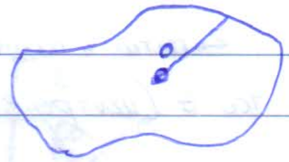
↳ Απαραμόρφωτο)   - 19/11/2012 -

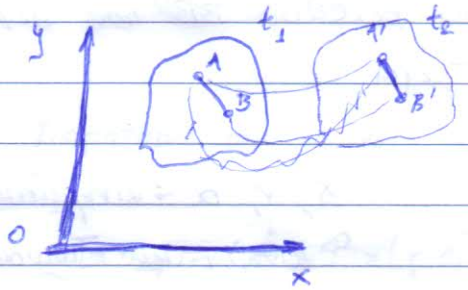
~ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ~

↳ Η απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε 2 σημείων παραμένει σταθερή.



1. μεταφορική κίνηση
2. Περιστροφή σώματος γύρω από έναν άξονα
3. Κίνηση στο επίπεδο (ο προσανατολισμός του σώματος αλλάζει, το σώμα περιστρέφεται γύρω απ' το αρχικό σώμα).
4. Περιστροφή γύρω από 1 σημείο
5. Γενική Χωρική Κίνηση.

1. Μεταφορική Κίνηση.



$A'B' \parallel AB, \ \forall AB.$

$$r_B = r_A + r_{AB} \quad (1).$$

- Γνωρίζω τη θέση του A, r_A
  την ταχύτητα του A, $\dot{r}_A = v_A$
  την επιτάχυνση του A, $\ddot{r}_A = \dot{v}_A = a_A$ } Γνωρίζω την κίνηση του σημείου A,
  το r_{AB} (που περιγράφει τη θέση του B).

Ταχύτητα του B

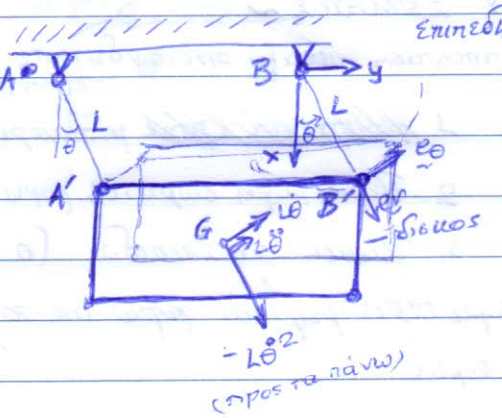
$$(1) \Rightarrow \dot{r}_B = \dot{r}_A + \dot{r}_{AB} \rightarrow v_B = v_A + \underbrace{\dot{r}_{AB}}_{0} \rightarrow \boxed{v_B = v_A} \quad (2)$$

(Για μεταφορική κίνηση)

$$(2) \Rightarrow \dot{v}_B = \dot{v}_A \Rightarrow \boxed{a_B = a_A}$$ (Για μεταφορική κίνηση.

Άρα γνωρίζω την κίνηση οποιουδήποτε σημείου:

Εφαρμογή: Μεταφορική Κίνηση Στερεού Δίσκου.



Ζητείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του G (κέντρο βάρος του δίσκου)

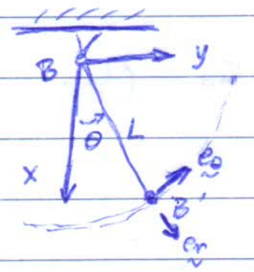
Δίνεται: επίπεδη κίνηση, $\theta(t)$

[παρ. $\theta(t) = e^t$]

Κίνηση σώματος: Μεταφορική

Αρκεί να προσδιορίσω τις: $\underset{\sim}{v}_{B'}$, $\underset{\sim}{a}_{B'}$

Παρατηρώ ότι Β' είναι σημείο της ράβδου ΒΒ' (που περιστρέφεται) και επομένως διαγράφει κυκλική τροχιά.



x, v, a : κινηματικές ποσότητες
↳ κινηματική εξίσωση.
$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}$: κινητική εξίσωση.

Πολικό Σ.Σ.:

$$\underset{\sim}{v}_{B'} = \underbrace{\dot r}_{0} \underset{\sim}{e}_r + r\dot\theta \underset{\sim}{e}_\theta = L\dot\theta \underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\underset{\sim}{a}_{B'} = (\underbrace{\ddot r}_{0} - r\dot\theta^2)\underset{\sim}{e}_r + (2\underbrace{\dot r}_{0}\dot\theta + r\ddot\theta)\underset{\sim}{e}_\theta = -L\dot\theta^2 \underset{\sim}{e}_r + L\ddot\theta \underset{\sim}{e}_\theta.$$

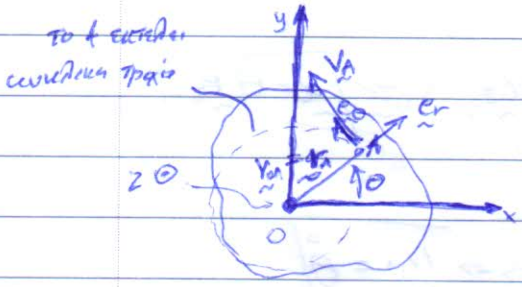
ως προς καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ...

αφού τα έχουμε βρει στο πολικό!

$\underset{\sim}{v}_G = \underset{\sim}{v}_{B'} = \dots$

$\underset{\sim}{a}_G = \underset{\sim}{a}_{B'} =$

2. Περιστροφή Δίσκου Γύρω από Σταθερό Άξονα.



Το σώμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z.

$r_A = r_A e_r$ (πολικό σύστημα αναφοράς).

Ταχύτητα του A:

$$v_A = \frac{d(r e_r)}{dt} \Rightarrow v_A = \dot{r} e_r + r \dot{e}_r, \quad \dot{e}_r = \dot{\theta} e_r \rightarrow v_A = \underbrace{\dot{r}}_{0} e_r + r\dot{\theta} e_\theta \rightarrow v_A = r_A \dot{\theta} e_\theta$$

Εισάγω το διάνυσμα της ~~Παρατηρώ ότι.~~ γωνιακής ταχύτητας. $\omega = \dot{\theta} e_z$

Παρατηρώ ότι: $v_A = \omega \times r_{OA}$

Απόδειξη:

$$\omega \times r_{OA} = \underbrace{(\dot{\theta} e_z) \times (r_A e_r)}_{e_\theta} = r_A \dot{\theta} e_\theta$$

e_x	e_y	e_z
e_r	e_θ	e_z

Επιτάχυνση του A:

1ος τρόπος: $a_A = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) e_\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a_A = -r\dot{\theta}^2 e_r + r\ddot{\theta} e_\theta}$$

2ος τρόπος: $a_A = \dot{v}_A = \frac{d}{dt}(\omega \times r_{OA}) = (\dot{\omega} \times r_{OA} + \omega \times \dot{r}_{OA})$ –

Παρατηρώ ότι: $\dot{r}_{OA} = v_A = \omega \times r_{OA}$.

οπότε $\boxed{a_A = \dot{\omega} \times r_{OA} + \omega \times (\omega \times r_{OA})}$

Εισάγω το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης:

ελληνικό α

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\dot{\omega}} = \text{ρυθμός μεταβολής του } \underset{\sim}{\omega}.$$

Παρατηρώ. $\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\dot{\omega}} = \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{\omega}) = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}\underset{\sim}{e_z}) = \ddot{\theta}\underset{\sim}{e_z} \rightarrow \boxed{\underset{\sim}{\alpha} = \ddot{\theta}\underset{\sim}{e_z}}$

Παρατήρηση: Γνωρίζω: $\underset{\sim}{\omega} = \dot{\theta}\underset{\sim}{e_z} = \omega \underset{\sim}{e_z} \Rightarrow \boxed{\omega = \dot{\theta}}$

$$\underset{\sim}{\alpha} = \ddot{\theta}\underset{\sim}{e_z} = \dot{\omega}\underset{\sim}{e_z} = \alpha e_z \Rightarrow \boxed{\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}}$$

θ είναι ο προσανατολισμός του OA

Επομένως:

$$\underset{\sim}{a_A} = \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{OA}} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{OA}})$$

Παρατηρώ ότι

$$\underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{OA}} = (\alpha \underset{\sim}{e_z}) \times (r \underset{\sim}{e_r}) = r\alpha \underset{\sim}{e_\theta} = r\ddot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta}.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα: $\underset{\sim}{a} \times (\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{c})\underset{\sim}{b} - (\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b})\underset{\sim}{c}$

τότε

$$\underbrace{\underset{\sim}{\omega}}_{a} \times (\underbrace{\underset{\sim}{\omega}}_{b} \times \underbrace{\underset{\sim}{r_{OA}}}_{c}) = \underbrace{(\underset{\sim}{\omega} \cdot \underset{\sim}{r_{OA}})}_{0\ (\omega \perp r_{OA})}\underset{\sim}{\omega} - (\underset{\sim}{\omega} \cdot \underset{\sim}{\omega})\underset{\sim}{r_{OA}} = -\omega^2 \underset{\sim}{r_{OA}}.$$

Επαληθεύεται οπότε: $\boxed{\underset{\sim}{a_A} = -r\dot{\theta}^2 \underset{\sim}{e_r} + r\ddot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta}}$

Σύνοψη

Ταχύτητα: $\underset{\sim}{v_A} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{OA}}$

Επιτάχυνση: $\boxed{\underset{\sim}{a_A} = \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{OA}} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{OA}}}$ χρήσιμη

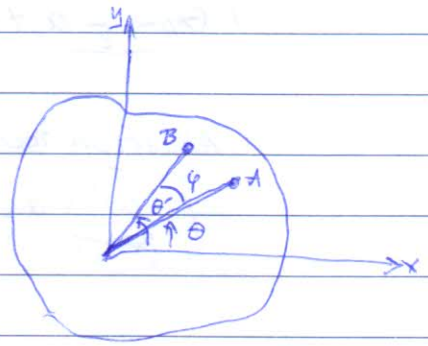
$$\underset{\sim}{a_A} = \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{OA}} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{OA}})$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \omega = \dot{\theta} \\ \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \end{array}}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ → αντιστοιχούν

$a = \dot{v} = \ddot{x}$: στην ευθύγραμμη κίνηση

Ο προσδιορισμός της ταχύτητας και της επιτάχυνσης οποιουδήποτε σημείου Β, επιτυγχάνεται με γνώση των ω, α



$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{\omega}' \times \underset{\sim}{r}_{OB}$$
$$\underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{\alpha}' \times \underset{\sim}{r}_{OB} - \omega^2 \underset{\sim}{r}_{OB}$$

$$\theta' = \underset{\text{σταθερή}}{\theta + \varphi} \rightarrow \dot{\theta}' = \dot{\theta} + \underset{=0}{\dot{\varphi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}' = \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\omega' = \omega} \circledast$$

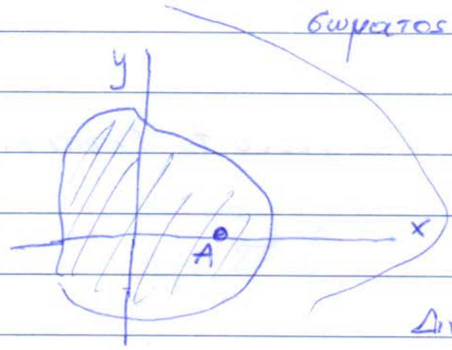
Άρα ω = ρυθμός μεταβολής του προσανατολισμού του ολόκληρου σώματος.

$$\circledast \Rightarrow \dot{\omega}' = \dot{\omega} \rightarrow \boxed{\alpha' = \alpha}$$ ⇝ Άρα είναι και το α για όλο το σώμα

Εφαρμογή: Περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα z, με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha(t) = \alpha_0$ = σταθερή.

Ζητείται: 1. γωνιακή ταχύτητα ω, και προσανατολισμός του σώματος (περιγράφεται από την γωνία θ).

4. (Η/W)



2. Η θέση του σημείου Α, μετά από χρόνο t_0.

3. Ταχύτητα του Α, μετά από t_0

Δίνεται: $\alpha(t) = \alpha_0$ = σταθερό.

— Γωνιακή Ταχύτητα: $\alpha = \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \alpha \Rightarrow \dot{\omega} = \alpha_0$.

$\omega(t) = \alpha_0 t + \omega_0 \leftarrow$ ΑΣ $\omega(0) = \omega_0$

– Προσανατολισμος $\theta(t)$:

$$\omega = \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \Rightarrow \dot{\theta} = a_0 t + \omega_0 \Rightarrow \theta$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \omega_0 t + \theta_0} \longleftarrow \text{ΑΣ } \theta(0) = \theta_0$$

Απαλοιφη του t (Π/Μ)

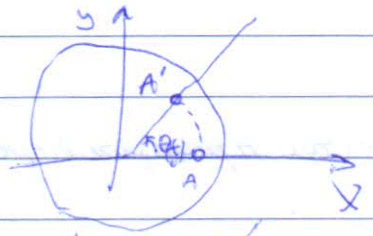
$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2a_0(\theta - \theta_0)}$$

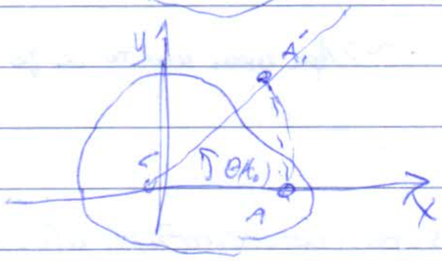
παρομοιες σχεσεις με της ευθυγραμμης κινησης.

$$v^2 = v_0^2 + 2g(h - h_0)$$

2. $\theta(t_0) = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 + \omega_0 t_0 + \theta_0$

(Θα φτασει στη νεα θεση A')





3. Ταχυτητα του A'

ΠΣΣ

$$\underset{\sim}{v}_{A'} = \underbrace{\dot{r}}_{0} \underset{\sim}{e}_r + \underbrace{r}_{OA} \dot{\theta} \underset{\sim}{e}_\theta$$

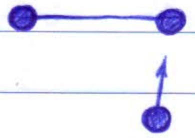
ή με $\underset{\sim}{v}_A = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{OA}$ $\quad (\omega \underset{\sim}{e}_z)$, $(\underset{\sim}{x} e_x + \underset{\sim}{y} e_y)$

Στο σημειο A' το $\dot{\theta} = \omega(t_0) = a_0 t_0 + \omega_0$

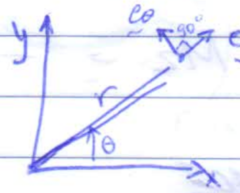
Επομενως $\underset{\sim}{v}_{A'} = (OA' \cdot \omega(t_0))\, \underset{\sim}{e}_\theta = (OA)[a_0 t_0 + \omega_0]\, \underset{\sim}{e}_\theta$

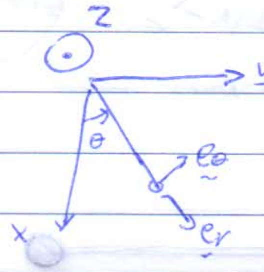
4. Επιταχυνση του σημειου A μετα απο χρονο t_0 (σπιτι).

H/W

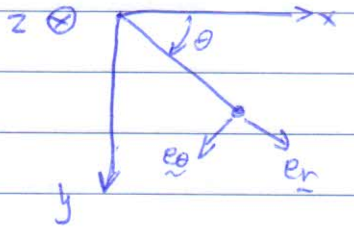
Κρούση: 

– Άσκηση Νατσιάβα –

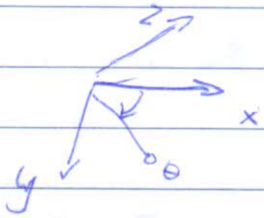


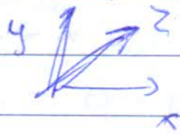


Δεξιόστροφο.



z ⊗ ~> Για να είναι δεξιόστροφο



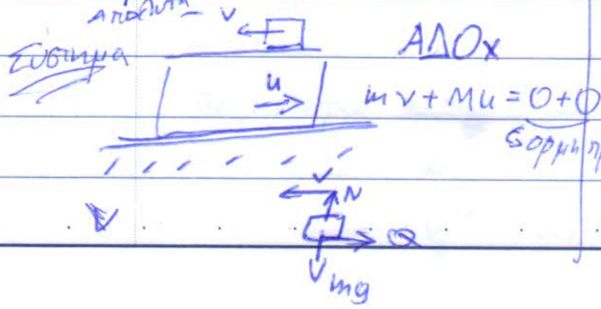


$$\int \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r} = \int \left(F_x \cdot \underset{\sim}{e_x} + F_y \underset{\sim}{e_y}\right) \cdot \left(dx\, \underset{\sim}{e_x} + dy\, \underset{\sim}{e_y}\right) =$$

$$= \int F_x dx + F_y dy = \int \left(F_x(x) + F_y(x) \frac{d\varphi}{dx}\right) dx$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x).$$

πχ. 27.

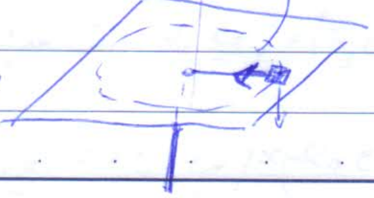


ΑΔΟx

$mv + Mu = 0 + 0$

ορμή πριν

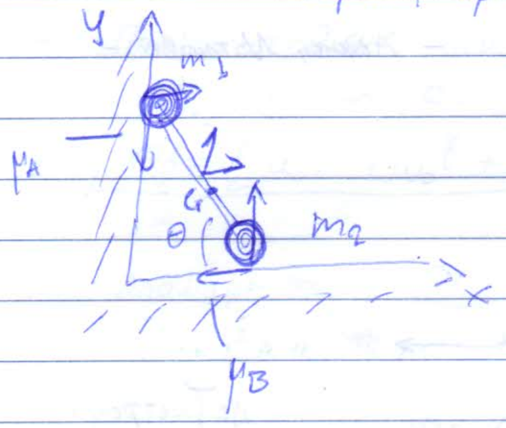
περνάει απ' το ίδιο σημείο.



ΑΔΣ στην κατακόρυφη κατεύθυνση

ροπή βάρους = 0.

Περσινή Πρόοδος.

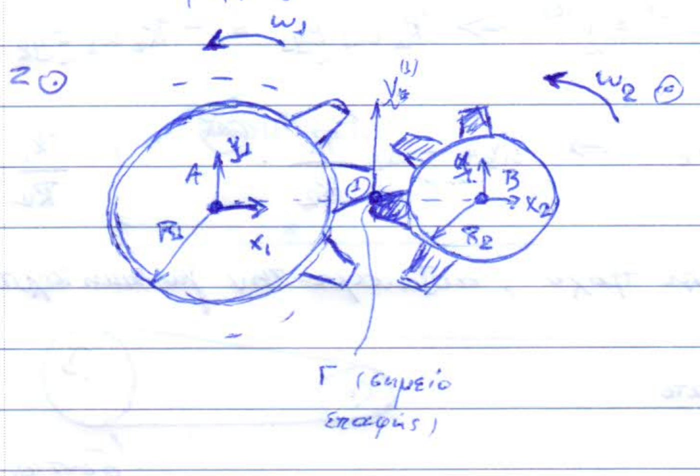


$$\underset{\sim}{M} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{r} \times m_i \underset{\sim}{a}_i$$

$M_z = $ ______

308

Εφαρμογή: Κίνηση Οδοντωτού Τροχού - Γραναζιού.



