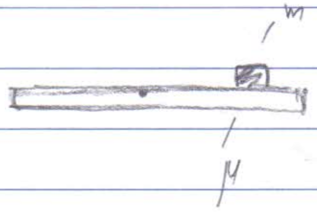
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

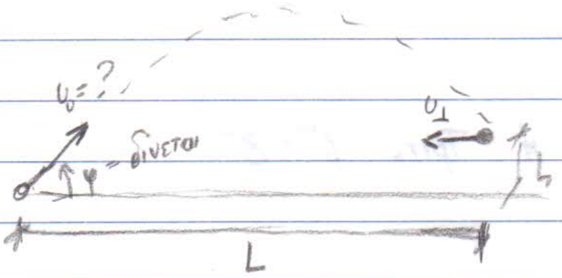
Ασκηση

Δισκος



1) $\omega_{MAX} = ?$, ωστε να παραμενει στο δισκο

2) $\omega = \omega_{MAX} / 2$, δυναμεις μεταξυ του σωματος και του δισκου



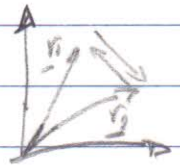
Ι) Ακίνητος στόχος $\upsilon_0 = ?$

ΙΙ) Κινούμενος στόχος με ταχύτητα υ_1

(Αντίσταση του αέρα αμελητέα)

Στερεο σωμα : η σχετικη θεση 2 σημειων διατηρειτε σταθερη

≠ παραμορφωσιμο



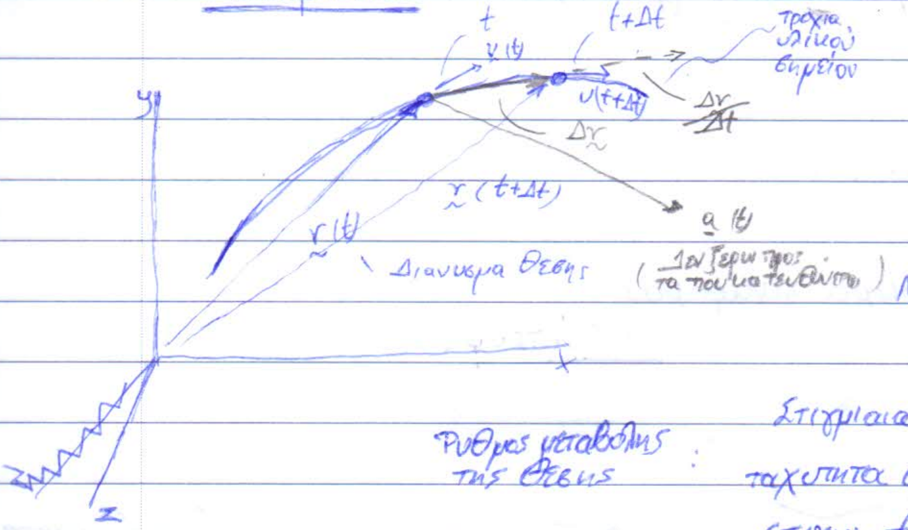
$$\| r_1 - r_2 \| = C$$

κινηματική → υλικα σημεια

δυναμική → στερεα σωματα

Βιβλίο : Εφαρμοσμένη Δυναμική : Νατσιάβας

Κινηματική



Διάνυσμα $\underset{\sim}{r}$

Μεταβολη Θεσης στη διαρκεια Δt : $\Delta\underset{\sim}{r} = r(t+\Delta t) - r(t)$

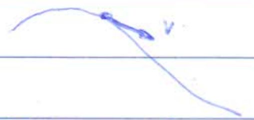
Μεση ταχυτητα : $\frac{\Delta r}{\Delta t}$

Ρυθμος μεταβολης της θεσης : Στιγμιαια ταχυτητα ή ταχυτητα στη χρονικη στιγμη t : $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} =$

(συναρτηση xyz ,

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underset{\sim}{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\underset{\sim}{r}(t)}{dt} = \underset{\sim}{v}(t)$$

εφαπτομενικο στην τροχια



Επιτάχυνση $= $ ρυθμος μεταβολης της ταχυτητας : $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{v}(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{d\,\underset{\sim}{v}(t)}{dt} = \underset{\sim}{a}(t)$

$$\underset{\sim}{v} = \frac{dr}{dt}, \quad \underset{\sim}{a} = \frac{d\cancel{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Συστήματα Συντεταγμένων :

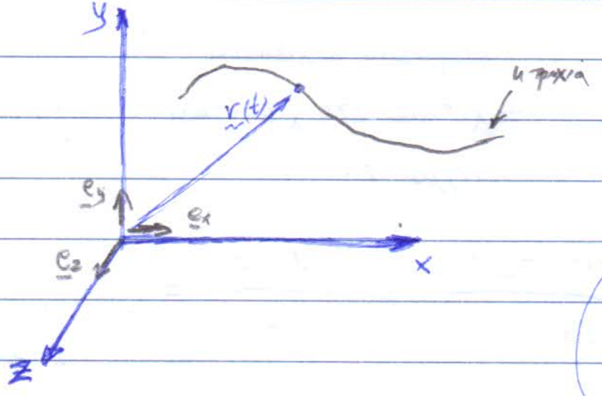
1. Καρτεσιανο συστημα συντεταγμένων
2. Πολικό συστημα συντεταγμενων - (κυλινδρικό)
3. Τροχιακό συστημα συντεταγμένων

(4. Σφαιρικό συστημα συντεταγμένων)

Περιγραφη Κινησης.

1. Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

<u>Δεξιόστροφα</u>



- $\underset{\sim}{e_x}, \underset{\sim}{e_y}, \underset{\sim}{e_z}$ μοναδιαια διανύσματα
- $\underset{\sim}{e_x} \perp \underset{\sim}{e_y} \perp \underset{\sim}{e_z}$
- $\underset{\sim}{e_x} \times \underset{\sim}{e_y} = \underset{\sim}{e_z}$

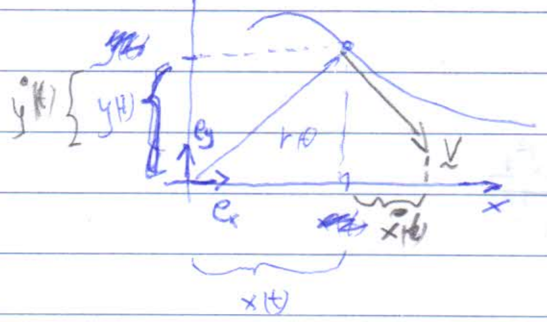
$|\underset{\sim}{e_x}| = |\underset{\sim}{e_y}| = |\underset{\sim}{e_z}| = 1$

$\underset{\sim}{e_y} \times \underset{\sim}{e_z} = \underset{\sim}{e_x}$

$\underset{\sim}{e_z} \times \underset{\sim}{e_x} = \underset{\sim}{e_y}$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e_x} \cdot \underset{\sim}{e_y} = 0 \\ \underset{\sim}{e_x} \cdot \underset{\sim}{e_z} = 0 \\ \underset{\sim}{e_y} \cdot \underset{\sim}{e_z} = 0 \end{cases}$$

Αν θεωρησω την τροχια επιπεδη:



περιγραφη του Διανυσματος Θεσης:

$$r(t) = x(t) \cdot \underset{\sim}{e_x} + y(t) \cdot \underset{\sim}{e_y} + z(t) \cdot \underset{\sim}{e_z}$$

Διάνυσμα της ταχύτητας :

$$\underset{\sim}{v}(t) = \frac{d\underset{\sim}{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{x(t)\,\underset{\sim}{e_x}}_{} + y(t)\cdot \underset{\sim}{e_y} + z(t)\cdot \underset{\sim}{e_z}\Big]$$

$$\underbrace{\frac{dx}{dt}\underset{\sim}{e_x}}_{\dot{x}(t)\,\underset{\sim}{e_x}} + x(t)\cdot\underbrace{\frac{de_x}{dt}}_{0}^{\to 0}$$

