ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι

Παντελής Δημήτριος
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

BY NC SA

ΕΝΝΟΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Μαθηματική περιγραφή συστημάτων με αβεβαιότητα

- Παραδείγματα από την οργάνωση παραγωγής
  - Διάρκεια παραγωγής προϊόντων
  - Ζήτηση προϊόντων
  - Βλάβες μηχανών
  - Διαθεσιμότητα προσωπικού

- Εμπειρικός ορισμός πιθανότητας: σχετική συχνότητα γεγονότος

- Υποκειμενικός ορισμός πιθανότητας: πεποίθηση σχετικά με κάποιο γεγονός

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

- Ω: σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος
  - Στοιχεία του Ω αμοιβαίως αποκλειόμενα
  - Το Ω καλύπτει όλα τα ενδεχόμενα

- Το Ω μπορεί να ορίζεται με διαφορετικούς τρόπους

- Παράδειγμα: ρίψη ζαριού

  Ω={1,2,3,4,5,6}

  Ω={περιττός, άρτιος}

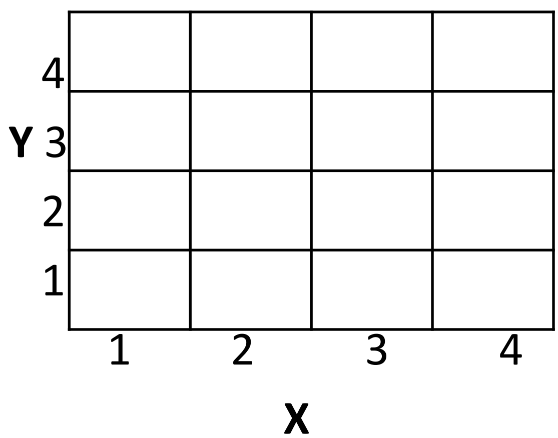
  Ω={1 ή 3, 1 ή 4, 2, 5, 6}, μη αποδεκτός δειγματικός χώρος γιατί τα 2 πρώτα στοιχεία δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα.

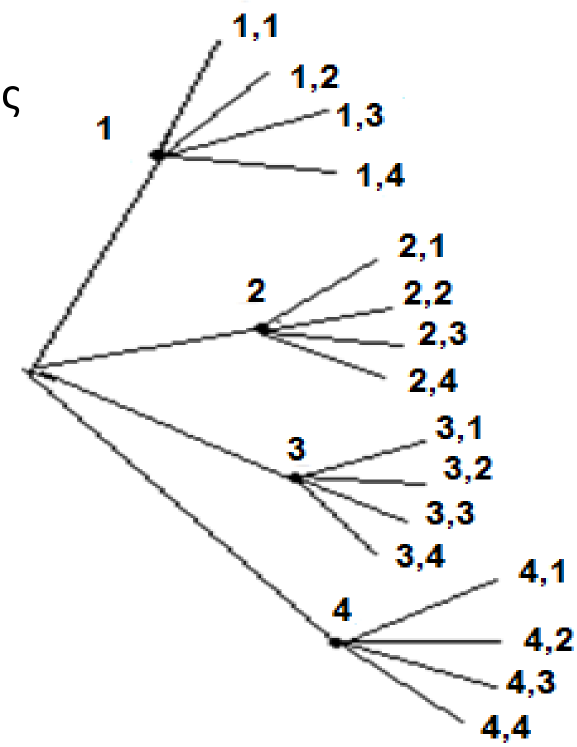
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

