακινητο P

$\hat{\underset{\sim}{M}}_G = \Delta \underset{\sim}{H}_G$ αν $P \equiv G$. (μπορεί να είναι κινούμενο G)

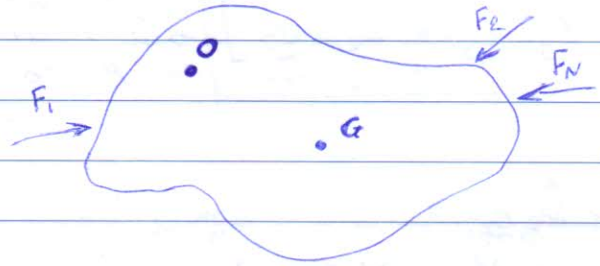
εαν $\hat{\underset{\sim}{M}}_P = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{H}_P(t_1) = \underset{\sim}{H}_P(t_2)$ (Ακινητο P)

$\hat{\underset{\sim}{M}}_G = \underset{\sim}{0} \rightarrow \underset{\sim}{H}_G(t_1) = \underset{\sim}{H}_G(t_2)$

Για κάθε χρονική στιγμή, όχι στιγμιαία.

~

Ειδικη Περιπτωση Κινησης: Περιστροφη γυρω απο ακινητο σημειο O.



~~$M_O = \Delta H_O$, προς $H_G = ...$~~

$\underset{\sim}{M}_O = \dot{\underset{\sim}{H}}_O$ (αφου O: ακινητο)

$\underset{\sim}{H}_O = \overline{\underset{\sim}{H}_O}$

Θα βγαλουν τις ιδιες σχεσεις Euler

$\underset{\sim}{M}_G = \dot{\underset{\sim}{H}}_G$

$\underset{\sim}{H}_G = \overline{\underset{\sim}{H}_G}$

εξισωσεις Euler

ιδια δομη

Για πιο ευκολα

Σύστημα Κεντροβαρικό - Κύριο : $M_x = I^G_{xx}\dot{\omega}_x + (I^G_{zz} - I^G_{yy})\omega_y\omega_z$ ως προς αξονα που περνάει απ' το κβ (G).

$M_y = \ldots$

$M_z = \ldots$

και $M_x = I^O_{xx}\dot{\omega}_x + (I^O_{zz} - I^O_{yy})\omega_y\omega_z$ (ως προς αξονα που περνάει απ' το O)

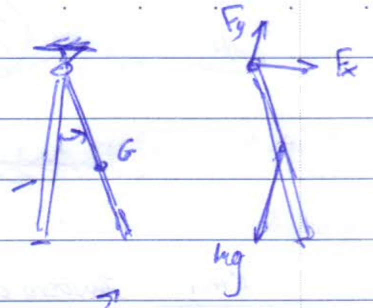
$M_y = \ldots$

$M_z = \ldots$

→ Ιδιες εξισωσεις

Άρα μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Euler ως προς το O και όχι ως προς το G.

$I^{(o)}$ και όχι ως προς G.



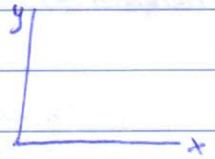
ως προς G : 2 επιπλεόν άγνωστοι.

~

- Test 5 ώρες για τα χριστούγεννα. 21/12/2012

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_o = \Delta \underset{\sim}{H}_o \\ \text{όμως} \\ \underset{\sim}{H}_o = I \underset{\sim}{\omega}\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\sim}{\hat{M}}_o = \Delta(\underset{3\times3}{I}\underset{\sim}{\omega})$$

Ειδική περίπτωση : Επίπεδη Κίνηση



$\underset{\sim}{\omega} = \omega \underset{\sim}{e_z}$

z ⊥ επίπεδο κίνησης

$\underset{\sim}{\hat{M}}_G = \Delta \underset{\sim}{H}_G$ (1)

$\underset{\sim}{H}_G = \underset{3\times3}{I_G} \underset{\sim}{\omega} \xrightarrow[\omega_x=\omega_y=0]{\omega=\omega e_z} \underset{\sim}{H}_G = I_{xy}\,\omega\,\underset{\sim}{e_x} + I_{yz}\,\omega\,\underset{\sim}{e_y} + I_{zz}\,\omega\,\underset{\sim}{e_z}$

$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{H}_G = \omega\left[I_{xz}\underset{\sim}{e_x} + I_{yz}\underset{\sim}{e_y} + I_{zz}\underset{\sim}{e_z}\right]}$ → δεν είναι συγγραμμικό με το $\underset{\sim}{\omega}$.

$\underset{\sim}{\hat{M}}_G = \hat{M}_x \underset{\sim}{e_x} + \hat{M}_y \underset{\sim}{e_y} + \hat{M}_z \underset{\sim}{e_z}$

(1) Σε μορφή συνιστωσών :
$$\left\{\begin{array}{l}\hat{M}_x = \Delta(I_{xy}\omega) \\ \hat{M}_y = \Delta(I_{xz}\omega) \\ \hat{M}_z = \Delta(I_{zz}\omega)\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \hat{M}_z = I_{zz}(t_2)\,\omega(t_2) - I_{zz}(t_1)\,\omega(t_1)$

$\hat{M}_z = \int_{t_1}^{t_2} M_z(t)\,dt$

προσδιορίζει τις στροφικές ωθήσεις που αναπτύσσονται στα σημεία στήριξης και υποστηρίζουν την επίπεδη κίνηση του σώματος.

καθορίζει αλλαγές στην γωνιακή ταχύτητα $\underset{\sim}{\omega}$ του στερεού σώματος.

Εαν $I_{xy} = I_{xz} = 0$ (το συστημα αναφορας ειναι κυριο συστημα)
(I = διαγώνιος)

$\hat{M}_x = \hat{M}_y = 0$

$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{H}_G = I_{zz}\,\omega\,\underset{\sim}{e}_z \\ \underset{\sim}{\omega} = \omega\,\underset{\sim}{e}_z \end{array}\right\}$ $\underset{\sim}{H}_G$ ειναι συγγραμμικο με το $\underset{\sim}{\omega}$

Εφαρμογή: Περιστροφή σώματος γύρω από άξονα z

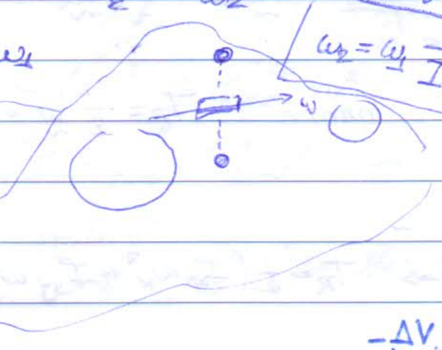
Εστω $M_z(t) = 0$

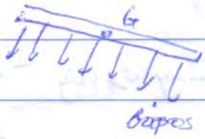
$\Delta(I_{zz}\,\omega) = 0 \Rightarrow \underbrace{I_{zz}(t_1)}_{I_1} \cdot \underbrace{\omega(t_1)}_{\omega_1} = \underbrace{I_{zz}(t_2)}_{I_2}\,\underbrace{\omega(t_2)}_{\omega_2} \Rightarrow \boxed{I_1\omega_1 = I_2\omega_2}$