για σταθερο ΚΣΣ
ή κινουμενα αλλα με παραλληλη
μεταφορα

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{v}(t) = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = \dot{x}(t)\,\underset{\sim}{e_x} + \dot{y}(t)\,\underset{\sim}{e_y} + \dot{z}(t)\,\underset{\sim}{e_z}.$$

$$\text{Εαν} \quad v(t) = v_x(t)\cdot \underset{\sim}{e_x} + V_y(t)\cdot \underset{\sim}{e_y} + V_z(t)\cdot \underset{\sim}{e_z} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= \dot{x}(t) \\ v_y(t) &= \dot{y}(t) \\ v_z(t) &= \dot{z}(t) \end{aligned}}$$

Διάνυσμα της Επιτάχυνσης

παραγω ως προς χρονο

$$\underset{\sim}{a} = \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big[\dot{x}(t)\cdot e_x + \dot{y}(t)\cdot e_y + \dot{z}(t)\cdot e_z\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{a} = \ddot{x}(t)\cdot \underset{\sim}{e_x} + \ddot{y}(t)\cdot \underset{\sim}{e_y} + \ddot{z}(t)\cdot \underset{\sim}{e_z}.$$

$$\text{Εαν} \quad \underset{\sim}{a} = a_x(t)\cdot \underset{\sim}{e_x} + a_y(t)\cdot \underset{\sim}{e_y} + a_z(t)\cdot \underset{\sim}{e_z} \quad \Rightarrow$$

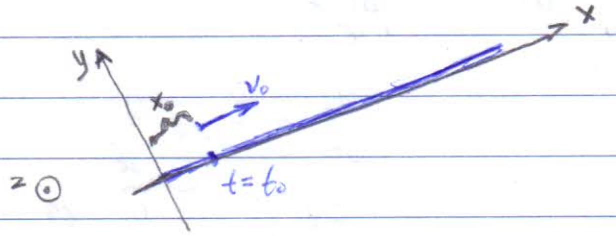
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_x(t) &= \ddot{x}(t) \\ a_y(t) &= \ddot{y}(t) \\ a_z(t) &= \ddot{z}(t) \end{aligned}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\begin{aligned} a_x(t) &= \dot{v}_x(t) \\ a_y(t) &= \dot{v}_y(t) \\ a_z(t) &= \dot{v}_z(t) \end{aligned}}$$

?

— Εφαρμογή : Ευθύγραμμη κίνηση

Τροχιά ευθύγραμμη , $a(t)$ δεδομένη

Ζητώ : $v(t)$, $x(t)$,



$y(t)=0$

$z(t)=0$.

$v_x(t) = \dot{x}(t)$ (1)

$a_x(t) = \ddot{x}(t)$ (2) — απ' τις σχέσεις οι 2 είναι ανεξάρτητες

$a_x(t) = \dot{v}_x(t)$ (3) .

$$(3) \Rightarrow \dot{v}_x(t) = a(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \underset{\overset{\parallel}{\frac{dv_x}{dt}}}{\dot{v}_x(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$

$$v_x(t) = \int a(t)\, dt + c$$

Για $t=t_0$ ⇝ $c = \int a(t)\, dt \Big|_{t=t_0} - v_0$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{dv_x}{dt}\, dt}_{\underbrace{v_x(t)\Big|_{t_0}^{t}}_{v_x(t) - v_x(t_0)}} = \underbrace{\int_{t_0}^{t} a(t)\, dt}_{f(t)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt \Rightarrow v_x(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt + v_0 = f(t) + v_0$$

$(1) \Rightarrow v_x(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = f(t) + v_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \underbrace{\dot{x}(t)}_{\frac{dx}{dt}}\, dt = \int f(t)\, dt + \int v_0\, dt + c \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = \int f(t)\, dt + v_0 t + c.$

Αρχικες συνθηκες (ΑΣ) :

$x(t_0) = x_0 \Rightarrow \int f(t)\, dt + \Big|_{t=t_0} + v_0 t_0 + c = x_0 \Rightarrow c = ..$

Ειδική περίπτωση : $\alpha(t) = \alpha_0 =$ σταθερο , $t_0 = 0$.

$v_x(t) = \int_{t_0}^{t} a_0\, dt + v_0 = a_0 \cdot (t - t_0) + v_0 \Rightarrow v_x(t) = a_0 (t - t_0) + v_0$

$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = \underbrace{a_0 t}_{f(t)} + v_0}\ (*)$

$v_x(t) = \dot{x}(t) = a_0 t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int a t\, dt + v_0 t + c \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + c$

$\underline{\text{Α.Σ.}}\quad x(0) = x_0 \Rightarrow a \frac{0^2}{2} + v_0 \cdot 0 + c = x_0 \Rightarrow \underline{c = x_0}$

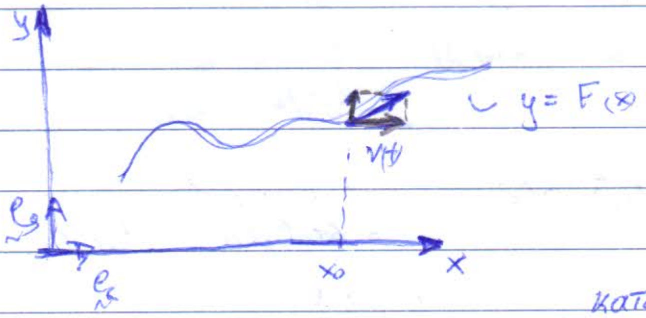
$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 \overset{t}{\cancel{(t)}} + x_0}\ (**)$

Εαν $(*), (**)$ απαλοιφω το t : $(*) \Rightarrow t = \frac{v_x(t) - v_0}{a_0}$

Αντικαθιστω το t στην (**) $\rightarrow$ $x(t) = \frac{1}{2} a\left(\frac{v_x(t)-v_0}{a_0}\right)^2 + v_0 \frac{v_x(t)-v_0}{a_0} + x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v_x^2(t) - v_0^2 = 2\, a_0(x-x_0)} \longrightarrow v(t) = \sqrt{2 a_0 x}.$$

Εφαρμογή



[Παράδειγμα : $y = 3x^2$, $F(x) = 3x^2$
$y = \sin 2x$, $F(x) = \sin(2x)$]

Δίνεται : η συνιστωσα της ταχυτητας στην κατευθυνση x : v(t) γνωστη.

Ζητειται : ταχυτητα και επιταχυνση του κινητου.

Επίλυση : $\underset{\sim}{v}(t) = \underbrace{v_x(t)}_{v(t)} \underset{\sim}{e}_x + v_y(t) \underset{\sim}{e}_y$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x(t) = v(t)} = \overbrace{\frac{dF}{dx}}^{F'(x)} \cdot v(t)$$

παραγωγος ως προς μεταβλητη θεσης (χωρικη μεταβλητη)

κανονας της αλυσιδας (chain rule)

Αρα $\underset{\sim}{v}(t) = v_x(t) \underset{\sim}{e}_x + v_y(t) \cdot \underset{\sim}{e}_y = v(t) \underset{\sim}{e}_x + F'(x)\, v(t)\, \underset{\sim}{e}_y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v}(t) = v(t) \underset{\sim}{e}_x + F'(x)\, v(t)\, \underset{\sim}{e}_y$$

Επιταχυνση:

$$\underset{\sim}{a} = a_x(t)\,\underset{\sim}{e_x} + a_y(t)\cdot\underset{\sim}{e_y}$$

$$a_x = \frac{d\,v_x(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[v_y(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{dF(x)}{dx}\,v(t)\right] =$$