- Δύο ρίψεις τετράεδρου ζαριού

  X: Αποτέλεσμα πρώτης ρίψης

  Y: Αποτέλεσμα δεύτερης ρίψης





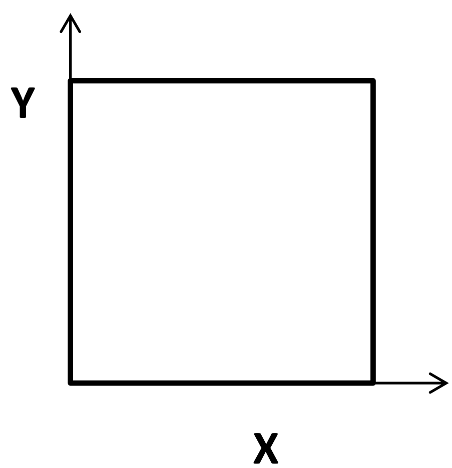
- 16 ενδεχόμενα

  Ω={(1,1), (1,2), ..., (4,4)}

- Η περιγραφή με δέντρο ενδείκνυται όταν το πείραμα γίνεται σε στάδια

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

- Βελάκι σε τετραγωνικό στόχο διαστάσεων 1×1



- (x,y): οι συντεταγμένες σημείου που καρφώνεται το βελάκι

- Υποθέτοντας ότι το βελάκι βρίσκει σίγουρα το στόχο, ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα σημεία που απαρτίζουν το στόχο

  $\Omega=\{ (x, y): 0\leq x, y \leq 1\}$

- Ω: άπειρος, μη αριθμήσιμος δειγματικός χώρος

ΝΟΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Γεγονός: υποσύνολο δειγματικού χώρου
  - Γεγονότα A, B ξένα μεταξύ τους αν το ένα αποκλείει το άλλο, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$

- Σε κάθε γεγονός αντιστοιχεί μία πιθανότητα

- Αξιώματα πιθανοτήτων
  1. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \geq 0$
  2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
  3. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$ αν $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$

- Τα αξιώματα αρκούν για τον υπολογισμό οποιασδήποτε πιθανότητας
  - π.χ. Αν $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ ξένα μεταξύ τους ανά δύο τότε

    $$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Gamma)$$

    εφαρμόζοντας δύο φορές το Αξίωμα 3
  - Ανάλογο αποτέλεσμα και για την ένωση περισσότερων γεγονότων

ΝΟΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Δύο ρίψεις τετράεδρου ζαριού

	1				
Y	2				
	3				
	4				
		1	2	3	4
			X		

- Νόμος πιθανότητας: ίδια πιθανότητα για κάθε αποτέλεσμα $\frac{1}{16}$

- Πιθανότητα γεγονότος: Το άθροισμα πιθανοτήτων αποτελεσμάτων που απαρτίζουν το γεγονός

$$\mathrm{P}\Big((\mathrm{X},\mathrm{Y})=(1,2)\text{ ή }(2,4)\Big)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}$$

$$\mathrm{P}\Big(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\text{ άρτιος}\Big)=8\cdot\frac{1}{16}$$

$$\mathrm{P}\Big(\mathrm{X}=\mathrm{Y}\Big)=4\cdot\frac{1}{16}$$

$$\mathrm{P}\Big(\mathrm{X}>\mathrm{Y}\Big)=7\cdot\frac{1}{16}$$

$$\mathrm{P}\Big(\text{τουλάχιστον ένα } 4\Big)=\frac{7}{16}$$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΝΟΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Όλα τα αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα

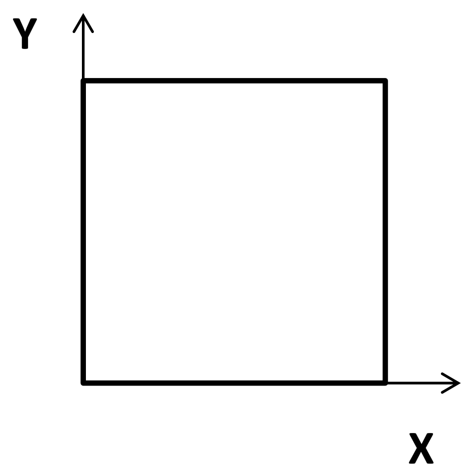
- $$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{αριθμός στοιχείων του A}}{\text{αριθμός στοιχείων του }\Omega}$$

  - Πρόβλημα αρίθμησης

- Παραδείγματα: καλά ανακατεμένες τράπουλες, φυσιολογικά νομίσματα και ζάρια

ΝΟΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

- Βελάκι σε στόχο



- Μη μηδενική πιθανότητα σε κάθε σημείο: Μη αποδεκτός νόμος πιθανότητας
  - Οδηγεί σε άτοπο

