ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι

Παντελής Δημήτριος
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ

- $M_X(s) = E\left[e^{sX}\right]$
  - Αντιστοιχία 1-1 μεταξύ τυχαίας μεταβλητής X και ροπογεννήτριας $M_X(s)$

- Ροπογεννήτρια κανονικής τυχαίας μεταβλητής

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \to M_X(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2}+\mu s}$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$, ανεξάρτητες
- $W = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$
- $M_W(s) = E\left[e^{sW}\right] = E\left[e^{s\sum_{i=1}^{n} c_i X_i}\right] =$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(sc_i) = e^{\frac{\left(\sum c_i^2 \sigma_i^2\right)s^2}{2} + \sum (c_i \mu_i)}$$

- $W \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2\right)$, διότι $M_W(s)$ είναι

  ροπογεννήτρια κανονικής τυχαίας μεταβλητής

ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με ίδια κατανομή , $E(X_i) = \mu, \ \mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$

- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

  $$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow E(Z_n) = 0, \ \mathrm{var}(Z_n) = 1$$

- Θεώρημα: Για κάθε z

  $$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \Phi(z)$$

  – $\Phi(z)$: αθροιστική συνάρτηση κατανομής τυποποιημένης τυχαίας μεταβλητής

ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- S_n μπορεί επίσης να προσεγγιστεί από κανονική τυχαία μεταβλητή
  - Παράδειγμα: Κιβώτιο με βάρος ομοιόμορφα κατανεμημένο μεταξύ 5 και 50 κιλών

$\mu = 27,5$ $\sigma^2 = 168,75$

Συνολικό βάρος 100 κιβωτίων: κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $100 \cdot \mu$ και διασπορά $100 \cdot \sigma^2$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ

- $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - Άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli

- $P\left(X = k\right) = P\left(k - \frac{1}{2} \le X \le k + \frac{1}{2}\right), \; k = 1, \cdots, n-1$

- Κεντρικό οριακό Θεώρημα:

  $P\left(X = k\right) \approx P\left(k - \frac{1}{2} \le S_n \le k + \frac{1}{2}\right), \; k = 1, \cdots, n-1$

  - S_n: κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $n \cdot p$ και διασπορά $n \cdot p \cdot \left(1 - p\right)$