ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΧΩΡΟΤΑΞΙΑΣ, ΠΟΛΕΟΔΟΜΙΑΣ & ΠΕΡ. ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σεραφείμ Πολύζος - Δημήτριος Τσιώτας

Βόλος 2015

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

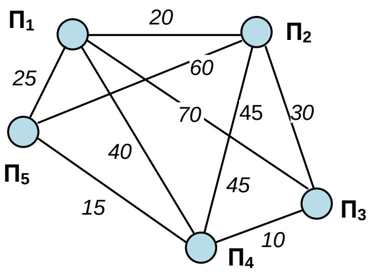
ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.1 Βασικοί ορισμοί

Πίνακας εν γένει ονομάζεται κάθε ορθογώνια διάταξη αριθμών ή άλλων οντοτήτων. Η χρησιμότητα των πινάκων στα μαθηματικά, στηρίζεται στη δυνατότητα να τους χρησιμοποιούμε ως «*γενικευμένους αριθμούς*», οι οποίοι διευκολύνουν την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων και την επίλυση σχετικών προβλημάτων. Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας «*πίνακας*» ή «*μήτρα*» (matrix) θα γίνει αναφορά σε τρία παραδείγματα.

Παράδειγμα 1^{ο}

Έστω ότι μια Περιφέρεια περιλαμβάνει 5 πόλεις – πρωτεύουσες νομών, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με οδικό δίκτυο, όπως σχηματικά δείχνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



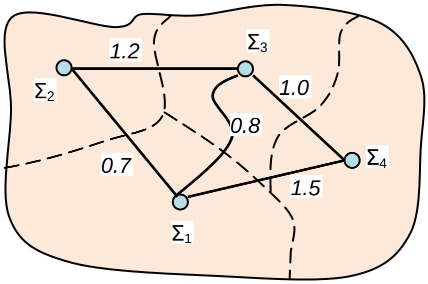
Αν η οδική απόσταση σε Km μεταξύ της πόλης i και της πόλης j είναι d_{ij}, όπως αναγράφεται στο διάγραμμα τότε όλες οι αποστάσεις μεταξύ των πόλεων της Περιφέρειας μπορούν να διαταχτούν σε μια ορθογώνια παράθεση 5 σειρών ή γραμμών και 5 στηλών ως εξής:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Πόλη} \\
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\text{Πόλη} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 20 & 70 & 40 & 25 \\
20 & 1 & 30 & 45 & 60 \\
70 & 30 & 1 & 10 & 25 \\
40 & 45 & 10 & 1 & 15 \\
25 & 60 & 25 & 15 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Η παράθεση των αποστάσεων μεταξύ των πόλεων σε γραμμές και στήλες δημιουργεί έναν ορθογώνιο πίνακα. Σημειώνεται ότι, στον παραπάνω πίνακα θέσαμε τις αποστάσεις εντός των πόλεων, δηλαδή τις αποστάσεις d_{ii}, ίσες με τη μονάδα, $d_{ii}=1$, υποθέτοντας ότι η διάμετρος κάθε πόλης ισούται με 2 Km.

Παράδειγμα 2^{o}

Μια μικρή πόλη περιλαμβάνει 4 συνοικίες. Προκειμένου να σχεδιάσουμε το δίκτυο των αστικών μετακινήσεων και τα δρομολόγια των αστικών λεωφορείων, απεικονίζουμε στο παρακάτω σχήμα το κέντρο κάθε συνοικίας και τις αποστάσεις μεταξύ των συνοικιών σε Km.



Αν οι οδικές αποστάσεις μεταξύ των κέντρων των συνοικιών της πόλης διαταχτούν σε μια ορθογώνια παράθεση 4 σειρών ή γραμμών και 4 στηλών, τότε προκύπτει ο επόμενος πίνακας. Στον πίνακα αυτό υποθέσαμε ότι, οι αποστάσεις εντός της ίδιας συνοικίας είναι μηδενικές, δηλαδή $d_{ii}=0$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Συνοικία} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\text{Συνοικία} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1.2 & 0.70 & 1.2 \\
1.2 & 0 & 0.80 & 1.0 \\
0.70 & 0.80 & 0 & 1.5 \\
1.2 & 1.0 & 1.5 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Παράδειγμα 3ο

Για την εκτέλεση των παραγωγικών της δραστηριοτήτων μια μεγάλη οικονομικής μονάδας ή επιχείρησης (πχ. ΔΕΗ) χρησιμοποιεί τους σ_1, σ_2, ..σ_m παραγωγικούς συντελεστές για την εκτέλεση των δ_1, δ_2, ... δ_n δραστηριοτήτων. Αν για την εκτέλεση της δ_j δραστηριότητας (j=1÷n) απαιτούνται α_{ij} μονάδες του συντελεστή σ_i (i=1÷m), τότε μπορούμε να απεικονίσουμε σε ένα πίνακα όλους τους δυνατούς συνδυασμούς α_{ij} μεταξύ των παραγωγικών συντελεστών σ_i και των δραστηριοτήτων δ_j. Ο πίνακας αυτός θα έχει i γραμμές και j στήλες, θα είναι δηλαδή διαστάσεων mxn και θα αποτελεί μια μήτρα (καλούπι) παράστασης των τεχνολογικών συντελεστών α_{ij} (i=1÷m και =1÷n). Ο πίνακας αυτός θα είναι ο εξής:

Παραγωγική δραστηριότητα

Συντελεστής παραγωγής

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & . \; . & \delta_n \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ . \\ . \\ \sigma_m \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . \; . & \alpha_{1n} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & . \; . & \alpha_{2n} \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m,3} & . & \alpha_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ή απλά ως εξής:

$$
\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . \; . & \alpha_{1n} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & . \; . & \alpha_{2n} \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m,3} & . & \alpha_{mn}
\end{pmatrix}
$$

Ύστερα από τα παραπάνω παραδείγματα είναι δυνατόν να δοθεί ένας ορισμός του πίνακα ή της μήτρας ή του μητρώου (matrix). Ως πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ διαστάσεων ή τύπου mxn ορίζεται μια ορθογώνια διάταξη των βαθμωτών α_{ij} σε i=1÷m γραμμές και j=1÷n στήλες. Στη γενική του μορφή ένας πίνακας A διαστάσεων mxn γράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{rc}
 & \text{Στήλη } j \\
 & \downarrow \\
\textit{Γραμμή } i \rightarrow & \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . \; . & \alpha_{1j} & . \; . & \alpha_{1n} \\
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . \; . & \alpha_{2j} & . \; . & \alpha_{2n} \\
. & . & . & & . & & . \\
\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i,3} & . \; . & \alpha_{ij} & . \; . & \alpha_{in} \\
. & . & . & & . & & . \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & . \; . & \alpha_{mj} & . \; . & \alpha_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Κάθε βαθμωτό ή στοιχείο (element) του πίνακα ορίζεται από το δείκτη της σειράς i (row index) και το δείκτη της στήλης j (column index) και ονομάζεται το ij στοιχείο του πίνακα Α. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $A_{mn}=[\alpha_{ij}]$ ή απλούστερα A_{mn} προσδιορίζοντας τον πίνακα διαστάσεων mxn. Διαφορετικά, με την έννοια πίνακας διαστάσεων ή τύπου mxn εννοούμε πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς (στοιχεία του πίνακα) τοποθετημένους μεταξύ δυο αγκυλών που έχουν διαταχθεί ορθογώνια σε m γραμμές και n στήλες. Ο πίνακας ονομάζεται πραγματικός (real matrix) ή μιγαδικός (complex matrix) ανάλογα με το αν τα στοιχεία του ανήκουν στο σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, ο επόμενος πίνακας Α, είναι τύπου 2x3.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{pmatrix}$$

Όπως προαναφέρθηκε, οι αριθμοί α_{11}, α_{12}, α_{13} ... ονομάζονται ***στοιχεία*** του πίνακα και οι δείκτες των στοιχείων αυτών αφορούν τις θέσεις που κατέχουν. Ο προηγούμενος πίνακας γράφεται και με τη μορφή:

$$A=[\alpha_{ij}]_{i,j=}^{2,3}$$

Αν το πλήθος των γραμμών και των στηλών σε ένα πίνακα είναι το ίδιο, δηλαδή ισχύει m=n, τότε ο πίνακας ονομάζεται ***τετραγωνικός*** τάξεως m. Αν ο πίνακας είναι μόνο μία στήλη (m=1), ή μια γραμμή (n=1) ονομάζεται ***διάνυσμα***. Δυο ή περισσότεροι πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών λέμε ότι είναι του ***ίδιου τύπου***. Δυο πίνακες ίδιου τύπου που έχουν τα στοιχεία στις ίδιες θέσεις ίσα μεταξύ τους ονομάζονται ***ίσοι***.

1.2 Χαρακτηριστικά και μορφές των πινάκων

Θα αναλυθούν στη συνέχεια τα κυριότερα χαρακτηριστικά και οι διάφορες μορφές των πινάκων.

(α) Διαγώνιος του πίνακα

Σε ένα τετραγωνικό πίνακα A_{nxn} τα στοιχεία $α_{11}$, $α_{22}$, $α_{33}$, .. $α_{nn}$ ονομάζονται διαγώνια στοιχεία και όλα μαζί αποτελούν τη διαγώνιο του πίνακα. Στον επόμενο πίνακα A, τα στοιχεία $α_{11}$, $α_{22}$, $α_{33}$, .. $α_{nn}$ σχηματίζουν την ***πρωτεύουσα διαγώνιο*** του πίνακα, ενώ τα στοιχεία $α_{1n}$, $α_{2n-1}$, $α_{3n-2}$, .. $α_{n1}$ σχηματίζουν τη δευτερεύουσα διαγώνιο του πίνακα.

$$A=\begin{pmatrix} α_{11} & α_{12} & α_{13} & .\ . & α_{1n} \\ α_{21} & α_{22} & α_{23} & .\ . & α_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ α_{n1} & α_{n2} & α_{n3} & .\ . & α_{nn} \end{pmatrix}$$

(β) Πίνακας στοιχείο

Αν m=n=1, τότε ο πίνακας έχει μια γραμμή και μια στήλη και ονομάζεται πίνακας στοιχείο. Για παράδειγμα ο πίνακας A=[-2] είναι ένας πίνακας στοιχείο.

(γ) Πίνακας γραμμή ή στήλη

Αν m=1 και n>1, τότε ο πίνακας έχει διαστάσεις 1xn, είναι της μορφής A=[$α_{11}$, $α_{12}$, $α_{13}$, .. $α_{1n}$] και ονομάζεται ***πίνακας γραμμή***. Παρομοίως, αν m>1 και n=1, τότε ο πίνακας έχει διαστάσεις mx1, είναι της μορφής

$$A=\begin{pmatrix} α_{11} \\ α_{21} \\ . \\ . \\ α_{m1} \end{pmatrix}$$

και ονομάζεται ***πίνακας στήλη***. Όπως προαναφέρθηκε, οι πίνακες που έχουν μια γραμμή ή στήλη ονομάζονται και διανύσματα.