Θεωρώ ότι $AΓ = R_1$.
Αγνοούμε το πάχος του δοντιού σε σχέση με την ακτίνα.

Τροχος 1: περιστρεφεται γυρω απο εναν σταθερο αξονα που περνα - διερχεται απο το σημειο A (και ειναι καθετος στο επιπεδο).

Κοινό Σημείο Γ ανηκει στον τροχο 1 (του τροχου 1): $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{V}_Γ^{(1)} = \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{r}_{AΓ}$ (1)

$\underset{\sim}{a}_Γ^{(1)} = \underset{\sim}{a}_1 \times \underset{\sim}{r}_{AΓ} - \omega_1^2 \underset{\sim}{r}_{AΓ}$ (2)

Τροχος 2: περιστροφη γυρω απο σταθερο αξονα, καθετο στο επιπεδο του χαρτιου, που διερχεται απο το B.

Το κοινο σημειο Γ, ως σημειο που ανηκει στον τροχο 2: $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{V}_Γ^{(2)} = \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{r}_{BΓ}$ (3)

$\underset{\sim}{a}_Γ^{(2)} = \underset{\sim}{a}_2 \times \underset{\sim}{r}_{BΓ} - \omega_2^2 \underset{\sim}{r}_{BΓ}$ (4)

Αν σχεδιασω τις επιφανειες των δοντιων ετσι ωστε να εξασφαλιζεται οτι στο κοινο σημειο Γ να εχουν την ιδια ταχυτητα (οχι ολισθηση)

$$\Rightarrow \underset{\sim}{V}_Γ^{(1)} = \underset{\sim}{V}_Γ^{(2)} \underset{(3)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \boxed{\underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{r}_{AΓ} = \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{r}_{BΓ}}$$

Παρατηρω: $\underset{\sim}{V}^{(1)} = \underset{\sim}{\omega}_1 \times \underset{\sim}{r}_{AΓ} = (\omega_1 \underset{\sim}{e}_z) \times (R_1 e_{x_1}) = R_1 \omega_1 e_{y_1}$ (1)

$\underset{\sim}{V}^{(2)} = \underset{\sim}{\omega}_2 \times \underset{\sim}{r}_{BΓ} = (\omega_2 \underset{\sim}{e}_z) \times (-R_2 e_{x_2}) = -R_2 \omega_2 e_{y_2}$ (3).

$+\omega_2$ ⊙

Όμως $\underset{\sim}{e}_{y_1} = \underset{\sim}{e}_{y_2}$ (*)

(1), (3) και $\underset{\sim}{v}^{(1)} = \underset{\sim}{v}^{(2)} \Rightarrow R_1 \omega_1 \underset{\sim}{e}_{y_1} = - R_2 \omega_2 \underset{\sim}{e}_{y_2}$ (*) $\Rightarrow$

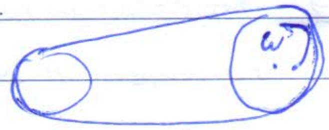
$\Rightarrow R_1 \omega_1 = - R_2 \omega_2 \to \omega_2 = - \omega_1 \dfrac{R_1}{R_2}$. (**) $\left(\dfrac{R_1}{R_2} > 1 \right)$.

Απ' τον μεγάλο στον μικρό τροχό, αυξάνουμε την γωνιακή ταχύτητα.

~~εχ~~ Ποδήλατο

δόντια

Με ιμάντα, ώστε να μην ολισθήσει, $\omega = ?$



$\underset{\sim}{a}_1 = \underset{\sim}{\dot{\omega}}_1 = \dfrac{d}{dt}(\omega_1 \underset{\sim}{e}_z) = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{e}_z$.

$$\underset{\sim}{a}_\Gamma^{(1)} = (\dot{\omega}_1 \underset{\sim}{e}_z) \times \underset{\sim}{r}_{A\Gamma} - \omega_1^2 \underset{\sim}{r}_{A\Gamma} =$$

$$= (\dot{\omega}_1 \underset{\sim}{e}_z) \times (R_1 \underset{\sim}{e}_{x_1}) - \omega_1^2 R_1 \underset{\sim}{e}_{x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{a}_\Gamma^{(1)} = \underbrace{R_1 \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{e}_{y_1}}_{\text{επιτρόχιος}} - \underbrace{\omega_1^2 R_1 \underset{\sim}{e}_{x_1}}_{\text{κεντρομόλος}}},$$ για σημείο Γ πάνω στον τροχό 1.

$$\underset{\sim}{a}_\Gamma^{(2)} = (\dot{\omega}_2 \underset{\sim}{e}_z) \times \underset{\sim}{r}_{B\Gamma} - \omega_2^2 \underset{\sim}{r}_{B\Gamma} =$$

$$= (\dot{\omega}_2 \underset{\sim}{e}_z) \times (-R_2 e_{x_2}) + \omega_2^2 R_2 e_{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a}_\Gamma^{(2)} = - R_2 \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{e}_{y_2} + \omega_2^2 R_2 \underset{\sim}{e}_{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{a}_\Gamma^{(2)} = \underbrace{- R_2 \dot{\omega}_2 \underset{\sim}{e}_{y_1}}_{\text{επιτρόχιος}} + \underbrace{\omega_2^2 R_2 \underset{\sim}{e}_{x_1}}_{\text{κεντρομόλος.}}},$$ για σημείο Γ πάνω στον τροχό 2.

• Από την (*) $\Rightarrow$ $\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2 \Rightarrow \dot{\omega}_1 R_1 = -\dot{\omega}_2 R_2 \Rightarrow$

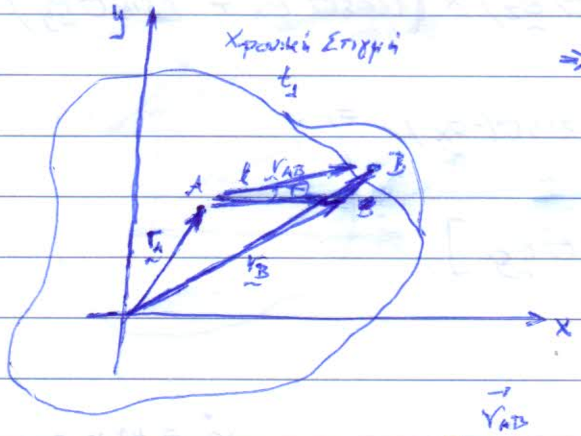
$\Rightarrow$ οι 2 τροχοί έχουν την ίδια επιτρόχια επιτάχυνση.

όμως $R_1 \omega_1^2 \neq -R_2 \omega_2^2$ (αφού $\omega_1 \neq \omega_2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι διαφορετική.

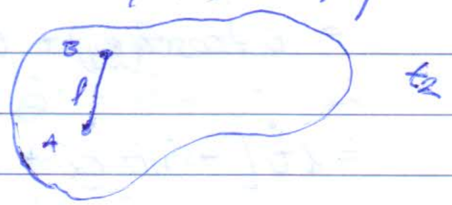
~ ~ ~

3. Γενική Επίπεδη Κίνηση



AB πάνω στο σώμα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η απόσταση (AB), παραμένει σταθερή.



$\vec{r}_{AB}$

θ: η γωνία του $\vec{AB}$ με τον οριζόντιο άξονα.

$\underset{\sim}{r}_B = \underset{\sim}{r}_A + \underset{\sim}{r}_{AB}$

$\underset{\sim}{r}_{AB} = l\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + l\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y \Rightarrow \underset{\sim}{r}_{AB} = l(\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y)$

θ = προσανατολισμός του AB

Ταχύτητες (1) $\Rightarrow \dot{\underset{\sim}{r}}_B = \dot{\underset{\sim}{r}}_A + \dot{\underset{\sim}{r}}_{AB} \Rightarrow \underset{\sim}{V}_B = \underset{\sim}{V}_A + L(-\sin\theta \cdot \dot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_x + \cos\theta \cdot \dot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_y)$

$\Rightarrow \underset{\sim}{V}_B = \underset{\sim}{V}_A + l\dot{\theta}(-\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \cos\theta \cdot \underset{\sim}{e}_y)$.

Εισαγω το διανυσμα της γωνιακης ταχυτητας.

$$\underset{\sim}{\omega} = \dot{\theta}\,\underset{\sim}{e_z} = \omega \cdot \underset{\sim}{e_z} \Rightarrow \omega = \dot{\theta}$$

και παρατηρώ οτι η προηγουμενη σχεση παιρνει την μορφη.

$$\boxed{\underset{\sim}{v_B} = \underset{\sim}{v_A} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AB}}}$$

κινηματικη σχεση για ταχυτητες.

Αν ξερω την ταχυτητα ενος σημειου και την γωνιακη ταχυτητα ω, μπορω να ξερω την ταχυτητα σε οποιοδηποτε αλλο σημειο.

Αποδειξη: $\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AB}} = (\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e_z}) \times (l\cos\theta\,\underset{\sim}{e_x} + l\sin\theta\,\underset{\sim}{e_y}) =$

$$= \dot{\theta}\,l\cos\theta(\underset{\sim}{e_y}) + \dot{\theta}\,l\sin\theta(-\underset{\sim}{e_x}) =$$

$$= l\dot{\theta}\left[-\sin\theta\,\underset{\sim}{e_x} + \cos\theta\,\underset{\sim}{e_y}\right]$$

Επιταχυνσεις:

$$\dot{\underset{\sim}{v_B}} = \dot{\underset{\sim}{v_A}} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{r_{AB}} + \underset{\sim}{\omega} \times \dot{\underset{\sim}{r_{AB}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a_B} = \underset{\sim}{a_A} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{r_{AB}} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AB}})$$

$\dot{\underset{\sim}{r_{AB}}} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AB}}$

Αφου $\underset{\sim}{r_B} = \underset{\sim}{r_A} + \underset{\sim}{r_{AB}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\underset{\sim}{r_B}} = \dot{\underset{\sim}{r_A}} + \dot{\underset{\sim}{r_{AB}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\sim}{v_B} = \underset{\sim}{v_A} + \dot{\underset{\sim}{r_{AB}}}$

Αρα $\boxed{\dot{\underset{\sim}{r_{AB}}} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AB}}}$

Εισαγω το διανυσμα της γωνιακης επιταχυνσης.

$$\underset{\sim}{\alpha} = \dot{\underset{\sim}{\omega}} \Rightarrow \underset{\sim}{\alpha} = \dot{\omega}\,\underset{\sim}{e_z} = \ddot{\theta}\,\underset{\sim}{e_z} = \alpha\,\underset{\sim}{e_z}$$

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$

οποτε

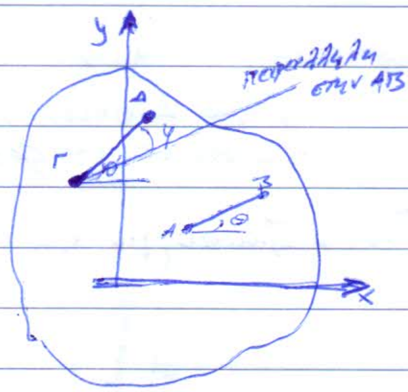
$$\boxed{\underset{\sim}{a_B} = \underset{\sim}{a_A} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{AB}} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AB}})}$$

Γενική κινηματικη σχεση για επιταχυνσεις

Όμως αποδεικνύεται ότι: $\underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{AB}) = -\omega^2 \underset{\sim}{r}_{AB}$ (?)

Οπότε $\boxed{\underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{a}_A + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r}_{AB} - \omega^2 \underset{\sim}{r}_{AB}}$ Γενική για επίπεδη κίνηση

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \dot{\omega} = \ddot{\theta} \\ \omega &= \dot{\theta} \end{aligned}}$$



Ένα διαφορετικό ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

φ = σταθερή

$\theta' = \theta + \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\theta}' = \dot{\theta} + \underbrace{\dot{\varphi}}_{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\theta}' = \dot{\theta} \Rightarrow \omega' = \omega$

(κινείται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα)

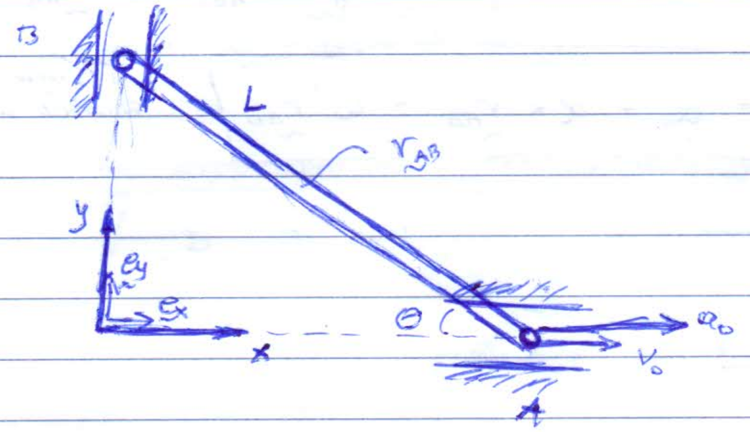
Ξαναπαραγωγίζοντας $\Rightarrow$ $\alpha' = \alpha$ (ίδια γωνιακή επιτάχυνση)

Κινηματικές Εξισώσεις:

$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{AB}$ (1)

$\underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{a}_A + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r}_{AB} - \omega^2 \underset{\sim}{r}_{AB}$ (2)

Εφαρμογή



Δίνεται : v_0, a_0

Ζητείται : 1. v_B } γωνιακή ταχύτητα της ράβδου
2. ω

3. a_B } γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου
4. α

5. v_G (G: κέντρο βάρους)

6. a_G } $v_G = v_A + \omega \times r_{AG}$ (σταθερό), $a_G = a_A + \alpha \times r_{AG} - \omega^2 r_{AG}$

αναφορά σε στερεό σώμα.

1, 2) v_B, ω

Βάζουμε 2 σημεία, που γνωρίζουμε ή θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα.

$$v_B = v_A + \omega \times r_{AB} \quad (1)$$

→ (2 εξισώσεις, για x, y).

2 άγνωστες   μια άγνωστη

Κινηματικός περιορισμός

$$v_B = v_B e_y \quad (*) \quad (v_B \text{ στην } x = 0)$$

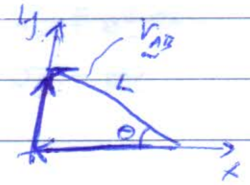
3 εξισώσεις → 3 άγνωστοι

2 άγνωστα

Επίλυση :

$$(*) \rightarrow (1) \Rightarrow v_B e_y = v_0 e_x + (\omega e_z) \times (-L\cos\theta\, e_x + L\sin\theta\, e_y) \rightarrow$$

$$\left(\begin{aligned} v_A &= v_0 e_x \\ r_{AB} &= -L\cos\theta\, e_x + L\sin\theta\, e_y \end{aligned} \right)$$



$$\Rightarrow v_B e_y = v_0 e_x - L\omega\cos\theta\, e_y - L\omega\sin\theta\, e_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_B e_y = (v_0 - L\omega\cos\theta) e_x - L\omega\cos\theta\, e_y \Rightarrow$$

Αρα $0 = \cancel{v_B}\, v_0 - L\omega\sin\theta$ οι συντελεστές του $\underset{\sim}{e_x}$ ίσοι

$v_B = -L\omega\cos\theta$ —"— $\underset{\sim}{e_y}$ —"—

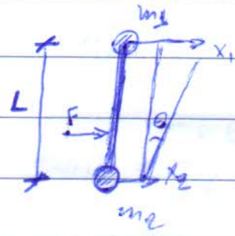
2 εξισώσεις με 2 αγνώστους (v_B, ω). Τα v_B, ω προκύπτουν ταυτόχρονα.

Από την 1η -> $\boxed{\omega = \frac{v_0}{L\sin\theta}}$

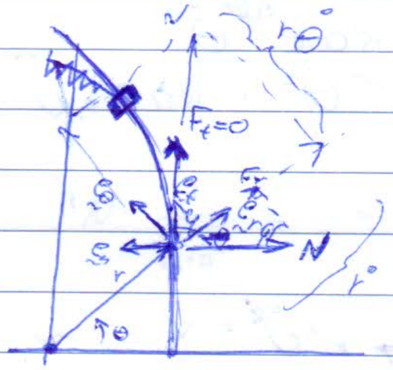
Από την 2η => $v_B = -L\frac{v_0}{L\sin\theta}\cos\theta$. -> $\boxed{v_B = -\frac{v_0}{\tan\theta}}$

Δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε το ω για να βρούμε το α

Συνέχεια Σπίτι..



2.9 Κίνηση σε εκθετική σπείρα



$r = Re^{a\theta}$, χωρίς τριβές, R, a σταθερές

χωρίς τριβές

F = ?

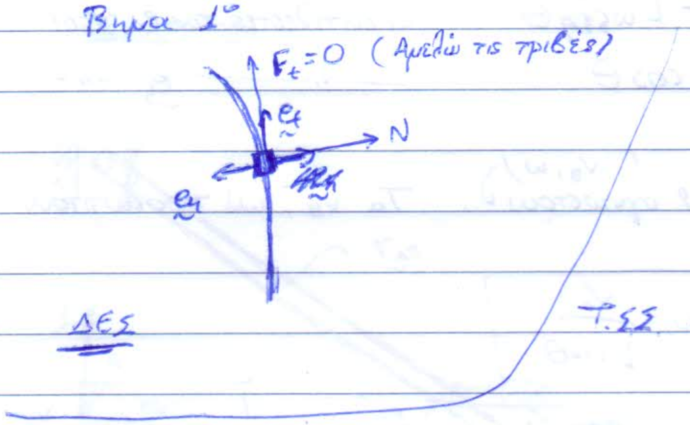
g = 0

Για $\theta = 0$, δίνεται η ταχύτητα v_0.

$v = \dot r\, \underset{\sim}{e_r} + r\dot\theta\, \underset{\sim}{e_\theta}$

Βημα 1ο

$F_t = 0$ (Αμελώ τις τριβές)



Βημα 2ο ΠΣΣ:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$
$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}).$$

Τ.ΣΣ: $F_t = m\ddot{s}$, $F_t = 0$ (αμελώ τριβές) $\Big\}$ $0 = m\ddot{s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{s}(t) = 0 \Rightarrow \dot{s}(t) = c$$

Ταχυτητα $v(t) = \dot{s}(t) \Rightarrow v(t) = c$

ΑΣ: $v(0) = v_0 = c$, Άρα $\boxed{v(t) = v_0}$.