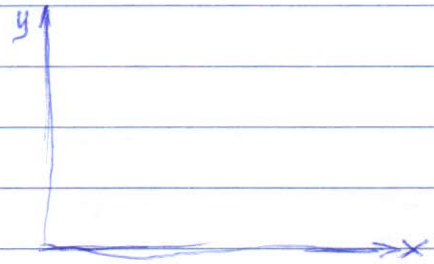
$$= \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{dF(x)}{dx}}_{g(x)}\right)\right]}\,v(t) + \frac{dF(x)}{dx}\,\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\frac{dg(x)}{dt} = \frac{dg(x(t))}{dt} \underset{\text{chain rule}}{=} \frac{dg(x)}{dx}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v(t)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]v(t).$$

$$= \frac{d^2F}{dx^2}\,v(t).$$

$$a_y(t) = \frac{d^2F}{dx^2}\,v^2(t) + \frac{df(x)}{dx}\,\frac{dv(t)}{dt^{\cancel{2}}}.$$

Άρα $$\boxed{\underline{a} = \frac{dv(t)}{dt}\underline{e_x} + \left[\frac{d^2F}{dx^2}\,v^2(t) + \frac{dF}{dx}\,\frac{dV(t)}{dt}\right]\underset{\sim}{e_y}}$$



Α. Αντι να δινεται η συνιστωσα, δινεται το μετρο της ταχυτητας $v(t)$

Ζητειται: ταχυτητα και επιταχυνση του κινητου.

Β, Επισης να μελετηθει η περιπτωση $v(t) = v_0 =$ σταθερό

(πχ: κεντρομολος)

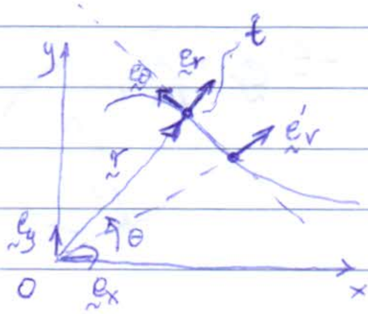
$$v(t) = v_x(t) \cdot \underset{\sim}{e}_x + v_y(t) \cdot \underset{\sim}{e}_y$$

$a = \frac{dr}{dx^2} v^2(t)$) ?

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} \Rightarrow \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

8-10-2012

2. Πολικό Σύστημα Αναφοράς



Διάνυσμα Θέσης : $\underset{\sim}{r}$

Συντεταγμένες : r, θ. $\quad (r = |\underset{\sim}{r}|)$

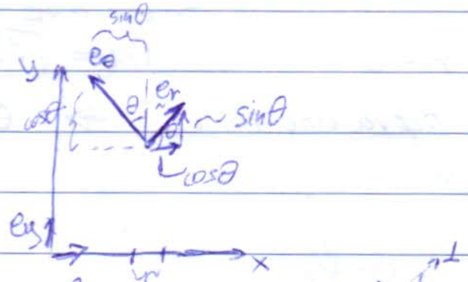
Μοναδιαία Διανύσματα : $\underset{\sim}{e}_r$, $\underset{\sim}{e}_\theta$

στραμμένο 90° αντίθετα απ' τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Διάνυσμα Θέσης : $\underset{\sim}{r} = r \cdot \underset{\sim}{e}_r$.

Διανυσμα ταχυτητας : $\underset{\sim}{v} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = \frac{d}{dt} r \cdot \underset{\sim}{e}_r = \overset{\underset{\cdot}{(dr/dt)}}{\dot{r}}\, \underset{\sim}{e}_r + r \cdot \frac{de_r}{dt}$

Σχέσεις μεταξύ μοναδιαίων διανυσματων στο πολικο και καρτεσιανο ΣΣ :



μετρο = $\cos\theta \cdot |\underset{\sim}{e}_r| = \cos\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\sim}{e}_r &= \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y \\ \underset{\sim}{e}_\theta &= -\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \cos\theta \cdot \underset{\sim}{e}_y \end{aligned}} \quad ①$$

$\sim$

Παράγωγοι $\overset{\circ}{\underset{\sim}{e}_r}$, $\overset{\circ}{\underset{\sim}{e}_\theta}$

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{e}_r} = \frac{de_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cos\theta \cdot \underset{\sim}{e}_x + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y\right] = \underset{\sim}{e}_x \frac{d}{dt}\cos\theta + \underset{\sim}{e}_y \frac{d}{dt}\sin\theta =$$

$$= -\overset{\circ}{\theta} \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \overset{\circ}{\theta} \cos\theta \cdot \underset{\sim}{e}_y = \overset{\circ}{\theta}\left(-\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_y\right) = \overset{\circ}{\theta} \cdot \underset{\sim}{e}_\theta .$$

↙

(HW) κανονικα απο το ①
γραφουμε τα e_x, e_y
ως προς τα $\underset{\sim}{e}_r, e_\theta$.

$$\dot{\underset{\sim}{e}}_\theta = \frac{de_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\sin\theta \underset{\sim}{e_x} + \cos\theta \underset{\sim}{e_y}\right] = -\dot{\theta}\cos\theta \cdot \underset{\sim}{e_x} - \dot{\theta}\sin\theta \underset{\sim}{e_y} =$$

$$= -\dot{\theta}\left[\cos\theta \underset{\sim}{e_x} + \sin\theta \underset{\sim}{e_y}\right] = -\theta \underset{\sim}{e_r}.$$

Ἀρα: $$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{e}}_r &= \dot{\theta}\cdot \underset{\sim}{e_\theta} \\ \dot{\underset{\sim}{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\, \underset{\sim}{e_r} \end{aligned}}$$

* * *

Οποτε το διανυσμα ταχυτητας θα ειναι

$$\underset{\sim}{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cdot \underset{\sim}{e_r}) = \dot{r}\, \underset{\sim}{e_r} + r\frac{de_r}{dt} \Rightarrow \boxed{v = \dot{r}\cdot \underset{\sim}{e_r} + r\dot{\theta}\, \underset{\sim}{e_\theta}.}$$

το μετρο της ταχυτητας :
$$r(t) = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

οταν διαγραφει κυκλο ⇒ $\dot{r} = 0$

οταν κινειται σε ευθεια που περνα απο το O ⇒ $\dot{\theta} = 0$

Διανυσμα επιτάχυνσης

$$\underset{\sim}{a} = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\underset{\sim}{e_r} + r\dot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta}\right] = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\underset{\sim}{e_r}) + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e_\theta}) =$$

$$= \ddot{r}\cdot\underset{\sim}{e_r} + \dot{r}\underbrace{\dot{\underset{\sim}{e}}_r}_{\dot{\theta}\cdot \underset{\sim}{e_\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta} + r\ddot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta} + r\dot{\theta}\underbrace{\dot{\underset{\sim}{e}}_\theta}_{-\dot{\theta}\underset{\sim}{e_r}} \Rightarrow$$

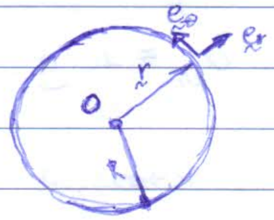
$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underset{\sim}{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\underset{\sim}{e_\theta}}$$

μετρο $a(t) =$
$$= \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2}$$

0 για κυκλική τροχια

0 όταν η ταχυτητα
ειναι σταθερη

~ Ειδική Περίπτωση Κυκλική Τροχιά ~



$$r(t) = R = σταθ. \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0 \quad \forall t$$

$$\underset{\sim}{v} \overset{(=\dot{r})}{=} R\dot{\theta}\, \underset{\sim}{e_\theta} \Rightarrow \underset{\sim}{v} = v(t) \cdot \underset{\sim}{e_\theta}$$

$$\underset{\sim}{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2 \underset{\sim}{e_r}}_{κεντρομόλος} + \underbrace{R\ddot{\theta}\, \underset{\sim}{e_\theta}}_{επιτρόχιος}$$