$\boxed{\omega_2 = \omega_1 \dfrac{I_1}{I_2}}$

Παρατηρω οτι εαν: $I_1 > I_2 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$

φπαλαρίνα: απλωσει / μαζευει - χερια-ποδια





$\underset{\sim}{M}_G = \underset{\sim}{0}$

Αρχές Έργου Ενέργειας

$W_{12} = \Delta T = T(t_2) - T(t_1)$

$W_{12} = \Delta T \Rightarrow W_{con} + W_{nc} = \Delta T$, $W_{con} = -\Delta V$

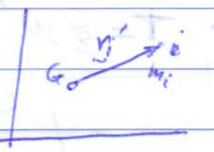
$W_{nc} = \Delta T + \Delta V = \Delta E$

- Ισχυει η Αρχη Διατηρησης Μηχανικης Ενεργειας εαν $W_{nc} = 0$.

$T = \underbrace{T_G}_{\text{μεταφοράς}} + \underbrace{T_R}_{\text{περιστροφής}}$

$T_G = \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} m \underset{\sim}{V}_G \cdot \underset{\sim}{V}_G \overset{\text{στερεο}}{=} \frac{1}{2} \underset{\sim}{V}_G \cdot \underbrace{(m \underset{\sim}{V}_G)}_{L} = \boxed{\frac{1}{2} \underset{\sim}{V}_G \cdot \underset{\sim}{L}}$ Χρησιμη μορφη

$T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underset{\sim}{r}}_i' \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i' \xrightarrow{\text{σωμα}} T_R = \frac{1}{2} \int \dot{\underset{\sim}{r}}' \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}'\, dm$



r': διανυσμα πανω στο σωμα.

$\dot{\underset{\sim}{r}}' = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}'$.

Οποτε: $T_R = \frac{1}{2} \int_V (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}') \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}'\, dm$.

Ταυτοτητα: $(\underset{\omega}{\underset{\parallel}{\mathbf{a}}}\times \underset{r'}{\underset{\parallel}{\mathbf{b}}})\cdot \underset{\dot{r}'}{\underset{\parallel}{\mathbf{c}}} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

σχετική στροφορμή ως προς G

$$T_R = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}'\times\dot{\mathbf{r}}')\,dm = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\underbrace{\int_V(\mathbf{r}'\times\dot{\mathbf{r}}')\,dm}_{\mathbf{H}_G \,=\, H_G} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{T_R = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_G}$: λόγω περιστροφής

$\boxed{T_G = \frac{1}{2}\mathbf{v}_G\cdot\mathbf{L}}$: λόγω μεταφοράς

Όμως: $\mathbf{H}_G = \underset{3\times3}{\mathbf{I}_G}\,\boldsymbol{\omega}$

οποτε: $T_R = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{I}_G\cdot\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\underset{\text{στήλη}}{\boldsymbol{\omega}^T}\,\underset{3\times3}{\mathbf{I}_G}\,\underset{\text{γραμμή}}{\boldsymbol{\omega}}$

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2) + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{xz}\omega_x\omega_z.$$

$Gxyz$: καρφωμένο πάνω στο σώμα (κινούμενο).

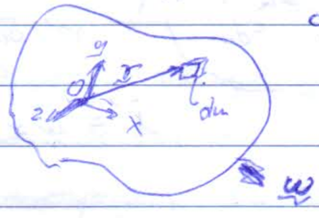
Κινητική ενέργεια στερεού σώματος:

$$T = T_G + T_R = \frac{1}{2}\mathbf{v}_G\cdot\mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_G.$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m v_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{I}_G\,\boldsymbol{\omega}}$$ ως προς G κέντρο βάρους

Ειδική Περίπτωση 1: Περιστροφή γύρω από σταθερό σημείο O.

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}\int_V \dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\,dm \\ \text{όμως: } \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{I}_O\,\boldsymbol{\omega}}$$ ως προς O.



$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O\,\boldsymbol{\omega}$

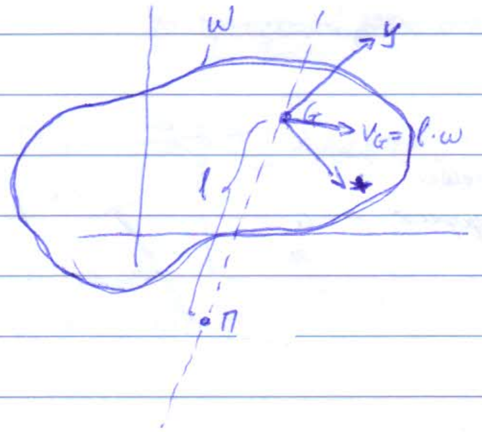
κινητική ενέργεια χωρίς να βρούμε ΚΒ ($T_G = 0$)

Ειδική Περίπτωση 2: Επίπεδη Κίνηση

$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$, $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z \neq 0$

οπότε $\left.\begin{array}{l} T_R = \frac{1}{2} I_{zz}^{(G)} \omega^2 \\ T_G = \frac{1}{2} m v_G^2 \end{array}\right\} \Rightarrow T = T_G + T_R = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{zz}^{(G)} \omega^2.$

~ ~ ~



Π: πόλος περιστροφής

$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{zz}^{(G)} \omega^2$ άξονας Z περνά από το G.

$= \frac{1}{2} m (l\omega)^2 + \frac{1}{2} I_{zz}^{(G)} \omega^2$

$= \frac{1}{2} \underbrace{\left[I_{zz}^{(G)} + m l^2 \right]}_{I_{z_\pi z_\pi}^{(\Pi)} = I_{zz}^{(\Pi)}} \omega^2 \Rightarrow$ (Από Steiner)

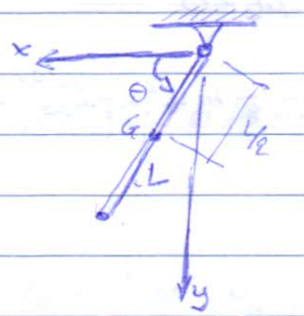
$\rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_{zz}^{(\Pi)} \omega^2}$

Περιστροφή σώματος γύρω από σταθερό άξονα Z που περνά από σταθερό σημείο O.

$\boxed{T = \frac{1}{2} I_{zz}^{O} \omega^2}$

(Δεν χρειάζεται να βρούμε την ταχύτητα του ΚΒ
— " — το ΚΒ)

Εφαρμογή 1   Ομογενής Ράβδος

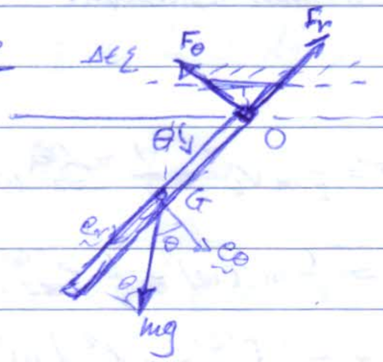


Ξεκινά από την ηρεμία από την οριζόντια θέση

Να βρεθούν: • $\omega(\theta)$ → (Ν όλες οι ταχύτητες).