ή με Αρχη Ωθησης Ορμης στην διευθυνση t: $\hat{F}_t = m\dot{s}(t) - m\underbrace{\dot{s}(0)}_{v_0}$, $\hat{F}_t = 0$

$$F_n = ma_n \Rightarrow F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

$$(1) \Rightarrow N\sin\varphi = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$r = Re^{a\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{r} = Rae^{a\theta}\dot{\theta}}$$
$$\Rightarrow \ddot{r} = Ra^2e^{a\theta}\dot{\theta}^2 + Rae^{a\theta}\ddot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = ?$$
$$\underset{\sim}{v} = \dot{r}\underset{\sim}{e_r} + r\dot{\theta}e_\theta$$
$$v = v_0 \Rightarrow \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2a^2e^{2a\theta}\cdot\dot{\theta}^2 + R^2e^{2a\theta}\cdot\dot{\theta}^2} = v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}Re^{a\theta}\sqrt{1+a^2} = v_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{R\sqrt{1+a^2}}e^{-a\theta}}$$

$$\Rightarrow r\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\left(\frac{v_0}{R\sqrt{1+a^2}} e^{-a\theta}\right)}{dt} = \frac{-v_0 a}{R\sqrt{1+a^2}} e^{-a\theta} \dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-v_0^2 a}{R^2(1+a^2)} e^{-2a\theta}.$$

Επομένως: $\ddot{r} = Ra^2 \cdot e^{a\theta} \frac{v_0^2}{R^2(1+a^2)} e^{-2a\theta} - Rae^{a\theta} \frac{v_0^2 \cdot a}{R^2(1+a^2)} e^{-2a\theta}$

$$= \frac{Ra^2}{R^2} v_0^2 e^{-a\theta} [1-1] = 0$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση κίνησης $\Rightarrow \ddot{r} = 0$?✓

$$N \sin\varphi = -m r \dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{N \sin\varphi = -m R e^{a\theta} \frac{v_0^2}{R^2(1+a^2)} e^{-2a\theta}}$$

Άρα από το σχήμα: $\tan\varphi = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{1}{a}.$

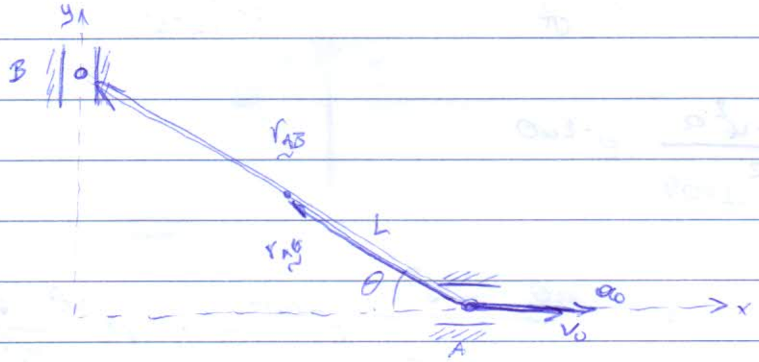
$$\tan\varphi = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{r\cancel{\dot{\theta}}}{Rae^{a\theta}\dot{\theta}} = \frac{r}{Rae^{a\theta}} = \frac{r}{ar} = \frac{1}{a}.$$

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Άρα $N \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = -m \frac{v_0^2}{R(1+a^2)} e^{-a\theta} \Rightarrow N = -\frac{m v_0^2}{R\sqrt{1+a^2}} e^{-a\theta}$

23/11/2012

Συνέχεια ...



$\omega = \dfrac{v_0}{L\sin\theta}$, $v_B = -v_0 \dfrac{1}{\tan\theta}$

v_0, a_0 ~> στιγμιαία.

3/ και 4/. $\underset{\sim}{a_B} = \underset{\sim}{a_A} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{AB}} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{AB}}$

$\underset{\sim}{a_B} = a_B \underset{\sim}{e_y}$

$\underset{\sim}{a_A} = a_0 \underset{\sim}{e_x}$

$\underset{\sim}{\alpha} = \alpha \underset{\sim}{e_z}$

$\underset{\sim}{r_{AB}} = -L\cos\theta \underset{\sim}{e_x} + L\sin\theta \underset{\sim}{e_z}$

Αντικαθιστώντας: $a_B \underset{\sim}{e_y} = a_0 \underset{\sim}{e_x} + (\alpha\, e_z) \times [-L\cos\theta \underset{\sim}{e_x} + L\sin\theta \underset{\sim}{e_y}] -$

$- \omega^2 [-L\cos\theta \underset{\sim}{e_x} + L\sin\theta \underset{\sim}{e_y}] \Rightarrow$

$\Rightarrow a_B \underset{\sim}{e_y} = a_0 \underset{\sim}{e_x} - L\alpha\cos\theta \underset{\sim}{e_y} - L\alpha\sin\theta \underset{\sim}{e_x} + L\omega^2\cos\theta \underset{\sim}{e_x} - L\omega^2\sin\theta \underset{\sim}{e_y} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_B \underset{\sim}{e_y} = (a_0 - La\sin\theta + L\omega^2\cos\theta) \underset{\sim}{e_x} - (La\cos\theta + L\omega^2\sin\theta) \underset{\sim}{e_y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 0 = a_0 - L\alpha\sin\theta + L\omega^2\cos\theta & (1) \\ a_B = -L\alpha\cos\theta - L\omega^2\sin\theta & (2) \end{array} \right\}$$ 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους (α, a_B).

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \alpha = \dfrac{a_0 + L\omega^2\cos\theta}{L\sin\theta} \\ \text{όμως}: \quad \omega = \dfrac{v_0}{L\sin\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \dfrac{a_0 + L \dfrac{v_0^2}{L^2\sin^2\theta}\cos\theta}{L\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a_0}{L\sin\theta} + \frac{L v_0^2\cos\theta}{L^3\sin^3\theta} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{a_0}{L\sin\theta} + \frac{v_0^2\cos\theta}{L^2\sin^3\theta}}$$

$$(2) \Rightarrow a_B = -L\left[\frac{a_0}{L\sin\theta} + \frac{v_0^2\cos\theta}{L^2\sin^3\theta}\right]\cos\theta - L\frac{v_0^2}{L^2\sin^2\theta}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_B = -\frac{a_0}{\tan\theta} - \frac{v_0^2}{L}\frac{1}{\tan^2\theta\sin\theta} - \frac{v_0^2}{L\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_B = -\frac{a_0}{\tan\theta} - \frac{v_0^2}{L\sin\theta}\underbrace{\left[\frac{1}{\tan^2\theta}+1\right]}_{\frac{1}{\sin^2\theta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_B = -\frac{a_0}{\tan\theta} - \frac{v_0^2}{L\sin^3\theta}}, \quad \text{για } \theta \in (0,90) \rightsquigarrow a_B < 0$$

$$\underset{\sim}{v_B} = \underset{\sim}{v_A} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AB}} \quad (*)$$

$$\underset{\sim}{a_B} = \underset{\sim}{a_A} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{AB}} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{AB}} \quad (**)$$

5) και 6).

Ταχύτητα v_G: $(*) \Rightarrow \underset{\sim}{v_G} = \underset{\sim}{v_A} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{AG}}$

$$\underset{\sim}{r_{AG}} = \frac{r_{AB}}{2} = -\frac{L}{2}\cos\theta\, \underset{\sim}{e_x} + \frac{L}{2}\sin\theta\, \underset{\sim}{e_y}$$

<u>Αντικατάσταση</u>: $\underset{\sim}{v_G} = v_0 \underset{\sim}{e_x} + (\omega \underset{\sim}{e_z}) \times \left[-\frac{L}{2}\cos\theta \underset{\sim}{e_x} + \frac{L}{2}\sin\theta \underset{\sim}{e_y}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v_G} = v_0 \underset{\sim}{e_x} - L/2\, \omega \cos\theta\, \underset{\sim}{e_y} - L/2\, \omega \sin\theta\, \underset{\sim}{e_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v_G} = \left(v_0 - \frac{L}{2}\omega\sin\theta\right)\underset{\sim}{e_x} - \frac{L}{2}\omega\cos\theta\, \underset{\sim}{e_y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_G = \left(v_0 - \frac{L}{2}\frac{v_0}{L\sin\theta}\sin\theta\right)\underset{\sim}{e_x} - \left(\frac{L}{2}\frac{v_0}{L\sin\theta}\cos\theta\right)\underset{\sim}{e_y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_G = \frac{v_0}{2}\underset{\sim}{e_x} - \frac{v_0}{2\tan\theta}\underset{\sim}{e_y}}$$

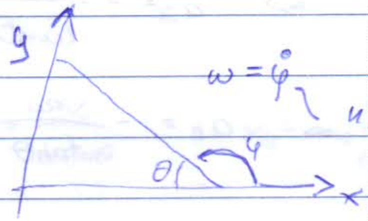
Επιτάχυνση a_G: $(**) \Rightarrow \underset{\sim}{a_G} = \underset{\sim}{a_A} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{AG}} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{AG}} =$

$$= a_0 \underset{\sim}{e_x} + (\alpha \underset{\sim}{e_z}) \times \left[-\frac{L}{2}\cos\theta \underset{\sim}{e_x} + \frac{L}{2}\sin\theta \underset{\sim}{e_y}\right] - \omega^2\left[-\frac{L}{2}\cos\theta \underset{\sim}{e_x} + \frac{L}{2}\sin\theta \underset{\sim}{e_y}\right]$$

$= \ldots$ H/W

Αν η v_0 δεν είναι σταθερή $\quad v_0 = v_0(t)$.

$$\boxed{\omega = \frac{v_0(t)}{L\sin\theta} \qquad V_B = -v_0(t)\frac{1}{\tan\theta}}$$



$\omega = \dot\varphi$ η γωνία με τον x.

Γωνιακή Επιτάχυνση, όταν δίνεται $\omega(t)$.

$$\alpha = \dot\omega(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{v_0(t)}{L\sin\theta(t)}\right] = \frac{\dot v_0(t)}{L\sin\theta} + \frac{V_0(t)}{L}\left[-\frac{1}{\sin^2\theta}\right]\cos\theta\,\dot\theta =$$

$$= \frac{\dot v_0(t)}{L\sin\theta} - \frac{v_0(t)\cos\theta}{L\sin^2\theta}\dot\theta$$

$$\theta + \varphi = 180^\circ \Rightarrow \dot\theta + \dot\varphi = 0 \Rightarrow \dot\theta = -\dot\varphi = -\omega$$

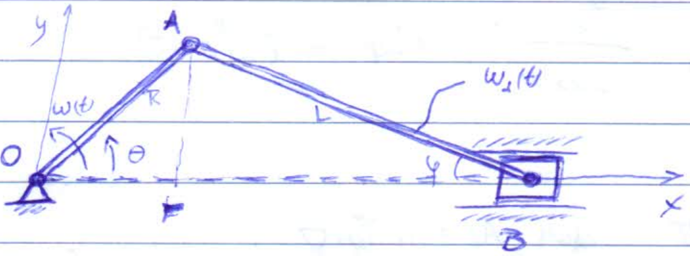
Επομένως $\alpha = \dfrac{\dot v_0(t)}{L\sin\theta} + \dfrac{v_0(t)\,\omega(t)\cos\theta}{L\sin^2\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\dot v_0(t)}{L\sin\theta} + \frac{v_0^2(t)}{L^2\sin^3\theta}\cdot\cos\theta}$$

– Πρόοδος 9^{00} (παρά) – 11^{00} –

Εφαρμογή

~~Σύστημα~~ : Σύστημα Στροφάλου - Διωστήρα - Εμβόλου.



Δίνεται : $\omega(t)$.

Ζητείται : 1. $v_B(t)$

2. $a_B(t)$

3. $\omega_1 = \omega_{AB}$

4. $\alpha_1 = \alpha_{AB}$

$OA = R \quad , \quad AB = L$

- Σώμα OA : → Κίνηση : περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα
- Σώμα OB : → Κίνηση : γενική επίπεδη κίνηση.

Γενικές σχέσεις - Θεωρεία : | $v_B = v_A + \omega \times r_{AB}$ (*)

(AB : της Θεωρείας - όχι τα συγκεκριμένα) | $a_B = a_A + \alpha \times r_{AB} - \omega^2 r_{AB}$ (**)

1 και 3) Ράβδος OA : $v_A = \omega \times r_{OA}$

$\Rightarrow v_A = (\omega e_z) \times [R\cos\theta e_x + R\sin\theta e_y] \Rightarrow$

$\Rightarrow v_A = \omega R\cos\theta e_y - \omega R\sin\theta e_x \to \boxed{v_A = -\omega R\sin\theta e_x + \omega R\cos\theta e_y}$

Ράβδος AB : Μελετώ κίνηση.

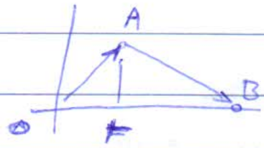
$v_B = v_A + \omega_{AB} \times r_{AB} = v_A + (\omega_1 \times r_{AB})$

$v_B = v_B e_x$

μία άγνωστη

$\omega_{AB} = \omega_1 = \omega_1 e_z$

$r_{AB} = L\cos\varphi e_x - L\sin\varphi e_y$



Αντικατάσταση : $v_B e_x = v_A + (\omega_1 e_z) \times (L\cos\varphi e_x - L\sin\varphi e_y) \to$

$\Rightarrow v_B e_x = -\omega R\sin\theta e_x + \omega R\cos\theta e_y + L\omega_1\cos\varphi e_y + L\omega_1\sin\varphi e_x \Rightarrow$

$\Rightarrow v_B e_x = (L\omega_1\sin\varphi - \omega R\sin\theta) e_x + (\omega R\cos\theta + L\omega_1\cos\theta) e_y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_B = L\omega_1\sin\theta - R\omega\sin\theta & (1) \\ 0 = \omega R\cos\theta + L\omega_1\cos\varphi & (2) \end{cases}$$

σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους ω_1, v_B.

$(2) \Rightarrow \omega_1^{(t)} = -\omega^{(t)} \dfrac{R\cos\theta}{L\cos\varphi}$

$(1) \Rightarrow v_B^{(t)} = L\left(-\dfrac{\omega^{(t)} R\cos\theta}{L\cos\varphi}\right)\sin\varphi - R\omega^{(t)}\sin\theta.$

Απο το τριγωνο ΟΑΓ, εχω $A\Gamma = R\sin\theta$
ΑΓΒ, εχω $A\Gamma = L\sin\varphi$ $\Big\} \Rightarrow L\sin\varphi = R\sin\theta$

Τριγωνο ΑΓΒ: $\Gamma B = L\cos\varphi = \sqrt{AB^2 - A\Gamma^2} = \sqrt{L^2 - R^2\sin^2\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow L\cos\varphi = R\sqrt{r^2 - \sin^2\theta}$, όπου $r = \dfrac{L}{R}$ (αδιάστατη ποσότητα)

Οποτε: $\omega_1(t) = -\omega(t)\dfrac{R\cos\theta}{R\sqrt{r^2-\sin^2\theta}} \Rightarrow \boxed{\omega_1(t) = -\omega(t)\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{r^2-\sin^2\theta}}}$, $r = \dfrac{L}{R}$

$(1) \Rightarrow v_B(t) = \omega_1(t) L\sin\varphi - \omega(t) R\sin\theta =$

$= \omega(t)\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{r^2-\sin^2\theta}} R\sin\theta - \omega(t) R\sin\theta. \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v_B(t) = -\omega(t) R\sin\theta\left[1 + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{r^2-\sin^2\theta}}\right]}$

Πρέπει: $r^2 - \sin^2\theta > 0 \Leftrightarrow r > 1 \Leftrightarrow \boxed{L > R}$

4) $\alpha_{AB} = \alpha_1$

γινομενο 3 ορων

$\alpha_1 = \dot{\omega}_1(t) = \dfrac{d}{dt}\left[-\omega(t)\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{r^2-\sin^2\theta}}\right] = -\dot{\omega}(t)\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{}} +$

$-\omega(t)\dfrac{-\sin\theta\,\dot{\theta}}{\sqrt{}} - \omega(t)\cos\theta\left(\dfrac{-1}{(\sqrt{})^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{}}\right)(-2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}) =$

$= -\dot{\omega}(t)\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{}} + \dfrac{\omega(t)\sin\theta\,\dot{\theta}}{\sqrt{}} - \omega(t)\,\dot{\theta}\,\dfrac{\sin\theta\cos^2\theta}{(r^2-\sin^2\theta)^{3/2}}$

$\dot{\theta} = \omega(t)$.

$$\Rightarrow a_1(t) = -\dot{\omega}(t)\frac{\cos\theta}{\sqrt{}} + \frac{\omega^2(t)\sin\theta}{\sqrt{}} - \omega^2(t)\frac{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{(r^2-\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$a_1(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2-\sin^2\theta}}\left[-\dot{\omega}(t)\cos\theta + \omega^2\sin\theta\left(1-\frac{\cos^2\theta}{r^2-\sin^2\theta}\right)\right]$$

• Ειδική περίπτωση: Εαν $\omega(t) = \omega_0$ = σταθερο.

$\Rightarrow \dot{\omega}(t) = 0$

$\Rightarrow a_1(t) \neq 0$.

2) Επιτάχυνση $a_B(t)$.

1ος τροπος: $a_B(t) = \dot{v}_B(t) = \cdots$ παραγώγηση.

Β' τροπος 2) και 4). χρησιμοποιώντας την ~~εξ~~ εξισωση (**)

Ράβδος ΟΑ $\quad \underset{\sim}{a}_A = \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r}_{OA} - \omega^2 \underset{\sim}{r}_{OA}$

$$= (\dot{\omega}\,\underset{\sim}{e}_z) \times (R\cos\theta\,\underset{\sim}{e}_x + R\sin\theta\,\underset{\sim}{e}_y) - \omega^2(R\cos\theta\,\underset{\sim}{e}_x + R\sin\theta\,\underset{\sim}{e}_y)$$

$$= -(\dot{\omega}R\sin\theta + \omega^2 R\cos\theta)\,\underset{\sim}{e}_x + (\dot{\omega}R\cos\theta - \omega^2 R\sin\theta)\,\underset{\sim}{e}_y.$$

Ράβδο ΑΒ: $\quad \underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{\alpha}_A + \underset{\sim}{\alpha}_1 \times \underset{\sim}{r}_{AB} - \omega_1^2\,\underset{\sim}{r}_{AB} \Rightarrow$

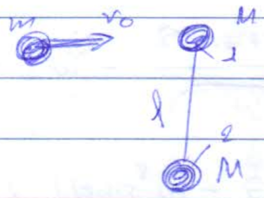
$$\Rightarrow a_B\,\underset{\sim}{e}_x = \underset{\sim}{a}_A + (\dot{\omega}_1\,\underset{\sim}{e}_z) \times [L\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_x - L\sin\varphi\,\underset{\sim}{e}_y] - \omega_1^2[L\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_x - L\sin\varphi\,\underset{\sim}{e}_y]$$

$$\Rightarrow a_B\,\underset{\sim}{e}_x = \underset{\sim}{a}_A + L\dot{\omega}_1\sin\varphi\,\underset{\sim}{e}_x + L\dot{\omega}_1\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_y - \omega_1^2 L\cos\varphi\,\underset{\sim}{e}_x + \omega_1^2 L\sin\varphi\,\underset{\sim}{e}_y$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_B = -\dot{\omega}R\sin\theta - \omega^2 R\cos\theta + L\dot{\omega}_1\sin\varphi - \omega_1^2 L\cos\varphi \\ 0 = \dot{\omega}R\cos\varphi - \omega^2 R\sin\theta + L\dot{\omega}_1\cos\varphi + \omega_1^2 L\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{2 εξισωσεις} \\ \text{2 αγνωστοι}\end{array}$$

$a_B(t)$, $\dot{\omega}_1 = a_1(t)$.