- Νόμος πιθανότητας: ορίζει πιθανότητα για κάθε περιοχή που ανήκει στο στόχο

ΝΟΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

- Ομοιόμορφος νόμος πιθανότητας: Πιθανότητα=εμβαδόν

$$P\left(X+Y\leq\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

  - εμβαδόν τριγώνου με κορυφές (0,0), (0, $\frac{1}{3}$), ($\frac{1}{3}$,0)

$$P\Big((X,Y)=\big((0,2),(0,3)\big)\Big)=0$$

  - κάθε σημείο έχει μηδενικό εμβαδόν

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΝΟΜΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Με εφαρμογή των Αξιωμάτων 2,3

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}^{c}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}^{c}\right) \Rightarrow \mathrm{P}\left(\mathrm{A}^{c}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

- Με εφαρμογή του Αξιώματος 3, εάν $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους τότε:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3 \cup \ldots\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\right) + \ldots$$

  – δεν ισχύει για ένωση μη αριθμήσιμων γεγονότων

- Με εφαρμογή του Αξιώματος 3

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) &= \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cup \left(\mathrm{A}^{c} \cap \mathrm{B}\right)\right) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}^{c} \cap \mathrm{B}\right) \\ \mathrm{P}(\mathrm{B}) &= \mathrm{P}\left((\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \left(\mathrm{A}^{c} \cap \mathrm{B}\right)\right) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}^{c} \cap \mathrm{B}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- Ρίχνουμε νόμισμα 4 φορές

$$P\left(\text{τουλάχιστον 1 φορά Γράμματα}\right) = ;$$

Δειγματικός χώρος : 16 ισοπίθανα ενδεχόμενα

$$P\left(\text{τουλάχιστον 1 Γ}\right) = 1 - P\left(\text{κανένα Γ}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\text{ΚΚΚΚ}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

- Επιλέγουμε χαρτί από τράπουλα

Άσος ή ρήγας:

$$P\left(A \cup K\right) = P\left(A\right) + P\left(K\right) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Άσος ή μαύρο:

$$P\left(A \cup M\right) = P\left(A\right) + P\left(M\right) - P\left(A \cap M\right) =$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{7}{13}$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

- Πληροφορία σχετικά με την έκβαση του πειράματος αλλάζει το δειγματικό χώρο και τις πεποιθήσεις μας (πιθανότητες γεγονότων)

- $P(A|B)$: πιθανότητα του A δεδομένου του B
  - B: νέος δειγματικός χώρος

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ αν $P(B) \neq 0$
  - «μερίδιο» του A στο νέο δειγματικό χώρο

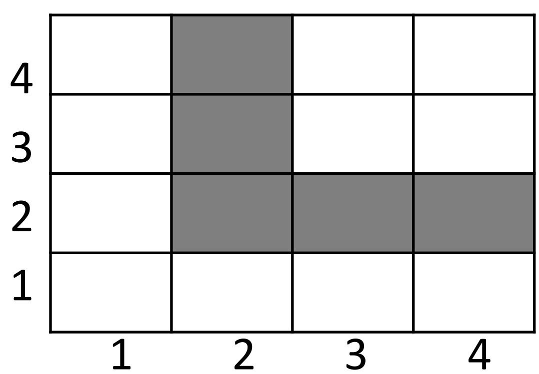
- Ιδιότητες νόμων πιθανότητας ισχύουν και στο νέο δειγματικό χώρο

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B)$$

$$P(A^c | B) = 1 - P(A|B)$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Δυο ρίψεις τετράεδρου ζαριού
- Πληροφορία: $\min(X,Y) = 2$
- Νέος δειγματικός χώρος: 5 ενδεχόμενα (σκιασμένη περιοχή)



- $P\left(\max(X,Y) = 2 \mid \min(X,Y) = 2\right) = \frac{1}{5}$
- $P\left(\max(X,Y) = 3 \mid \min(X,Y) = 2\right) = \frac{2}{5}$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ

- Ορισμός δεσμευμένης πιθανότητας $\Rightarrow$

  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$

- Γενίκευση: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot$

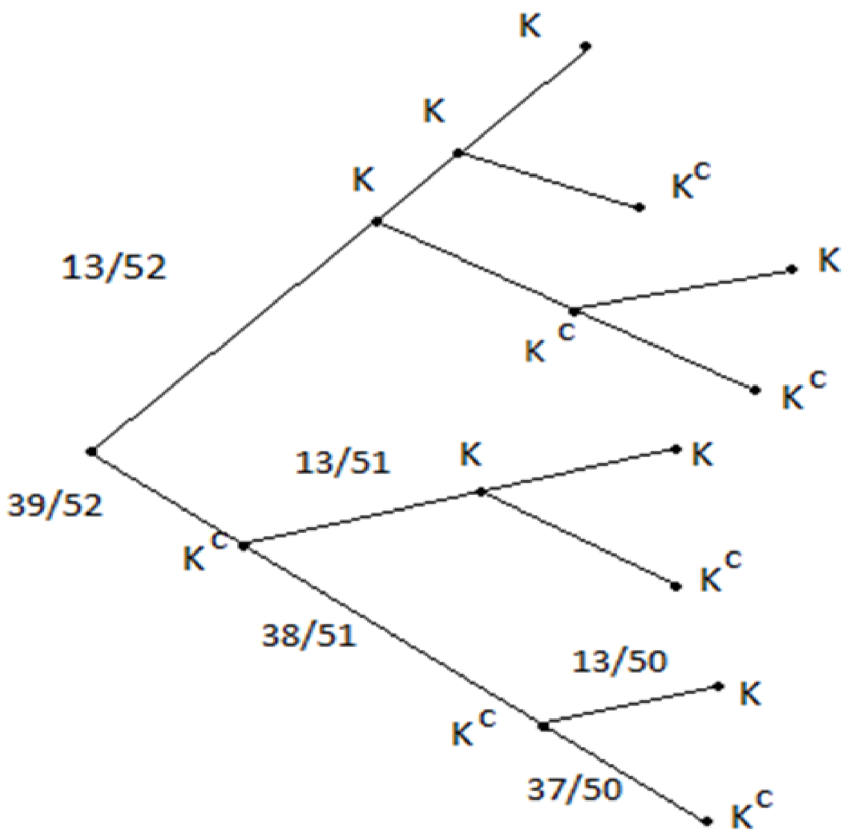
  $$\cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

- Παράδειγμα: 3 χαρτιά από τράπουλα

  $P\,(\text{καμία κούπα}) = ;$

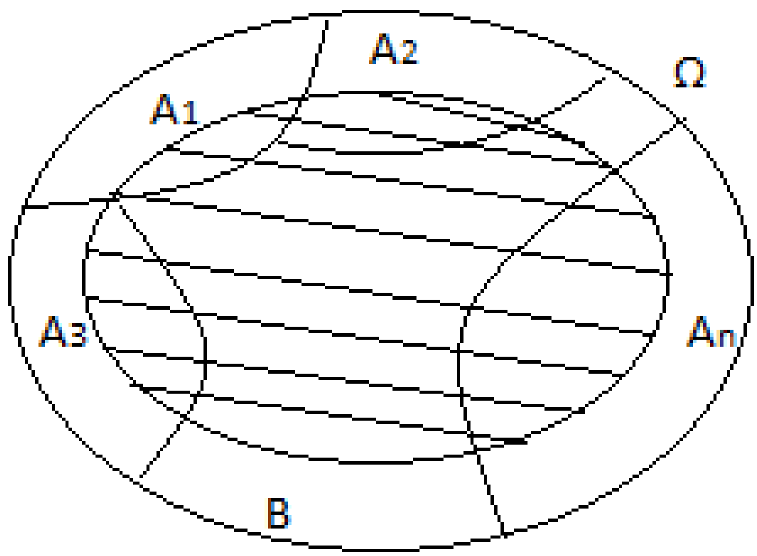
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ

Δέντρο: Δεσμευμένες πιθανότητες στους κλάδους



Απάντηση: $\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ



- $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ξένα μεταξύ τους

  $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

- $P(B|A_i)$ γνωστές

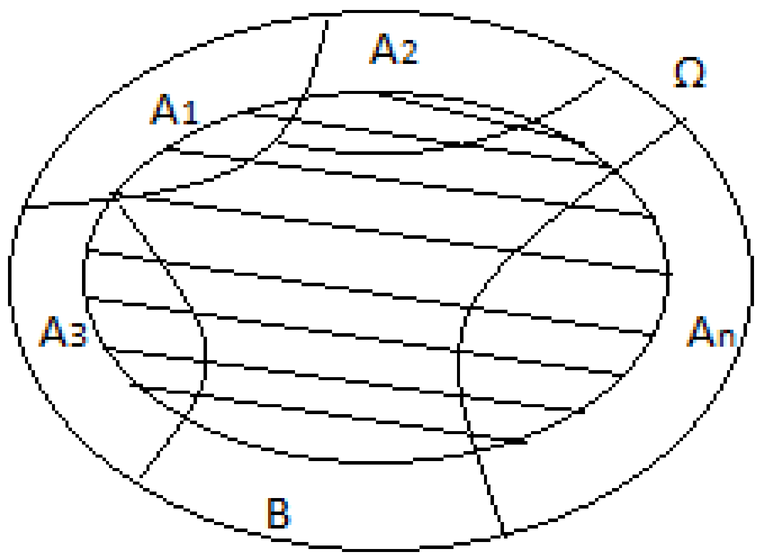
- $P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$
  - σταθμισμένος μέσος όρος των δεσμευμένων πιθανοτήτων

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Παράδειγμα: Αντίπαλοι 3 κατηγοριών στο σκάκι
  1. Ανήκει το 50% , πιθανότητα νίκης 0,3
  2. Ανήκει το 25%, πιθανότητα νίκης 0,4
  3. Ανήκει το 25%, πιθανότητα νίκης 0,5

$$\mathrm{P}\left(\text{νίκη}\right) = 0,3 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,375$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ BAYES



- $$P\left(A_i \mid B\right) = \frac{P\left(A_i \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(B \mid A_i\right) \cdot P\left(A_i\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(B \mid A_i\right) \cdot P\left(A_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(B \mid A_j\right) \cdot P\left(A_j\right)}$$

- Παράδειγμα: Σκάκι (συνέχεια)

  Έστω ότι κερδίζουμε

  $$P\left(\text{αντίπαλος από } 1^{\eta} \text{ κατηγορία}\right) = ;$$

  $$P\left(K=1 \mid N\right) = \frac{P\left(N \mid K=1\right) \cdot P\left(K=1\right)}{P\left(N\right)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}375} = 0{,}4$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

- A, B ανεξάρτητα αν $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$
  - Πραγματοποίηση του B δεν προσφέρει πληροφορίες για το A

- Από πολλαπλασιαστικό κανόνα

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \Rightarrow$$

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$ αν A, B ανεξάρτητα

  - Γεγονότα ξένα μεταξύ τους δεν είναι ανεξάρτητα
- Παράδειγμα: 2 ρίψεις τετράεδρου ζαριού με ισοπίθανα ενδεχόμενα

A= {1 στην 1^{η} ρίψη}

B= {άθροισμα 5}

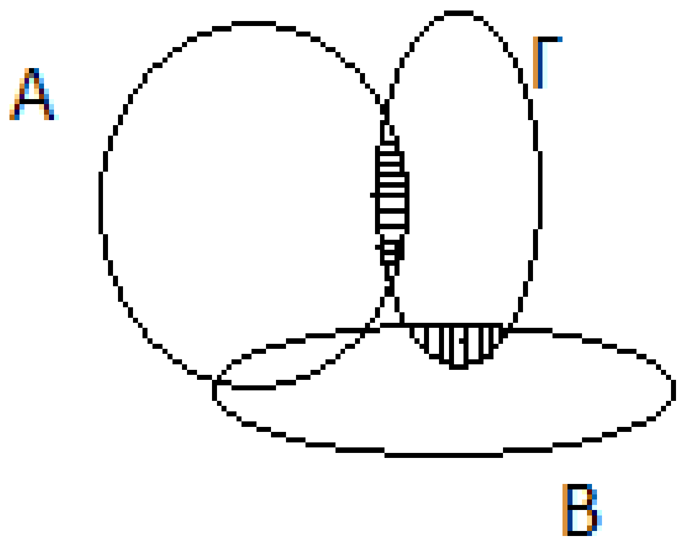
$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}((1,4)) = \frac{1}{16}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}((1,4),(2,3),(3,2),(4,1)) = \frac{4}{16}$$