• Αντιδράσεις στην άρθρωση

Βήμα 1ο   ΔΕΣ



Βήμα 2ο   Εξισώσεις Κίνησης - Πολικό.

$-F_r + mg\sin\theta = m a_r$ — G αναφέρεται στο ΚΒ. (1)

$-F_\theta + mg\cos\theta = m a_\theta$ — G (2)

$M_G = I_{zz}^G \alpha$ (Η/W)

$M_O = I_{zz}^O \alpha$ ⇝ βολεύει. (3) Δεν ισχύει για γενική κίνηση

Βήμα 3ο $a_r = -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 \overset{\dot{\theta}=\omega}{=} -\frac{L}{2}\omega^2$

ή

$$\underset{\sim}{a}_G = \underbrace{\underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r}_G}_{\alpha \underset{\sim}{e}_z \times \frac{L}{2}\underset{\sim}{e}_r = a\frac{L}{2}\underset{\sim}{e}_\theta} - \omega^2 \underset{\sim}{r}_G = \underbrace{\left(-\frac{L}{2}\omega^2\right)}_{a_r}\underset{\sim}{e}_r + \underbrace{\left(a\frac{L}{2}\right)}_{a_\theta}\underset{\sim}{e}_\theta.$$

$\underset{\sim}{r}_G \to \frac{L}{2}\underset{\sim}{e}_r$.

~~Βήμα 4ο~~ Άρα (1) → $-F_r + mg\sin\theta = -m\frac{L}{2}\omega^2$, $\omega = \dot{\theta}$ (1)

(2) → $-F_\theta + mg\cos\theta = m\frac{L}{2}\alpha$ (2)

(3) → $+mg\frac{L}{2}\cos\theta = \underbrace{I_{zz}^O}_{I_O}\,\dot{\omega}$, $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ (3)

3 εξισώσεις με 3 αγνώστους

↪ F_r, F_θ, ω.

Διαφορικές $\rightsquigarrow$ Εξίσωση απο Α.Δ.Μ.Ε.

Αρχη Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας:

Αυτή για την σχέση (3).

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (*)$$

, Θέση 1: Οριζόντια
Θέση 2: θ.

Κινητική Ενέργεια: $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{zz}^G \omega^2$

Για περιστροφή γύρω απο το Ο: $\boxed{T = \frac{1}{2} I_{zz}^O \omega^2}$

$T_1 = 0 \quad \omega_1 = 0$ (λόγω ηρεμίας)

$V_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} I_{zz}^O \omega^2$

$V_2 = - mg \frac{L}{2} \sin\theta$

Οπότε: $(*) \xrightarrow{\text{ή}(3)} 0 = \frac{1}{2} I_{zz}^O \omega^2 - mg\frac{L}{2}\sin\theta \quad (3).$

Βήμα 4°

$(3) \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{mgL}{I_o}\sin\theta} \; (*) \quad , \quad I_o = I_{zz}^O$

F_r: $(1) \Rightarrow F_r = mg\sin\theta + m\frac{L}{2}\omega^2 \Rightarrow F_r = mg\sin\theta + m\frac{L}{2}\frac{mgL}{I_o}\sin\theta \Rightarrow$

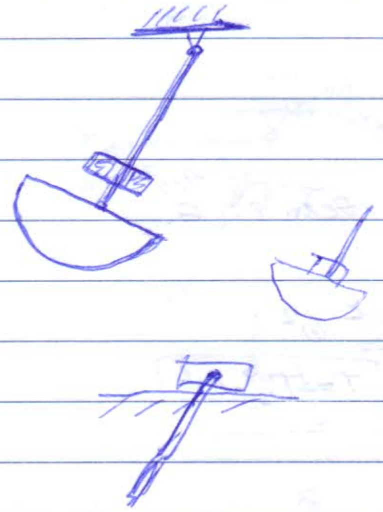
$\rightarrow \boxed{F_r = mg\sin\theta\Big[1 + \underbrace{\frac{mL^2}{2I_o}}_{\text{Εξαρτάται απο το σχήμα του σώματος. αδιάστατο.}}\Big]}$

$= \frac{mL^2}{2I_o} = \frac{2m\left(\frac{L}{2}\right)^2}{I_o}$ Απόσταση G από το Ο.

F_θ: $(*) \Rightarrow 2\omega\dot{\omega} = \frac{mgL}{I_o}\cos\theta\,\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega} \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \frac{mgL}{2I_o}\cos\theta}$

$(2) \Rightarrow F_\theta = mg\cos\theta - m\frac{L}{2}\dot{\omega} = mg\cos\theta - m\frac{L}{2}\frac{mgL}{2I_o}\cos\theta. \Rightarrow$

$\rightarrow F_\theta = mg\cos\theta\Big[1 - \underbrace{\frac{mL^2}{4I_o}}_{\frac{m(L/2)^2}{I_o}}\Big].$

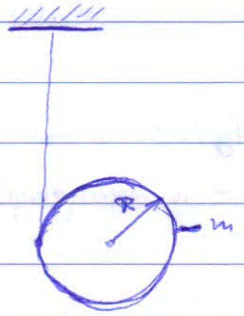


- Αντιδράσεις
- Αρχική γωνιακή ταχύτητα για να κάνει μια πλήρη περιστροφή
  και να μην φύγει ο δακτύλιος προς τα κάτω.

8/1/2013

Test → Παρασκευή

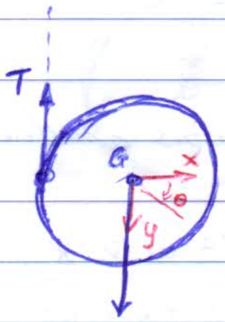
~ Εφαρμογή 1 ~



Ξεκινά από ηρεμία.

$v(t) = ?$

Βήμα 1°: ΔΕΣ



Βήμα 2°:

Εξισώσεις κίνησης (3).

Αρχή Έργου-Ενέργειας (1)

Αρχή Ώσης - Ορμής (3) $\xrightarrow{\text{εδώ}}$ (2) επειδή το προβλ. είναι επίπεδο

Αρχή Στροφικής Ώσης - Στροφορμής (1).

↳ οι γραμμικά ανεξάρτητες είναι 3.

Αρχή Ώσης - Ορμής

- $\hat{F}_x = \Delta L_x \Rightarrow 0 = L_x(t) - L_x(0) \rightarrow 0 = m v_x(t) - m \cdot \overset{0\,(\text{ηρεμία})}{\overbrace{v_x(0)}}$

$\rightarrow \boxed{v_x(t) = 0}$ ①

- $\hat{F}_y = \Delta L_y \Rightarrow \int_0^t mg\,dt - \underbrace{\int_0^t T_{(t)}\,dt}_{\hat{T}} = L_y(t) - L_y(0) \rightarrow$

$\rightarrow mgt - \hat{T} = m v_y(t) - m\,\overset{0}{\overbrace{v_y(t)}} \rightarrow \boxed{mgt - \hat{T} = m v_y(t)}$ ②.