Άσκηση 2 - 5η Σειρά Εργασιών.



Σύστημα: Τα 3 σώματα.
οι εξωτερικές δυνάμεις = 0.
↳ Αρχή Διατήρησης Ορμής (1)
↳ Αρχή Διατήρησης Στροφορμής. (2)

Άγνωστοι πριν: καμμία
μετά: u, u_1, u_2 ~> (3 άγνωστες)

$$e = -\frac{u - u_1}{v_0 - 0} \quad (3)$$ (3 εξισώσεις)

$$\Delta E = T_{\pi\rho\iota\nu} - T_{\mu\varepsilon\tau\alpha}.$$

[• Αν: Δεν δίνω το e, Δίνεται το $\underline{\underline{\Delta E}}$ ενέργεια παραμόρφωσης, μεταβολή ενέργεια
η τρίτη εξίσωση θα είναι η: $\Delta E = T_{\pi\rho\iota\nu} - T_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$ (3).]

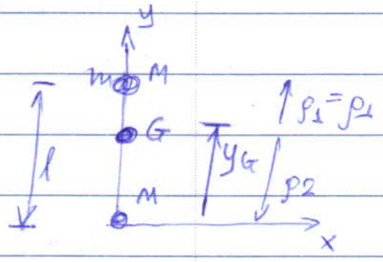
(1) Αρχή διατήρησης Ορμής.

$\underset{\sim}{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \underset{\sim}{L}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$

$m v_0 = m u + M u_1 + M u_2$ (1) → ?

(2) Αρχή διατήρησης Στροφορμής ?

$\underset{\sim}{H}_{P,\pi\rho\iota\nu} = \underset{\sim}{H}_{P,\mu\varepsilon\tau\alpha} + \underset{\sim}{r}_P \times (m \underset{\sim}{v}_G)$



Κέντρο βάρους G: $\underset{\sim}{r}_G = y_G \underset{\sim}{e}_y$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i m_i}{m + 2M} = \frac{l \cdot M + 0 + l m}{2M + m} = L \frac{M + m}{2M + m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_G = L \frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \quad \text{όπου } \lambda = \frac{m}{M}$$

στο σημείο G: $\underset{\sim}{r}_P \times m \underset{\sim}{v}_G = 0$.

($P \equiv G$)

Άρα $\underset{\sim}{H}_{G,\,\pi\rho\iota\nu} = \underset{\sim}{H}_{G,\,\mu\varepsilon\tau\alpha}$

$$\underset{\sim}{H}_G = \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{\rho}_i \times m_i \underset{\sim}{v}_i$$

Όποτε $\underset{\sim}{H}_{G,\pi\rho\iota\nu} = \underset{\sim}{\rho}_3 \times m_3 \underset{\sim}{v}_3 = -\rho_3 m_3 v_0 \underset{\sim}{e}_z = -(L-y_G)\, m v_0 \underset{\sim}{e}_z$

$$= -\left(L - L\frac{1+\lambda}{2+\lambda}\right) m v_0 \underset{\sim}{e}_z = -\frac{m L v_0}{2+\lambda}\underset{\sim}{e}_z$$

$$\underset{\sim}{H}_{G,\mu\varepsilon\tau\alpha} = \underset{\sim}{\rho}_1 \times m_1 \underset{\sim}{v}_1 + \underset{\sim}{\rho}_2 \times m_2 \underset{\sim}{v}_2 + \underset{\sim}{\rho}_3 \times m_3 \underset{\sim}{v}_3 =$$

$$= (\rho_1 \underset{\sim}{e}_y) \times M(u_1 \underset{\sim}{e}_x) + (-\rho_2 \underset{\sim}{e}_y) \times M(u_2 \underset{\sim}{e}_x) + (\rho_1 \underset{\sim}{e}_y) \times m(u \underset{\sim}{e}_x) =$$

$$= \left[-\rho_1 M u_1 + \rho_2 M u_2 - \rho_1 m u\right] \underset{\sim}{e}_z =$$

$$L - y_G = L - L\frac{1+\lambda}{2+\lambda} = \frac{L}{2+\lambda}$$

$$= \left[-(L-y_G) M u_1 + y_G M u_2 - (L-y_G) m u\right]\underset{\sim}{e}_z =$$

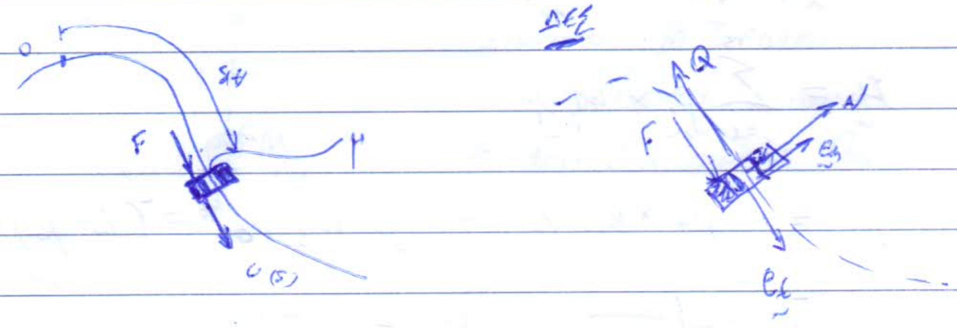
$$\Rightarrow \underset{\sim}{H}_{G,\mu\varepsilon\tau\alpha} = \left[-\frac{L}{2+\lambda} M u_1 + L\frac{1+\lambda}{2+\lambda} M u_2 - \frac{L}{2+\lambda} m u\right]\underset{\sim}{e}_z$$

Αντικατάσταση: $-\frac{m L v_0}{2+\lambda} = -\frac{L}{2+\lambda} M u_1 + L\frac{1+\lambda}{2+\lambda} M u_2 - \frac{L}{2+\lambda} m u$

$$\Rightarrow \boxed{-m v_0 = -M u_1 + (1+\lambda) M u_2 - m u} \quad (2).$$

— Λύσεις Προόδου —

Θέμα 1.



$υ(s) = υ(s(t))$.

1. Τροχιακές Συντεταγμένες $\underset{\sim}{a} = \ddot{s}\,\underset{\sim}{e_t} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\,\underset{\sim}{e_n}$

κανόνας αλυσίδας.

Επιτρόχιος επιτάχυνση : $\ddot{s} = \dfrac{d}{dt}(\dot{s}) = \dfrac{d}{dt}(V(t)) = \dfrac{d}{dt}\left[υ(s(t))\right] =$

$= \dfrac{dυ(s)}{ds} \cdot \underbrace{\dfrac{ds}{dt}}_{\dot{s}=V} = V'(s) \cdot V(s).$

2. Εξισώσεις Κίνησης

$F - Q = m\ddot{s}$ (1)

$N = m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho}$ (2)

Κινηματικός περιορισμός :

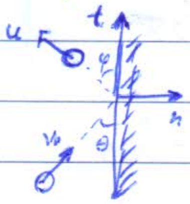
$Q = \mu \cdot N.$ (3)

$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} F = \mu N + m\ddot{s} \overset{(2)}{\Rightarrow} F = \mu m \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} + m\ddot{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(s) = \mu\, m\, \dfrac{V^2(s)}{\rho(s)} + m\,υ'(s)\,υ(s).$

3. $\dot{s} = υ(s) \Rightarrow \dfrac{ds}{dt} = υ(s) \Rightarrow \dfrac{ds}{υ(s)} = dt \Rightarrow \boxed{\int_0^L \dfrac{ds}{υ(s)} = t}$

Θέμα 2ο



$$E_0 = \frac{3}{8} m v_0^2 \sin^2\theta$$

$$E_0 = \Delta E = T_{\pi\rho\iota\nu} - T_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \quad (*)$$

$$T_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{0n}^2 + \frac{1}{2} m v_{0t}^2$$

$$T_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m (u_{0n}^2 + u_{0t}^2)$$

Κρούση:

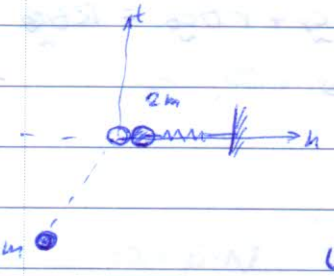
$$u_{0t} = v_{0t}$$

$$e = -\frac{u_{0n}}{v_{0n}}$$

$$(*) \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} m (v_{0n}^2 - u_{0n}^2) = \frac{1}{2} m (v_0^2 \sin^2\theta - e^2 v_0^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{2} m v_0^2 \sin^2\theta (1 - e^2)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} m v_0^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} m v_0^2 \sin^2\theta (1 - e^2) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{2}}$$



$$\Delta E = T_{\pi\rho\iota\nu} - T_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \frac{1}{2} m (v_{0n}^2 + \cancel{v_{0t}^2}) - \frac{1}{2} m (u_{1n}^2 + \cancel{u_{1t}^2}) + \\ - \frac{1}{2}(2m)(u_{2n}^2 + u_{2t}^2).$$

$$u_{1t} = v_{0t}$$

$$u_{2t} = v_{2t} = 0$$

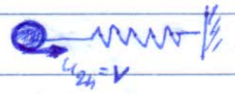
$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} m v_{0n}^2 - \frac{1}{2} m u_{1n}^2 - \frac{1}{2}(2m) u_{2n}^2.$$

Κρούση: $u_{1n} = \dots$

$u_{2n} = \dots \qquad , \quad e = \frac{1}{2}.$

Και αντικαθιστάμε.

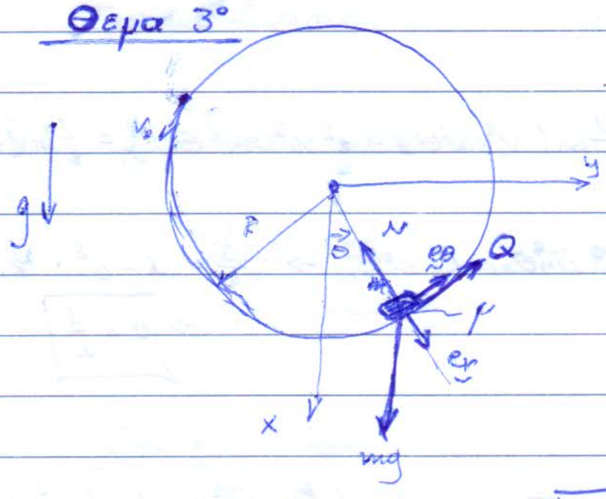
Μετά την κρούση



Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

$$T_{μετα} + V_{μετα} = T + V \Rightarrow \frac{1}{2}(2m)\, u_{2f}^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \dots\ x = 0$$

Θέμα 3°



1. Εξισώσεις Κίνησης Πολικό

$$F_r = m a_r \Rightarrow -N + mg\cos\theta = m(\cancel{\ddot r} - r\dot\theta^2)$$

$$F_\theta = m a_\theta \Rightarrow -mg\sin\theta + Q = m(\cancel{2\dot r\dot\theta} + r\ddot\theta)$$

Κινηματικοί περιορισμοί:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{v} &= \dot r\, \underset{\sim}{e_r} + r\dot\theta\, \underset{\sim}{e_\theta} = R\dot\theta\, \hat e_\theta \\ \underset{\sim}{v} &= v_0\, \hat e_\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_0 = R\dot\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\theta = \frac{v_0}{R}}$$

$$\Rightarrow \ddot\theta = 0.$$

(1) $\Rightarrow N = mg\cos\theta + mR\dot\theta^2 = mg\cos\theta + mR\frac{v_0^2}{R^2} \Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R}$

(2) $Q = mg\sin\theta$.

2. $N \geq 0 \Rightarrow mg\cos\theta + \frac{v_0^2}{R} m \geq 0 \xrightarrow{(\theta=\pi)} \dots \Rightarrow \boxed{v_0^2 \geq gR}$.

3. $R\ddot{\Theta} = a_0$ ή $-a_0$ ή a_0 (αλγεβρικό).

$R\dot{\Theta} = a_0 \rightarrow \dot{\Theta} = \frac{a_0}{R}t + c$ ①

$\boxed{v = R\dot{\Theta}} \Rightarrow \dot{\Theta} = \frac{v(\Theta)}{R}$

$t=0 \rightarrow \Theta=0 \rightarrow \dot{\Theta}(0) = \frac{v_0}{R} = \frac{v_0}{R}$

Οποτε $\frac{v_0}{R} = \frac{a_0}{R} \cdot 0 + c \rightarrow \boxed{c = \frac{v_0}{R}}$

Αρα ① $\rightarrow \dot{\Theta} = \frac{a_0}{R}t + \frac{v_0}{R}$.

Ολοκληρωνοντας: $\Theta(t) = \frac{1}{2}\frac{a_0}{R}t^2 + \frac{v_0}{R}t + e$.

ΑΣ: $\Theta(0) = 0 \rightarrow e = 0$

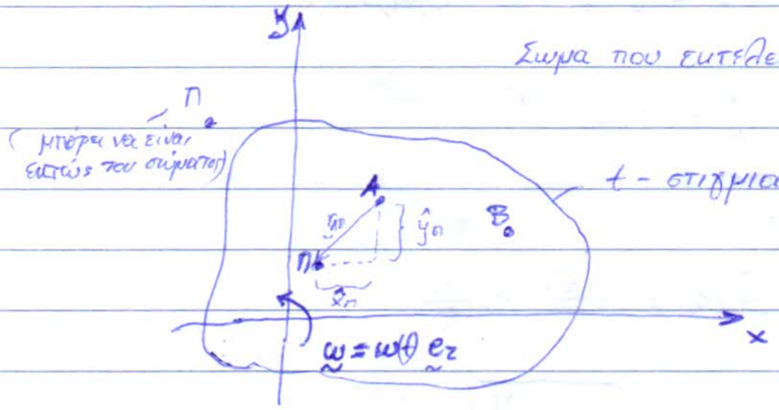
$\rightarrow \Theta(t) = \frac{1}{2}\frac{a_0}{R}t^2 + \frac{v_0}{R}t \rightarrow t = ?$ συναρτησει του Θ.

4. $Q = \mu \cdot N$

3 εξισωσεις - 3 αγνωστοι.

Στιγμιαίος Πόλος Περιστροφής

Σωμα που εκτελεί επίπεδη κινηση.



υπάρχει σημείο Π, με ταχύτητα $v_Π = 0$?

Αυτό το σημείο Π, καλείται στιγμιαίος πόλος περιστροφής.

Εαν Π υπάρχει, τότε ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} v_Π &= v_A + ω \times r_{AΠ} \\ v_Π &= 0 \quad (\text{Π: στιγμιαίος πόλος περιστροφής}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_A + ω \times r_{AΠ} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow v_A = \cancel{v_Π}^{\,0} + ω \times r_{ΠA} \Rightarrow v_A = ω \times r_{ΠA}.$$

$$r_{AΠ} = \hat{x}_Π e_x + \hat{y}_Π e_y$$

$$v_A = v_x e_x + v_y e_y$$

Αντικαθιστώ στην (1)

$$v_x e_x + v_y e_y + (ω e_z) \times (\hat{x}_Π e_x + \hat{y}_Π e_y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_x e_x + v_y e_y + ω \hat{x}_Π \cdot e_y - ω \hat{y}_Π \cdot e_x = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} v_x - ω \hat{y}_Π &= 0 \\ v_y + ω \hat{x}_Π &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{x}_Π &= -\frac{v_y}{ω} \\ \hat{y}_Π &= \frac{v_x}{ω} \end{aligned}}$$

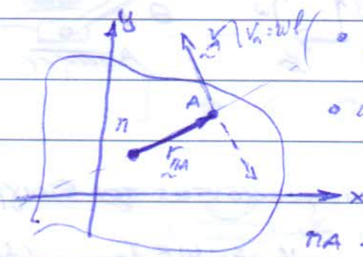
Θεωρώ ένα άλλο σημείο B πάνω στο σώμα :

$$\underset{\sim}{V_B} = \underset{\sim}{V_\Pi} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{\Pi B}} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{V_B} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{\Pi B}}$$

$\underset{\sim}{V_\Pi} = \underset{\sim}{0}$

Το B μπορεί να είναι και το A.

(1) $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{V_A} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{\Pi A}}$



- V_A πάνω στο επίπεδο της κίνησης ($\perp \omega$)
- και κάθετο με το $r_{\Pi A}$ ($\perp r_{\Pi A}$)

$\Pi A = l$

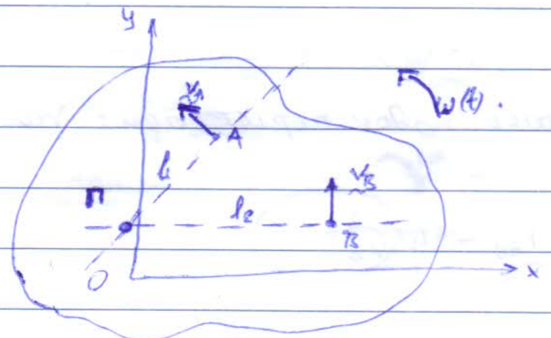
$\underset{\sim}{V_A} \perp \underset{\sim}{r_{\Pi A}}$ και ανήκει στο επίπεδο κίνησης

- Επομένως ο στιγμιαίος πόλος περιστροφής Π είναι σημείο σε ευθεία που βρίσκεται κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας $\underset{\sim}{V_A}$ στο σημείο A.

- Το αλγεβρικό μέτρο της ταχύτητας $\underset{\sim}{V_A}$ είναι : $|\underset{\sim}{V_A}| = |\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{\Pi A}}| \overset{(\Pi A = l)}{=} \omega \cdot l \cdot \cancel{\sin(90^\circ)}$

$\rightarrow V_A = \omega \cdot l$

Εφαρμογή 1



Γνωρίζω: τις διευθύνσεις των οι ταχύτητες $\underset{\sim}{V_A}$, $\underset{\sim}{V_B}$ (2 σημείων) και το $\omega(t)$

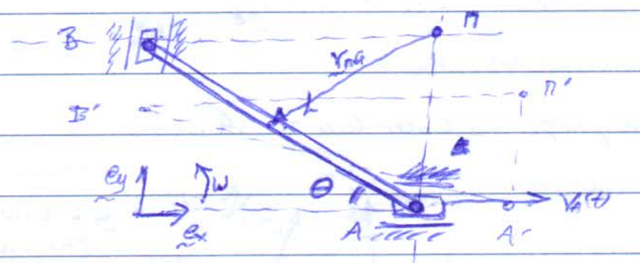
Που βρίσκεται ο στιγμιαίος πόλος περιστροφής Π = ? (γραφικά)

$$V_A(t) = \omega(t) \cdot l_1$$

$$V_B(t) = \omega(t) \cdot l_2$$

Ο ΣΠΠ : Βρίσκεται στο σημείο τομής των κάθετων στις ταχύτητες ευθειών.