(δ) Τριγωνικός πίνακας

Ένας πίνακας ονομάζεται άνω τριγωνικός πίνακας (upper triangular) αν ισχύει α_{ij}=0, $\forall i > j$. Παρομοίως, ονομάζεται κάτω τριγωνικός (lower triangular) αν ισχύει α_{ij}=0, $\forall i < j$. Παραδείγματα τέτοιων πινάκων είναι αντίστοιχα οι επόμενοι πίνακες A και B.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & .\ . & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & .\ . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & .\ . & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & .\ . & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & .\ . & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & 0 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & .\ . & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

(ε) Διαγώνιος πίνακας

Ένας πίνακας διαστάσεων nxn ονομάζεται διαγώνιος (diagonal matrix) και συμβολίζεται με diag(α_{11}, α_{22}, α_{33}, .. α_{nn}) αν έχει όλα τα στοιχεία του εκτός της διαγωνίου μηδενικά. Δηλαδή αν α_{ij}=0, $\forall i \neq j$ και γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & .\ . & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & .\ . & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .\ . & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & \\ & \alpha_{22} & \text{0} \\ & \text{0} & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, ..\ \alpha_{nn})$$

(στ) Μοναδιαίος πίνακας

Ένας διαγώνιος πίνακας διαστάσεων nxn της μορφής diag(1, 1, 1, ...1) ονομάζεται μοναδιαίος πίνακας (unit matrix) ή ταυτοτικός πίνακας (identity matrix) και συμβολίζεται με I_n ή με I. Δηλαδή:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ή διαφορετικά $I_n=[\delta_{ij}] = \begin{cases} 1 \text{ αν } i=j \\ 0 \text{ αν } i \neq j \end{cases}$

Το σύμβολο δ_{ij} ονομάζεται και δέλτα του Kronecker.

(ζ) Μηδενικός πίνακας

Ένας πίνακας ονομάζεται μηδενικός (zero or null matrix) και συμβολίζεται με 0, όταν κάθε στοιχείο του είναι μηδέν. Παραδείγματα τέτοιων πινάκων είναι:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(η) Ίσοι και αντίθετοι πίνακες

Ένας πίνακας Α είναι ίσος (equal) με τον πίνακα Β, όταν τα ομοτάξια στοιχεία τους είναι ίσα και γράφουμε Α=Β.

Άσκηση

Αν ισχύει η ισότητα των παρακάτω πινάκων, να βρεθούν οι τιμές των x και y.

$$\begin{pmatrix} -1 & y \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2x & 1 \\ 2 & x^2 - 2x \end{pmatrix}$$

Λύση

Για να είναι ίσοι οι πίνακες θα πρέπει να έχουν ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία τους. Συνεπώς, y=1 και από τις εξισώσεις x^2-2x=-1 και x^2-x=0 προκύπτει ότι x=1.

Ένας πίνακας Α είναι αντίθετος με τον πίνακα Β όταν τα ομοτάξια στοιχεία τους είναι αντίθετα και γράφουμε Α=-Β.

Άσκηση

Αν για τους παρακάτω πίνακες ισχύει A=-B, να υπολογιστούν τα x και y.

$$A=\begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2y-6 \end{pmatrix}$$

Λύση

Με βάση τα προαναφερθέντα, θα έχουμε:

$$x-1=-4 \Rightarrow x=-5$$

$$y=-(2y-6) \Rightarrow y=-2y+6 \rightarrow y=-6$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι, η ισότητα των πινάκων είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Δηλαδή θα ισχύουν οι ιδιότητες:

- A=A
- A=B $\Rightarrow$ B=A
- Αν A=B και B=C, τότε A=C.

(θ) Ανάστροφος πίνακας

Ο πίνακας B είναι ανάστροφος (transpose) του πίνακα A, όταν ο B προκύπτει από την αναδιάταξη των στοιχείων του A, έτσι ώστε οι γραμμές του A να γίνουν στήλες του B και οι στήλες του A να γίνουν γραμμές του B. Για παράδειγμα, οι επόμενοι πίνακες A και B είναι ανάστροφοι.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Συνήθως, ο ανάστροφος του πίνακα A συμβολίζεται με A^T. Με βάση τον ορισμό των ανάστροφου πίνακα θα ισχύει: $(A^T)^T=A$. Επίσης, αν ισχύει η ισότητα $A^T=A$, τότε ο πίνακας A είναι τετραγωνικός πίνακας και τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\alpha_{12}=\alpha_{21},\ \ \alpha_{13}=\alpha_{31},\ldots\ \ \alpha_{n-1n}=\alpha_{nn-1}$$

Σε ένα πίνακα με μιγαδικά στοιχεία, ο πίνακας με τα συζυγή στοιχεία ονομάζεται ***συζυγής*** πίνακας $\overline{Z}=[\overline{z_{ij}}]$. Ο ανάστροφος συζυγής πίνακας συμβολίζεται με $Z^{*}=\overline{Z}^{T}$. Αν ισχύει $Z=Z^{*}$, τότε ο πίνακας ονομάζεται ***ερμιτιανός***.

Παράδειγμα

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 19 \\ 2 & 0 & -25 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{T}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -25 \\ 2 & 19 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \quad B^{T}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1+i & 3i \\ 2 & 2-5i \end{pmatrix} \quad C^{T}=\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -3i & 2+5i \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} \quad D^{T}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ι) Συμμετρικός πίνακας

Ένας πίνακας ονομάζεται ***συμμετρικός*** όταν ισχύει η σχέση: $A=A^{T}$. Για παράδειγμα, ο επόμενος πίνακας με τα συμμετρικά ως προς τη διαγώνιό του στοιχεία ίσα, είναι συμμετρικός.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & x & y \\ x & 8 & z \\ y & z & 10 \end{pmatrix}$$

Ένας πίνακας ονομάζεται ***αντισυμμετρικός***, όταν ισχύει η σχέση $A=-A^{T}$. Για παράδειγμα, ο επόμενος πίνακας A είναι αντισυμμετρικός, γιατί ο ανάστροφος και ο αντίθετος του ανάστροφό του θα ισούνται αντίστοιχα με:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix} \quad A^{T}=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \quad -A^{T}=\begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Να βρεθούν οι τιμές των x, y για τις οποίες ο πίνακας A είναι συμμετρικός και ο πίνακας B αντισυμμετρικός.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 2-x & 2 & 1 \\ 0 & x^2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & y-4 \\ 2 & y & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση

Για να είναι ο πίνακας A συμμετρικός θα πρέπει τα συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο στοιχεία του να είναι ίσα. Δηλαδή, θα έχουμε: $2-x=x$ και $x^2=1$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει $x=1$.

Για να είναι ο πίνακας B αντισυμμετρικός, θα πρέπει τα συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο στοιχεία του να είναι αντίθετα. Δηλαδή, $-y=y-4 \Rightarrow y=2$.

1.3 Βασικές πράξεις πινάκων

Η *αριθμητική* των πινάκων περιορίζεται στις πράξεις αθροίσματος πινάκων, γινομένου αριθμού επί πίνακα, διαφοράς πινάκων και γινομένου πινάκων. Αναλυτικά, οι βασικές πράξεις των πινάκων πραγματοποιούνται ως εξής:

1.3.1 Άθροισμα πινάκων

Αν $A=[\alpha]$ και $B=[b_{ij}]$ είναι πίνακες του αυτού τύπου mxn, τότε το **άθροισμα** των A και B είναι ένας πίνακας $C=[c_{ij}]$, ο οποίος ορίζεται από το άθροισμα των στοιχείων των A και B που έχουν τις ίδιες θέσεις. Δηλαδή:

$$c_{ij}=\alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad 1\le i\le m,\ 1 \le j\le n.$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, πίνακες διαφορετικού τύπου ή διαστάσεων δεν μπορούν να προστεθούν.

Άσκηση

Να βρεθεί το άθροισμα των επόμενων πινάκων:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Λύση

Το άθροισμα των δυο πινάκων θα ισούται με:

$$C=\begin{pmatrix} 2+1 & -3+2 & 5+3 \\ 6+2 & -5+1 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Για τους πίνακες A, B και C εύκολα αποδεικνύονται οι εξής ***ιδιότητες***:

- A+B=B+A (*αντιμεταθετική*)
- (A+B)+C=A+(B+C) (*προσεταιρεστική*)
- A+0=0+A=A (*Το 0 είναι ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης*)
- Κάθε πίνακας έχει ένα μόνο αντίθετό του –A, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση: A+(-A)=0. Άμεση συνέπεια αυτού είναι οι σχέσεις: -(-A)=A, -(A+B)=(-A)+(-B), A+C=B+C$\Rightarrow$A=B. Τέλος, όταν C=B-A, τότε A+C=B

1.3.2 Γινόμενο αριθμού επί πίνακα

Αν A = [α_{ij}] είναι πίνακας τύπου mxn και k είναι ένας αριθμός, τότε το γινόμενο του A επί k είναι ο πίνακας kA με στοιχεία το γινόμενο κάθε στοιχείου του A επί τον αριθμό k.

Άσκηση

Αν k = -2 και $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ να υπολογιστεί το γινόμενο kA

Λύση

Θα έχουμε: $kA=(-2)A=\begin{pmatrix} -2x1 & -2x3 \\ -2x6 & -2x(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$

Αν k = -1, ο πίνακας (-1)A = -A είναι **αντίθετος** του A. Έτσι για τους πίνακες A και B του ίδιου τύπου ορίζουμε την **διαφορά** τους ως τη σχέση:

$$A - B = A + (-1)B$$

Το αποτέλεσμα της διαφοράς δυο πινάκων A και B είναι ο πίνακας με στοιχεία την διαφορά των ομοθέσιων στοιχείων των A , B.

Άσκηση

Να βρεθεί η διαφορά A-B των επόμενων πινάκων:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Λύση

Η διαφορά των δυο πινάκων C= A-B θα ισούται με:

$$C=\begin{pmatrix} 2-1 & -3-2 & 5-3 \\ 6-2 & -5-1 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι πίνακες A+2B, A-3C, όταν:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Λύση

Με βάση τα προαναφερθέντα θα είναι:

$$A+2B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -2 & 6\\ 2 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & -2 & 8\\ 5 & -1 & 10\end{pmatrix}$$

$$A-3C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -7 & 9\end{pmatrix}$$

Από τις ιδιότητες των πράξεων διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ***ιδιότητες*** για τους πίνακες.

- A + B = B + A (*αντιμεταθετική*).
- k(A + B) = kA + κB = (A + B)k (*επιμεριστική*).
- A + (B + C) = (A + B) + C (*προσεταιρεστική*).
- (k + m)A = kA + mA
- A + O = A
- k(mA) = (km)A

Όπως προαναφέρθηκε, με O συμβολίζουμε τον μηδενικό πίνακα, δηλαδή τον πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν.