Δηλ. Ισχύει $\boxed{mgt - \hat{T} = m v(t)}$

Αρχη στροφικης ωθησης - στροφορμής.

$\hat{\underset{\sim}{M}}_0 = \Delta \underset{\sim}{H}_0 + \ldots \rightarrow \boxed{\hat{\underset{\sim}{M}}_G = \Delta \underset{\sim}{H}_G} \xrightarrow{\text{ως προς άξονα z.}} \boxed{\hat{M}_G = \Delta H_G}$

z περναει απ' το ΚΒ.

$\hat{M} = \int M(t)\,dt$

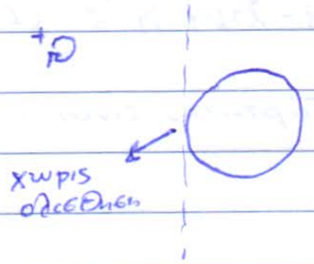
$\hat{M}_G = \Delta H_G \rightarrow \int_0^t TR\,dt = \underbrace{H_G(t)}_{I_G\omega} - H_G(0) \rightarrow R\overbrace{\int_0^t T(t)dt}^{\hat{T}} = I_G\,\omega(t) - I_G\,\underbrace{\omega(0)}_{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R\hat{T} = I_G\,\omega(t)}$ (3)

Αρα 2 εξισώσεις (2) & (3), με 3 αγνώστους $\hat{T}$, $V(t)$, $\omega(t)$.

Βημα 3: Κινηματικος Περιορισμός

Είναι σαν "δισκος" που κυλα σε επιπεδο χωρις ολισθηση.



$V_0 = 0 \rightarrow \boxed{V(t) = \omega(t)\cdot R.}$ (4)

(2),(3),(4). αποτελει συστημα με 3 εξ με 3 αγν. $\hat{T}$, $\omega(t)$, $v(t)$.

Βήμα 4: Επίλυση

$(3) \Rightarrow \hat{T} = \frac{I_G\,\omega(t)}{R}$

$(2) \rightarrow mgt - \frac{I_G\,\omega(t)}{R} = m\,v(t) \overset{(4)}{\Rightarrow} mgt - \frac{I_G\,v(t)}{R^2} = m\,v(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{1}{1+\frac{I_G}{mR^2}}\,g\,t.}$

Για δίσκο: $I_G = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{2}{3}g\,t}$

Extra: • Προσδιορισμός ώθησης $\hat{T}$:

$(2) \Rightarrow \hat{T} = mgt - mv(t) \Rightarrow \hat{T} = mgt - \frac{2}{3}mgt \Rightarrow \hat{T} = \frac{1}{3}mgt$

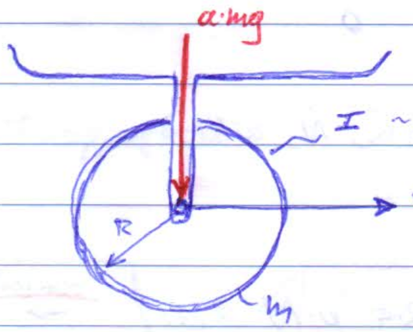
• Εύρεση T:

$\int T(t)dt = \hat{T}(t) \Rightarrow T(t) = \frac{d\hat{T}}{dt} \Rightarrow T(t) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{3}mgt) \Rightarrow T(t) = \frac{1}{3}mg$

(η δύναμη βγαίνει σταθερή)

~ Εφαρμογή 2 ~

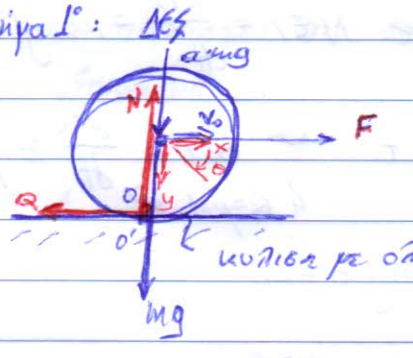
Τροχός αεροπλάνου αγγίζει το έδαφος με ταχύτητα v_0.



Θα απαιτειθεί κάποιος χρόνος για να γίνει $v_0 = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{R}$ κύλιση χωρίς ολίσθηση

Πόσο είναι αυτός ο χρόνος $t_1 = ?$ ολίσθησης.

Βήμα 1°: ΔΕΣ



F: δύναμη που ασκεί το αεροπλάνο στη ρόδα, στην οριζόντια κατεύθυνση.

κύλιση με ολίσθηση. $(Q = \mu N)$.

Υπάρχει σχετική κίνηση του O ως προς το O' (έχω ολίσθηση).

$v \neq \omega R$.

Βήμα 2ο:

- Αρχή ώθησης-ορμής:

$$\hat{F}_x = \Delta L_x \to \hat{F} - \hat{Q} = \overbrace{L_x(t)}^{mv_0} - \overbrace{L_x(0)}^{mv_0} \to \boxed{\hat{F} = \hat{Q}} \quad (1)$$

$$\hat{F}_y = \Delta L_y \to mgt + amgt - \hat{N} = \cancel{L_y(t)}_0 - \cancel{L_y(0)}_0 \to \boxed{\hat{N} = (a+1)mgt} \quad (2)$$

- Αρχή στροφικής ώθησης - στροφορμής

$$\hat{M}_G = \Delta H_G \to \int_0^t Q_{(t)} R \, dt = H_G(t) - H_G(0) \to$$

$$\to R \underbrace{\int_0^t Q(t)\,dt}_{\hat{Q}} = I_G \omega(t) - I_G \underbrace{\omega(0)}_{0} \to \boxed{R\hat{Q} = I_G\, \omega(t)} \quad (3)$$

3 εξ. με 4 αγνώστους $\hat{F}, \hat{Q}, \hat{N}, \omega(t)$.

Βήμα 3ο: Κινηματικός Περιορισμός

ολοκληρώνοντας!