Μετρο ταχυτητας: $v = R\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{v(t)}{R}}$ μονο για την κυκλικη τροχια

Άρα: $\boxed{\underset{\sim}{a} = \underbrace{-\frac{v^2(t)}{R} \underset{\sim}{e_r}}_{κεντρομόλος} + \underbrace{\dot{v}(t) \cdot \underset{\sim}{e_\theta}}_{επιτρόχια}}$

Μετρο επιτάχυνσης: $a(t) = \sqrt{\frac{v^2(t)}{R} + \dot{v}^2(t)}$

Εαν $v(t) = v_0 =$ σταθερό $\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$

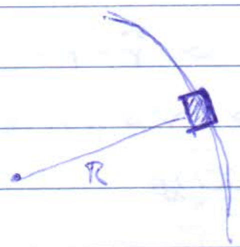
$\Downarrow$

$\dot{v}(t) = 0$

$\underset{\sim}{v}(t) = v_0 \cdot \underset{\sim}{e_\theta}$

$\underset{\sim}{a}(t) = -\frac{v_0^2}{R} \underset{\sim}{e_r}$ (μονο η κεντρομόλος)

Εφαρμογή Formula 1.



$$a = \frac{v_0^2}{R} \leq \overset{a_{\text{επιτρεπόμενο}}}{a_{\text{επ}}} = 10g. \Rightarrow$$

($R\downarrow \Rightarrow a\uparrow$ $R \to \infty$, $a \to 0$, ευθεία)

$$\Rightarrow v_0 \leq \sqrt{a_{\text{επ}} R}$$

- Αν $v_0 = 36 \, km/h = \frac{36000 \, m}{3600 \, sec} = 10 \frac{m}{sec}$

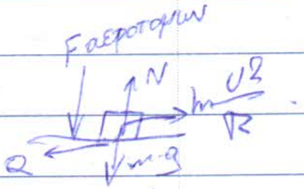
$R = 10m$

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \frac{100}{10} = 10 \, m/sec^2 = 1g.$$

- Αν $\overset{(3 v_0)}{v_0'} = 3 \cdot 36 \, km/h = 108 \, km/h$

$R = 10$

$$a = \frac{\overset{3v_0}{v_0'^2}}{R} = 9g.$$



$Q = \mu \cdot N$

Πρέπει $F_k \geq Q$

9-10-2012

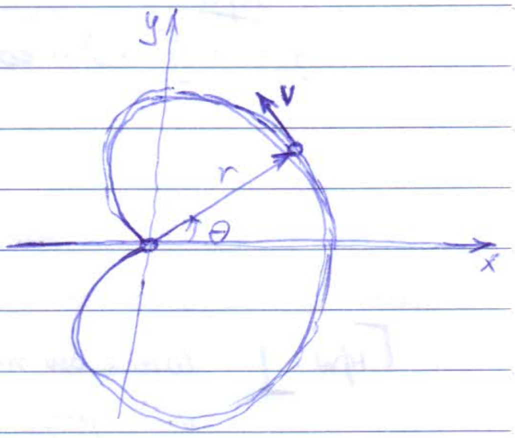
Παράδειγμα

Κίνηση σε καρδιοειδή καμπύλη

$r(\theta) = a(1+\cos\theta)$

$\dot{\theta}(t) = \omega(t) =$ γνωστό.

Ζητείται ταχύτητα , επιτάχυνση



Επιλέγω πολικό σύστημα συντεταγμένων.

Ταχύτητα: $\underset{\sim}{v} = \dot{r}\,\underset{\sim}{e_r} + r\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e_\theta}$

$$\dot{r} = \frac{dr(\theta(t))}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{d\theta}}_{}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \underbrace{-a\sin\theta}_{}\cdot\dot{\theta}$$

$\dot{\theta} = \omega(t)$

Άρα: $v(t) = -a\sin\theta\cdot\omega(t)\cdot\underset{\sim}{e_r} + a(1+\cos\theta)\cdot\omega(t)\cdot\underset{\sim}{e_\theta}$

$v(t) = a\cdot\omega(t)\cdot[-\sin\theta\,\underset{\sim}{e_r} + (1+\cos\theta)\,\underset{\sim}{e_\theta}]$

Η παραγωγίζω ή παίρνω την έτοιμη σχέση:

Επιτάχυνση: $\underset{\sim}{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\underset{\sim}{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\underset{\sim}{e_\theta}$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d}{dt}(-a\cdot\sin\theta\cdot\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}(-a\sin\theta(t)\cdot\omega(t)) =$$

$$= -a\left[\cos\theta\cdot\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega(t)}\overset{\omega(t)}{\cancel{\omega(t)}}\cancel{+\sin} + \sin\theta\;\dot{\omega}(t)\right]$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -a[\omega^2(t)\cdot\cos\theta + \dot{\omega}(t)\cdot\sin\theta].$$

Άρα :

$$\underset{\sim}{a}(t) = [-a\omega^2(t)\cos\theta \underbrace{- \underset{0}{a\mathring{\omega}(t)}\sin\theta - r\omega^2(t)]\underset{\sim}{e}_r + [-2a\omega^2(t)\sin\theta + r\underset{0}{\mathring{\omega}(t)}}_{\text{Εαν } \omega(t) = \omega_0 = \text{σταθερό.}}]\underset{\sim}{e}_\theta$$

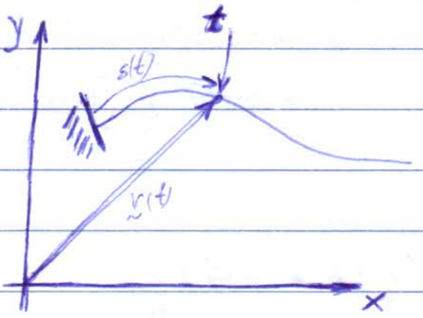
H/W : $\omega(t)$: δεν το ξέρω

$v(t)$: μετρο της ταχυτητας = γνωστό

Να βρεθούν η ταχυτητα και η επιτακυνση.

— . — . —

3. Τροχιακό Σύστημα Αναφοράς.



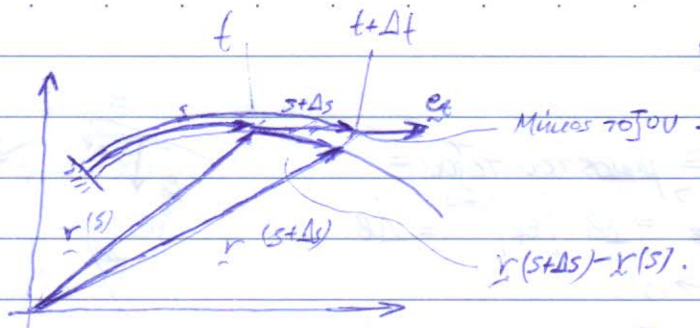
Συντεταγμένη : s

Μοναδιαια διανύσματα : $\underset{\sim}{e}_t$, $\underset{\sim}{e}_n$

$r(s(t))$

Ταχύτητα : $\underline{v} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d}{dt}\underline{r}(s(t)) = \dfrac{dr}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \mathring{s}\,\dfrac{dr}{ds}$

$$\frac{dr}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{r(s+\Delta s) - r(s)}{\Delta s}$$



$\underset{\sim}{e}_t$: tangent : εφαπτομενικό.