1.3.3 Γινόμενο πινάκων

Αν ο πίνακας A = $[\alpha_{ij}]$ είναι τύπου mxn και ο πίνακας B=$[b_{ij}]$ είναι τύπου nxk, τότε ορίζεται το **γινόμενο** του A επί B, το οποίο σημειώνεται ως AB. Το γινόμενο των δυο πινάκων θα είναι ο πίνακας C=$[c_{ij}]$ τύπου mxk, του οποίου κάθε στοιχείο θα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}b_{1j} + \alpha_{i2}b_{2j} + \dots\dots + \alpha_{in}b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Ο τρόπος υπολογισμού των στοιχείων c_{ij} του γινομένου των πινάκων AB προέρχεται, όπως προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση, από το γινόμενο των στοιχείων της i-γραμμής του πίνακα A επί τα στοιχεία της j-στήλης του B. Στο παρακάτω παράδειγμα σημειώνεται το στοιχείο c_{21}:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \\ \alpha_{21}b_{11} + \alpha_{22}b_{21} + \alpha_{23}b_{31} & \dots \\ \dots & \end{pmatrix}$$

Αναφορικά με τις διαστάσεις των πινάκων οι οποίοι πολλαπλασιάζονται και του πίνακα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό ισχύουν τα εξής:

Πίνακες	***A***	***x***	***B***	***=***	***AB***
Διαστάσεις	***mxn***		***nxk***		***mxk***

Διαφορετικά, ο πολλαπλασιασμός δυο πινάκων διαστάσεων mxn και nxk αντίστοιχα, δίνουν έναν πίνακα διαστάσεων mxk.

Άσκηση

Να βρεθεί το γινόμενο των επόμενων πινάκων A και B.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Λύση

Το γινόμενο των ΑΒ θα ισούται με:

$$C=AB=\begin{pmatrix} 2x1+3x2 & 2x2+3x1 & 2x3+3x4 \\ 1x1+(-5)x2 & 1x2+(-5)x1 & 1x3+(-5)x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 18 \\ -9 & -3 & -17 \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι, ΑΒ ≠ ΒΑ. Αν όμως οι πίνακες είναι ***τετραγωνικοί*** διαστάσεων nxn και ισχύει η ισότητα ΑΒ = ΒΑ, τότε οι πίνακες ονομάζονται **αντιμεταθετικοί**.

Για κάθε πίνακα Α τύπου mxn ισχύει η ισότητα:

$$I_m A = A I_n = A$$

Με βάση τα προαναφερθέντα προκύπτει ότι, το γινόμενο δυο πινάκων μπορεί να ισούται με μηδέν, παρά το γεγονός ότι οι πίνακες είναι διάφοροι του μηδενός. Δηλαδή, μπορεί να είναι ΑΒ = Ο, όταν Α ≠ Ο και Β ≠ Ο. Επίσης, είναι δυνατόν να είναι ΑΒ = ΑΓ, με τους πίνακες Β και Γ να μην είναι ίσοι.

Άσκηση

Να βρεθεί το γινόμενο των επόμενων πινάκων:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Λύση

Το γινόμενο των δυο πινάκων C= AB θα ισούται με:

$$C=\begin{pmatrix} 1x(-3)+3x1 & 1x1+3(-1/3) \\ (-2)x3+(-6)x1 & (-2)1+(-6)x(-1/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Για τους επόμενους πίνακες να βρεθούν τα γινόμενα AB και AC και να συγκριθούν μεταξύ τους:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Λύση

Το γινόμενο των πινάκων AB θα ισούται με:

$$AB=\begin{pmatrix} 0x1+1x3 & 0x3+1x4 \\ 0x1+2x3 & 0x3+2x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Το γινόμενο των πινάκων AC θα ισούται με:

$$AC=\begin{pmatrix} 0x2+1x3 & 0x(-1)+1x4 \\ 0x2+2x3 & 0x3+2x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι AB=AC, παρά το γεγονός ότι $B \neq C$

Άσκηση

Να βρεθεί το γινόμενο AB, όταν:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Λύση

Θα είναι:

$$AB = \begin{pmatrix} 1x3+0x9+9x(-1)+(-1)x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \end{pmatrix}$$

Για το γινόμενο των πινάκων ισχύουν οι εξής ***ιδιότητες***:

- Α(ΒΓ) = (ΑΒ)Γ (*προσεταιρεστική*).
- Α(Β ± Γ) = ΑΒ ± ΑΓ (*επιμεριστική*).
- k(AB) = (kA)B = A(kB)
- (A ± B)Γ = ΑΓ ± ΒΓ
- $(AB)^T = B^T A^T$
- AI=IA=A (*Το I είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού*).
- A0= 0A = 0

Γενικότερα, για το γινόμενο των πινάκων μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Το γινόμενο ΒΑ των πινάκων B_{nxk} και A_{mxn} δεν ορίζεται πάντοτε, ακόμη και όταν ορίζεται το γινόμενο ΑΒ. Για να ορίζεται το γινόμενο ΒΑ θα πρέπει να είναι k=m.
- Αν ο πίνακας Α είναι τύπου mxn, τότε:

(α) το γινόμενο ΑΒ ορίζεται όταν ο πίνακας Β έχει n σειρές.
(β) Το γινόμενο ΒΑ ορίζεται όταν ο πίνακας Β έχει m στήλες.
(γ) Τα γινόμενα ΑΒ και ΒΑ ορίζονται όταν ο πίνακας Β είναι τύπου nxm.

Συνέπεια του τελευταίου περιορισμού είναι ότι ο πίνακας A^2=AA ορίζεται μόνο όταν είναι τετραγωνικός. Στο γινόμενο ΑΒ λέμε ότι ο πίνακας Α ***μεταπολλαπλασιάζεται*** (postmultiplied) με τον πίνακα Β ή ότι ο πίνακας Α πολλαπλασιάζεται από τα δεξιά (multiplied on the right) τον Β. Παρομοίως, στο παραπάνω γινόμενο ο πίνακας Β ***προπολλαπλασιάζεται*** (premultiplied) του Α ή ο πίνακας Β πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά (multiplied on the left) τον Α.

Άσκηση

Ποια είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει η σχέση: $(A-B)(A+B)= A^2-B^2$.

Λύση

Θα έχουμε: $(A-B)(A+B)= A^2+AB-BA-B^2$. Για να ισχύει η παραπάνω σχέση θα πρέπει $AB-BA=0 \Rightarrow AB=BA$. Δηλαδή, οι πίνακες A και B θα πρέπει να είναι αντιμεταθετικοί.

Ο μεταπολλαπλασιασμός ενός πίνακα A με ένα διαγώνιο πίνακα D, έχει ως αποτέλεσμα ένα πίνακα που κάθε του στοιχείο είναι το γινόμενο κάθε στοιχείου της στήλης j του A επί το αντίθετο διαγώνιο στοιχείο d_j του D. Αντίθετα, ο προπολλαπλασιασμός του πίνακα A με τον πίνακα D θα έχει ως αποτέλεσμα ένα πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο του είναι το γινόμενο της σειράς i του A επί το αντίθετο διαγώνιο στοιχείο d_i του D.

Για παράδειγμα, αν

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

τότε θα έχουμε:

$$AD=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 2 & -4 & -21 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$DA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 14 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Το γινόμενο AB ενός διαγωνίου πίνακα $A=diag[\alpha_{11}, \alpha_{22}, ...\alpha_{nn}]$ και ενός διαγωνίου πίνακα $B=diag[b_{11}, b_{22}, ...b_{nn}]$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας $C= diag[c_{11}, c_{22}, ...c_{nn}]$ με στοιχεία $c_{ii}=a_{ii}b_{ii}$, $i=1, 2, ..n$. Διαφορετικά:

$$AB=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & \\ & \alpha_{22} & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & b_{22} & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_{11}b_{11} & & \\ & \alpha_{22}b_{22} & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & \alpha_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Για ποιες τιμές του z οι επόμενοι πίνακες A και B είναι αντιμεταθετικοί;

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & z \end{pmatrix}$$

Λύση

Τα γινόμενα των δυο πινάκων AB και BA θα ισούνται αντίστοιχα με:

$$AB=\begin{pmatrix} 3x7+(-4)x5 & 3x4+(-4)z \\ (-5)x7+1x5 & (-5)x4+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 12-4z \\ 30 & -20+z \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 7x3+4(-5) & 7x(-4)+4(-1) \\ 5x3+(-5)z & 5x(-4)+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15-5z & -20+z \end{pmatrix}$$

Για να είναι οι δυο πίνακες αντιμεταθετικοί, θα πρέπει:

12-4z=-24 και 30=15-5z. Οι δυο εξισώσεις συναληθεύονται για z=9.

Άσκηση

Δίνεται το επόμενο σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 3x-5y+2\omega &= 2 \\ 2x+2y-\omega &= -1 \\ 7y+\omega &= 6 \end{aligned}$$

Να γραφεί το σύστημα υπό μορφή πινάκων

Λύση

Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & -5y & +2\omega \\ 2x & +2y & -\omega \\ & 7y & +\omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Αν τεθεί:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Το αρχικό σύστημα εξισώσεων γράφεται ως εξής με τη μορφή πινάκων: Au = b, όπου A, b είναι γνωστοί συντελεστές και u είναι άγνωστος πίνακας.

Άσκηση

Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα, για τα οποία χρησιμοποιεί τέσσερα διαφορετικά υλικά. Οι ποσότητες των υλικών που χρησιμοποιεί η επιχείρηση σε μονάδες εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Υλικό Y_1	Υλικό Y_2	Υλικό Y_3	Υλικό Y_4
Προϊόν Π_1	8	1	0.5	0
Προϊόν Π_2	5	15	0.5	0
Προϊόν Π_3	8	2	1	0.5

Οι τιμές των υλικών ανά μονάδα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Υλικό Y_1	Υλικό Y_2	Υλικό Y_3	Υλικό Y_4
3	5	10	20

Να υπολογιστεί το κόστος κάθε προϊόντος με χρήση των πινάκων των τιμών τους

Λύση

Υπολογίζουμε καταρχάς το κόστος παραγωγής κάθε προϊόντος χωρίς τη χρήση πινάκων.

Προϊόν Π_1: 8x3 + 1x5 + 0.5x10 + 0x20 = 34

Προϊόν $Π_2$: 5x3 + 15x5 + 0.5x10 + 0x20 = 95

Προϊόν $Π_3$: 8x3 + 2x5 + 1x10 + 0.5x20 = 54

Οι παραπάνω πράξεις μπορούν να δομηθούν υπό τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 5 & 15 & 0.5 & 0 \\ 8 & 12 & 1 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων A.b δίνει:

$$Ab=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 5 & 15 & 0.5 & 0 \\ 8 & 12 & 1 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 95 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας δίνει την τιμή μιας μονάδας κάθε παραγόμενου προϊόντος.

Γενικά, ορίζουμε το γινόμενο ενός πίνακα A τύπου mxn επί ένα πίνακα στήλη B τύπου nx1ως τον πίνακα – στήλη (ή διάνυσμα) C, ο οποίος στη i γραμμή του (συνιστώσα) έχει την i γραμμή του A επί το διάνυσμα B. Διαφορετικά:

$$\begin{pmatrix} α_{11} \; \ldots \; α_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ α_{m1} \; \ldots α_{mn} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ b_{n-1n} \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} α_{11}b_{11}+α_{12}b_{21}+\ldots+α_{1n-1}b_{n-11}+α_{1n}b_{n1} \\ α_{21}b_{11}+α_{22}b_{21}+\ldots+α_{2n-1}b_{n-11}+α_{1n}b_{n1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ α_{m1}b_{11}+α_{m2}b_{21}+\ldots+α_{mn-1}b_{n-11}+α_{mn}b_{n1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{1i} b_{i1} \\ \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{21i} b_{i1} \\ \ldots.. \\ \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{m-11i} b_{i1} \\ \sum_{\iota=1}^{n} \alpha_{mi} b_{i1} \end{pmatrix}$$

1.3.4 Δυνάμεις πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και για κάθε φυσικό αριθμό n ο πίνακας

$$A^n = A\,A\,A \text{ (n φορές)}$$

ονομάζεται n**-στή δύναμη** του A.