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}) \Rightarrow$ A, B ανεξάρτητα

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ



- Έστω A, B ανεξάρτητα

- Αν ξέρουμε ότι έχει συμβεί το Γ τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους, άρα παύουν να είναι ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα δεδομένου του Γ εάν

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B} \cap \Gamma) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \mid \Gamma\right)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \mid \Gamma) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A} \mid \Gamma\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{B} \mid \Gamma\right)$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Νόμισμα A: Κορώνα με πιθανότητα p_1
  Νόμισμα B: Κορώνα με πιθανότητα p_2

- Επιλέγουμε νόμισμα και το ρίχνουμε 2 φορές
  – Αν ξέρουμε ποιο είναι, οι δυο ρίψεις είναι ανεξάρτητες
  – Αν δεν ξέρουμε;

    K_1, K_2 :κορώνα στην 1η και 2η ρίψη αντίστοιχα

$$P(K_1) = P(K_1 | A) \cdot P\left(A\right) + P(K_2 | B) \cdot P\left(B\right) = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2)$$

$$P(K_2) = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2)$$

$$P(K_1 \cap K_2) = \frac{1}{2} \cdot (p_1^2 + p_2^2)$$

Αν $p_1 \neq p_2$, K_1, K_2 δεν είναι ανεξάρτητα

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΠΟΛΛΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

- $A_1, A_2, \cdots, A_k$ ανεξάρτητα αν για κάθε υποσύνολο τους $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ ισχύει

  $$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

  π.χ. A, B, Γ ανεξάρτητα αν

  $$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right)$$
  $$P\left(A \cap \Gamma\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(\Gamma\right)$$
  $$P\left(B \cap \Gamma\right) = P\left(B\right) \cdot P\left(\Gamma\right)$$
  $$P\left(A \cap B \cap \Gamma\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right) \cdot P\left(\Gamma\right)$$

- Παράδειγμα: Ανεξαρτησία ανά ζεύγη δεν συνεπάγεται ανεξαρτησία
  - Δύο ρίψεις νομίσματος
  - A: Κορώνα στην 1η, B: Κορώνα στην 2η, Γ: Διαφορετικά αποτελέσματα
  - A, B, Γ ανεξάρτητα ανά δυο

  Όμως, $P\left(A \cap B \cap \Gamma\right) = 0 \neq P\left(A\right) \cdot P\left(B\right) \cdot P\left(\Gamma\right)$

ΑΡΙΘΜΗΣΗ

- Για ισοπίθανα ενδεχόμενα στο δειγματικό χώρο Ω

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{αριθμός στοιχείων του A}}{\text{αριθμός στοιχείων του }\Omega}$$

- Αν όλα τα στοιχεία του Α έχουν την ίδια πιθανότητα p

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = (\text{αριθμός στοιχείων του A}) \cdot \mathrm{p}$$

- Ανάγκη για συστηματικές μεθόδους αρίθμησης

ΒΑΣΙΚΗ ΑΡΧΗ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

- Πείραμα σε r στάδια
- n_i πιθανά αποτελέσματα στο στάδιο i
  - Τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να εξαρτώνται από τα αποτελέσματα προηγούμενων σταδίων, όμως ο αριθμός τους είναι σταθερός, n_i
- Αριθμός πιθανών αποτελεσμάτων πειράματος $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$
- Παράδειγμα: Πλήθος επταψήφιων αριθμών με πρώτο ψηφίο διαφορετικό από 0 ή 1

  $n_1 = 8$ (επιλογές για το 1ο ψηφίο)

  $n_2 = \cdots = n_7 = 10$ (επιλογές για τα υπόλοιπα ψηφία)