Εφαρμογή (Προηγούμενη)



Δίνεται: $V_A(t)$

Ζητείται: $V_B(t)$, $a_B(t)$

$V_G(t)$, $a_G(t)$

Χρησιμοποιώντας τον στιγμιαίο πόλο περιστροφής:

$\underset{\sim}{V_B} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{\Pi B}}$ (1)

$\underset{\sim}{V_A} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{\Pi A}}$ (2) $\to \underset{\sim}{\omega}$

$\underset{\sim}{V_G} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r_{\Pi G}}$ (3)

(2) $\Rightarrow V_A(t)\, \underset{\sim}{e_x} = (\omega\, \underset{\sim}{e_z}) \times (-L \sin\theta\, \underset{\sim}{e_y}) \Rightarrow V_A(t)\, \underset{\sim}{e_x} = \omega L \sin\theta\, \underset{\sim}{e_x} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_A = \omega L \sin\theta \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{V_A}{L \sin\theta}}$

(1) $\overset{\omega}{\Rightarrow} \underset{\sim}{V_B}$ ΗΛ

(3) $\overset{\omega}{\Rightarrow} \underset{\sim}{V_G}$

Υπαρχει αναλογο του στιγμιαιου πολου περιστροφης για τις επιταχύνσεις

↳ Ναι!

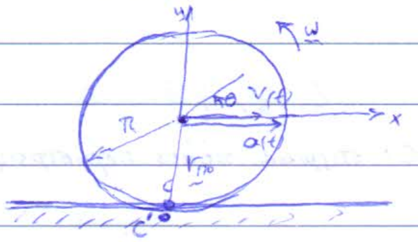
$\underset{\sim}{a_B} = \underset{\sim}{a_A} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{AB}} - \omega\, \underset{\sim}{r_{AB}}^2$

$\Pi^* \to \underset{\sim}{a_\Pi} = \underset{\sim}{0}$?

$\underset{\sim}{a_\Pi} = \underset{\sim}{a_A} + \alpha\, \underset{\sim}{r_{A\Pi^*}} - \omega^2\, \underset{\sim}{r_{A\Pi^*}}$

$\underset{\sim}{a_{\Pi^*}} = \underset{\sim}{0}$

Εφαρμογή

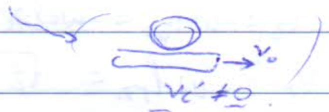


Κύλιση χωρίς ολίσθηση ⇒

- Το C, ως προς το C' δεν ολισθαίνει.
- Σχετική ταχύτητα του C ως προς C' είναι μηδέν $\underset{\sim}{V}_{C/C'} = \underset{\sim}{0}$

$\dot{v}(t) = a(t)$.

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{V}_{C/C'} = \underset{\sim}{0} \\ \text{Εάν } \; &\underset{\sim}{V}_{C'} = \underset{\sim}{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\sim}{V}_C = \underset{\sim}{0}$$



Γενικά $\underset{\sim}{V}_{C/C'} = 0 \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{V}_C = \underset{\sim}{V}_{C'}}$

→ Κινηματικός Περιορισμός μη ολίσθησης.

Κίνηση χωρίς ολίσθηση

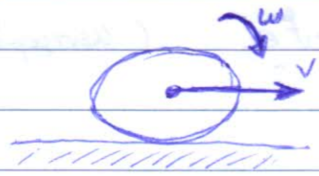
Δίσκος εκτελεί επίπεδη κίνηση

C ≡ Π πόλο περιστροφής, διότι $\underset{\sim}{v}_C = \underset{\sim}{0}$

Άρα: $\underset{\sim}{v}_0 = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{\Pi O} \Rightarrow v\,\underset{\sim}{e}_x = (\omega\,\underset{\sim}{e}_z)\times(R\,\underset{\sim}{e}_y) \Rightarrow$

$\Rightarrow v\,\underset{\sim}{e}_x = -R\omega\,\underset{\sim}{e}_x \Rightarrow v = -R\omega \Rightarrow \boxed{\omega = -\frac{v}{R}}$ λογικό.

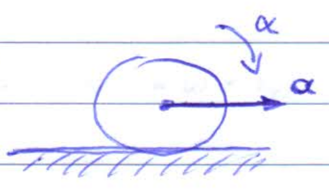
Άρα



$\omega = \frac{v}{R}$ ή $\boxed{v = \omega R}$ για κύληση χωρίς ολίσθηση.

Αρχίζοντας με: $\omega = -\frac{v}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{\dot{v}}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{a}{R}}$

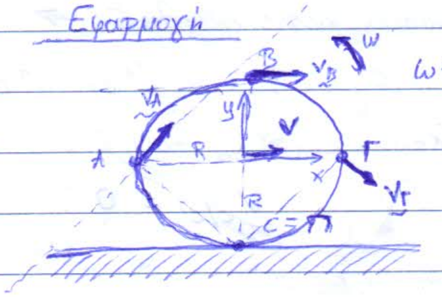
Επομένως



$\alpha = \frac{a}{R}$ ή $\boxed{\alpha = aR}$

Εφαρμογή

Ταχύτητες



$\omega = \frac{v}{R}$

$\underset{\sim}{v_A}, \underset{\sim}{v_B}, \underset{\sim}{v_\Gamma} = ?$

C: στιγμιαίο πόλος περιστροφής

- $v_A = \omega\, l_{A\Pi} = \omega\sqrt{R^2+R^2} = \omega\sqrt{2}\cdot R = \sqrt{2}\,R\omega$
- $v_B = \omega\, l_{B\Pi} = \omega\, 2R = 2R\omega$
- $v_\Gamma = \omega\, l_{\Gamma\Pi} = \sqrt{2}\,R\omega.$

Επιτάχυνση του C.

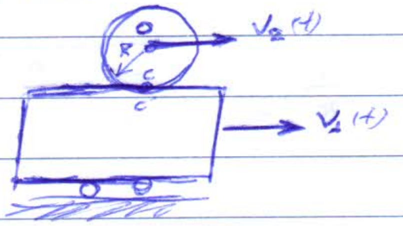
$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{a_c} &= \underset{\sim}{a_o} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r_{oc}} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{oc}} \\ \underset{\sim}{a_o} &= a\, \underset{\sim}{e_x} \\ \underset{\sim}{\alpha} &= \alpha\, \underset{\sim}{e_z} \\ \underset{\sim}{r_{oc}} &= -R\, \underset{\sim}{e_y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\sim}{a_c} = a\,\underset{\sim}{e_x} + (\alpha \underset{\sim}{e_z}) \times (-R\,\underset{\sim}{e_y}) - \omega^2 \underset{\sim}{r_{oc}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \underset{\sim}{a_c} &= a\,\underset{\sim}{e_x} + \alpha R\,\underset{\sim}{e_x} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{oc}} \\ a &= -\alpha R \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a_c} = -\cancel{\alpha R}\,\underset{\sim}{e_x} + \cancel{\alpha R}\,\underset{\sim}{e_x} - \omega^2 \underset{\sim}{r_{oc}} \Rightarrow \underset{\sim}{a_c} = -\omega^2 \underset{\sim}{r_{oc}} = -\omega^2(-R\,\underset{\sim}{e_y}) =$$

$$= +R\omega^2 \underset{\sim}{e_y} \Rightarrow \underset{\sim}{a_c} = R\omega^2 \underset{\sim}{e_y}$$ (κεντρομόλος).

Εφαρμογή



χωρίς ολίσθηση

Δίνονται $v_1(t)$, $v_2(t)$.

Να βρεθεί η $\omega(t)$.

} απόλυτες ταχύτητες

Κινηση χωρις ολισθηση : (κινηματικος περιορισμος)

$v_c = v_{c'}$

Δεδομενο $v_{c'} = v_1(t)\, e_x$ $\Big\}$ $v_c = v_1(t)\, e_x$

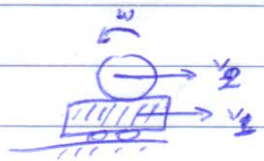
Δίσκος εκτελει επιπεδη κινηση

$$v_0 = v_c + \omega \times r_{co} \Rightarrow v_2(t) e_x = v_1(t) e_x + (\omega e_z) \times (R e_y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2(t) e_x = v_1(t) e_x - R\omega e_x \Rightarrow v_2(t) = v_1(t) - R\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R}} \xrightarrow{\text{παραγ/ντας}} \boxed{\alpha = \frac{\dot{v}_1(t) - \dot{v}_2(t)}{R}}$$

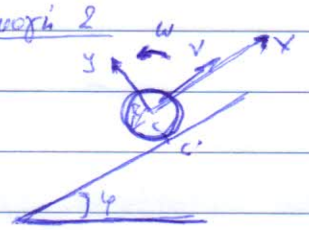
Για $v_1 > v_2$



ενω για $v_1 < v_2$ ω

$v_1(t) - v_2(t)$: η σχετική ταχυτητα του κεντρου του δισκου ως προς το οχημα.

Εφαρμογή 2

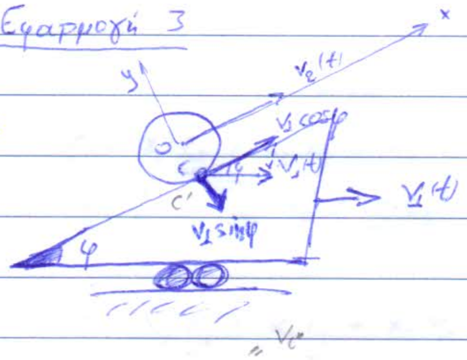


Αμα στρεψουμε το προβλημα, ειναι ιδιο με πριν :

$$\omega = -\frac{v}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{\dot{v}}{R}$$

Εφαρμογή 3

v_1, v_2 : απόλυτες ταχυτητες



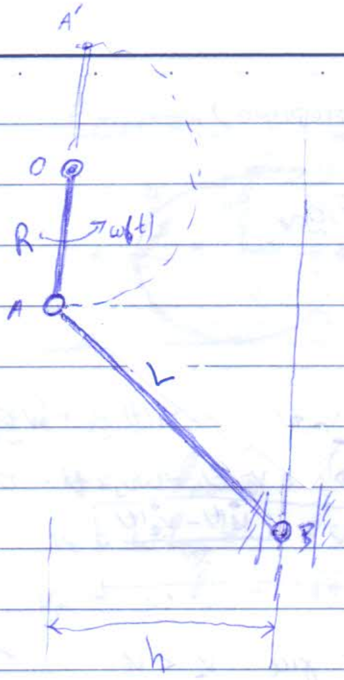
χωρις ολισθηση : $\omega(t) = ?$, $\alpha(t) = ?$

$$v_0 = \overset{v_{c'}}{v_c} + \omega \times r_{co} \Rightarrow \omega = ? \quad , \quad \alpha = ?$$

$$v_2 e_x = v_1 \cos\varphi\, e_x + v_1 \sin\varphi\, e_y + (\omega e_z) \times (R e_y) \Rightarrow v_2 e_x = v_1 \cos\varphi\, e_x + v_1 \sin\varphi\, e_y - R\omega e_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v_2 - v_1 \cos\varphi + R\omega) e_x + (v_1 \sin\varphi) e_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v_1 \cos\varphi - v_2}{R} \quad \text{και} \quad v_1 \sin\varphi = 0$$ ⇝ Λάθος εκφώνηση.



0. Σε ποιο χρόνο η ράβδος OA θα φτάσει στην θέση OA'.

Στη θέση A' να βρεθεί η : 1. $\underset{\sim}{\omega_{AB}}$

2. $\underset{\sim}{V_B}$

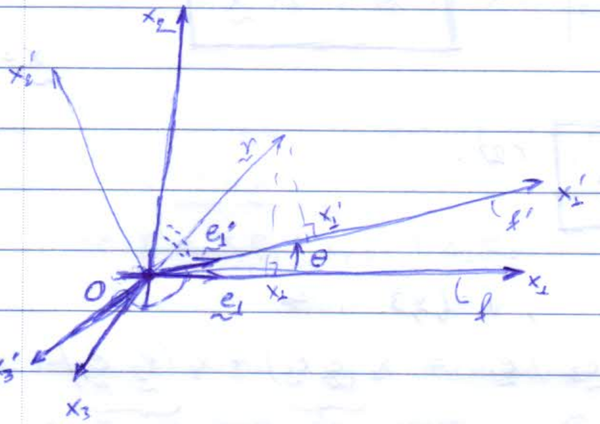
3. $\underset{\sim}{\alpha_{AB}}$

4. $\underset{\sim}{a_B}$:

Περίπτωση 1: $\omega(t) = \omega_0$ = σταθερό

Περίπτωση 2: $\alpha(t) = a_0$ = σταθερό

4) Περιστροφή Γύρω Από Σταθερό Σημείο



Προσανατολισμός του ℓ' ως προς ℓ.

$$\cos\Theta = \underset{\sim}{e_1'}\cdot\underset{\sim}{e_1}$$
$$= \underset{\sim}{e_1'}\cdot\underset{\sim}{e_2}$$
$$= \underset{\sim}{e_1'}\cdot\underset{\sim}{e_3}$$

→ Αυτές οι 3 γωνίες ορίζουν πλήρως τον προσανατολισμό του x_1'

Παρομοίως για τον x_2' : και x_3'

$\underset{\sim}{e_2'}\cdot\underset{\sim}{e_1}$	$\underset{\sim}{e_3'}\cdot\underset{\sim}{e_1}$
$\underset{\sim}{e_2'}\cdot\underset{\sim}{e_2}$	$\underset{\sim}{e_3'}\cdot\underset{\sim}{e_2}$
$\underset{\sim}{e_2'}\cdot\underset{\sim}{e_3}$	$\underset{\sim}{e_3'}\cdot\underset{\sim}{e_3}$

} συνημίτονα κατεύθυνσης.

Τα 9 αυτά ονομάζονται : Συνημίτονα κατεύθυνσης $e_i'\cdot e_j$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$.

Ο πίνακας με στοιχεία αυτά, ονομάζεται πίνακας συνημιτόνων κατεύθυνσης : $A=[a_{ij}]$, όπου: $a_{ij}=\underset{\sim}{e_i'}\cdot\underset{\sim}{e_j}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r} = x_1\underset{\sim}{e_1} + x_2\underset{\sim}{e_2} + x_3\underset{\sim}{e_3} \quad , \quad = x_1'\underset{\sim}{e_1'} + x_2'\underset{\sim}{e_2'} + x_3'\underset{\sim}{e_3'}.$$

$$x_1' = \underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{e_1'} \;,\; x_2' = \underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{e_2'} \;,\; x_3' = \underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{e_3'} \Rightarrow x_i' = r\cdot\underset{\sim}{e_i'} \;,\; i=1,2,3.$$

$$\Rightarrow x_i' = (x_1\underset{\sim}{e_1} + x_2\underset{\sim}{e_2} + x_3\underset{\sim}{e_3})\cdot\underset{\sim}{e_i'} = x_1\underbrace{\underset{\sim}{e_1}\cdot\underset{\sim}{e_i'}}_{e_i'\cdot e_1 = a_{i1}} + x_2\underbrace{\underset{\sim}{e_2}\cdot\underset{\sim}{e_i'}}_{e_i'\cdot e_2 = a_{i2}} + x_3\underbrace{\underset{\sim}{e_3}\cdot\underset{\sim}{e_i'}}_{e_i'\cdot e_3 = a_{i3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i' = x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + x_3 a_{i3}} \quad \boxed{i=1,2,3}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} \\ x_2' &= x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} \\ x_3' &= x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{x}' = A \underset{\sim}{x}} \quad (1), \quad \text{με } \underset{\sim}{x}' = \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix}, \quad \underset{\sim}{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.$$

Παρομοίως: $\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{x} = A^T \cdot \underset{\sim}{x}'}$ (2).

Γ Απόδειξη: $x_i = \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{e}_i \quad , \; i = 1,2,3. \rightarrow$

$$\Rightarrow x_i = (x_1' \underset{\sim}{e}_1' + x_2' \underset{\sim}{e}_2' + x_3' \underset{\sim}{e}_3') \underset{\sim}{e}_i = x_1' \underbrace{(\underset{\sim}{e}_1' \cdot \underset{\sim}{e}_i)}_{a_{1i}} + x_2' \underbrace{(\underset{\sim}{e}_2' \cdot \underset{\sim}{e}_i)}_{a_{2i}} + x_3' \underbrace{(\underset{\sim}{e}_3' \cdot \underset{\sim}{e}_i)}_{a_{3i}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i = x_1' a_{1i} + x_2' a_{2i} + x_3' a_{3i} \quad , \; i = 1,2,3}$$

$$\Rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\underset{\sim}{x} = A^T \underset{\sim}{x}'} \; . \quad ⌋$$

Οποτε οι συντεταγμενες συνδεονται μεσω του πινακα συνημιτονων κατευθυνσης.

(ισχυει $\forall \underset{\sim}{x}$)

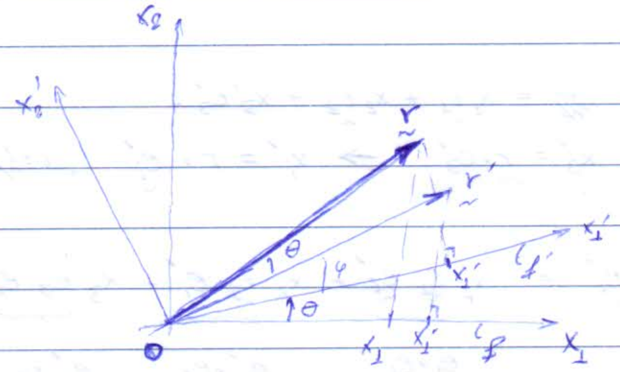
$$(2) \rightarrow \underset{\sim}{x} = A^T \underset{\sim}{x}' \overset{(1)}{\Rightarrow} \underset{\sim}{x} = A^T \cdot A \underset{\sim}{x} \rightarrow (A^T A - I) \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \text{ , αυθεραιτο } \underset{\sim}{x}$$

$$\rightarrow A^T A - I = 0 \Rightarrow \boxed{A^T A = I}$$

$$(1) \Rightarrow \underset{\sim}{x}' = A \cdot \underset{\sim}{x} \overset{(2)}{\Rightarrow} \dots \boxed{A \cdot A^T = I}$$

A: ορθογώνιος πίνακας

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = A^T}$$



- Κανονικα οι αξονες δεν ειναι στο επιπεδο.

- Αν ειμαστε στο επιπεδο (του χαρτιου) ⟵ (το σχημα)

Τα τριγωνα ειναι ισα, αφου:
- $|\underset{\sim}{r}| = |\underset{\sim}{r}'|$
- $\hat{\theta} + \hat{\varphi} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$ ισες γωνιες
-

?