Με βάση τα παραπάνω θα ισχύει:

- $A^0 = I$
- $A^1 = A$.

Αν m και n είναι φυσικοί αριθμοί, τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $A^m A^n = A^{m+n}$
- $(A^m)^n = A^{mn}$
- $(kA)^n = k^n A^n$
- $(AB)^n = A^n B^n$ **όταν** $AB = BA$.

Άσκηση

Αν οι πίνακες Α, Β είναι τετραγωνικοί τάξεως n και αντιμεταθετικοί, τότε ισχύει η ισότητα: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης πίνακα θα έχουμε τη σχέση:

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + BA + AB + B^2$

Επειδή οι πίνακες είναι τετραγωνικοί και αντιμεταθετικοί θα ισχύει: AB=BA, οπότε: $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + AB = A^2 + B^2 + 2AB$.

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι n-οστές δυνάμεις των πινάκων Α και Β.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση

Για τον πίνακα Α θα έχουμε:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}= I$$

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}= A$$

Γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία υπολογισμού αποκτούμε:

$A^{2n} = I$ και $A^{2n+1} = A$

Για τον πίνακα Β θα έχουμε:

$$B^2=BB=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}= I$$

$B^3 = BB^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

Γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία υπολογισμού αποκτούμε:

$B^{2n} = I$ και $B^{2n+1} = B$

Άσκηση

Αν ο πίνακας A επαληθεύει την ισότητα $X^2=X$, τότε και ο πίνακας I-A επαληθεύει επίσης την εξίσωση αυτή.

Λύση

Θα είναι $(I-A)^2 = I+A^2 -2A = I+A -2A = I-A$.

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + BA + AB + B^2$

Άσκηση

Έστω ότι $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ και $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και είναι:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις **A** + **B**, **A·B**, **B·A** και $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T$, εφόσον ορίζονται:

Λύση

(α) Το άθροισμα **A** + **B** δεν ορίζεται γιατί οι πίνακες **A**, **B** έχουν διαφορετικό μέγεθος

(β) Το γινόμενο **A·B** δεν υπολογίζεται γιατί ο πίνακας **A** είναι μεγέθους (διαστάσεων) 2×3, ενώ ο πίνακας **B** είναι τετραγωνικός, διαστάσεων 2×2. Επομένως

$$\underset{2\times\boxed{3}}{\mathbf{A}} \cdot \underset{\boxed{2}\times 2}{\mathbf{B}}$$

(γ) Το γινόμενο **B·A** μπορεί να υπολογιστεί γιατί ο αριθμός των στηλών του πίνακα **B** ισούται με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα **A**, δηλαδή

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{B}} \cdot \underset{2\times 3}{\mathbf{A}}$$

Επομένως έχουμε:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3\cdot 0+1\cdot 3 & 3\cdot 2+1\cdot(-1) & 3\cdot 1+1\cdot 4\\ (-1)\cdot 0+0\cdot 3 & (-1)\cdot 2+0\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+0\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

(δ) Το γινόμενο **A·A**^{T} υπολογίζεται, αφού εξ' ορισμού, ο ανάστροφος πίνακας **A**^{T} έχει τόσες γραμμές όσες είναι οι στήλες του πίνακα **A**.

Θα έχουμε:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 3+2\cdot(-1)+1\cdot 4\\ 3\cdot 0+(-1)\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+4\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 26\end{bmatrix}$$

Άσκηση

Να βρεθούν οι πραγματικοί πίνακες $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, οι οποίοι ικανοποιούν την ισότητα **AX**=**XA**, όταν:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Λύση

(α) Για να ορίζεται η σχέση **AX**=**XA** θα πρέπει *n*=*m*=2, καθόσον:

$$\underset{2\times 2}{\mathbf{A}} \cdot \underset{n\times m}{\mathbf{X}} = \underset{n\times m}{\mathbf{X}} \cdot \underset{2\times 2}{\mathbf{A}}$$

Έστω $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$. Τότε η σχέση **ΑΧ**=**ΧΑ** γράφεται:

ΑΧ=ΧΑ $\Leftrightarrow$ **ΑΧ** - **ΧΑ** = **0** $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x+2z & y+2\omega \\ 3x+z & 3y+\omega \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x+3y & 2x+y \\ z+3\omega & 2z+\omega \end{bmatrix}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} 2z-3y & 2\omega-2x \\ 3x-3\omega & 3y-2z \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

Οπότε η ζητούμενη λύση βρίσκεται από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} 2z-3y=0 \\ 2\omega-2x=0 \\ 3x-3\omega=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

η οποία δίνει x=ω και $y=\frac{2}{3}z$, με $z,\omega\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας είναι της μορφής $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} \omega & 2z/3 \\ z & \omega \end{bmatrix}$, $z,\omega\in\mathbb{R}$.

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} 2^k & 3^k-2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$.

Λύση

Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής:

(α) Για k=1 είναι προφανές ότι η ισότητα ισχύει

(β) Έστω ότι ισχύει για k=$n\in\mathbb{N}$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για $k=n+1$, ότι δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{bmatrix}$$

Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n \cdot 2 + \left(3^n - 2^n\right) \cdot 0 & 2^n \cdot 1 + 3 \cdot \left(3^n - 2^n\right) \\ 0 \cdot 2 + 3^n \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 3^n \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n + 2^n \\ 0 & 3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} - (3+1) \cdot 2^n \\ 0 & 3^{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} - 2 \cdot 2^n \\ 0 & 3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{bmatrix}$$

Άρα η ισότητα ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{A}^{2015}$ όπου:

(α) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (β) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1+5\cdot 0 & 1\cdot 5+5\cdot(-1)\\ 0\cdot 1-1\cdot 0 & 0\cdot 5-1\cdot(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_2$$

Συνεπώς, $\mathbf{A}^{2015}=\mathbf{A}^{2\cdot 1017+1}=(\mathbf{A}^2)^{1017}\cdot\mathbf{A}=(\mathbf{I}_n)^{1017}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$

Σημείωση

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γενικευτεί ως εξής:

$$\mathbf{A}^n=\begin{cases}\mathbf{I}_2, & \text{όταν } n=2k, \text{ με } k\in\mathbb{Z}\\ \\ \mathbf{A}, & \text{όταν } n=2k+1, \text{ με } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

(β) Έχουμε:

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\ldots=\begin{bmatrix}0 & 0 & ad & ae+bf\\ 0 & 0 & d & af\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & ad & ae+bf\\ 0 & 0 & d & af\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\ldots=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & adf\\ 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4=\mathbf{A}^3\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & adf\\ 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\ldots=\mathbf{0}_4$$

Επομένως διαδοχικά υπολογίζεται $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^6 = \ldots = \mathbf{A}^{2015} = \mathbf{0}_4$

Άσκηση

Έστω πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, με $n \in \mathbb{N}$, για τον οποίον ισχύει η σχέση $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n$. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

(α) $\mathbf{A}^4 - 3\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 + 7\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$. (β) $\mathbf{A}^4(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)^5 - \mathbf{I}_n$.

Λύση

(α) Με βάση τον αλγόριθμο διαίρεσης των πολυωνύμων πραγματοποιούμε παραγοντοποίηση της παράστασης. Έχουμε:
$\mathbf{A}^4 - 3\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 + 7\mathbf{A} - \mathbf{I}_n = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\cdot(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{I}_n) + 3\mathbf{A} - 3\cdot\mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n\cdot(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - 2\cdot\mathbf{I}_n) + 3\mathbf{A} - 3\cdot\mathbf{I}_n == \mathbf{0}_n + 3\mathbf{A} - 3\cdot\mathbf{I}_n = 3\mathbf{A} - 3\cdot\mathbf{I}_n$

(β) Από τη σχέση $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n$ προκύπτει ότι:
$\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) = \mathbf{I}_n$,
αλλά και ότι $(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$
δηλαδή ο πίνακας **A** είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφό του τον πίνακα $\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$.
Επομένως, η παράσταση $\mathbf{A}^4(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)^5 - \mathbf{I}_n$ γράφεται:
$\mathbf{A}^4(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)^5 - \mathbf{I}_n = \mathbf{A}^4(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)^4(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) - \mathbf{I}_n = [\mathbf{A}^4(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)^4](\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) - \mathbf{I}_n = [(\mathbf{I}_n)^4](\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) - \mathbf{I}_n = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) - \mathbf{I}_n$

Ασκήσεις

1. Αν ισχύει η ισότητα, να βρεθούν οι άγνωστοι x, y, z και k.

$$\begin{pmatrix} 2z+k & x+y \\ x-y & z-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Αποδείξτε ότι ισχύει: $(A+I)(A+I) = A^2 + 2A + I$.
3. Αποδείξτε με τη χρήση ενός παραδείγματος ότι $(A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$.
4. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $A(\varphi)A(\theta) = A(\varphi+\theta)$, όταν

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

5. Να βρείτε τους πίνακες Α για τους οποίους ισχύει:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. . Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η σχέση:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} 3^{2n} & 0 \\ 0 & 3^{2n} \end{pmatrix}$$

7. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η σχέση: $A^{n+2}=A^n+A^2-I$, όταν

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Να βρεθούν όλοι οι αντιμεταθετικοί πίνακες του επόμενου πίνακα A

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

1. Δασκαλόπουλου Δ., *Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα,* Αθήνα.
2. Bronson R., Kosta G. (2009), *Matrix Methods, Apllied Linear Algebra, Elsevier, N.Y.*
3. Halmos P. (1995), *Linear Algebra Problem Book,* Mathematical Association of America, Washington.
4. Horn P., Johnson C. (2013), *Matrix Analysis,* Cambridge, N.Y.
5. Lancaster P., Tismenetsky M. (1985), T*he Theory of Matrices,* Academic Press, London.
6. Lay D. (2012), *Linear Algebra and its Applications,* Addison-Wesley, N.Y.
7. Leon S. (2010), *Linear Algebra with Applications, Pearson, Boston.*
8. Λουκάκη Μ. (2010), *Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών*, τ. Α και Β, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Θεσσαλονίκη.
9. Nicholson W. (1995), *Linear Algebra with Applications,* PWS Publishing Company, Boston MA.

10. Prasolov V. (1994), *Problems and Theorems in Linear Algebra,* American Math. Society, Providence.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

2.1 Γενικά

Οι πίνακες με τους οποίους ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ονομάζονται ***απλοί***, επειδή τα στοιχεία τους είναι αριθμοί, σε διάκριση με τους ***σύνθετους*** πίνακες, των οποίων τα στοιχεία είναι πίνακες. Η έννοια του σύνθετου πίνακα συνδέεται άμεσα με τον επιμερισμό ή την υποδιαίρεση ενός πίνακα σε υποπίνακες.