Οταν $\Delta s \to 0$, το $\dfrac{\underline{r}(s+\Delta s) - \underline{r}(s)}{\Delta s} \xrightarrow[\text{γινει}]{\text{το διανυσμα τεινει να}}$ εφαπτομενικό στην τροχιά

↳ ο λογος τεινει να γινει μοναδα

Αρα $\dfrac{d\underset{\sim}{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\underset{\sim}{r}(s+\Delta s) - \underset{\sim}{r}(s)}{\Delta s} = \underset{\sim}{e}_t$ ⇝ μοναδιαιο διανυσμα

Αρα : $\underline{v} = \dot{s}\,\underset{\sim}{e}_t$, αρά το $\dot{s}$ είναι το μέτρο της ταχύτητας

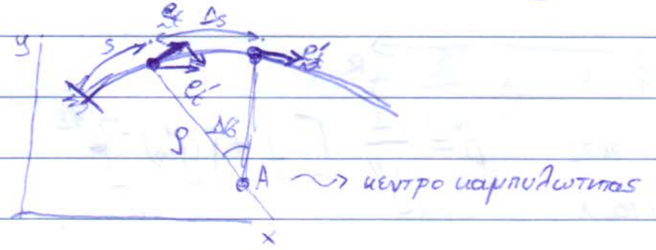
ή $\boxed{v(t) = \dot{s}(t)}$

Επιτάχυνση

$$\underset{\sim}{a}(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\,\underset{\sim}{e}_t\right) = \ddot{s}\,e_t + \dot{s}\,\frac{d\underset{\sim}{e}_t}{dt} =$$

$$= \ddot{s}\,e_t + \dot{s}\,\frac{de_t}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}} \Rightarrow \underset{\sim}{a}(t) = \ddot{s}\,e_t + \dot{s}^2\,\frac{de_t}{ds}$$

↳ είναι κάθετο!



A: κεντρο καμπυλωτητας.

ρ: ακτίνα καμπυλώτητας

(τροχια: ευθεια ⇒
⇒ ρ → ∞)

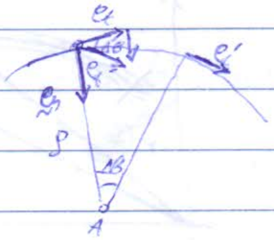
$$\frac{d\underset{\sim}{e}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{e_t(s+\Delta s) - e_t(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{e_t' - e_t}{\Delta s}$$

$\Delta s = \rho \cdot \Delta\theta$

[illegible] $|\underset{\sim}{e}'_t - \underset{\sim}{e}_t| \equiv$ μηκος του τοξου $=$

$= \Delta\theta \cdot |\underset{\sim}{e}_t|^{\to 1} = \Delta\theta$

όταν $\Delta s \to 0$



$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\underset{\sim}{e}'_t - \underset{\sim}{e}_t}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\cancel{\Delta\theta} \cdot e_n}{\rho \cdot \cancel{\Delta\theta}} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \underset{\sim}{e}_n$$

$\underset{\sim}{e}'_t - \underset{\sim}{e}_t \to \perp \underset{\sim}{e}_t$, όταν $\Delta s \to 0$

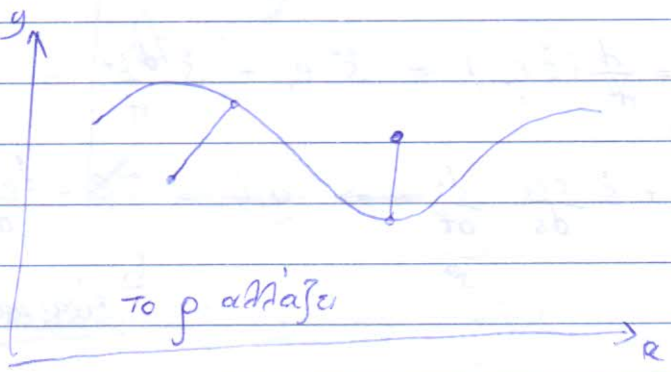
Ορίζω διανυσμα $\underset{\sim}{e}_n$, (normal) καθετο στην εφαπτομένη, μοναδιαιο.

Αρα $\underset{\sim}{e}'_t - \underset{\sim}{e}_t = \Delta\theta \cdot \underset{\sim}{e}_n$

Αρα $\boxed{\underset{\sim}{a}(t) = \ddot{s} \cdot \underset{\sim}{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \cdot \underset{\sim}{e}_n}$ $\xrightarrow{\text{εναλλακτικος τυπος}}$ $\boxed{\underset{\sim}{a}(t) = \underbrace{\dot{v}(t) \cdot \underset{\sim}{e}_t}_{\text{επιτροχιος επιταχυνση}} + \underbrace{\frac{v^2(t)}{\rho} \underset{\sim}{e}_n}_{\text{κεντρομολος επιταχυνση.}}}$

Για $\vec{v}$ = σταθ
$\dot{v} = 0$

~ ~ ~

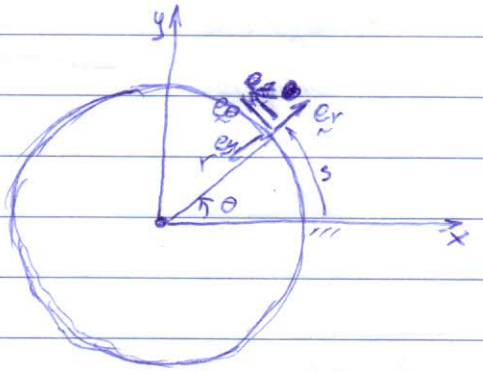


Αν ξερω το $y(x)$, τοτε $\rho(x) = \frac{1}{y''} \left[1 + (y'(x))^2\right]^{3/2}$
(y συναρτηση του x)

- Παράδειγμα

$$y(x) = x^3$$
$$y'(x) = 3x^2$$
$$y''(x) = 6x$$
$$\rho(x) = \frac{1}{6x}\left[1+(3x^2)^2\right]^{3/2}$$

- Εφαρμογή Κίνηση σε Κυκλική Τροχιά.



$$\underset{\sim}{e}_t = \underset{\sim}{e}_\theta$$
$$\underset{\sim}{e}_n = -\underset{\sim}{e}_r$$

Ζητείται:

1. Ταχύτητα
2. Επιτάχυνση συναρτήσει του $\theta(t)$.

Τροχιακό ΣΣ:

Ταχύτητα $\quad \underline{v} = \dot{s}\,\underset{\sim}{e}_t$

$$s = R\theta \Rightarrow \dot{s} = R\dot{\theta}$$

Άρα $\quad \underline{v} = R\dot{\theta}(t)\cdot\underset{\sim}{e}_t$

Επιτάχυνση $\quad \underline{a} = \ddot{s}\,\underset{\sim}{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\underset{\sim}{e}_n = R\ddot{\theta}\,\underset{\sim}{e}_t + \frac{(R\dot{\theta})^2}{R}\,\underset{\sim}{e}_n$

$$\underline{a} = R\ddot{\theta}\,\underline{e}_t + R\dot{\theta}^2\,\underline{e}_n$$

Έχουμε βρει για ΠΣΣ: $\quad \underline{a} = R\ddot{\theta}\,\underline{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,e_r$

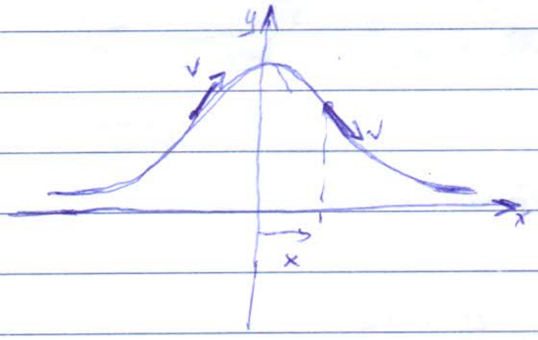
Είναι το ίδιο αφού: $\underset{\sim}{e}_t = \underset{\sim}{e}_\theta$

$$\underset{\sim}{e}_n = -\underset{\sim}{e}_r$$

$$\underset{\sim}{a} = \dot{v}(t)\,\underset{\wedge}{e_t} + \frac{v^2(t)}{R}\,\underset{\sim}{e_n}.$$