$\rightarrow \underset{\sim}{r} = x_1' \underset{\sim}{e_1}' + x_2' \underset{\sim}{e_2}' + x_3' \underset{\sim}{e_3}' \longrightarrow \ell'$

$\rightarrow \underset{\sim}{r}' = x_1' \underset{\sim}{e_1} + x_2' \underset{\sim}{e_2} + x_3' \underset{\sim}{e_3} \longrightarrow \ell$

πολ/ντας $\times A^T$ και τα 2 μέλη

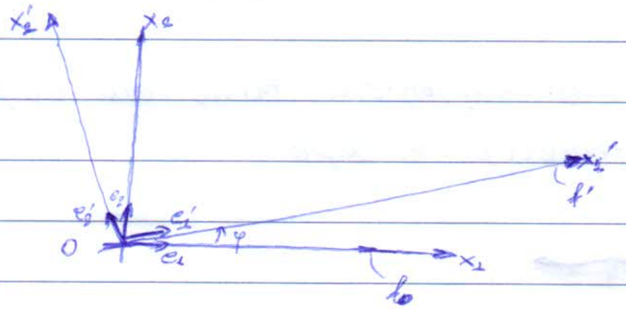
$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{r}' = x_1' \underset{\sim}{e_1} + x_2' \underset{\sim}{e_2} + x_3' \underset{\sim}{e_3} \quad , \text{ως προς } \ell \\ \underset{\sim}{x}' = A \underset{\sim}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{r}' = A \underset{\sim}{r}} \rightarrow \boxed{\underset{\sim}{r} = A^T \underset{\sim}{r}'}$$

$\longrightarrow \underline{r} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$

Ομως $|\underset{\sim}{r}'| = |\underset{\sim}{r}|$.

- Εαν εχω εναν πινακα συνημιτονων κατεύθυνσης A, τοτε $\underset{\sim}{r}' = A\underset{\sim}{r}$
- Το καινουριο διανυσμα, θα εχει μηκος ιδιο με το αρχικό και θα εχει αλλαξει ο προσανατολισμος του.

Εφαρμογή



$x_3' \equiv x_3$

$\underset{\sim}{e_3}' = \underset{\sim}{e_3}$

Προσανατολισμος ℓ' ως προς ℓ: A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = \underset{\sim}{e_i}' \cdot \underset{\sim}{e_j}$$

$a_{11} = \underset{\sim}{e_1}' \cdot \underset{\sim}{e_1} = \cos\varphi$

$a_{12} = \underset{\sim}{e_1}' \cdot \underset{\sim}{e_2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$

$a_{13} = \underset{\sim}{e_1}' \cdot \underset{\sim}{e_3} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

$a_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi.$

$a_{22} = \cos(\varphi)$

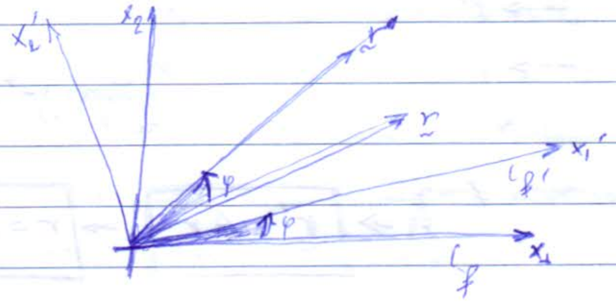
$a_{23} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$a_{31} = 0$

$a_{32} = 0$

$a_{33} = e_3' \cdot e_3 = \cos(0) = 1$

Άρα $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

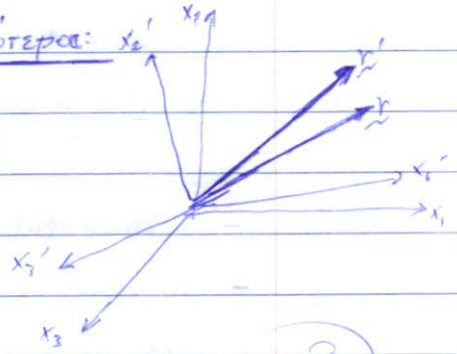


Ισχύει:

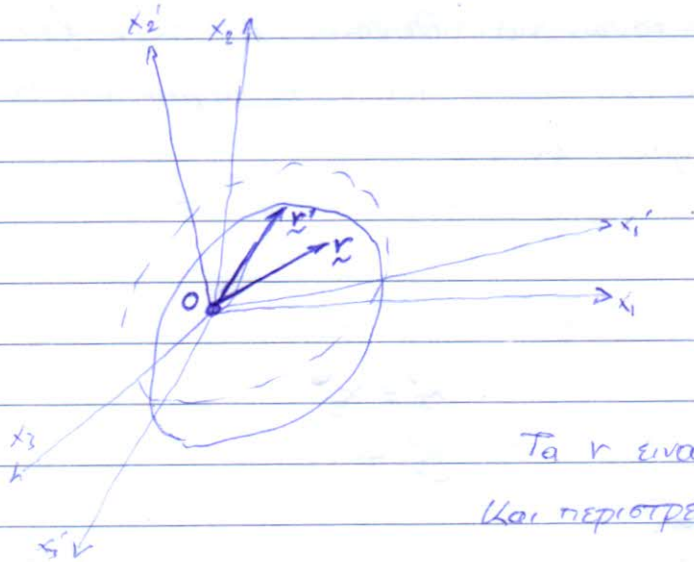
$$\boxed{r' = A^T r}$$

έχουμε αλλάξει τα r και r'.

Γενικότερα:



φ?



−φ?

$$\underset{\sim}{r}' = A^T \underset{\sim}{r}$$

Τα r είναι "καρφωμένα" πάνω στο σώμα. Και περιστρέφουμε το σώμα.

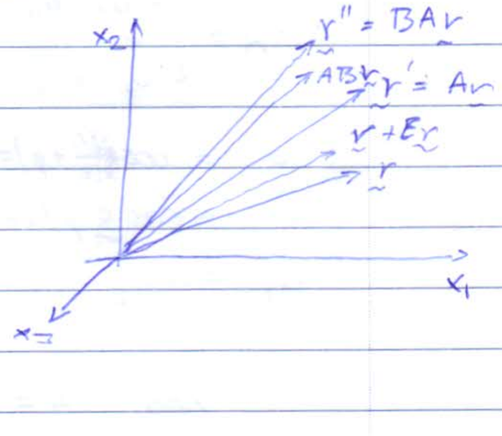
A ορθογώνιος , B ορθογώνιος

$A\underset{\sim}{r}$ ⇝ περιστρέφουμε το $\underset{\sim}{r}$.

$B(A\underset{\sim}{r})$ ⇝ ξαναπεριστρέφουμε το $\underset{\sim}{r}$.

$$B(A\underset{\sim}{r}) = BA\underset{\sim}{r}$$

$$A(B\underset{\sim}{r}) = AB\underset{\sim}{r}$$



και $B(A\underset{\sim}{r}) \neq A(B\underset{\sim}{r})$

αφού $AB \neq BA$.

Επιλέγω $A = I$ (είναι ορθογώνιος πίνακας)

$$A\underset{\sim}{r} = I\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}$$

Επιλέγω: $A = I + E$, $E_{ij} \ll 1$. Τα στοιχεία του E είναι όλα $\ll 1$. πολύ μικρότερα.

$$A\underset{\sim}{r} = (I+E)\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r} + E\underset{\sim}{r}.$$

$$AA^T = I$$

Θεωρώ: $A = I + E$

$B = I + E'$

$AB \overset{?}{=} BA$

$AB = (I+E)\cdot(I+E') = I + E + E' + EE'$

$BA = (I+E')(I+E) = I + E' + E + E'E$

Αφού E: πολύ μικρά : $EE' \Rightarrow 0$, $E'E \to 0$.

<u>Άρα</u> $AB = I + E + E' = BA$.

Δεν παίζει ρόλο η σειρά που εφαρμόζω τους πίνακες.

Θεωρώ απειροστά μικρές περιστροφές.

$A = I + E$, $E_{ij} \leq 1$

$AA^T = A^TA = I$

Αν E απειροστά μικρό

Εξετάζω το $\boxed{A^{-1} = I - E}$

<u>Απόδειξη</u>: $A^{-1}\cdot A = (I-E)(I+E) = I - E + E - E^2 = I - E^2 = I$

A είναι ορθογώνιος $\Rightarrow A^{-1} = A^T \Rightarrow I - E = (I+E)^T \Rightarrow$

$\Rightarrow I - E = I^T + E^T \Rightarrow \cancel{I} - E = \cancel{I} + E^T \Rightarrow \boxed{E^T = -E}$

E = αντισυμμετρικός

Έστω ότι:

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

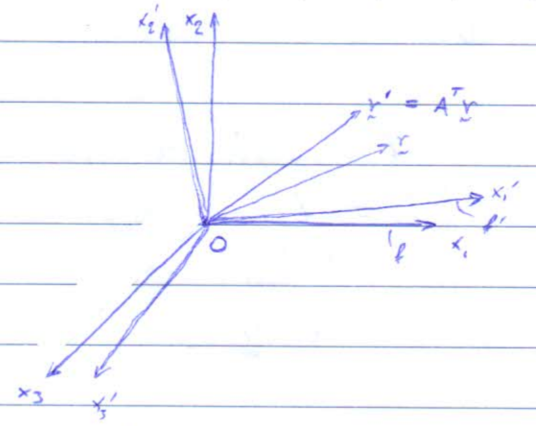
$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{11} \rightarrow 2\varepsilon_{11} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{11} = 0$, παρομοίως $\varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{33} = 0$.

$\Rightarrow \varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{31} = -\varepsilon_{13}$, $\varepsilon_{32} = -\varepsilon_{23}$.

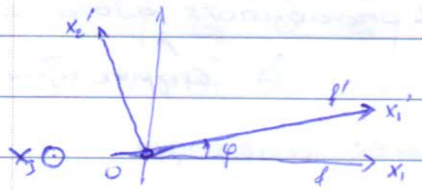
Άρα: $E = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 0 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix}$, άρα γνωρίζω $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$.

και $A = I + E$, για μικρές περιστροφές.

4/12/2012



Συνέχεια Εφαρμογής:



$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όταν $\varphi \to \Delta\varphi$.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi & \sin\Delta\varphi & 0 \\ -\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{*}{=} \begin{bmatrix} 1 & \Delta\varphi & 0 \\ -\Delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} 0 & \Delta\varphi & 0 \\ -\Delta\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = I + E \Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\varphi & 0 \\ -\Delta\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ για περιστροφή γύρω από x_3.

Επίσης προκύπτει:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Delta\varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ για περιστροφή γύρω από x_2

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\varphi \\ 0 & -\Delta\varphi & 0 \end{bmatrix}$$ για περιστροφή γύρω από x_1.

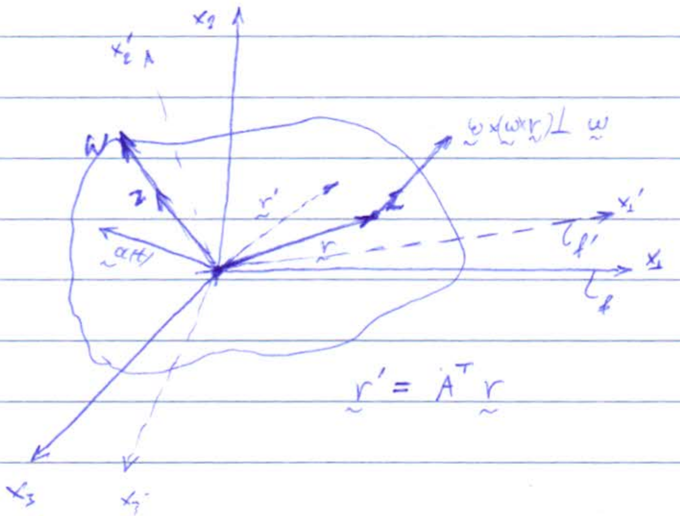
(*) Από σειρές Taylor:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

Για x: μικρό $\rightsquigarrow$ $\sin x = x$, $\cos x = 1$.

Περιστροφή σώματος γύρω από σημείο O.



f': κολλημένο στο σώμα.

$f' \equiv f$ την στιγμή t

συμπίπτει

$t+\Delta t$

$$\underset{\sim}{r}' = A^T \underset{\sim}{r}$$

Το σώμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από 1 οποιοδήποτε άξονα z.

στιγμιαίο άξονα περιστροφής.

Η περιστροφή αποτελείται από 3 διαδοχικές περιστροφές.

1. περιστροφή γύρω από τον άξονα $x_1 \rightarrow A_1$ $(\Delta\theta_1)$
2. —"— $x_2 \rightarrow A_2$ $(\Delta\theta_2)$
3. —"— $x_3 \rightarrow A_3$. $(\Delta\theta_3)$.

Με οποιαδήποτε σειρά γίνουν οι περιστροφές, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

$$\boxed{A = A_3(\Delta\theta_3)\, A_2(\Delta\theta_2)\, A_1(\Delta\theta_1)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta_3 & 0 \\ -\Delta\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta\theta_1 \\ 0 & -\Delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 1 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ταχύτητα του Σ.

$$\underset{\sim}{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underset{\sim}{r}(t+\Delta t) - \underset{\sim}{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underset{\sim}{r}' - \underset{\sim}{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A^T r - r}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(A^T - I)\, r}{\Delta t}$$

Όμως $A = I + \epsilon \rightarrow \epsilon = A - I = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 0 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα:

$$\underset{\sim}{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(A^T - I)\underset{\sim}{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(I + \epsilon^T - I)\underset{\sim}{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\epsilon^T}{\Delta t}\underset{\sim}{r} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Delta\theta_3}{\Delta t} & \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} \\ \frac{\Delta\theta_3}{\Delta t} & 0 & -\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} & \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underset{\sim}{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_3}{\Delta t} & \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_3}{\Delta t} & 0 & -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta} \\ -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} & \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underset{\sim}{r} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 & 0 & -\dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Omega}} \cdot \underset{\sim}{r} \;\to\; \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{\Omega} \cdot \underset{\sim}{r}$$

$\underset{\sim}{\Omega}$ → εξαρτάται από 3 ανεξάρτητα στοιχεία $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$.

Σε μορφή συνιστωσών:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_x &= -y\dot{\theta}_3 + z\dot{\theta}_2 \\ v_y &= x\dot{\theta}_3 - z\dot{\theta}_1 \\ v_z &= -x\dot{\theta}_2 + y\dot{\theta}_1 \end{aligned}}$$

Εισάγοντας το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας: $\underset{\sim}{\omega}$.

$$\underset{\sim}{\omega} = \dot{\theta}_1 \underset{\sim}{e_x} + \dot{\theta}_2 \underset{\sim}{e_y} + \dot{\theta}_3 \underset{\sim}{e_z}, \quad [\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{e_x} + y\underset{\sim}{e_y} + z\underset{\sim}{e_z}] \Rightarrow$$

⇒ Παρατηρώ ότι: $\boxed{\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}}$ ⊛

Για: περιστροφή στο επίπεδο & κίνηση γύρω από ορισμένο άξονα το ω δεν αλλάζει προσανατολισμό.

- Δίνεται ω,

Στιγμιαίος άξονας περιστροφής.

?

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{v} &= \omega \times q \\ \underset{\sim}{v} &= \underset{\sim}{0} \end{aligned}\right\} \; \underset{\sim}{\omega} \times q = 0$$

⊛ $$\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{e_x} & \underset{\sim}{e_y} & \underset{\sim}{e_z} \\ \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\dot{\theta}_2 - y\dot{\theta}_3)\underset{\sim}{e_x} - (z\dot{\theta}_1 - x\dot{\theta}_3)\underset{\sim}{e_y} + (y\dot{\theta}_1 - x\dot{\theta}_2)\underset{\sim}{e_z}.$$

Επιτάχυνση του Σ

$$\underset{\sim}{a} = \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}) = \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{\omega} \times \underbrace{\dot{\underset{\sim}{r}}}_{\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}} = \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}).$$

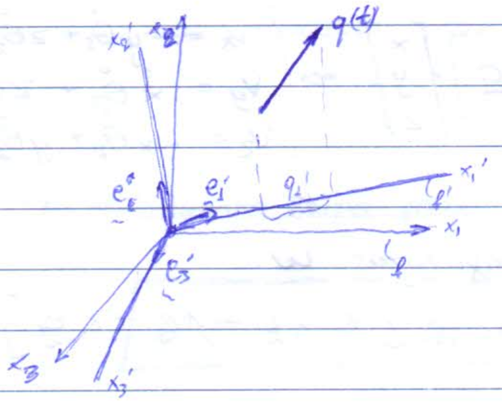
Εισάγω το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης : $\boxed{\underset{\sim}{\alpha} = \dot{\underset{\sim}{\omega}}.}$

Επομένως : $\boxed{\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}).}$

~~Επιτρόχιος επιτάχυνση~~ $\cancel{-\omega^2 \underset{\sim}{r}}$ ← Δεν ισχύει.

κεντρομόλος επιτάχυνση → (⊥ στον άξονα περιστροφής)

Σχετική Κίνηση



- $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3 \rightarrow \underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{\omega}_{\ell'/\ell}$
- Διάνυσμα q στο χώρο, αλλάζει προσανατολισμό με το χρόνο.

Θέλω να περιγράψω το $\left(\dot{\underset{\sim}{q}}\right)_\ell \leftrightarrow \left(\dot{\underset{\sim}{q}}\right)_{\ell'}$

- παράγωγος διανύσματος q, ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

$$\underset{\sim}{q} = q_1' \underbrace{\underset{\sim}{e}_{x_1}}_{e_1'} + q_2' \underbrace{\underset{\sim}{e}_{x_2}}_{e_2'} + q_3' \underbrace{\underset{\sim}{e}_{x_3}}_{e_3'} \rightarrow \underset{\sim}{q} = q_1' \underset{\sim}{e}_1' + q_2' \underset{\sim}{e}_2' + q_3' \underset{\sim}{e}_3'.$$

$$\dot{\underset{\sim}{q}} = \left(\dot{\underset{\sim}{q}}\right)_\ell = \dot{q}_1' \underset{\sim}{e}_1' + q_1' \dot{\underset{\sim}{e}}_1' + \dot{q}_2' \underset{\sim}{e}_2' + q_2' \dot{\underset{\sim}{e}}_2' + \dot{q}_3' \underset{\sim}{e}_3' + q_3' \dot{\underset{\sim}{e}}_3' =$$

$$= (\dot{q}_1' \underset{\sim}{e}_1' + \dot{q}_2' \underset{\sim}{e}_2' + \dot{q}_3' \underset{\sim}{e}_3') + (q_1' \dot{\underset{\sim}{e}}_1' + q_2' \dot{\underset{\sim}{e}}_2' + q_3' \dot{\underset{\sim}{e}}_3').$$

Αν θεωρήσουμε ένα σώμα, r κολλημένο πάνω στο σώμα.