Υποπίνακας (submatrix) ενός πίνακα είναι κάθε πίνακας που προκύπτει αν διαγράψουμε ορισμένες σειρές, ορισμένες στήλες ή οριοσμένες σειρές και στήλες ταυτόχρονα. Διαφορετικά, **υποπίνακας** $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-\kappa)\times(m-\lambda)}$ ενός πίνακα $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n,m \in \mathbb{N}$, ονομάζεται κάθε πίνακας που προκύπτει από τη διαγραφή $1 \le \kappa \le n$ γραμμών και $1 \le \lambda \le m$ στηλών από τον πίνακα **A**.

Για παράδειγμα ο πίνακας $\mathbf{A}_{11}{}^{2\times 2}$ προκύπτει αν διαγράψουμε την τελευταία γραμμή και τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα

$$\mathbf{A}^{3\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A}_{11}} & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

και επομένως

$$\mathbf{A}_{11}^{2\times 2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Υποδιαίρεση ή διαμερισμός (partitioning) ενός πίνακα σε υποπίνακες ονομάζεται η θεώρηση όλων των υποπινάκων που προκύπτουν, ύστερα από τη χάραξη οριζόντιων ή κατακόρυφων γραμμών μεταξύ των σειρών και των στηλών αντίστοιχα. Διαφορετικά, **υποδιαίρεση** ή **διαμέριση** (**partitioning**) ενός πίνακα **A**$\in\mathbb{R}^{n\times m}$ (n,m $\in\mathbb{N}$) ονομάζεται η ομαδοποίηση των στοιχείων [a_{ij}] του πίνακα **A**=[a_{ij}] σε $\boldsymbol{u_o\cdot v_o}\in\mathbb{N}$ πλήθος **μη επικαλυπτόμενων υποπινάκων** $\mathbf{A}_{uv}$, με $1\le u_o\le n$ και $1\le v_o\le m$, ώστε για το σύνολο των υποπινάκων $[\mathbf{A}_{uv}]_{u,v\in\mathbb{N}}$ που προκύπτουν να ισχύουν τα παρακάτω:

- Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών $1\le(u_1,u_2)\le u_o$ και $1\le(v_1,v_2)\le v_o$, με $u_1\neq u_2$ και $v_1\neq v_2$, να ισχύει $\mathbf{A}_{u_1v_1}\bigcap\mathbf{A}_{u_2v_2}=\mathbf{0}$ (δηλ. οποιοιδήποτε υποπίνακες $\mathbf{A}_{u_1v_1}$ και $\mathbf{A}_{u_2v_2}$ του **A** δεν έχουν κοινά στοιχεία).
- Κάθε υποπίνακας $\mathbf{A}_{uv}=[a_{ij}]_{1\le i\le n(u),1\le j\le m(v)}$ του **A** περιέχει $\boldsymbol{n(u)}$ γραμμές και $\boldsymbol{m(u)}$ στήλες με στοιχεία [a_{ij}] $\in\mathbf{A}$, ώστε το σύνολο των γραμμών και των στηλών όλων των υποπινάκων $[\mathbf{A}_{uv}]_{1\le u\le u_o,1\le v\le v_o}$ να συνθέτουν το μέγεθος $n\times m$ του πίνακα **A**, δηλαδή να ισχύει $n=\sum_{u=1}^{u_o}n(u)$ και $m=\sum_{v=1}^{v_o}m(v)$.

Η υποδιαίρεση ενός απλού πίνακα έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός σύνθετου πίνακα. Η δημιουργία των σύνθετων πινάκων διευκολύνει τις πράξεις μεταξύ πινάκων και γενικότερα την τυποποίηση. Στην πράξη, η διαμέριση του πίνακα **A** σε $u_o\cdot v_o$ υποπίνακες πραγματοποιείται ύστερα από τη χάραξη (u_o-1) οριζοντίων και (v_o-1) κατακόρυφων γραμμών, μέσα στην εσωτερική διάταξη των στοιχείων του [a_{ij}].

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\mathbf{A}^{3\times 4}$, με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

είναι δυνατόν να υποδιαιρεθεί με τη χάραξη μιας οριζόντιας και δυο κατακόρυφων γραμμών σε ένα σύνθετο πίνακα που περιέχει τους (1+1)·(2+1)=6 υποπίνακες $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{13}$, $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$ και $\mathbf{A}_{23}$, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{c} \qquad \mathbf{A}_{11} \qquad\quad \mathbf{A}_{21} \qquad\quad \mathbf{A}_{31} \\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] \\ \qquad \mathbf{A}_{21} \qquad\quad \mathbf{A}_{22} \qquad\quad \mathbf{A}_{23} \end{array}$$

Αναλυτικότερα, οι υποπίνακες που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$\mathbf{A}_{11}^{2\times1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12}^{2\times2} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{13}^{2\times1} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21}^{1\times1} = \begin{bmatrix} a_{31} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{22}^{1\times2} = \begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{A}_{23}^{1\times1} = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}.$$

Ύστερα από την παραπάνω υποδιαίρεση του πίνακα $\mathbf{A}^{3\times4}$, δημιουργείται ο σύνθετος πίνακας $\mathbf{A}^{2\times3}$ μειωμένου μεγέθους 2×3, ο οποίος γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}$$

Με τον τρόπο που πραγματοποιήθηκε η υποδιαίρεση του πίνακα $\mathbf{A}^{3\times4}$ προκύπτει πως τα στοιχεία-υποπίνακες $\mathbf{A}_{1j}$ και $\mathbf{A}_{2j}$, με j=1,2,3, (δηλαδή τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια γραμμή, πχ. τα $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{13}$ ή τα $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{A}_{23}$) έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, ενώ τα στοιχεία $\mathbf{A}_{i1}$, $\mathbf{A}_{i2}$ και $\mathbf{A}_{i3}$ με i=1,2, (δηλαδή τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη, πχ. τα $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{21}$ ή $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{22}$ ή τα $\mathbf{A}_{13}$, $\mathbf{A}_{23}$) έχουν των ίδιο αριθμό στηλών.

Από τα παραπάνω προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός:

Σύνθετος πίνακας **A**$\in \mathbb{R}^{u_o \times v_o}$ ονομάζεται κάθε πίνακας **A**=[**A**$_{uv}$], του οποίου τα στοιχεία [**A**$_{uv}$] αποτελούν **υποπίνακες** **A**$_{uv}$=$[a_{ij}]_{1\le i\le n(u), 1\le j\le m(v)}$, οι οποίοι προκύπτουν από τη διαμέριση ενός πίνακα **A΄**$\in \mathbb{R}^{n\times m}$, με **A**= $[a_{ij}]_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$, σε $\boldsymbol{u_o}\cdot\boldsymbol{v_o} \in \mathbb{N}$ πλήθος υποπινάκων.

Στην πράξη, ένας πίνακας **A** με στοιχεία πίνακες **A**=[**A**$_{uv}$] είναι σύνθετος πίνακας, όταν ο αριθμός των γραμμών $n(u=\kappa)$ των στοιχείων **A**$_{\kappa v}$=$[a_{ij}]_{1\le i\le n(u), 1\le j\le m(v)}$ που βρίσκονται στη γραμμή κ είναι ο ίδιος για όλους του υποπίνακες **A**$_{\kappa v}$, καθώς και ο αριθμός των στηλών $m(v=\lambda)$ των στοιχείων **A**$_{u\lambda}$=$[a_{ij}]_{1\le i\le n(u), 1\le j\le m(v)}$ που βρίσκονται στη στήλη λ είναι ο ίδιος για όλους του υποπίνακες **A**$_{u\lambda}$.

Έτσι, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η υποδιαίρεση

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \mathbf{A}_{11} \quad\quad \mathbf{A}_{21} \quad\quad \mathbf{A}_{31} \\ \left[\begin{array}{c:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdashline{2-3} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] \\ \mathbf{A}_{21} \quad\quad \mathbf{A}_{22} \quad\quad \mathbf{A}_{23} \end{array}$$

του πίνακα

$$\mathbf{A}^{3\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

δεν αποτελεί σύνθετο πίνακα.

Γενικότερα, ένας απλός πίνακας μπορεί να παρασταθεί με το σύμβολο $\langle A \rangle$, ο οποίος προκύπτει από το σύνθετο πίνακα A. Με την κατάργηση των υποδιαιρέσεων προφανώς θα ισχύει $\langle A \rangle$=A.

2.2. Πράξεις και ιδιότητες των σύνθετων πινάκων

Έστω ένα ζεύγος πινάκων **A**,**B** των ίδιων διαστάσεων $n\times m$ και έστω μία (η ίδια) υποδιαίρεση αυτών, ώστε να προκύπτουν οι σύνθετοι πίνακες $\mathbf{A}_k = \left(\mathbf{A}_{ij}\right)$ και $\mathbf{B}_k = \left(\mathbf{B}_{ij}\right)$, με $1\le i\le n_1$, $1\le i\le m_1$ και $k=n_1\cdot m_1$. Τότε το άθροισμα των σύνθετων πινάκων **A** και **B** ορίζεται σε αντιστοιχία με τον ορισμό της άθροισης των απλών πινάκων, δηλαδή

$$\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k = \left(\mathbf{A}_{ij}\right) + \left(\mathbf{B}_{ij}\right) = \left(\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}\right)$$

Προϋπόθεση για την εκτέλεση της πράξεως του αθροίσματος στους σύνθετους πίνακες είναι η υποδιαίρεση των **A** και **B** να παράγει υποπίνακες των αυτών διαστάσεων, δηλαδή για κάθε $1 \le i \le n_1$ και $1 \le i \le m_1$ να ισχύει:

$$size\left(\mathbf{A}_{ij}\right) = size\left(\mathbf{B}_{ij}\right), \quad \forall i \in [1, n_1],\ j \in [1, m_1]$$

Με βάση τον ορισμό αυτό προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\left\langle \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k \right\rangle = \mathbf{A} + \mathbf{B}$
- $\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k + \mathbf{A}_k$
- $\mathbf{A}_k + (\mathbf{B}_k + \mathbf{C}_k) = (\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k) + \mathbf{C}_k$

Από τις δύο πρώτες ιδιότητες προκύπτει ότι για τον υπολογισμό του αθροίσματος δύο πινάκων αρκεί να τους υποδιαιρέσουμε σε υποπίνακες ίδιων διαστάσεων, να προσθέσουμε τους σύνθετους πίνακες που προκύπτουν και στη συνέχεια να καταργήσουμε την υποδιαίρεση.