Κύλιση με ολίσθηση: $Q = \mu N$ (4)

$$\to \boxed{\hat{Q} = \mu \hat{N}} \quad (4)$$

(αν και δεν το χρησιμοποιούμε)

Ουσιαστικά θέλω να βρω το $\omega(t)$. $\left(t = ? \,, \text{ ώστε } \omega = \frac{v_0}{R} \right)$ κύλιση χωρίς ολίσθηση $(t = t_1)$

Βήμα 4ο: Επίλυση

$$(2) \to \hat{N} = mg(a+1)t \to N(t) = \frac{d\hat{N}}{dt} = mg(a+1).$$

$$(4) \to \hat{Q} = \mu \hat{N} = \mu mg(a+1)t \to Q(t) = \frac{d\hat{Q}}{dt} = \mu mg(a+1).$$

ή $Q = \mu N \Rightarrow$

$$(1) \to \hat{F} = \hat{Q} \to F = Q = \mu mg(a+1).$$

$$(3) \to \omega(t) = \frac{R}{I_G}\hat{Q} \to \boxed{\omega(t) = \frac{R}{I_G}\mu mg(a+1)t.}$$

Χρόνος Ολίσθησης t_1:

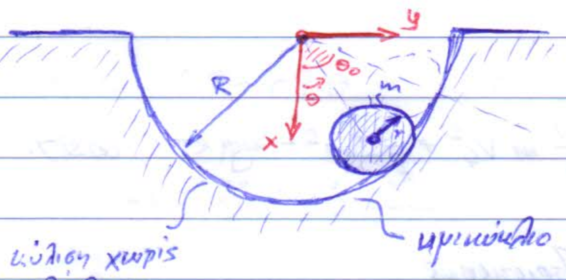
$\omega(t_1) = \frac{v_0}{R}$ → επίλυση ως προς t_1.

$$\frac{R}{I_G}\,\mu m g (a+1)\, t_1 = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{v_0}{g}\,\underbrace{\frac{I_G}{mR^2}}\,\frac{1}{(a+1)\mu}}$$

εξαρτάται απ' το σχήμα και την κατανομή μάζας στον τροχό.

Για $t > t_1$: έχω κύλιση χωρίς ολίσθηση. (αλλάζει η 4η εξίσωση)
↳ γίνεται $v_G = \omega R$.

~ Εφαρμογή 3 ~



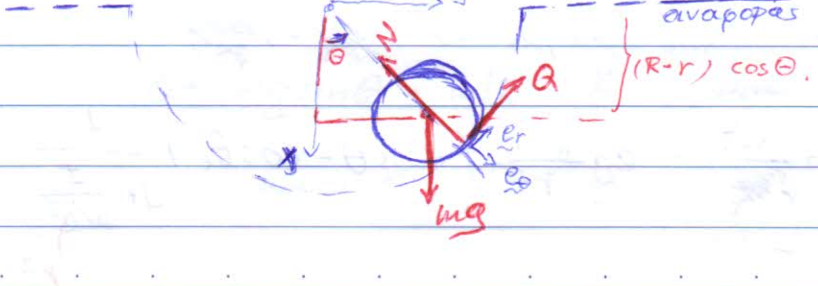
Αφήνουμε τη σφαίρα από θ_0.

Δίνεται για σφαίρα:
$I_G = \frac{2}{5} m r^2$.

Να βρείτε:

1. Ταχύτητα κέντρου βάρους σφαίρας συναρτήσει του θ.
2. Αντιδράσεις στο σημείο επαφής της σφαίρας με τη κυλινδρική επιφάνεια.

Βήμα 1 ΔΕΣ.



Βήμα 2°

Αρχή Εργου-Ενέργειας

∘ Συντηρητικές Δυνάμεις	Δυναμικό
mg	mgz.
∘ Μη συντηρητικές Δυνάμεις	Εργο
N	0 διότι $N \perp$ κίνηση
Q	$-\int Q ds = -\int Q \frac{ds}{dt} dt = -\int Q \underbrace{v}_{0} dt$

Για κύλιση χωρίς ολίσθηση

Οποτε $W_{nc} = 0$ → Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$$

Θεση 1 : θ_0 : $V_1 = -mg(R-r)\cos\theta_0$ | $T_1 = 0$

Θεση 2 : θ : $V_2 = -mg(R-r)\cos\theta$. | $T_2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$.

Αντικατάσταση στην (1)

$$-mg(R-r)\cos\theta_0 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 - mg(R-r)\cos\theta.$$

Βήμα 3 : Κινηματικός Περιορισμός

Κύλιση χωρίς ολίσθηση : $v_G = \omega \cancel{R}\, r$ (2) → $\omega_G^2 = \frac{v_G^2}{r^2}$

(1),(2) → $mg(R-r)(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I\left(\frac{v_G}{R}\right)^2$. →

$$\rightarrow v_G^2 = 2g(R-r)(\cos\theta - \cos\theta_0)\frac{1}{1+\frac{I}{m r^2}}$$

$I = \frac{2}{5} m r^2$, για σφαίρα → : $\cancel{\left(\omega^2 = \frac{v_G^2}{R^2}\right)}$

⇒) ...

και $\omega^2 = \frac{v_G^2}{r^2} = 2g\frac{R-r}{r^2}(\cos\theta - \cos\theta_0)\frac{1}{1+\frac{I}{m r^2}}$ (*)

2) H/W

11/1/2012

$2^{\infty}-4^{\infty}$ Δευτέρα

β/ Δυνάμεις ($11^{\infty}-1^{\infty}$ Υλικά)

Βήμα 2ο Εξισώσεις Κίνησης (Πολικό Σύστημα).

$$\Sigma F_r = m a_r \rightarrow -N + mg\cos\theta = -m(R-r)\dot{\theta}^2$$

$$\Sigma F_\theta = m a_\theta \rightarrow Q - mg\sin\theta = m(R-r)\ddot{\theta}$$

(ϵ) Το ΚΒ εκτελεί κυκλική κίνηση με ακτίνα (R−r).

Γ $\dot{\theta} \neq \omega$

$\omega = \dot{\varphi}$ (φ: η γωνία προσανατολισμού του σώματος. ⌋

G κινείται σε κύκλο με ακτίνα R − r, Άρα

$$\boxed{v_G = (R-r)\dot{\theta}} \quad (1) \qquad (\underset{\sim}{v} = \dot{r}\underset{\sim}{e_r} + r\dot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta}).$$

G είναι και σημείο της σφαίρας. Με βάση την κίνηση της σφαίρας:

$$\boxed{v_G = \omega r} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (R-r)\dot{\theta} = \omega r \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \frac{r}{R-r}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\omega}\frac{r}{R-r}$$

$$(*) \xrightarrow{\text{παραγωγίζοντας}} 2\omega\dot{\omega} = 2g\frac{R-r}{r^2}(-\sin\theta)\dot{\theta}\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}} \rightarrow$$

$\dot{\theta}$ // $\omega\frac{r}{R-r}$; R → r ?

$$\Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{\cancel{2}g}{r}\sin\theta\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}$$

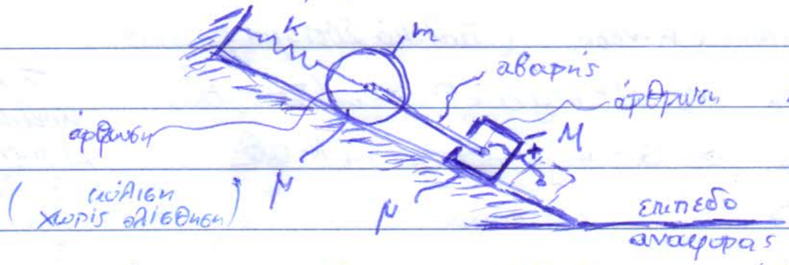
Από τις εξισώσεις κίνησης :

$$N = mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + m(R-r)\omega^2\frac{r^2}{(R-r)^2} = \dots$$

$$Q = mg\sin\theta + m(R-r)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - m(R-r)\frac{g}{r}\sin\theta\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}$$

$$= mg\sin\theta\left[1 - \frac{R-r}{r}\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}\right]$$