  Απάντηση: $n_1 \cdot n_2 \cdots n_7 = 8 \cdot 10^6$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

- Επιλογή k αντικειμένων από n

- k-μεταθέσεις: Πλήθος διαφορετικών ακολουθιών k αντικειμένων

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Παράδειγμα: Το πλήθος των λέξεων με 4 διαφορετικά γράμματα είναι

$$24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$$

- Μεταθέσεις: Πλήθος τρόπων που μπορούν να διαταχθούν n αντικείμενα (k=n)

$$n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

- Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούν να δοθούν 5 φάρμακα σε 5 ασθενείς;

  Απάντηση: 5! =120

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

- $\binom{n}{k}$: Για σύνολο n στοιχείων, αριθμός υποσυνόλων με k στοιχεία
- Αριθμός k-μεταθέσεων = $\binom{n}{k} \cdot k!$
  - 1ο στάδιο: επιλογή k αντικειμένων $\left(\binom{n}{k} \text{ επιλογές}\right)$
  - 2ο στάδιο: επιλογή μετάθεσης των k αντικειμένων (k! επιλογές)
- Άρα, $\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Παράδειγμα: Αριθμός διαφορετικών πεντάδων χαρτιών από τράπουλα

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2598960$$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

- Παράδειγμα: Ρίχνουμε νόμισμα 10 φορές. Με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 3 φορές Γράμματα;

$\binom{10}{3}$: τρόποι με τους οποίους μπορούν να επιλεγούν 3 θέσεις για Γ από σύνολο 10 θέσεων

  – π.χ. (2, 3, 4): Γ τη $2^η$, $3^η$ και $4^η$ φορά

ΔΙΑΜΕΡΙΣΕΙΣ

- $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$: τρόποι διαχωρισμού n αντικειμένων σε r ομάδες μεγέθους $n_1, n_2, \cdots, n_r$
- $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$
- Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τα χαρτιά μίας τράπουλας σε 4 παίχτες; (13 ο καθένας)

  Απάντηση: $\binom{52}{13,13,13,13} = \dfrac{52!}{13!13!13!13!}$

- Πλήθος αναγραμματισμών της λέξης MISSISSIPPI
  - αριθμός διαμερίσεων 11 θέσεων (γράμματα της λέξης) σε 4 ομάδες μεγέθους 1 (γράμμα M), 4 (γράμμα I), 2 (γράμμα P) και 4 (γράμμα S)

$$\binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{1!4!4!2!}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΣΩ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

- Ρίχνουμε ζάρι 5 φορές

  A={ 5 διαφορετικά αποτελέσματα}

  $P(A) = ;$

  - Αριθμός όλων των ενδεχομένων 6^5
  - Αριθμός ενδεχομένων που αντιστοιχούν στο A= αριθμός 5-μεταθέσεων 6 αντικειμένων =$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
  - $P(A) = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5}$

- Ρίχνουμε νόμισμα 10 φορές, $P(\Gamma) = p$

  A={ 3 φορές Γ }

  $P(A) = ;$

  - $\binom{10}{3}$ διαφορετικές ακολουθίες με 3 γράμματα
  - Κάθε ακολουθία έχει πιθανότητα $p^3 \cdot (1-p)^7$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕΣΩ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

– $P(A) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^7$ (συνέχεια από το προηγούμενο παράδειγμα)

- Μοίρασμα τράπουλας σε 4 παίχτες

  A={ ο κάθε παίχτης παίρνει έναν άσο}

  $P(A) = ;$

  – Αριθμός πιθανών διαμμερίσεων = $\frac{52!}{13!13!13!13!}$

  – Αριθμός διαμερίσεων με 1 άσο ο καθένας =

  = (αριθμός μεταθέσεων των 4 άσων)•(αριθμός διαμερίσεων των 48 υπόλοιπων χαρτιών)=

  = $4!\frac{48!}{12!12!12!12!}$

  – $P(A) = \dfrac{\dfrac{4!48!}{(12!)^4}}{\dfrac{52!}{(13!)^4}} = \dfrac{13^4 \cdot 4!}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}$