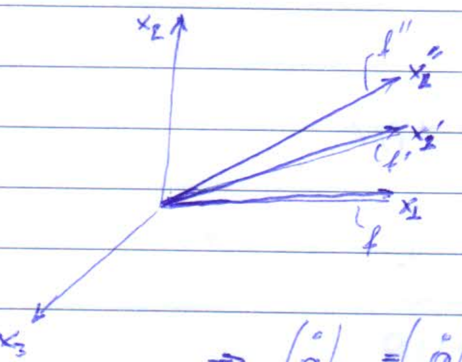
$$v = \dot{r} = \omega \times r.$$, ρυθμός μεταβολής διανύσματος κολλημένου στο σώμα.

$$\dot{e}_1' = \omega \times e_1'$$
$$\dot{e}_2' = \omega \times e_2'$$
$$\dot{e}_3' = \omega \times e_3'$$

Επομένως $\dot{q} = (\dot{q})_f = \underbrace{\dot{q}_1' e_1' + \dot{q}_2' e_2' + \dot{q}_3' e_3'}_{(\dot{q})_f} + \omega \times (\underbrace{q_1 e_1' + q_2 e_2' + q_3' e_3'}_{q}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(\dot{q})_f = (\dot{q})_{f'} + \omega_{f'/f} \times q}$$

Εισάγουμε και 3ο σύστημα: f'' $\longrightarrow$ $\omega_{f''/f}$



$$\left.\begin{aligned}(\dot{q})_f &= (\dot{q})_{f'} + \omega_{f'/f}\, q \\ (q)_{f'} &= (q)_{f''} + \omega_{f''/f'} \cdot q\end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\dot{q})_f = (\dot{q})_{f''} + \omega_{f''/f'} \times q + \omega_{f'/f} \times q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\dot{q})_f = (\dot{q})_{f''} + (\omega_{f''/f'} + \omega_{f'/f}) \times q$$

Επίσης

$$(\dot{q})_f = (\dot{q})_{f''} + \omega_{f''/f} \times q$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{f''/f} = \omega_{f''/f'} + \omega_{f'/f}}$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\boxed{a_{f''/f} = a_{f''/f'} + a_{f'/f} + \underbrace{\omega_{f'/f} \times \omega_{f''/f'}}_{\text{γυροσκοπικός όρος}}}$$

(// $\Rightarrow = 0$.)

Γωνιακή Επιτάχυνση:

$$\underset{\sim}{\alpha}_{\ell'/\ell} = \left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell'/\ell}\right)_{\ell}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}_{\ell''/\ell'} = \left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell''/\ell'}\right)_{\ell'}$$

Απόδειξη (ξεκινούμε από το Β' μέλος).

$$\underset{\sim}{\alpha}_{\ell''/\ell} = \left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell''/\ell}\right)_{\ell} = \left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell''/\ell'} + \dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell'/\ell}\right)_{\ell} = \left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell''/\ell'}\right)_{\ell} + \underbrace{\left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell'/\ell}\right)_{\ell}}_{\underset{\sim}{\alpha}_{\ell'/\ell}}$$

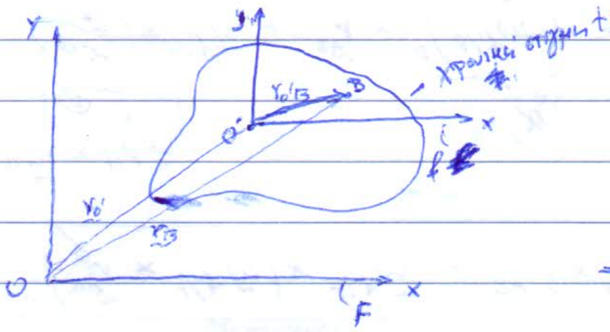
$$\underset{\sim}{\omega}_{\ell''/\ell} = \underset{\sim}{\omega}_{\ell''/\ell'} + \underbrace{\underset{\sim}{\omega}_{\ell'/\ell}}_{\underset{\sim}{\alpha}_{\ell'/\ell}}$$

όμως

$$\underbrace{\left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{\ell''/\ell'}\right)_{\ell}}_{\underset{\sim}{q}} = \underbrace{\underbrace{\left(\underset{\sim}{\omega}_{\ell''/\ell'}\right)_{\ell'}}_{\underset{\sim}{q}}}_{\underset{\sim}{\alpha}_{\ell''/\ell'}} + \underset{\sim}{\omega}_{\ell'/\ell} \times \underset{\sim}{\omega}_{\ell''/\ell'}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}_{\ell''/\ell} = \underset{\sim}{\alpha}_{\ell'/\ell} + \underset{\sim}{\alpha}_{\ell''/\ell'} + \underset{\sim}{\omega}_{\ell'/\ell} \times \underset{\sim}{\omega}_{\ell''/\ell'}$$

5) Γενική Χωρική Κίνηση



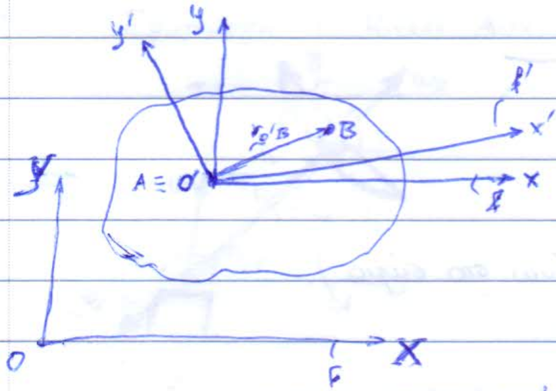
f': κολλημένο στο σώμα. (3ο σύστημα)

$r_B = r_{O'} + r_{O'B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(\dot{r}_B)_F}_{v_B} = \underbrace{(\dot{r}_{O'})_F}_{v_{O'}} + (\dot{r}_{O'B})_F \quad (1)$$

απόλυτες ταχύτητες

Στη χρονική στιγμή t: $f' \parallel f$. $\rightarrow \left[O'x' \parallel O'x \ , \ O'y' \parallel O'y \right]$



ρυθμός αλλαγής προσανατολισμού:

η γωνιακή ταχύτητα του σώματος: $\omega_{f'/F}$

(Ρυθμός μεταβολής διανύσματος καρφωμένου πάνω στο σώμα)

$$\circledast \Rightarrow (\dot{r}_{O'B})_f = \underbrace{(\dot{r}_{O'B})_{f'}}_{0} + \omega_{f'/f} \times r_{O'B} \Rightarrow$$

0 (για παρατηρητή πάνω στο σώμα το ~~σώμα~~ διάνυσμα δεν μετακινείται)

$$\Rightarrow (\dot{r}_{O'B})_f = \omega_{f'/f} \times r_{O'B} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow v_B = v_{O'} + \omega_{f'/F} \times r_{O'B}$$

$O' \equiv A$

$$\boxed{v_B = v_A + \omega_{f'/F} \times r_{AB}} \quad (3)$$

Το ω δεν αλλάζει μόνο μέτρο, αλλάζει και προσανατολισμό.

Επιτάχυνση

$$(\dot{\underset{\sim}{v}}_B)_F = (\dot{\underset{\sim}{v}}_A)_F + \underbrace{(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{f'/F})_F}_{\underset{\sim}{\alpha}_{f'/F}} \times \underset{\sim}{r}_{AB} + \underset{\sim}{\omega}_{f'/F} \times \underbrace{(\dot{\underset{\sim}{r}}_{AB})}_{\underset{\sim}{\omega}_{f'/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{a}_A + \underset{\sim}{\alpha}_{f'/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB} + \underset{\sim}{\omega}_{f'/F} \times (\underset{\sim}{\omega}_{f'/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB}) \quad (4)}$$

Ειδική περίπτωση : περιστροφή σώματος γύρω από ~~το~~ σημείο A.

$\underset{\sim}{v}_A = \underset{\sim}{0}$

$\underset{\sim}{a}_A = \underset{\sim}{0}$

Σημαντικές σχέσεις:

- F ακίνητο
- $f \equiv f'$ κινούμενο (κολλάω πάνω στο σώμα).
- A, B : δύο σημεία πάνω στο σώμα.

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega}_{f/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB} \quad (1) \text{ για χωρική κίνηση.} \\ &\underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{a}_A + \underset{\sim}{\alpha}_{f/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB} + \underset{\sim}{\omega}_{f/F} \times (\underset{\sim}{\omega}_{f/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB}) \end{aligned}\right\} \text{F ακίνητο}$$

Εάν $\underset{\sim}{q}(t)$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα. (δεν είναι κολλημένο πάνω στο σώμα).

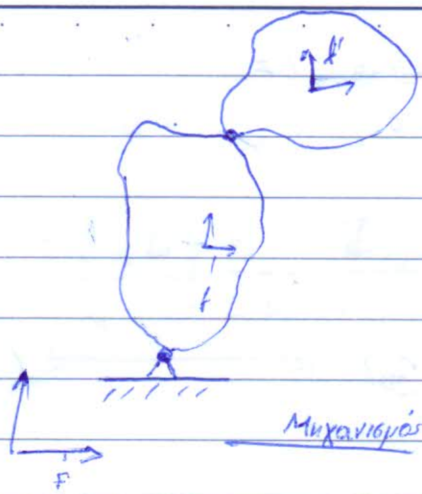
$$(\dot{\underset{\sim}{q}})_F = (\dot{\underset{\sim}{q}})_f + \underset{\sim}{\omega}_{f/F} \times \underset{\sim}{q} \quad (3)$$ F μπορεί να ~~είναι~~ κινούμενο

Τρίτο ΣΣ f' (κινούμενο).

f, f', F (μπορεί να είναι κινούμενο) (και τα 3 μπορεί να είναι κινούμενα)

$$\underset{\sim}{\omega}_{f'/F} = \underset{\sim}{\omega}_{f'/f} + \underset{\sim}{\omega}_{f/F}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}_{f'/F} = \underset{\sim}{\alpha}_{f'/f} + \underset{\sim}{\alpha}_{f/F} + \underbrace{\underset{\sim}{\omega}_{f/F} \times \underset{\sim}{\omega}_{f'/f}}_{\text{γυροσκοπικός όρος}}$$

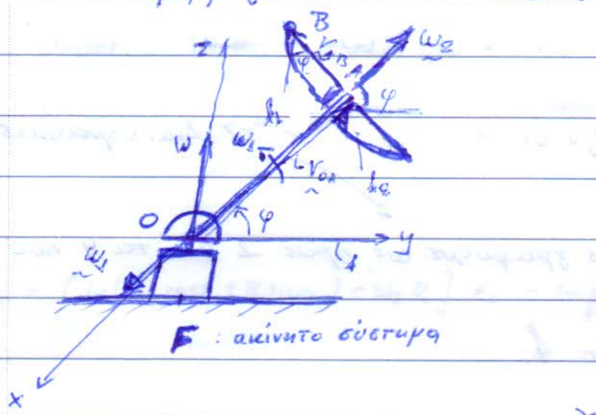


$\underset{\sim}{\omega}_{f'/F} \rightarrow \underset{\sim}{\alpha}_{f'/F}$

$\underset{\sim}{\omega}_{f'/f} \rightarrow \underset{\sim}{\alpha}_{f'/f}$

Μηχανισμός

Εφαρμογή : Κίνηση Αντένας



σώμα b.

το ⌓ περιστρέφεται, με $\underset{\sim}{\omega}$.

b: το xyz είναι καρφωμένο στο σώμα που περιστρέφεται.

$\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{\omega}_{b/F}$

Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω απ' το σημείο O. (απ' τον άξονα Ox)

$OA = L$
$AB = R$

$OA \in \underbrace{Oyz}_{\text{επίπεδο}}$

$\underset{\sim}{\omega}_1$: γωνιακή ταχύτητα της OA ως προς b.

κολλάμε πάνω στη ράβδο σύστημα συντεταγμένων : b_1.

$\underset{\sim}{\omega}_1 = \underset{\sim}{\omega}_{b_1/b}$

κολλάμε πάνω στο κατοπτρο σύστημα : b_2.

$\underset{\sim}{\omega}_2 = \underset{\sim}{\omega}_{b_2/b_1}$ $\qquad$ ω_2 στο επίπεδο yz $\quad \underset{\sim}{\omega}_2 = \omega_2 \cos\varphi\, \underset{\sim}{e}_y + \omega_2 \sin\varphi\, \underset{\sim}{e}_z$

Ερωτήματα : 1. V_B η ταχύτητα του σημείου B

2. a_B η επιτάχυνση του σημείου B.

Θα χρειαστούμε να βρεθούν τα $\underset{\sim}{V}_A$, $\underset{\sim}{a}_A$.

©NEXT Co GREECE

- Σωμα b: περιστροφη γυρω απο σταθερο άξονα: Oz.
- Σωμα b_1: Ραβδος: περιστροφη γυρω απο σημειο (το Ο).
- Σωμα b_2: γωνιη Κατοπτρο: χωρική κινηση

Γενικά

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{AB} \quad (1)$$

$$\underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{a}_A + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r}_{AB} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{AB}) \quad (2)$$

Σώμα b_2

$$\underset{\sim}{v}_B = \underset{\sim}{v}_A + \underset{\sim}{\omega}_{b_2/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB}.$$

$\underset{\sim}{\omega}_{b_2/F}$ •

$$\underset{\sim}{\omega}_{b_2/F} = \overset{\omega_2}{\cancel{\underset{\sim}{\omega}_{b_2/b_1}}} + \underset{\sim}{\omega}_{b_1/F} = \underset{\sim}{\omega}_2 + \underset{\sim}{\omega}_1 + \underset{\sim}{\omega}$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{b_1/F} = \underbrace{\omega_{b_1/b}}_{\omega_1} + \underbrace{\omega_{b/F}}_{\omega} = \underset{\sim}{\omega}_1 + \underset{\sim}{\omega}.$$

⤳ Διανυσματικες σχεσεις.

Τις γραφουμε ως προς b απ' τα 4 που εχουμε.

Εδω επιλεγουμε το b.

$\underset{\sim}{v}_A$ • Σωμα b_1:

$$\underset{\sim}{v}_A = \overset{0}{\cancel{\underset{\sim}{v}_O}} + \overset{\omega_1+\omega}{\cancel{\underset{\sim}{\omega}_{b_1/F}}} \times \underset{\sim}{r}_{OA}.$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{b_1/F} = \underset{\sim}{\omega}_1 + \underset{\sim}{\omega} = \omega_1 \underset{\sim}{e}_x + \omega \underset{\sim}{e}_z \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{\omega}_{b_1/F} = \omega_1 \underset{\sim}{e}_x + \omega \underset{\sim}{e}_z}$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{b_2/F} = \omega_2 + \omega_1 + \omega = \omega_2 \cos\varphi \underset{\sim}{e}_y + \omega_2 \sin\varphi \underset{\sim}{e}_z + \omega_1 \underset{\sim}{e}_x + \omega \underset{\sim}{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{\omega}_{b_2/F} = \omega_1 \underset{\sim}{e}_x + \omega \underset{\sim}{e}_z + \omega_2 \cos\varphi \underset{\sim}{e}_y + \omega_2 \sin\varphi \underset{\sim}{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{\omega}_{b_2/F} = \omega_1 \underset{\sim}{e}_x + \omega_2 \cos\varphi \underset{\sim}{e}_y + (\omega + \omega_2 \sin\varphi) \underset{\sim}{e}_z}$$

$$\underset{\sim}{r}_{AB} = -R \sin\varphi \underset{\sim}{e}_y + R \cos\varphi \underset{\sim}{e}_z \quad \text{(αφού ∈ στο επιπεδο } yz)$$

$$\underset{\sim}{r}_{OA} = L \sin\varphi \underset{\sim}{e}_y + l \cos\varphi \underset{\sim}{e}_z \quad (\text{″} \quad \text{″} \quad \text{″})$$

?

$$\underset{\sim}{v}_A = \underset{\sim}{\omega}_{\ell_1/F} \times \underset{\sim}{r}_{OA} \Rightarrow \underset{\sim}{v}_A = (\omega_1 \underset{\sim}{e}_x + \omega \underset{\sim}{e}_z) \times (L\cos\varphi \underset{\sim}{e}_y + L\sin\varphi \underset{\sim}{e}_z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\omega_1\cos\varphi \underset{\sim}{e}_z - \omega_1 L\sin\varphi \underset{\sim}{e}_y - \omega L\cos\varphi \underset{\sim}{e}_x + \underbrace{0}_{(e_z \times e_z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{v}_A = -L\omega\cos\varphi \underset{\sim}{e}_x - L\omega_1\sin\varphi \underset{\sim}{e}_y + L\omega_1\cos\varphi \underset{\sim}{e}_z}$$

$$\omega_{\ell_2/F} \times r_{AB} = [\omega_1 \underset{\sim}{e}_x + \omega_2\cos\varphi \underset{\sim}{e}_y + (\omega + \omega_2\sin\varphi)\underset{\sim}{e}_z] \times [-R\sin\varphi \underset{\sim}{e}_y + R\cos\varphi \underset{\sim}{e}_z] =$$

$$= -R\omega_1\sin\varphi \underset{\sim}{e}_z - R\omega_1\cos\varphi \underset{\sim}{e}_y + 0 + R\omega_2\cos^2\varphi \underset{\sim}{e}_x + R\sin\varphi(\omega + \omega_2\sin\varphi)\underset{\sim}{e}_x + 0$$

Οπότε $V_B = V_A + \omega_{\ell_2/F} \times r_{AB} \Rightarrow$ Απόλυτη ταχύτητα.

$$\Rightarrow V_B = (-L\omega\cos\varphi + \underbrace{R\omega_2}_{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1} + R\omega\sin\varphi)\underset{\sim}{e}_x - (L\omega_1\sin\varphi + R\omega_1\cos\varphi)\underset{\sim}{e}_y + (L\omega_1\cos\varphi - R\omega_1\sin\varphi)\underset{\sim}{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{V}_B = [\omega(-L\cos\varphi + R\sin\varphi) + \omega_2 R]\, e_x - \omega_1(L\sin\varphi + R\cos\varphi)\, e_y + \omega_1(L\cos\varphi - R\sin\varphi)\, e_z}$$

Επιτάχυνση του B:

$$\underset{\sim}{a}_B = \underset{\sim}{a}_A + \underset{\sim}{\alpha}_{\ell_2/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB} + \underset{\sim}{\omega}_{\ell_2/F} \times (\underset{\sim}{\omega}_{\ell_2/F} \times \underset{\sim}{r}_{AB})$$

$$\underset{\sim}{\alpha}_{\ell_2/F} =$$

$$\alpha_A = \underbrace{\alpha_0}_{0} + \underset{\sim}{\alpha}_{\ell_1/F} \times \underset{\sim}{r}_{OA} + \underset{\sim}{\omega}_{\ell_1/F} \times (\underset{\sim}{\omega}_{\ell_1/F} \times \underset{\sim}{r}_{OA})$$

$$\alpha_{\ell_1/F} = (\dot{\omega}_{\ell_1/F})_F \overset{(*)}{\Longrightarrow} (\dot{\omega}_{\ell_1/F})_{\ell} + \underset{\sim}{\omega}_{\ell/F} \times \omega_{\ell_1/F}$$