Εφαρμογή 4

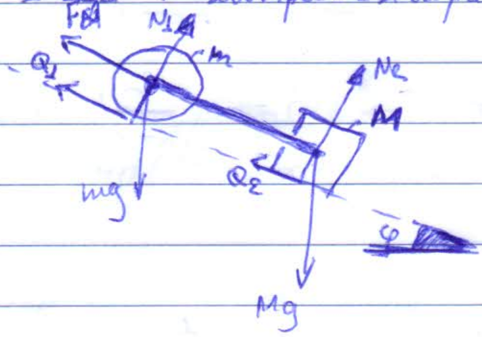


Συμπιεσμένο κατά δ -
- Ξεκινά από ηρεμία.

1. $v(x)$ x= Θέση σώματος στην αρχική Θέση
2. v_{max} , Θέση μέγιστης ταχύτητας
3. Μέγιστη απόσταση X_{max}
4. Δυνάμεις από το κεκλιμένο στα σώματα. (σπίτι)
5. Δυνάμεις από τη ράβδο στα 2 σώματα. (σπίτι)

Βήμα 1°

1° ΔΕΣ : Σύστημα τα 2 σώματα μαζί.

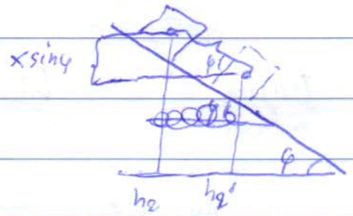


Βήμα 2°

Αρχή Έργου Ενέργειας

Συντηρητικές Δυνάμεις		Δυναμικό
mg	$\longrightarrow$	mgz
Mg	$\longrightarrow$	Mgz
$F_{ελ}$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2}k\varepsilon^2$
Μη συντηρητικές Δυνάμεις		**Έργο**
N_1, N_2	$\longrightarrow$	0 ($N_1, N_2 \perp$ κίνηση)
Q_1	$\longrightarrow$	0 (το σώμα κυλίεται χωρίς ολίσθηση).
Q_2	$\longrightarrow$	W_{Q_2}

$$W_{nc} = \Delta(T+V) \rightarrow W_{nc} = (T_2+V_2) - (T_1+V_1) \quad (*)$$



Θέση 1: Αρχική (Ξεκινά από ηρεμία)

Θέση 2: x (έχουν κινηθεί κατά x)

$$T_1 = 0$$

$$V_1 = mgh_1 + mgh_2 + \frac{1}{2}k\delta^2$$

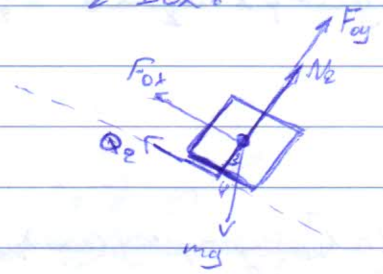
$$T_2 = \frac{1}{2}Mv^2(x) + \frac{1}{2}mv^2(x) + \frac{1}{2}I\omega^2$$ → η ράβδος δεν έχει μάζα και $I = I_G$

$$V_2 = mg(h_1 - x\sin\varphi) + Mg(h_2 - x\sin\varphi) + \frac{1}{2}k(\delta - x)^2$$

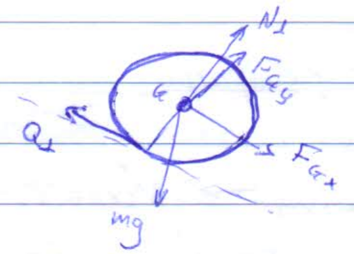
$$W_{nc} = W_{Q_2} = -\int_0^x Q_2\,dx$$

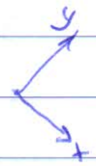
Θέλουμε να βρούμε το Q_2.

2° ΔΕΣ:



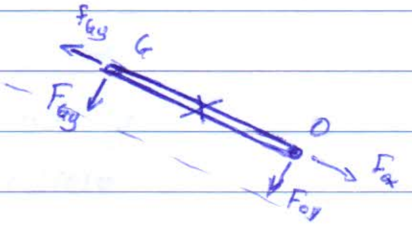
3° ΔΕΣ:





2° ΔΕΣ: $\Sigma F_y = m a_y \rightarrow N_2 + F_{Oy} - Mg\cos\varphi = 0. \quad (**)$

4° ΔΕΣ:



ράβδος εκτελεί επίπεδη κίνηση

2ος Νόμος Euler: $\Sigma M_{\text{κέντρου βάρους}} = I_G\,\alpha$

$$I = \int (\ldots)\underbrace{dm}_{=0} \Rightarrow \boxed{I = 0}.$$

$\Rightarrow \boxed{\Sigma M_{\text{κέντρο βάρους}} = 0}$: εξίσωση της στατικής.

$$\Rightarrow \Sigma M_O = 0 \rightarrow \Sigma M_G = 0 \Rightarrow \boxed{F_{Oy} = 0}$$

(και οποιοδήποτε σημείο)

Άρα $(**) \Rightarrow \boxed{N_2 = Mg\cos\varphi}$

Επομένως $Q_2 = \mu N_2 \Rightarrow \boxed{Q_2 = \mu Mg\cos\varphi}$ (= σταθερό).

Επομένως $W_{nc} = -\int_0^x Q_2\, dx = -\int_0^x \mu M g \cos\varphi\, dx = -\mu M g \cos\varphi \cdot x.$

Βήμα 3° Κύλιση τροχού χωρίς ολίσθηση $\Rightarrow v_c = \omega r.$

Αν $m \neq 0 \rightsquigarrow$ 8 εξισώσεις. 8 άγνωστα $\alpha = 0$? ← έτσι κι αλλιώς.