Έστω **A** πίνακας διαστάσεων $m \times k$ και **B** πίνακας διαστάσεων $k \times n$. Έστω μία υποδιαίρεση του **A**, **σε $p \times l$ πλήθος υποπίνακες**, τότε μία δεύτερη υποδιαίρεση του **B** θα ονομάζεται αντίστοιχη της υποδιαίρεσης του **A**, όταν οι γραμμές του **B** υποδιαιρούνται με τον ίδιο τρόπο που υποδιαιρούνται οι στήλες του **A**, δηλαδή **όταν η υποδιαίρεση του B παράγει πλήθος $l \times r$ υποπίνακων**. Με το μηχανισμό αυτό προκύπτει μία υποδιαίρεση των **A** και **B** σε υποπίνακες της μορφής:

$$\left[\begin{array}{c:c:c} m_1k_1 & \cdots & m_1k_l \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline m_pk_1 & \cdots & m_pk_l \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c:c} k_1n_1 & \cdots & k_1n_r \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline k_ln_1 & \cdots & k_ln_r \end{array}\right]$$

όπου m_ik_j συμβολίζει ότι ο πίνακας $\mathbf{A}_{ij}$ έχει διάσταση $m_i \times k_j$ και αντίστοιχα το k_in_j συμβολίζει ότι ο πίνακας $\mathbf{B}_{ij}$ έχει διάσταση $k_i \times n_j$. Προφανώς ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = m \qquad \sum_{j=1}^{l} k_j = k \qquad \sum_{j=1}^{r} n_j = n$$

Δηλαδή, οι υποπίνακες της πρώτης στήλης του σύνθετου πίνακα A αποτελούνται από k_1 στήλες, ενώ οι υποπίνακες της πρώτης γραμμής του σύνθετου πίνακα B αποτελούνταιαπό k_1 γραμμές κοκ. Όμοια, οι υποπίνακες της τελευταίας στήλης του σύνθετου πίνακα A αποτελούνται από k_l στήλες όσος είναι και ο αριθμός των γραμμών (k_l) που αποτελούνται οι υποπίνακες της τελευταίας γραμμής του σύνθετου πίνακα B.

Για παράδειγμα, έστω οι παρακάτω πίνακες $A^{3\times3}$ και $B^{2\times3}$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\1&1&2\end{bmatrix} \text{ και } \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

και έστω η ακόλουθη υποδιαίρεση (διαμέριση):

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:cc}1&0&-1\\0&0&1\\\hdashline 1&1&2\end{array}\right] \quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}1&-1\\\hdashline 0&0\\1&0\end{array}\right]$$

Η υποδιαίρεση έγινε με τρόπο ώστε η κατακόρυφη γραμμή στον πίνακα **A** να χαραχθεί μεταξύ της 1ης και 2ης στήλης, καθώς και η οριζόντια γραμμή στον πίνακα **B** να χαραχθεί μεταξύ της 1ης και 2ης γραμμής.

Γενικότερα, αν **A** και **B** σύνθετοι πίνακες διαστάσεων ($p\times l$) και ($l\times r$) αντίστοιχα, τότε ορίζουμε το γινόμενο των σύνθετων πινάκων με τον ίδιο τρόπο όπως και στους απλούς πίνακες, δηλαδή

Για παράδειγμα, αν θελήσουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο των παραπάνω πινάκων **A** και **B**, θα έχουμε:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix}\\ [1] & [1\quad 2]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}[1\quad -1]\\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot[1\quad -1]+\begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\\ \\ [1]\cdot[1\quad -1]+[1\quad 2]\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\\ [3\quad -1]\end{bmatrix}$$

Για τους σύνθετους πίνακες ισχύουν οι εξής ιδιότητες του γινομένου:

(α) $k\cdot\mathbf{A}=(k\cdot\mathbf{A})$ (βαθμωτό γινόμενο πίνακα επί αριθμό), $k\in\mathbb{R}$.

(β) **A**·(**B**·**C**)=(**A**·**B**)·**C**
(γ) **A**·(**B**+**C**)=**A**·**B**+**A**·**C** (επιμεριστική αριστερός πολ/μος)
(δ) (**B**+**C**)·**A**=**B**·**A**+**C**·**A** (επιμεριστική δεξιός πολ/μος)

Επομένως, για τον υπολογισμό του γινομένου δύο πινάκων **A** και **B** αρκεί να πραγματοποιήσουμε δύο αντίστοιχες υποδιαιρέσεις στους πίνακες αυτούς, να πολλαπλασιάσουμε τους σύνθετους πίνακες που προκύπτουν και τελικά να καταργήσουμε την υποδιαίρεση. Ο σύνθετος πίνακας

$$\mathbf{A}^{n\times n}=[\mathbf{A}_{ij}]=\begin{cases}\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{0},\ \text{για } i\neq j\\ \\ \mathbf{A}_{ij},\ \text{για } i=j\end{cases},$$

ονομάζεται **σύνθετος διαγώνιος** πίνακας. Τα στοιχεία του σύνθετου διαγώνιου πίνακα δεν είναι απαραίτητο να έχουν τις ίδιες διαστάσεις, δηλαδή είναι $\mathbf{A}_{ij}^{n(i)\times m(j)}$.

Παράδειγμα: ο πίνακας

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{nn}\end{bmatrix}$$

είναι σύνθετος διαγώνιος πίνακας.

Ο σύνθετος πίνακας:

$$\mathbf{A}^{n\times n}=[\mathbf{A}_{ij}]=\begin{cases}\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{0},\ \text{για } i< j\\ \\ \mathbf{A}_{ij},\ \text{για } i\geq j\end{cases},$$

ονομάζεται **σύνθετος άνω τριγωνικός** πίνακας, ενώ ο πίνακας

$$\mathbf{A}^{n\times n}=[\mathbf{A}_{ij}]=\begin{cases}\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{0},\ \text{για } i> j\\ \\ \mathbf{A}_{ij},\ \text{για } i\leq j\end{cases}$$

ονομάζεται **σύνθετος κάτω τριγωνικός**.

Παράδειγμα: οι πίνακες **A** και **B**, όπου:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{1m}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{nn}\end{bmatrix} \text{ και } \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{B}_{n1} & \mathbf{B}_{n2} & \cdots & \mathbf{B}_{nn}\end{bmatrix}$$

είναι σύνθετοι άνω και κάτω τριγωνικοί πίνακες.

Το γινόμενο σύνθετων διαγώνιων πινάκων ισούται με το γινόμενο των ομοθέσιων διαγώνιων στοιχείων τους, δηλαδή το γινόμενο **A·B** των πινάκων:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{n_1\times k_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{n_2\times k_2} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{nn}^{n_n\times k_n}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}^{k_1\times m_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22}^{k_2\times m_2} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_{nn}^{k_n\times m_n}\end{bmatrix}$$

ισούται με τον πίνακα

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{n_1\times k_1}\cdot\mathbf{B}_{11}^{k_1\times m_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{n_2\times k_2}\cdot\mathbf{B}_{22}^{k_2\times m_2} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{nn}^{n_n\times k_n}\cdot\mathbf{B}_{nn}^{k_n\times m_n}\end{bmatrix}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το γινόμενο των σύνθετων πινάκων **A·B**, όπου:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:cc}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ \hdashline 1 & 1 & 0\end{array}\right] \qquad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & 2\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right]$$

Λύση

Οι πίνακες **A** και **B** είναι σύνθετοι της μορφής:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{2\times1} & \mathbf{A}_{12}^{2\times2}\\ \mathbf{A}_{21}^{1\times1} & \mathbf{A}_{22}^{1\times2}\end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}^{1\times3} & \mathbf{B}_{12}^{1\times1}\\ \mathbf{B}_{21}^{2\times3} & \mathbf{B}_{22}^{2\times1}\end{bmatrix}$$

Οπότε το γινόμενό τους θα ισούται με:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{2\times1}\cdot\mathbf{B}_{11}^{1\times3}+\mathbf{A}_{12}^{2\times2}\cdot\mathbf{B}_{21}^{2\times3} & \mathbf{A}_{11}^{2\times1}\cdot\mathbf{B}_{12}^{1\times1}+\mathbf{A}_{12}^{2\times2}\cdot\mathbf{B}_{22}^{2\times1}\\ \mathbf{A}_{21}^{1\times1}\cdot\mathbf{B}_{11}^{1\times3}+\mathbf{A}_{22}^{1\times2}\cdot\mathbf{B}_{21}^{2\times3} & \mathbf{A}_{21}^{1\times1}\cdot\mathbf{B}_{12}^{1\times1}+\mathbf{A}_{22}^{1\times2}\cdot\mathbf{B}_{22}^{2\times1}\end{bmatrix}$$

Τα επιμέρους γινόμενα υπολογίζονται ως εξής:

$$\mathbf{A}_{11}^{2\times1}\cdot\mathbf{B}_{11}^{1\times3}+\mathbf{A}_{12}^{2\times2}\cdot\mathbf{B}_{21}^{2\times3}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&4\\0&3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&3&7\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11}^{2\times1}\cdot\mathbf{B}_{12}^{1\times1}+\mathbf{A}_{12}^{2\times2}\cdot\mathbf{B}_{22}^{2\times1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot[2]+\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}^{1\times1}\cdot\mathbf{B}_{11}^{1\times3}+\mathbf{A}_{22}^{1\times2}\cdot\mathbf{B}_{21}^{2\times3}=[1]\cdot\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}^{1\times1}\cdot\mathbf{B}_{12}^{1\times1}+\mathbf{A}_{22}^{1\times2}\cdot\mathbf{B}_{22}^{2\times1}=[1]\cdot[2]+\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=[2]+[1]=[3]$$

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα προκύπτει ο εξής πίνακας:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&5\\0&3&7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&2\end{bmatrix} & [3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&5&4\\0&3&7&4\\1&0&2&3\end{bmatrix}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα γινόμενα των σύνθετων πινάκων **A·B** και **A·A**=**A**^{2}, όπου:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{2\times2} & \mathbf{A}_{12}^{2\times2} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{2\times2} & \mathbf{0}^{2\times1} \\ \mathbf{B}_{21}^{2\times2} & \mathbf{B}_{22}^{2\times1} \end{bmatrix}$$

Λύση

Δεδομένου ότι η υποδιαίρεση των γραμμών του **A** και των στηλών του **B** είναι η ίδια, ώστε να επιτρέπεται ο πολλαπλασιασμών των αντίστοιχων υποπινάκων, θα έχουμε:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\cdot\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 18 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για το πίνακα **A**^{2} θα έχουμε:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{11})^2 & \mathbf{A}_{11}\cdot\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -2 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι δυνάμεις του σύνθετου πίνακα:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{11})^2 & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21}\cdot\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}\cdot\mathbf{A}_{21} & (\mathbf{A}_{22})^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [1]^2 & [0] \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot[1] + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-1\\-1+1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1+1 & -1-1\\-1-1 & 1+1\end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & 2\cdot\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Όμοια έχουμε:

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & 2\cdot\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}_{11}\right)^2 & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21}\cdot\mathbf{A}_{11}+2\cdot\mathbf{A}_{22}\cdot\mathbf{A}_{21} & 2\cdot\left(\mathbf{A}_{22}\right)^2 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & 2^2\cdot\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς προκύπτει επαγωγικά ότι:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1}\cdot\mathbf{A} = \dots = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}^{1\times 2} \\ \mathbf{A}_{21} & 2^{k-1}\cdot\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ 1 & -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{array}\right]$$

Η σχέση αυτή ελέγχεται με επαγωγή ότι ισχύει για κάθε $k \geq 2$.