Μετρο επιταχυνσης : $a = \sqrt{\dot{v}^2(t) + \frac{v^4(t)}{R^2}}$

- Εφαρμογή.



$$y(x) = \frac{8R^3}{4R^2 + x^2}$$

$$v_x = v_0 = \text{σταθερό}$$

1. ταχύτητα
2. επιταχυνση

} Διανύσματα

Τροχιακό ΣΣ

ταχύτητα $\underline{v} = \dot{s}\,\underset{\sim}{e_t} = v(t)\cdot\underset{\sim}{e_t}$

$$v(t) = \underset{\text{(στο ΚΣΣ)}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \sqrt{v_0^2 + \dot{y}^2}$$

Όπου: $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\underset{v_0}{\underbrace{\frac{dx}{dt}}} = v_0\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8R^3}{(4R^2+x^2)^2}\,2x$$

άρα $\dot{y} = -\frac{16R^3 v_0 x}{(4R^2+x^2)^2}$

επιτάχυνση $\underline{a} = \ddot{s}\,\underset{\sim}{e_t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\underset{\sim}{e_n}$

$$\dot{s} = v(t)$$

$$\ddot{s} = \frac{d}{dt}(\dot{s}) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right) = \frac{2\overset{v_0}{\dot{x}}\overset{0}{\ddot{x}} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

0 (αφού $v_x = v_0 = \text{σταθ}$)

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{y}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{16R^3 v_0 x}{(4R^2+x^2)^2}\right] = \ldots$$

(Η/W)

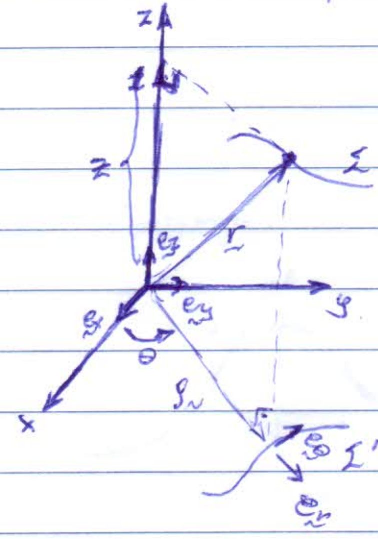
$$\rho(x) = \frac{1}{y''(x)} \left[1 + (y'(x))^2 \right]^{3/2}$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{16R^3 x}{(4R^2+x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(y') = \ldots$$

Παρασκευή / 12/10/2012.

Κυλινδρικό Σύστημα Αναφοράς



προβολή του Σ.
στο επίπεδο xy.

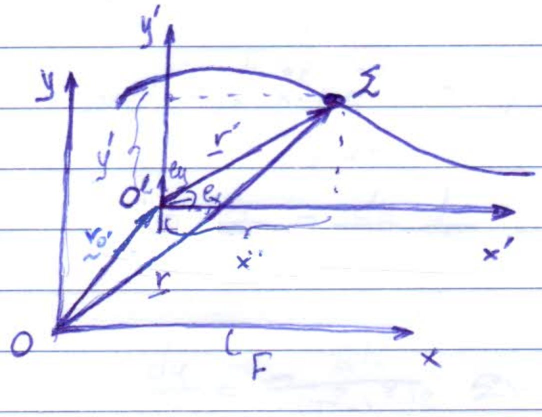
πολικές καρτεσιανές

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{\rho} + z\cdot\underset{\sim}{e_z} = \rho\cdot\underset{\sim}{e_\rho} + z\cdot\underset{\sim}{e_z}$$

$$\underset{\sim}{v} = \dot{\rho}\cdot\underset{\sim}{e_\rho} + \rho\cdot\dot{\theta}\cdot\underset{\sim}{e_\theta} + \dot{z}\underset{\sim}{e_z}$$

$$\underset{\sim}{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\underset{\sim}{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\underset{\sim}{e_\theta} + \ddot{z}\underset{\sim}{e_z}$$

~ ΣΧΕΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ~



$O'x' \parallel Ox$
$O'y' \parallel Oy$

$O'x'y'$: κινούμενο σύστημα αναφοράς.

$$\underline{r} = \underline{r_o'} + \underline{r'} \rightarrow$$

παραγωγίζοντας ⇒

$$\underline{\dot{r}} = \underline{\dot{r}_o} + \underline{\dot{r}'}$$

απόλυτη

η ταχύτητα του O' ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς

σχετική

μεταφορική ταχύτητα

$$\underline{r'} = x'\cdot\underline{e_x'} + y'\cdot\underline{e_y'} + z'\cdot e_z'$$

→ αφού έχουμε παράλληλη μεταφορά.

οπότε: $(\dot{e}_x' = \dot{e}_y' = \dot{e}_z = 0)$

$$\underline{\dot{r}'} = \dot{x}'\underline{e_x'} + \dot{y}'\underline{e_y'} + \dot{z}'\underline{e_z'} =$$ σχετική ταχύτητα του Σ ως προς το κινούμενο Σύστημα Αναφοράς O'x'y'.

Το συστημα OXY ειναι ενα συστημα που ονομαζω F.
—"— O'X'Y' ——"—— F'

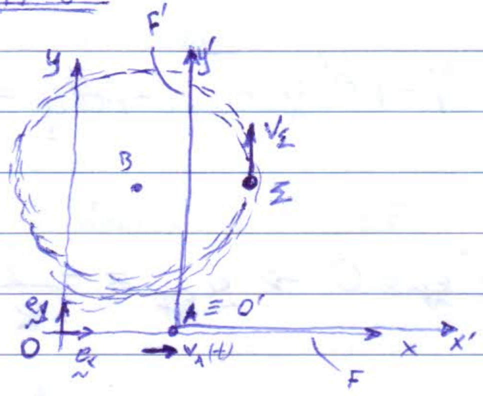
$\underline{r}' = \underline{\dot{r}}_{o'} + \underline{\dot{r}}' \Rightarrow \boxed{\underline{v}_{\Sigma/F} = \underline{v}_{o'/F} + \underline{v}_{\Sigma/F'}}$

$\Rightarrow \underbrace{\underline{\dot{v}}_{\Sigma/F}} = \underline{\dot{v}}_{o'/F} + \dot{v}_{\Sigma/F'}$

$\boxed{\underline{a}_{\Sigma/F} = \underline{a}_{o'/F} + \underline{a}_{\Sigma/F'}}$

↳ σχετικη επιταχυνση.

<u>Εφαρμογή</u>



V_Σ = σταθερό.
$V_A(t)$ = γνωστο

Να βρεθει η σχετική ταχυτητα και επιτάχυνση του κινητου Σ, σε παρατηρητη που κινειται στον αξονα x.

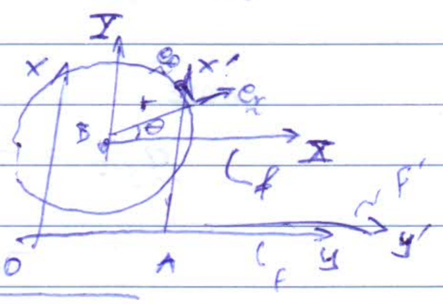
Σχετικη ταχυτητα του Σ, ως προς A.