Βήμα 4°

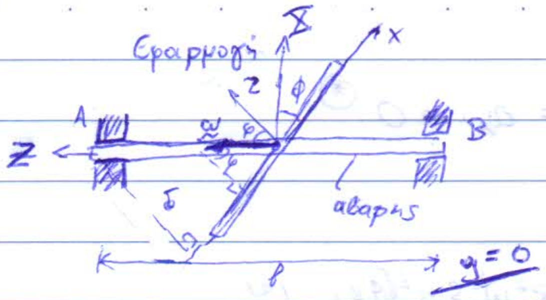
Αντικαθιστώ στην (*) και λύνω:

$$v^2(x) = \frac{10}{7m + 5M}\left[(m+M) g x \sin\varphi - \mu m g \cos\varphi\, x + \frac{1}{2} k \delta^2 - \frac{1}{2} k (x-\delta)^2\right]$$

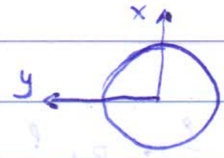
για σφαίρα

3. $x_{MAX} \rightarrow v^2(x) = 0 \Rightarrow (m+M) g\, x_{MAX} \sin\varphi - \mu m g \cos\varphi\, x_{MAX} + \frac{1}{2} k \delta^2 - \frac{1}{2} k (x_{Max} - \delta)^2 = 0$

$\Rightarrow x_{MAX} = \,<.$



ω = γνωστή = σταθερή



$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} MR^2$

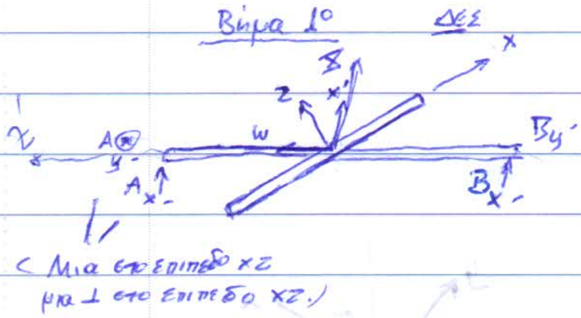
$I_{zz} = \frac{1}{2} MR^2$.

Αντιδράσεις στα εφέδρανα

F ακίνητο

$\ell \rightarrow Oxyz$ ($I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$) κύριο σύστημα συντεταγμένων κεντροβαρικό.

· σταθερά δεμένο = κολλημένο στο δίσκο.



Βήμα 2° Εξισώσεις κίνησης

2ος Νόμος Euler (ως προς Σ.Σ κολλημένο στο σώμα).

$M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z$

$M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z$

$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y$

$\omega_y = 0$

$\omega_x = -\omega\sin\varphi$

$\omega_z = +\omega\cos\varphi$

Άρα: ($I_{zz} = 2I_{yy}$, ω = σταθ)

∘ $M_x = I_{xx}\cancelto{0}{\dot{\omega}_x} + (\quad I_{yy})\omega_x\cancelto{0}{\omega_y} = 0$. (1)

∘ $M_y = -I_{xx}(-\omega\sin\varphi)(\omega\cos\varphi) =$
$= +I_{xx}\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi. = \frac{1}{8} mR^2\omega^2\sin(2\varphi)$. (2)

∘ $M_z = 0$ (3) ($I_{yy} = I_{xx}$ και $\omega_y = 0$).

Εισάγουμε ένα καινούριο σύστημα $\ell' \rightarrow Ox'$: πάνω στο επίπεδο xz.
$Oy' \parallel Oy$: συμπίπτει με τον Oy.

1ος Νόμος Euler.

$\Sigma F_{x'} = m a_{x'} \overset{*}{\Rightarrow} A_{x'} + B_{x'} = 0$ (4)

$\Sigma F_{y'} = m a_{y'} \overset{*}{\Rightarrow} A_{y'} + B_{y'} = 0$ (5)

$\Sigma F_{z'} = m a_{z'}$

$*$ Νέο σύστημα για να γίνουν σταθερές οι $A_{y'}, A_{x'}, B_{y'}, B_{x'}$ που περιστρέφονται.

Βήμα 3

Κινηματικός Περιορισμός : $a_{y'} = a_{x'} = 0$. (*)

(2) $\Rightarrow$ $A_{x'}\frac{\ell}{2} + B_{x'}\frac{\ell}{2} = \frac{m}{8}R^2\omega^2\sin^2(2\varphi)$. (2)

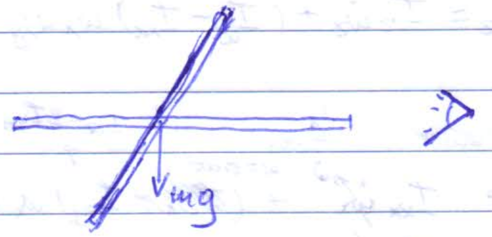
(1) $\Rightarrow$ $A_{y'}\delta - B_{y'}\delta = 0$. $\Rightarrow$ $A_{y'} - B_{y'} = 0$ (1)

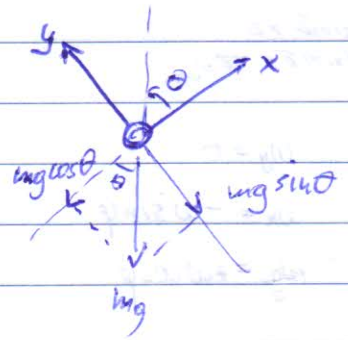
Σύστημα (2),(4) $\Rightarrow$ $A_{x'}, B_{x'}$

Σύστημα (1),(3) $\Rightarrow$ $A_{y'} = B_{y'} = 0$

$$A_{x'} = -B_{x'} = \frac{m}{8}\frac{R^2}{\ell}\omega^2\sin(2\varphi).$$

Σε πεδίο βαρύτητας





$\dot\theta = \omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = \omega t$.

Οι σχέσεις γίνονται:

(4) $\Rightarrow$ $A_{x'} + B_{x'} - mg\cos\theta = 0$.

(5) $\Rightarrow$ $A_{y'} + B_{y'} - mg\sin\theta = 0$

4.11 , 30 ασκήσεις στο κεφάλαιο 4 - Σελ. 311

όχι υποθετικές δυνάμεις.

- Σχετική κίνηση — Ροπές αδράνειας (Σύνθετο σώμα) όχι ορθογώνιες συντεταγμένες
- Στο επίπεδο — Κέντρο βάρους (μεταβλητή πυκνότητα με τη θέση).

$\underset{\sim}{\omega} = \omega \underset{\sim}{e_z}$, άρα $\omega_x = \omega_y = 0$.
$\omega_z = \omega$.

Ο 2ος Νόμος Euler παίρνει τη μορφή:

$$M_x = I_{xz} \cdot \dot{\omega}_z - I_{yz} \cdot \omega_z^2$$
$$M_y = I_{yz}\dot{\omega}_z + I_{xz}\omega_z^2$$
$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z .$$

$\underline{\omega} = \omega \underline{e_z} \rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2 \\ M_y &= I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2 \end{aligned}\right\}^{*}$$

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega} = \underbrace{I_{zz}\alpha}_{\text{λύνεται}} .$$ ← Χρήσιμη για να μας δώσει την ω.

* Μας δίνουν τις δυνάμεις που πρέπει να ασκηθούν ⊥ στο επίπεδο κίνησης, για να διατηρηθεί το σώμα την κίνηση του στο επίπεδο.

η περιστροφή γίνεται γύρω από άξονα z.

Δυνάμεις στο επίπεδο xy , έχουν ροπές ως προς x και y = 0.

~

Άρα στην επίπεδη κίνηση: $M_z = I_{zz}\dot{\omega} = I_{zz}\alpha$ (3) → Προσανατολισμό.