2.3. Πολυωνυμικοί Πίνακες

Έστω το πολυώνυμο $f(x)$, με x, $a_i \in \mathbb{R}$ και $i=1,\dots,n \in \mathbb{N}$, της μορφής:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + a_{n-2}\cdot x^{n-2} + \dots + a_1\cdot x + a_o$$

Αν στο παραπάνω πολυώνυμο αντί της μεταβλητής x θεωρήσουμε οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε το πολυώνυμο $f(x)$ μετατρέπεται σε πολυώνυμο του πίνακα **A** ή σε πολυωνυμικό πίνακα, της μορφής:

$f(\mathbf{A}) = a_n \cdot \mathbf{A}^n + a_{n\text{-}1} \cdot \mathbf{A}^{n\text{-}1} + a_{n\text{-}2} \cdot \mathbf{A}^{n\text{-}2} + \ldots + a_1 \cdot \mathbf{A} + a_o$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ και $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, τότε:

$$f(\mathbf{A}) = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^2 - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 5 & 37 \end{bmatrix}$$

Αν θεωρηθούν τα βαθμωτά πολυώνυμα $f_1(x)$ και $f_2(x)$, για τα οποία ισχύει:

$f_1(x) + f_2(x) = g(x)$
$f_1(x) \cdot f_2(x) = g(x)$
$f(x) = g(x) \cdot p(x) + q(x)$,

Τότε έχουμε αντίστοιχα για τους πολυωνυμικούς πίνακες:

$f_1(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})$
$f_1(\mathbf{A}) \cdot f_2(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})$
$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}) \cdot p(\mathbf{A}) + q(\mathbf{A})$

Η αντιμετάθεση των πινάκων $f_1(\mathbf{A})$ και $f_2(\mathbf{A})$ είναι δυνατή, καθόσον κάθε πίνακας **A** αντιμετατίθεται με τον εαυτό του.

Το γνωστό θεώρημα της Άλγεβρας ότι κάθε πολυώνυμο k βαθμού έχει k ρίζες δεν ισχύει για τους πολυωνυμικούς πίνακες.

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = (\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+2\mathbf{I})$ ισούται με το μηδενικό πίνακα, δηλαδή $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, για $\mathbf{A}=\mathbf{I}$, $\mathbf{A}= -2\mathbf{I}$, αλλά και για κάθε πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ z \in \mathbb{C}$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί το γινόμενο **A·B** των σύνθετων πινάκων, όπου

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Να υπολογισθεί ο πίνακας $\mathbf{A}^2$, με

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

1. Δασκαλόπουλου Δ., *Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα,* Αθήνα.
2. Bronson R., Kosta G. (2009), *Matrix Methods, Apllied Linear Algebra, Elsevier, N.Y.*
3. Halmos P. (1995), *Linear Algebra Problem Book,* Mathematical Association of America, Washington.
4. Horn P., Johnson C. (2013), *Matrix Analysis,* Cambridge, N.Y.
5. Lancaster P., Tismenetsky M. (1985), T*he Theory of Matrices,* Academic Press, London.
6. Lay D. (2012), *Linear Algebra and its Applications,* Addison-Wesley, N.Y.
7. Leon S. (2010), *Linear Algebra with Applications, Pearson, Boston.*
8. Λουκάκη Μ. (2010), *Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών*, τ. Α και Β, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Θεσσαλονίκη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

3.1 Ίχνος πίνακα

Θα γίνει στην ενότητα αυτή αναφορά σε ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις και σε στοιχεία που αφορούν κυρίως τους τετραγωνικούς πίνακες. Ως **ίχνος** (**trace**) *tr*(**A**) ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}^{n\times n}$ ορίζεται το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή:

$$tr(\mathbf{A}) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Για παράδειγμα, το ίχνος του πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & 8 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ισούται με:

$$tr(\mathbf{A}) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & 8 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2 + 4 - 1 = 5$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα είναι συνάρτηση μόνο των διαγώνιων στοιχείων του. Έστω k_1, k_2 $\in \mathbb{R}$ και οι τετραγωνικοί πίνακες $\mathbf{A}^{n\times n}$ και $\mathbf{B}^{n\times n}$. Τότε για τη συνάρτηση του ίχνους ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) $tr(k_1\text{A} + k_2\text{B}) = k_1 \cdot tr(\text{A}) + k_2 \cdot tr(\text{B})$

Πόρισμα: θέτοντας $k_1 = k_2 = 1$ η παραπάνω ιδιότητα γίνεται:

$tr(\text{A} + \text{B}) = tr(\text{A}) + tr(\text{B})$
(β) $tr(\text{A}\cdot\text{B}) = tr(\text{B}\cdot\text{A})$

3.2. Ορίζουσα πινάκων

Για τον ορισμό της ορίζουσας απαιτείται η κατανόηση των εννοιών της **μετάθεσης** (**permutation**), καθώς και της **άρτιας μετάθεσης** (**even permutation**) και της **περιττής μετάθεσης** (**odd permutation**).

Έστω ένα σύνολο $A = \{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots,n\in\mathbb{N}}$. Τότε ονομάζουμε **μετάθεση** P_A ή σ_A οποιαδήποτε αναδιάταξη των στοιχείων του συνόλου A, ώστε το νέο σύνολο $\sigma_A=[\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n]$ που προκύπτει να αντιστοιχεί ένα προς ένα στα στοιχεία του συνόλου A, δηλαδή για κάθε $\alpha_i \in A$ να υπάρχει $\alpha'_j \in P_A$ τέτοιο ώστε $\alpha_i=\alpha'_j$.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια μετάθεση $\sigma_A=[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n]$, των n στοιχείων του A σε $\{1, 2, \dots, i, \dots j, \dots, n\}$ θέσεις. Λέμε ότι τα στοιχεία α_i και α_j αυτής παρουσιάζουν **τήρηση** όταν $\alpha_i<\alpha_j$, ενώ ότι παρουσιάζουν **παράβαση** όταν $\alpha_i>\alpha_j$. Δηλαδή δύο στοιχεία σε μια μετάθεση παρουσιάζουν τήρηση όταν το μεγαλύτερο σε τιμή έπεται του μικρότερου στη σειρά της μετάθεσης, ενώ παράβαση όταν δεν ισχύει κάτι τέτοιο.

Για παράδειγμα, στη μετάθεση $\sigma_A=[3,1,5,4,2]$ του συνόλου [1,2,3,4,5], τα στοιχεία 3, 4 παρουσιάζουν τήρηση, ενώ τα στοιχεία 4, 2 παρουσιάζουν παράβαση.

Μια μετάθεση ονομάζεται **άρτια** όταν το συνολικό πλήθος των παραβάσεων που παρουσιάζει είναι άρτιο, ενώ **περιττή** όταν το πλήθος των παραβάσεων που παρουσιάζει είναι περιττό. Για παράδειγμα η μετάθεση [2,3,1] είναι άρτια, γιατί παρουσιάζει 2 παραβάσεις ([2,1] και [3,1]), ενώ η μετάθεση [3,2,1] είναι περιττή γιατί παρουσιάζει 3 παραβάσεις ([3,2], [3,1] και [2,1]).

Έστω ένας τεραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}^{n\times n}=\{\alpha_{ij}\}$, έστω το σύνολο $N=\{1,2,\dots,n\}$, με n τη διάσταση του πίνακα **A**, και έστω $\sigma_N=\{\sigma_k, k=1,\dots,n!\}$ το σύνολο των δυνατών μεταθέσεων $\sigma_k=[\sigma_k(1), \sigma_k(2), \dots, \sigma_k(n)]$ που προκύπτουν από το N, όπου $\sigma_k(i)$ συμβολίζει το στοιχείο της σ_k μετάθεσης που βρίσκεται στην (i) θέση ($i=1,\dots,n$). Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως σ_1 τη μετάθεση σ_1=[1,2,…,n], τότε το στοιχείο $\sigma_1(2)$ είναι ο αριθμός 2, δηλαδή $\sigma_1(2)$ =2.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$\operatorname{sgn}\left(\sigma_k\right)=\begin{cases}-1, & \text{αν η μετάθεση } \sigma_k \text{ είναι περιττή}\\ \\ 1, & \text{αν η μετάθεση } \sigma_k \text{ είναι άρτια}\end{cases},$$

η οποία ονομάζεται **πρόσημο** της μετάθεσης σ_k.

Ορισμός: Με βάση τα παραπάνω, μπορεί να οριστεί η ορίζουσα (determinant) $\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|$ ενός πίνακα **A**={α$_{ij}$}, ως εξής:

$$\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=\sum_{k=1}^{n!}\operatorname{sgn}(\sigma_k)\cdot\left(a_{1,\sigma_k(1)}\cdot a_{2,\sigma_k(2)}\cdots a_{n,\sigma_k(1)}\right),$$

όπου το $a_{i,\sigma_k(j)}$ αναφέρεται στο στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στην i γραμμή (i=1,…,n) και στη $\sigma_k(j)$ στήλη, δηλαδή στη στήλη που αντιστοιχεί στο στοιχείο της σ$_k$ μετάθεσης που βρίσκεται στην (j) θέση.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ έχει διάσταση n=2. Οι δυνατές μεταθέσεις που προκύπτουν από το σύνολο N_2={1,2}, μαζί με το αντίστοιχο πρόσημό τους, είναι οι εξής:

Μετάθεση	θέση 1	θέση 2	Είδος διάταξης	sgn(σ_k)
σ_1	1	2	τήρηση/άρτια	+
σ_2	2	1	παράβαση/περιττή	-

Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα **A**2 υπολογίζεται ως εξής:

$$\det(\mathbf{A}_2)=\left|\mathbf{A}_2\right|=\sum_{k=1}^{2}\operatorname{sgn}(\sigma_k)\cdot\left(a_{1,\sigma_k(1)}\cdot a_{2,\sigma_k(2)}\right)$$

$=\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}-\alpha_{21}\cdot\alpha_{12}$

Επίσης, η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ υπολογίζεται ως εξής:

Η διάσταση του πίνακα είναι *n*=3. Οι δυνατές μεταθέσεις που προκύπτουν από το σύνολο *N*={1,2,3} είναι (*n*=3)!=1·2·3=6. Έχουμε:

Μετάθεση	θέση 1	θέση 2	θέση 3	Είδος μετάθεσης	sgn(σ_k)
σ_1	1	2	3	άρτια	+
σ_2	1	3	2	περιττή	–
σ_3	2	1	3	περιττή	–
σ_4	2	3	1	άρτια	+
σ_5	3	1	2	περιττή	–
σ_6	3	2	1	άρτια	+

Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα **A**$_3$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\det(\mathbf{A}_3) = |\mathbf{A}_3| = \sum_{k=1}^{6} \operatorname{sgn}(\sigma_k) \cdot \left(a_{1,\sigma_k(1)} \cdot a_{2,\sigma_k(2)} \cdot a_{3,\sigma_k(3)} \right) =$$

$= \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} + \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31}$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$= \alpha_{11}\cdot(\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{23}\cdot\alpha_{32}) - \alpha_{12}\cdot(\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{23}\cdot\alpha_{31}) + \alpha_{13}\cdot(\alpha_{21}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{22}\cdot\alpha_{31})$

Όμως ισχύει:

$\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{23}\cdot\alpha_{32})$, $\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = (\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{23}\cdot\alpha_{31})$,

$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = (\alpha_{21}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{22}\cdot\alpha_{31})$