1. $\underline{V}_{\Sigma/F} = \underline{V}_{A/F} + \underline{V}_{\Sigma/F'} \Rightarrow \underline{V}_{\Sigma/F'} = \underline{V}_{\Sigma/F} - \underline{V}_{A/F}$

2. $\underset{\sim}{a}_{\Sigma/F} = \underset{\sim}{a}_{A/F} + \underset{\sim}{a}_{\Sigma/F'}$ ← σχετική επιταχυνση

ΠΕΣ ΚΕΣ

$\underset{\sim}{V}_{A/F} = V_A(t) \cdot \underset{\sim}{e_x}$



$\underset{\sim}{V}_{\Sigma/f} = \underset{0}{\overset{\shortparallel}{\dot{r}}} \cdot \underset{\sim}{e_r} + \dot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta} = \underbrace{R\dot{\theta}}_{V_\Sigma}\underset{\sim}{e_\theta} = V_\Sigma \cdot \underset{\sim}{e_\theta}$

f ή F
είναι σωστό

$V_\Sigma = R \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{V_\Sigma}{R}}$ ①

$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{V}_{\Sigma/F} = V_\Sigma \underset{\sim}{e_\theta}}$

©NEXT Co GREECE

$\underline{V}_{\Sigma/F} = \cancel{\underline{V}_{B/F}}^{\,0} + \underline{V}_{\Sigma/f} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{V}_{\Sigma/F} = \underset{\sim}{V}_{\Sigma/f}}$

Αντικαθιστώντας :

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{v}_{\Sigma/F'} &= \underset{\sim}{v}_{\Sigma/F} - \underset{\sim}{v}_{A/F} = v_\Sigma \cdot \underset{\sim}{e}_\theta - v_A(t)\, \underset{\sim}{e}_x \\ \underset{\sim}{e}_\theta &= -\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{v}_{\Sigma/F'} = v_\Sigma \cdot \left(-\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_y\right) - v_A(t)\, e_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underset{\sim}{v}_{\Sigma/F'} = -\left[v_\Sigma \sin\theta + v_A(t)\right] \underset{\sim}{e}_x + v_\Sigma \cos\theta \cdot \underset{\sim}{e}_y}$$

Επιτάχυνση (σχετική) : $\underset{\sim}{a}_{\Sigma/F'} = \underset{\sim}{a}_{\Sigma/F} - \underset{\sim}{a}_{A/F}$

$$\underset{\sim}{a}_{A/F} = \dot{v}_A(t) \cdot \underset{\sim}{e}_x$$

$$\underset{\sim}{a}_{\Sigma/F} = \underset{\sim}{a}_{\Sigma/A} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \underset{\sim}{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \underset{\sim}{e}_\theta = -R\dot{\theta}^2 \underset{\sim}{e}_r + R\ddot{\theta}\, \underset{\sim}{e}_\theta .$$

① $\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_\Sigma}{R} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

οποτε $\underset{\sim}{a}_{\Sigma/F} = -R\left(\frac{v_\Sigma}{R}\right)^2 \underset{\sim}{e}_r + 0 \Rightarrow \underset{\sim}{a}_{\Sigma/F} = -\frac{v_\Sigma^2}{R} \underset{\sim}{e}_r$

Επομένως

$$a_{\Sigma/F'} = \underset{\sim}{a}_{\Sigma/F} - \underset{\sim}{a}_{A/F} = -\frac{v_\Sigma^2}{R} \underset{\sim}{e}_r - \dot{v}_A(t)\, \underset{\sim}{e}_x$$

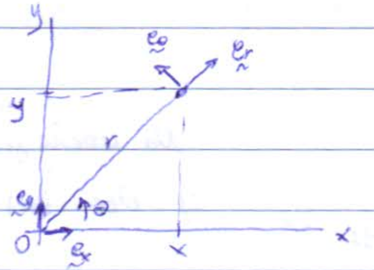
$$\underset{\sim}{e}_r = \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \sin\theta\, e_y$$

οποτε

$$\underset{\sim}{a}_{\Sigma/F} = -\frac{v_\Sigma^2}{R} \left(\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_x + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_y\right) - \dot{v}_A(t)\, \underset{\sim}{e}_x =$$

$$= -\left[\frac{v_\Sigma^2 \cos\theta}{R} + \dot{v}_A(t)\right] \underset{\sim}{e}_x - \frac{v_\Sigma^2 \sin\theta}{R} \underset{\sim}{e}_y$$

15/10/2012

-


$x = r\sin\theta$

$y = r\cos\theta$

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin\theta = r^2$

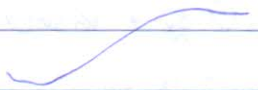
$r = x^2 + y^2$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

(Για την άσκηση 3)

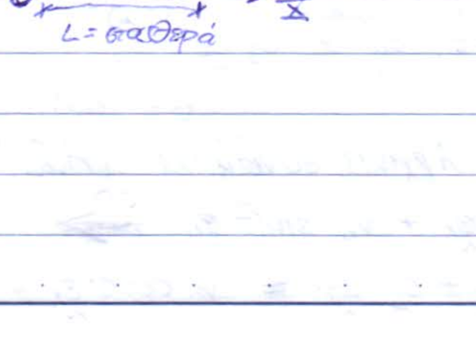
- Για την άσκηση 4.

επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση → (επιτρόχια)

Για όχι κυκλική κίνηση :

: τροχιακό Σ.Α.

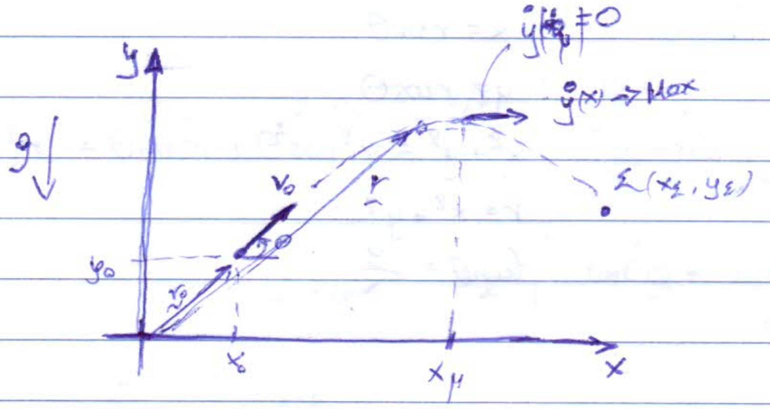
- Για την άσκηση 1 : ειδικότερα να λυθεί για $f(\dot{x}) = \alpha \dot{x}^2$.
$\ddot{x} = f(\dot{x}) = a\dot{x}^2$.

- Για την άσκηση 1 (β' ομάδα).



- Με κινούμενα Σ.Α. και χωρίς κινούμενα συστήματα αναφοράς.

~ Βολή Υλικού Σημείου ~



Να υπολογιστούν:

1) Θέση και ταχύτητα βλήματος $\forall t$.

2) Οριζόντια Θέση x_μ, στην οποία το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος H.
Επίσης, H = ?

3) Η τιμή της θ, για την οποία το σώμα θα χτυπήσει στο στόχο.

4) Η εξίσωση της τροχιάς $y(x)$.

Λύση:

1)

$$\underset{\sim}{v_0} = v_0 \cos\theta \, \underset{\sim}{e_x} + v_0 \sin\theta \, \underset{\sim}{e_y}$$

$$\underset{\sim}{r_0} = x_0 \underset{\sim}{e_x} + y_0 \underset{\sim}{e_y}$$

$$\underset{\sim}{a}(t) = -g \cdot \underset{\sim}{e_y}$$

Ταχύτητα (διάνυσμα).

$$\dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \underset{\sim}{a}(t) \Rightarrow \frac{d\underset{\sim}{v}}{dt} = \underset{\sim}{a}(t) \Rightarrow \frac{d\underset{\sim}{v}(t)}{dt} = -g \underset{\sim}{e_y}$$

$$\Rightarrow d\underset{\sim}{v}(t) = -g \underset{\sim}{e_y} \cdot dt \Rightarrow \int d\underset{\sim}{v}(t) = \int -g \underset{\sim}{e_y} dt + \underset{\sim}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v}(t) = -gt \underset{\sim}{e_y} + c_1 \underset{\sim}{e_x} + c_2 \underset{\sim}{e_y} + c_3 \underset{\sim}{e_z}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v}(t) = c_1 \underset{\sim}{e_x} + (c_2 - gt) \underset{\sim}{e_y} + c_3 \underset{\sim}{e_z} \quad ①$$