$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a_G} \rightarrow$
$F_x = m\ddot{x}_G$ (1)
$F_y = m\ddot{y}_G$ (2)
$F_z = m\ddot{z}_G$ (4)

(5) : $M_x = I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2$

(6) : $M_y = I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2$

Οι (1),(2),(3) προσδιορίζουν τις άγνωστες κινηματικές ποσότητες $\ddot{x}_G, \ddot{y}_G, \dot{\omega} = \alpha$

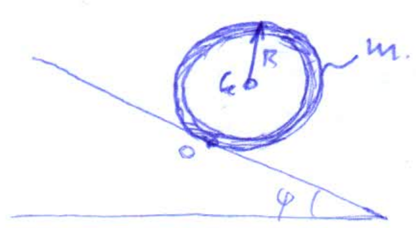
Οι (4),(5),(6) προσδιορίζουν δυνάμεις στην κατεύθυνση z (κάθετη στην κίνηση).

Για κύριο σύστημα συντεταγμένων* $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

Οι εξισώσεις του 2ου Νόμου Euler:
$M_x = 0$
$M_y = 0$
$M_z = I_{zz}\dot{\omega} = I_{zz}\alpha$

* με τον άξονα z , κάθετο στο επίπεδο κίνησης.

Εφαρμογή   Δακτύλιος   Ξεκινά από ηρεμία   ?



1. Εαν το σωμα κυλαει χωρις ολισθηση να βρεθούν:
   a. Οι δυναμεις που ασκουντο απο το κεκλιμενο επιπεδο στο σωμα
   b. Η επιταχυνση του ΚΒ και η γωνιακη επιταχυνση.
   c. Η ταχυτητα του ΚΒ (κεντρου βαρους) και η γωνιακη ταχυτητα
   d. Η θεση του ΚΒ και ο προσανατολισμος.
2. Για ποια γωνια φ_{cr} το σωμα κυλαει με ολισθηση. ($\varphi \geq \varphi_{cr}$).
3. Για $\varphi > \varphi_{cr}$ να απαντηθουν τα ερωτηματα της 1.
   (Αντικαθιστουμε την (5) με την $Q = \mu N$).

Λύση:

1. Βημα 1ο: ΔΕΣ - επιλογη συστηματος - περιβαλλον.

$Q \leq \mu N$.

$I_{zz} = I$

Βημα 2ο: Εξισωσεις κινησης - Επιλογη Συστηματος

$F_x = m\ddot{x}_G \Rightarrow \boxed{mg\sin\varphi - Q = m\ddot{x}_G}$ (1)

$F_y = m\ddot{y}_G \Rightarrow \boxed{mg\cos\varphi - N = m\ddot{y}_G}$ (2)

$M_z = I_{zz}\alpha = I\cdot\alpha \Rightarrow$

$\rightarrow \boxed{QR = I\alpha}$ (3), $\alpha = \dot{\omega}$

$I_{zz} = I =$ mR^2 κελυφος / $\frac{1}{2}mR^2$ κυλινδρος / $\frac{2}{5}mR^2$ σφαιρα.

$Q, N, \alpha, \ddot{x}_G, \ddot{y}_G$ - 5 αγνωστοι - 3 εξισωσεις

Βημα 3ο: Κινηματικοι Περιορισμοι

$\ddot{y}_G = 0$ (4) ?

$V_G = R\omega$

$\underset{\sim}{v_0} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \ddot{x}_G = R\alpha$ (5) $[\dot{x}_G = R\omega]$ κυλιση χωρις ολισθηση

(ii) $\boxed{\underset{\sim}{v_G} = \underset{\sim}{v_0} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{OG}}}$ ή στιγμιαίος πόλος περιστροφής O.

Βημα 4ο Επιλυση (5 εξισωσεις - 5 αγνωστους)

(2) $\overset{(4)}{\Rightarrow} N = mg\cos\varphi$.

(1),(5) $\Rightarrow mg\sin\varphi - Q = mR\alpha$

(3) $\Rightarrow QR = I\alpha \Rightarrow Q = \frac{I\alpha}{R}$ $\Big\}$ $\Rightarrow mg\sin\varphi - \frac{I\alpha}{R} = mR\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{Rmg\sin\varphi}{I + mR^2} \Rightarrow$ βγαζουμε mR^2 κοινο παραγοντα.

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\frac{I}{mR^2} + 1}\frac{g}{R}\sin\varphi}$

(3) $\Rightarrow Q = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I}{R}\left(\frac{1}{\frac{I}{mR^2} + 1}\frac{g}{R}\sin\varphi\right) \Rightarrow \boxed{Q = \underbrace{\frac{\frac{I}{mR^2}}{\frac{I}{mR^2} + 1}}_{\text{αδιαστατο μεγεθος}} \underbrace{mg\sin\varphi}_{\text{μοναδες δυναμης}}}$

(5) $\Rightarrow \ddot{x}_G = R\alpha \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_G = \dfrac{1}{\frac{I}{mR^2}+1}\, g \sin\varphi}$ = σταθερή

$$\dot{x}_G = \int \ddot{x}_G\, dt = \frac{1}{\frac{I}{mR^2}+1}\, g \sin\varphi\, t + v_0$$ (v_0 Από Α.Σ).

$$x_G = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{I}{mR^2}+1}\, g \sin\varphi\, t^2 + v_0 t + x_0 .$$

$$\omega = \frac{1}{\frac{I_c}{mR^2}+1}\,\frac{g}{R}\sin\varphi\, t + \omega_0$$

προσανατολισμός $\Theta = \int \omega\, dt = \dfrac{1}{\frac{I}{mR^2}+1}\,\dfrac{g}{R}\sin\varphi\,\dfrac{t^2}{2} + \omega_0 t + \Theta_0$

2. Κρίσιμη γωνία φ_{cr} όπου σταματά η κύλιση χωρίς ολίσθηση και αρχίζει να ολισθαίνει.
Για κύλιση χωρίς ολίσθηση: $Q \leq \mu N$.

$$\Rightarrow \frac{\frac{I}{mR^2}}{\frac{I}{mR^2}+1}\, mg\sin\varphi \leq \mu mg\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\tan\varphi \leq \frac{I/(mR^2)+1}{I/(mR^2)}\,\mu}$$

Η φ_{cr} ικανοποιεί την ισότητα: $\tan\varphi_{cr} = \dfrac{I/(mR^2)+1}{I/(mR^2)}\,\mu$,
η τιμή αυτή εξαρτάται από το I, το σώμα.

Για δακτύλιο: $I = mR^2 \Rightarrow \dfrac{I/(mR^2)+1}{I/(mR^2)} = 2 \rightarrow \tan\varphi_{cr} = 2\mu$.

Για κύλινδρο: $I = \frac{1}{2}mR^2 \rightarrow \dfrac{I/(mR^2)+1}{I/(mR^2)} = \dfrac{1/2+1}{1/2} = 3 \Rightarrow \tan\varphi_{cr} = 3\mu$.

3. $\varphi > \varphi_{cr}$ H/W. <u>Test</u>