παραγωγίζω ως προς F.

$$(*)\quad (\dot{\underset{\sim}{q}})_F = (\dot{q})_{\ell} + \underset{\ell/F}{\omega} \times \underset{\sim}{q}$$

• Οι παράγωγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων ως προς το f είναι μηδέν.

$$\underset{\sim}{a}_{f/F} = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{e}_x + \dot{\omega}\, \underset{\sim}{e}_z + \underbrace{\underset{\sim}{\omega}_{f/F}}_{\underset{\sim}{\omega} = \omega \underset{\sim}{e}_z} \times \underbrace{\underset{\sim}{\omega}_{f_1/F}}_{\omega_1 e_x + \omega e_z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{a}_{f_1/F} = \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{e}_x + \dot{\omega}\underset{\sim}{e}_z + \omega\, \omega_1 \underset{\sim}{e}_y}$$

Ειδική περίπτωση: Εάν $\omega_1 = \sigma\tau\alpha\theta$, $\omega = \sigma\tau\alpha\theta \rightarrow \underset{\sim}{a}_{f_1/f} = \omega \cdot \omega_1 \underset{\sim}{e}_y$ $(\neq 0)$

$$a_{f_2/F} = \left(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{f_2/F}\right)_F \overset{\circledast}{=} \left(\dot{\omega}_{f_2/F}\right)_f + \underbrace{\underset{\sim}{\omega}_{f/F}}_{\omega = \omega e_z} \times \underset{\sim}{\omega}_{f_2/F} =$$

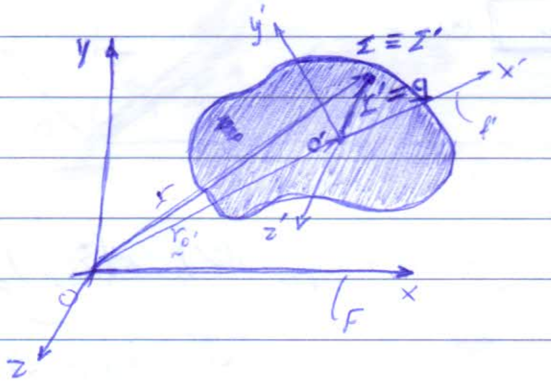
$$= \dot{\omega}_1 \underset{\sim}{e}_x + (\dot{\omega}\cos\varphi - \omega\sin\varphi\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_y + (\dot{\omega} + \dot{\omega}_2 \sin\varphi + \omega_2\cos\varphi \cdot \dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_z + (\omega \underset{\sim}{e}_z) \times \underset{\sim}{\omega}_{f_2/F} =$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{f_2/f} = \underset{\sim}{\omega}_1 .$$

$= \dots$

Ασκήσεις: 3.38 3.21
3.35* 3.25 * κινήσεις με περιορισμό.
3.36* 3.11
Παράδειγμα: 3.11* - Για την επόμενη παρασκευή. -

Σχετική Κίνηση Υλικού Σημείου



Σώμα -> πλάκα.
Υλικό Σημείο Σ : προχωράει πάνω σε αυτή την πλάκα.
F' : κινούμενο σύστημα.

$$\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{\omega}_{F'/F}$$

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r_0}' + \underset{\sim}{r}' \Rightarrow (\dot{\underset{\sim}{r}})_F = (\dot{r}_{o'})_F + (\dot{\underset{\sim}{r}}')_F$$

$$\underline{v} = \underset{\sim}{v}_{o'} + (\dot{r}')_F \quad (1)$$

$$* \Rightarrow (\dot{r}')_F = (\dot{r}')_{F'} + \underset{\sim}{\omega}_{F'/F} \times \underset{\sim}{r}' \quad (2)$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{F'/F} = \underset{\sim}{\omega}$$

$$(1),(2) \Rightarrow \underset{\sim}{v} = \underbrace{\underset{\sim}{v}_{o'} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}'} + \underbrace{(\dot{r}')_{F'}} \quad (3)$$

$v_{\Sigma/F} = v_{\Sigma'/F} + v_{\Sigma/F'}$

v_Σ: μετοχική ταχύτητα. $v_{\Sigma/F'}$ = σχετική ταχύτητα του σημείου Σ, ως προς τον κινούμενο παρατηρητή

Το Σ' είναι πάνω στο σώμα. (σημείο του σώματος που περιστρέφεται με ω)
Το Σ κινείται (σχετικά) ως προς το Σ'
Το Σ' συμπίπτει στιγμιαία με το Σ.

$$\underset{\sim}{V}_{\Sigma'} = \underset{\sim}{V}_{0'} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{0'\Sigma'} \quad (4)$$

$$\underset{\sim}{r}_{0'\Sigma'} = \underset{\sim}{r}'$$

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} \underbrace{\underset{\sim}{v}}_{\text{απόλυτη ταχύτητα}} = \underbrace{\underset{\sim}{V}_{\Sigma'}}_{\text{μεταφορική ταχύτητα}} + \underbrace{\underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'}}_{\text{σχετική ταχύτητα}} \quad (*)$$

→ (απόλυτη ταχύτητα του σημείου Σ.

$$\underset{\sim}{V}_{\Sigma'} = \underset{\sim}{V}_{0'} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}' \quad (\overset{*}{*})$$

$$(*) \overset{(*')}{\Rightarrow} \boxed{\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{V}_{0'} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}' + \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'}} \quad (*)$$

Επιτάχυνση του Σ:

$$\underbrace{(\dot{\underset{\sim}{v}}_{\Sigma})}_{\underset{\sim}{a}} = \underbrace{(\dot{\underset{\sim}{v}}_{0'})_F}_{\underset{\sim}{a}_{0'}} + \underbrace{(\dot{\underset{\sim}{\omega}}_{F'/F})_F}_{\underset{\sim}{\alpha}_{F'/F}} \times \underset{\sim}{r}' + \underset{\sim}{\omega}_{F'/F} \times \underbrace{(\dot{\underset{\sim}{r}}')_F}_{(\dot{r}')_{F'} + \omega \times r' = \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}'} + \underbrace{(\dot{\underset{\sim}{V}}_{\Sigma/F'})_F}_{(\dot{\underset{\sim}{V}}_{\Sigma/F'})_{F'} + \underset{\sim}{\omega}_{F'/F} \times \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'}}$$

(a)

(Παρατηρώ ότι: $(\dot{V}_{\Sigma/F'})_{F'} = \underset{\sim}{a}_{\Sigma/F'}$

Άρα $(\dot{\underset{\sim}{V}}_{\Sigma/F'})_F = a_{\Sigma/F'} + \omega \times \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'}$)

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\alpha}_{F'/F}$$

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}_{0'} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r}' + \underset{\sim}{\omega} \times [\underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}'] + \underset{\sim}{a}_{\Sigma/F'} + \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a} = \underbrace{\underset{\sim}{a}_{0'} + \underset{\sim}{\alpha} \times \underset{\sim}{r}' + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}')}_{\underset{\sim}{a}_{\Sigma'} \text{ μεταφορική επιτάχυνση}} + \underbrace{\underset{\sim}{a}_{\Sigma/F'}}_{\text{Σχετική επιτάχυνση}} + \underbrace{2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'}}_{\text{Επιτάχυνση Coriolis}}$$

Επιτάχυνση ~~κοριόλις~~ Coriolis $= 0$, εάν $\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{\omega} \parallel \underset{\sim}{V}_{\Sigma/F'}$

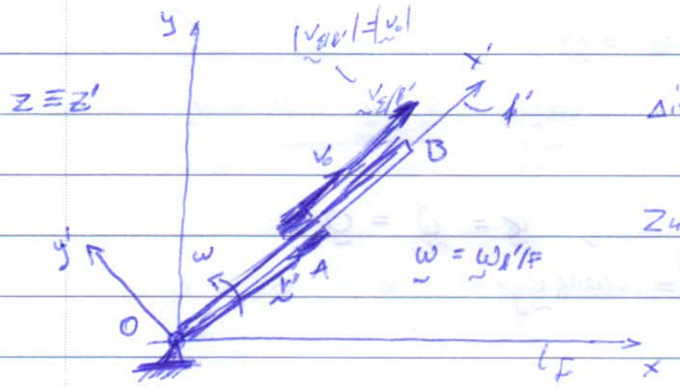
ή εάν $V_{\Sigma/F} = 0$

Αν κινούμαστε, κινούμαστε στον άξονα.

Εφαρμογή

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_{\Sigma/B'} \quad (*)$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{a}_{\Sigma/B'} + 2\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\Sigma/B'} \quad (**)$$



Δίνεται: ω, v_0 (σταθερό, σταθερό) (σχετική ταχύτητα δακτυλίου ως προς κινούμενο παρατηρητή B')

Ζητείται: $\boldsymbol{v}_A = ?$

$\boldsymbol{a}_A = ?$

Ταχύτητα του A: Σχετικής κίνησης του A ως προς κινούμενο B'

$$\boldsymbol{v}_A = \underset{=0}{\boldsymbol{v}_O} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_{\Sigma/B'}^{A/B'}$$

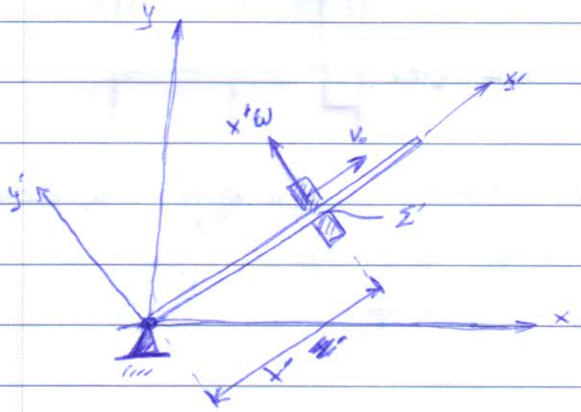
Επιλέγω να περιγράψω όλα τα διανύσματα ως προς B'.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{e}_{z'}$$

$$\boldsymbol{r}' = x'\,\boldsymbol{e}_{x'}$$

Άρα: $\boldsymbol{v}_A = (\omega\,\boldsymbol{e}_{z'})\times(x'\,\boldsymbol{e}_{x'}) + v_0\,\boldsymbol{e}_{x'} = x'\omega\,\boldsymbol{e}_{y'} + v_0\,\boldsymbol{e}_{x'} \rightarrow$

$\rightarrow \boldsymbol{v}_A = v_0\,\boldsymbol{e}_{x'} + x'\omega\,\boldsymbol{e}_{y'}$



$x(0) = 0$

$(x' = v_0 t)$

Για μεταβαλλόμενη $v_0(t)$:

$v_0(t) = \dfrac{dx'}{dt} \Rightarrow x' = \int v_0(t)\,dt$

Επιτάχυνση του A : (σχετική κίνηση)

$$a_A = \underbrace{a_0}_{0} + \underbrace{\alpha}_{0} \times r' \underbrace{- \omega^2 r'}_{\omega\times\omega\times r',\ \text{για επίπεδη κίνηση}} + \underbrace{a_{A/B'}}_{0} + 2\omega\times v_{A/B'}$$

$$\omega = \omega e_{z'} \rightarrow \alpha = \dot{\omega} e_{z'} = 0$$

σταθερό

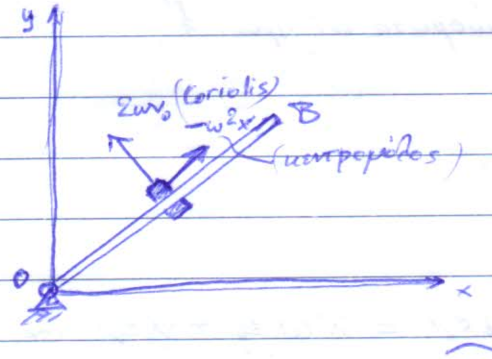
$$r' = x' e_{x'}$$

$$a_{A/B'} = (\dot{v}_{A/B'})_{B'} = 0 \quad , \quad \alpha = \dot{\omega} = 0$$

$$\omega \times v_{A/B'} = \omega e_{z'} \times (v_0 e_{x'}) = \omega v_0 e_{y'}$$

Αντικαθιστώντας :

$$a_A = \underbrace{-\omega^2 x' e_{x'}}_{\text{κεντρομόλος}} + \underbrace{2\omega v_0 e_{y'}}_{\text{Coriolis}}$$



[**Άσκηση**

Να επαναληφθεί με $\omega = \omega(t)$ και $v_0 = v_0(t)$.]

→ 3.22 Test (Σπίτι) ~> Για την άλλη παρασκευή

11/12/2012

F: ακίνητο

F': κινούμενο

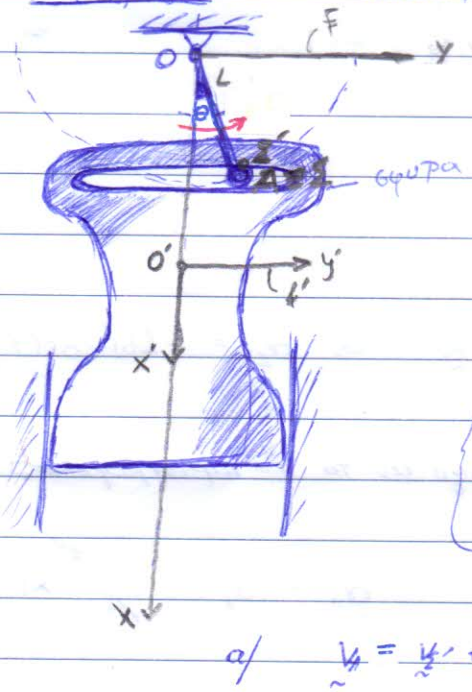
Σ: κινείται σχετικά ως προς το F'

$$\underbrace{v}_{απόλυτη} = \underbrace{v_{o'} + \omega \times r'}_{μετοχική} + \underbrace{v_{Σ/F'}}_{σχετική}$$

$$a = \underbrace{a_{o'} + \alpha \times r' + \omega \times (\omega \times r')}_{μετοχική} + \underbrace{a_{Σ/F'}}_{σχετική} + \underbrace{2\,\omega \times v_{Σ/F'}}_{coriolis}$$

[H/W] Παράδειγμα 3.14.

Εφαρμογή   Διωστήρας - Σφύρα - Ράβδος



Ζητείται: ταχύτητα και επιτάχυνση της σφύρας

Σχετική κίνηση του A, πάνω στη σφύρα.

F' καθάει πάνω στη σφύρα

$v_Σ$: ταχύτητα ενός σημείου πάνω στη σφύρα →
→ ταχύτητα κάθε σημείου πάνω στη σφύρα. →
→ ταχύτητα της σφύρας.

a/ $v_A = v_{Σ'} + v_{A/F'}$ (1).

$$\left.\begin{aligned} v_{Σ'} &= v_{o'} + \omega_{F'/F} \times r' \\ \omega_{F'/F} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{Σ'} = v_{o'}$$

(1) $\Rightarrow \underset{\sim}{v}_{\Sigma'} = \underset{\sim}{v}_A - \underset{\sim}{v}_{A/F'}$

Ράβδος ΟΑ : περιστροφή γύρω από άξονα : $\underset{\sim}{v}_A = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{OA}$

παρατηρητής πάνω στη σφύρα, το βλέπει το Α να κινείται στην y

$\underset{\sim}{v}_{A/F'} = v_\sigma \underset{\sim}{e}_y$ (είναι στην διεύθυνση y). (σ: σχετική)

$\underset{\sim}{v}_{\Sigma'} = v_{\Sigma'} \underset{\sim}{e}_x$ (—— " —— x).

$\underset{\sim}{r}_{OA} = L\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + L\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y$

Αντικαθιστώ στην (1):

$v_{\Sigma'} \underset{\sim}{e}_x = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}_{OA} - v_\sigma e_y \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{\Sigma'} \underset{\sim}{e}_x = (\omega\, \underset{\sim}{e}_z) \times (L\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + L\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y) - v_\sigma \underset{\sim}{e}_y \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{\Sigma'} \underset{\sim}{e}_x = L\omega\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_y - L\omega\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x - v_\sigma \underset{\sim}{e}_y \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{\Sigma'} \underset{\sim}{e}_x = -L\omega\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x + (L\omega\cos\theta - v_\sigma)\, \underset{\sim}{e}_y \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{\Sigma'} = -L\omega\sin\theta \\ 0 = L\omega\cos\theta - v_\sigma \end{array} \right\}$ σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{v_{\Sigma'} = -L\omega\sin\theta} \\ \boxed{v_\sigma = L\omega\cos\theta} \end{array} \right.$

Άρα $\underset{\sim}{v}_{\Sigma'} = -L\omega\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x$

β/ Παραγωγίζοντας:

$a_{\Sigma'} = (\dot{\underset{\sim}{v}}_{\Sigma'})_F = \frac{d}{dt}(-L\omega\sin\theta)\, \underset{\sim}{e}_x \Rightarrow a_{\Sigma'} = -L\omega^2\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x$

?

Δεν μπορούμε να πάρουμε την παράγωγο αν το F' περιστρέφεται!

ή με τον τύπο της επιτάχυνσης: $\underset{\sim}{a}_A = \underset{\sim}{a}_{\Sigma'} + \cancel{\underset{\sim}{\alpha}_{F'/F}}^{0} \times r' - \cancel{\omega^2_{F'/F}}^{0}\, \underset{\sim}{r}' + a_{A/F'} + \cancel{2\omega_{F'/F}}^{0} \times \underset{\sim}{v}_{A/F'}$

$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{a}_A = \underset{\sim}{a}_{\Sigma'} + a_{A/F'}}$

$\underset{\sim}{\alpha}_A = \underset{\sim}{\alpha}_{OA} \times \underset{\sim}{r}_{OA} - \omega^2 \underset{\sim}{r}_{OA} \Rightarrow$ (με $\underset{\sim}{\alpha}_{OA} = 0$)

ή $\underset{\sim}{a}_A = -L\dot{\theta}^2 \underset{\sim}{e}_r + L\ddot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_\theta$ (αλλάζει όμως σύστημα e_r, e_θ) από τα πολικά

$\Rightarrow \underset{\sim}{a}_A = -\omega^2 (L\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + L\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y)$.

και $\underset{\sim}{a}_{\xi'} = a_{\xi'} \hat{e}_x$

$\underset{\sim}{a}_{A/\xi'} = a_6 \underset{\sim}{e}_y$

Αντικατάσταση:

$$-\omega^2 (L\cos\theta \underset{\sim}{e}_x + L\sin\theta \underset{\sim}{e}_y) = a_{\xi'} \underset{\sim}{e}_x - a_6 \underset{\sim}{e}_y$$

$+?$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 L\cos\theta = a_{\xi'} \\ -\omega^2 L\sin\theta = -a_6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_{\xi'} &= -\omega^2 L\cos\theta \\ a_6 &= \omega^2 L\sin\theta \end{aligned}}$$

$-?$