Υπολογισμός σταθεράς : Αρχικές συνθήκες (Α.Σ.).

$$\underset{\sim}{v}(0) = v_0 \cos\theta \, \underset{\sim}{e_x} + v_0 \sin\theta \, \underset{\sim}{e_y} \xRightarrow{①}$$

$$\Rightarrow c_1 \cdot \underset{\sim}{e_x} + (c_2 - g \cdot \overset{\nearrow 0}{0}) \underset{\sim}{e_y} + c_3 \cdot \underset{\sim}{e_z} = v_0 \cos\theta \, \underset{\sim}{e_x} + v_0 \sin\theta \, \underset{\sim}{e_y} + 0 \underset{\sim}{e_z}$$

ισότητα διανυσμάτων ⇒
⇒ οι συνιστώσες τους θα είναι ίδιες ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= v_0 \cos\theta \\ c_2 &= v_0 \sin\theta \\ c_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Άρα: $\underset{\sim}{v}(t) = v_0 \cos\theta\, \underset{\sim}{e_x} + (v_0 \sin\theta - g t)\, \underset{\sim}{e_y}$

$\dot{\underset{\sim}{r}} = v(t) \rightarrow \frac{dr}{dt} = \underset{\sim}{v}(t)$

$\frac{dr}{dt} = v_0 \cos\theta\, \underset{\sim}{e_x} + (v_0 \sin\theta - g \cdot t)\, e_y \xrightarrow{\text{(κατευθείαν)}}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{r}(t) = \int \left[v_0 \cos\theta\, \underset{\sim}{e_x} + (v_0 \sin\theta - g t)\, \underset{\sim}{e_y} \right] dt + \underset{\sim}{c'}$

$\Rightarrow r(t) = v_0 \cos\theta \cdot \underset{\sim}{e_x}\, t + \left(v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \underset{\sim}{e_y} + \underset{\sim}{c'}$

$\underset{\sim}{c'} = c_1'\, \underset{\sim}{e_x} + c_2'\, \underset{\sim}{e_y} + c_3' \cdot \underset{\sim}{e_z}$

Υπολογισμός του c': ΑΣ

$\underset{\sim}{r}(0) = \underset{\sim}{r_0} = x_0\, \underset{\sim}{e_x} + y_0\, \underset{\sim}{e_y} \Rightarrow \underset{\sim}{c'} = x_0\, \underset{\sim}{e_x} + y_0\, \underset{\sim}{e_y}$

$\Rightarrow c_1'\, \underset{\sim}{e_x} + c_2'\, \underset{\sim}{e_y} + c_3' \cdot \underset{\sim}{e_z} = x_0\, \underset{\sim}{e_x} + y_0 \cdot \underset{\sim}{e_y}$

~~Άρα r(t) =~~

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} c_1' &= x_0 \\ c_2' &= y_0 \\ c_3' &= z_0 \\ &(0) \end{aligned}} \xrightarrow[c']{\text{αντικατάσταση}} \underset{\sim}{c'} = x_0\, \underset{\sim}{e_x} + y_0\, \underset{\sim}{e_y}$$

Άρα $r(t) = v_0 t \cos\theta\, \underset{\sim}{e_x} + \left(v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \right) \underset{\sim}{e_y} + x_0\, e_x + y_0\, e_y.$

$$\Rightarrow r(t) = \underbrace{(x_0 + v_0 t \cdot \cos\theta)}_{x(t)}\, \underset{\sim}{e_x} + \underbrace{\left(y_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \right)}_{y(t)} \underset{\sim}{e_y} \qquad z(t) = 0$$

$\underset{\sim}{r}(t) = x(t)\, \underset{\sim}{e_x} + y(t)\, \underset{\sim}{e_y} + z(t)\, \underset{\sim}{e_z}$

Άρα: $x(t) = x_0 + v_0 t \cos\theta$ (*)

$y(t) = y_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$ (**)

$$\underset{\sim}{v}(t) = \underbrace{v_x(t)}_{\dot{x}} \underset{\sim}{e_x} + \underbrace{v_y(t)}_{\dot{y}} \underset{\sim}{e_y} + \underbrace{v_z(t)}_{\dot{z}} \underset{\sim}{e_z}$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt.$$

β) <u>Α' τρόπος:</u> Στο σημείο αυτό (το μέγιστο.) θα πρέπει να είναι $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$\dot{y} = \frac{d\,y(x)}{dt} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{dy}{dx}}} \cdot \frac{dx}{dt} = 0. \quad \rightarrow v_y = 0.$$

<u>Β' τρόπος:</u> η ταχύτητα είναι εφαπτομένη στην τροχιά, άρα είναι οριζόντια, άρα πρέπει $v_y = 0$.

- Εαν το μέγιστο συμβαίνει στη χρονική στιγμή $t_\mu \Rightarrow v_y(t_\mu) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_0 \sin\theta - g.t_\mu = 0 \rightarrow t_\mu = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Επομένως $x_\mu = x(t_\mu) = x_0 + v_0 t_\mu \cos\theta = x_0 + v_0 \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g} \cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_\mu = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\theta)$$

και $H = y(t_\mu) = y_0 + v_0 t_\mu \sin\theta - \frac{1}{2} g t_\mu^2 =$

$$= y_0 + v_0 \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g} \sin\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$= y_0 + \frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta \Rightarrow \boxed{H = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta.}$$

3/ Χτυπάω στόχο σε στιγμή t_Σ.

τότε $x(t_\Sigma) = x_\Sigma \Rightarrow x_0 + v_0 t_\Sigma \cos\theta = x_\Sigma$ (A)

$y(t_\Sigma) = y_\Sigma \Rightarrow y_0 + v_0 t_\Sigma \sin\theta - \frac{1}{2} g t_\Sigma^2 = y_\Sigma$ (B)

$\Rightarrow$ με απαλοιφή του t_Σ, προκύπτει μια εξίσωση για το θ.

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$(A) \Rightarrow t_\Sigma = \frac{x_\Sigma - x_0}{v_0 \cos\theta}$$

$$(B) \Rightarrow y_0 + \cancel{v_0} \frac{x_\Sigma - x_0}{\cancel{v_0}\cos\theta} \overset{\tan\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{2} g \frac{(x_\Sigma - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2\theta} = y_\Sigma$$

$$\Rightarrow y_0 + (x_\Sigma - x_0)\tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{(x_\Sigma - x_0)^2}{v_0^2}(1+\tan^2\theta) = y_\Sigma$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta - \frac{2 v_0^2}{g (x_\Sigma - x_0)} \tan\theta + \frac{2 v_0^2 (y_\Sigma - y_0)}{g (x_\Sigma - x_0)^2} + 1 = 0$$

$\tan\theta = z$, δευτεροβάθμια.

↳ 2 γωνίες : | ευθύβολη
| επισκηπτική

(H/W) πόσο χρόνο κάνει η καθίμια

4/ Απαλοιφή του t, από (*) και (**) (παραβολική τροχιά)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t \cos\theta \\ y &= y_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\rightarrow y - y_0 = \underset{\text{γνωστή}}{(x - x_0)\tan\theta} - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2} \cdot \underset{\text{παραβολή}}{(1+\tan^2\theta)\cdot(x - x_0)^2}$$

μπορούμε να προσθέσουμε κάτι σταθερό για να το κάνουμε τέλειο τετράγωνο ←

©NEXT Co GREECE

5/ Αν το Σ κινειται με σταθερή ταχυτητα V_Σ $\overset{v_\Sigma}{\longleftarrow}\bullet\ \Sigma$

a/ χωρις χρηση κινουμενων Σ.Α.

β/ με χρηση κινουμενων Σ.Α.

να βρεθει η γωνια Θ.