Οπότε η ορίζουσα $\det(\mathbf{A}_3)$ γράφεται:

$$\det(\mathbf{A}_3) = \alpha_{11}\cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται **ανάπτυγμα** (expansion) της ορίζουσας $\det(\mathbf{A}_3)$ κατά την 1η σειρά. Οι τρεις επιμέρους ορίζουσες $\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ και $\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$ ονομάζονται **ελάσσονες ορίζουσες** (minor determinants) M_{ij} των στοιχείων α_{11}, α_{12} και α_{13} αντίστοιχα. Οι ελάσσονες ορίζουσες σχηματίζονται με τη απαλοιφή της γραμμής και της στήλης που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο α_{ij}. Στην περίπτωση του αναπτύγματος της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής (α_{11}, α_{12} και α_{13}) έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Η 3×3 ορίζουσα $\det(\mathbf{A}_3)$ μπορεί να αναπτυχθεί κατά οποιαδήποτε άλλη σειρά ή στήλη. Για παράδειγμα, τα αναπτύγματα της 3×3 ορίζουσας κατά την 3η σειρά και κατά τη 2η στήλη είναι αντίστοιχα τα ακόλουθα:

$$\underset{(3j-\text{ανάπτυγμα})}{|\mathbf{A}_3|} = \alpha_{31} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} - \alpha_{32} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + \alpha_{32} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{22} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\underset{(i2-\text{ανάπτυγμα})}{|\mathbf{A}_3|} = -\alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{32} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Στα παραπάνω αναπτύγματα ο όρος α_{ij} λαμβάνει θετικό ή αρνητικό πρόσημο, ανάλογα με το αν το άθροισμα των δεικτών $i+j$ είναι περιττός ή άρτιος αριθμός, αντίστοιχα.

Γενικά η $(n-1)\times(n-1)$ ελάσσονα ορίζουσα M_{ij} σχηματίζεται αν απομακρύνουμε την i σειρά και την j στήλη. Η προσημασμένη ελάσσονα ορίζουσα είναι η:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, \mathrm{M}_{ij}$$

και ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **συμπαράγουσα** (cofactor) των στοιχείων α_{ij}. Με βάση τα αλγεβρικά συμπληρώματα, το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός πίνακα **A** κατά μία οποιαδήποτε σειρά της, έστω την *k*, ορίζεται ως εξής:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot C_{kj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot M_{kj}$$

Ομοίως, το ανάπτυγμα κατά μια οποιαδήποτε στήλη *r* θα ισούται με:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{\iota=1}^{n} a_{rj} \cdot C_{rj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} \cdot a_{rj} \cdot M_{rj}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι κάθε ορίζουσα τάξης *n* μπορεί να υπολογιστεί εφόσον είναι εφικτός ο υπολογισμός κάθε ελάσσονος ορίζουσας M_{ij} τάξης *n*-1. Αντιστοίχως, κάθε ορίζουσα τάξης *n*-1 μπορεί να υπολογιστεί όταν είναι εφικτός ο υπολογισμός κάθε ελάσσονος ορίζουσας M_{ij} τάξης *n*-2, κόκ, με αποτέλεσμα ο υπολογισμός μιας ορίζουσας τάξης *n* να ανάγεται στον υπολογισμό οριζουσών 2^{ας} τάξης, ο οποίος πραγματοποιείται ως εξής:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Αν αναπτύξουμε τον πίνακα **A** κατά την πρώτη σειρά θα έχουμε:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \mathrm{M}_{11} = +\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \mathrm{M}_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

και $C_{13} = (-1)^{1+3} \mathrm{M}_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$.

Επομένως η ορίζουσα του πίνακα **A** θα ισούται με:

$$\det\left(\mathbf{A}\right)=\left|\mathbf{A}\right|=0\cdot\begin{vmatrix}-6 & 9\\ 6 & 1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3 & 9\\ 2 & 1\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}3 & -6\\ 2 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=...=0+15+150=165$$

Σχόλιο: Είναι προφανές ότι ο υπολογισμός μιας ορίζουσας n τάξης συνιστά μία επίπονη διαδικασία, καθόσον απαιτείται ο υπολογισμός *n*! όρων ο καθένας από τους οποίους αποτελεί γινόμενο n παραγόντων. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα διάστασης *n*=50, προϋποθέτει την άθροιση 50!=50·49·…·1=3.4141·1064 όρων ο καθένας εκ των οποίων αποτελεί γινόμενο 50 παραγόντων.

Βέβαια, η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή έχει καταστήσει την παραπάνω διαδικασία υπόθεση ρουτίνας, η οποία πραγματοποιείται σε αμελητέο υπολογιστικό χρόνο.

Ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης *n* ονομάζεται **ομαλός** ή **μη ιδιάζων** (non-singular) όταν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός (det(**A**)≠0), ενώ στην αντίθετη περίπτωση (det(**A**)=0) ονομάζεται **ανώμαλος** ή **ιδιάζων** (singular).

Ένας μνημονικός κανόνας για τον υπολογισμό μιας 3×3 ορίζουσας είναι ο «κανόνας του Sarrus», σύμφωνα με τον οποίον οι όροι του αναπτύγματός της σχηματίζονται ως γινόμενα των διαγώνιων (προς κάθε κατεύθυνση) στοιχείων που προκύπτουν από την παράθεση των δύο πρώτων στηλών στο τέλος του πίνακα A, δηλαδή:

$$\begin{array}{ccccc}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{array}$$

3.3. Ιδιότητες Οριζουσών

Οι βασικότερες από τις ιδιότητες των οριζουσών είναι οι εξής:

***1η ιδιότητα*:**

Η αντιμετάθεση δύο σειρών ($\alpha_{i=a,j}\leftrightarrow\alpha_{i=b,j}$, *j*=1,…,*n*) ή δύο στηλών στον τετραγωνικό πίνακα **A** αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας.

Παράδειγμα

Αν $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, τότε η αντιμετάθεση των δύο στηλών του **A** αλλάζει το πρόσημο της αρχικής ορίζουσας. Θα έχουμε

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}_{1j\leftrightarrow 2j}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = 2$$

***2^η ιδιότητα*:**

Αν μία γραμμή ή μια στήλη ενός πίνακα **A** πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό $k \in \mathbb{R}$, τότε η αντίστοιχη ορίζουσα ισούται με $k|\mathbf{A}|$.

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 18 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\cdot 3 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & 13 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3\cdot 3 & 5 \\ 0 & -3\cdot 2 & 13 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

***3^η ιδιότητα*:**

Αν δύο ή περισσότερες στήλες σε έναν πίνακα **A** είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή όταν η μία στήλη είναι πολλαπλάσια της άλλης (δηλ. ένα προς ένα τα στοιχεία της μιας προς τα στοιχεία της άλλης δίνουν πηλίκο τον ίδιο αριθμό) τότε η ορίζουσα είναι ιδιάζουσα (det(**A**)=0).

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 6 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 0 & -14 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & -14 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot\left(-0\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-14)\cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 13\cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 3\cdot\big(0\cdot 0 + (-14)\cdot 0 - 13\cdot 0\big) = 0$$

4^η^ ιδιότητα:

Αν κάθε στοιχείο ενός πίνακα τάξης *n* πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό *k* $\in \mathbb{R}$, τότε η αντίστοιχη ορίζουσα θα ισούται με $k^n|\mathbf{A}|$, δηλαδή $|k\cdot\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$. Όταν *k*=-1, τότε θα ισχύει:

$$|-\mathbf{A}| = (-1)^n|\mathbf{A}| = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & \text{όταν } n \text{ άρτιος} \\ -|\mathbf{A}|, & \text{όταν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 12 & -3 \\ 6 & 15 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & -3\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 4 & -3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & -3\cdot 3 \end{vmatrix} = 3^3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

5^η^ ιδιότητα:

Αν ένας πίνακας **A** έχει όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης του ίσα με μηδέν, τότε η ορίζουσά του ισούται με το μηδέν (det(**A**)=0).

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0\cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

6η ιδιότητα:

Η ορίζουσα ενός διαγώνιου πίνακα **A**=diag(α_{11}, α_{11},…, α_{nn}) ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$
.

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4 \cdot 2 - 0 \cdot 0) =$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

7η ιδιότητα:

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα **A** ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$
.

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (4 \cdot 2 - 1 \cdot 0) - 0 + 0 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

8η ιδιότητα:

Η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων **A** και **B** ισούται με το γινόμενο των οριζουσών τους, δηλαδή det(**A**·**B**)= det(**A**) · det(**B**).

Παράδειγμα

Έστω Α και Β πίνακες με

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

Τότε η ορίζουσα του γινομένου των πινάκων ισούται με:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+1\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot0\\ 1\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot1+3\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\det\left(\begin{bmatrix}4 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}\right)=4\cdot1-7\cdot2=-10$$

Οι επιμέρους ορίζουσες ισούνται με:

$$\det(\mathbf{A})=\det\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)=2\cdot3-1\cdot1=5$$

$$\det(\mathbf{B})=\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)=1\cdot0-2\cdot1=-2$$

Ισχύει det(**A**·**B**)= -10 = det(**A**) · det(**B**) = 5 · (-2)

9^{η} ιδιότητα

Αν **A** και **B** είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες, τότε η ορίζουσα του σύνθετου πίνακα $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & 0\\ 0 & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ ισούται με το γινόμενο των οριζουσών det(**A**) · det(**B**), δηλαδή $\begin{vmatrix}\mathbf{A} & 0\\ 0 & \mathbf{B}\end{vmatrix}$= det(**A**) · det(**B**).

Παράδειγμα

Αν

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

τότε

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-2 \cdot 3) - (-2) = -10$$

Όμως det(**A**)=5 και det(**B**)=-2

3.4 Αντίστροφος πίνακας

Αν για έναν τετραγωνικό πίνακα $\mathbf{A}^{n\times n}$ υπάρχει ένας πίνακας $\mathbf{B}^{n\times n}$, ο οποίος ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}= \mathbf{I}_n$ και $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}_n$

τότε ο πίνακας **B** ονομάζεται **αντίστροφος** (inverse) του A και συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$. Ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει αντίστροφο ονομάζεται **μη ιδιάζων** (**non singular**) ή **αντιστρέψιμος** πίνακας, ενώ ένας πίνακας που δεν έχει αντίστροφο ονομάζεται **ιδιάζων** (singular).

Σχόλιο: Κατά τους υπολογισμούς εύρεσης του αντιστρόφου ενός πίνακα **A**, συνίσταται η επαλήθευση της σχέσης $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}= \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}= \mathbf{I}_n$. Πρακτικά ο υπολογισμός ενός εκ των δύο σχέσεων $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}= \mathbf{I}_n$ ή $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}= \mathbf{I}_n$ αρκεί , καθόσον η αν ισχύει η μία συνεπάγεται ότι ισχύει και η άλλη.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι ο πίνακας **B** είναι αντιστρέψιμος του **A**, όταν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Έχουμε:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&-2\\-2&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{2}{4}&-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}&-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\\\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}&\frac{2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}&\frac{6}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Όταν ο πίνακας **A** είναι διαγώνιος, δηλαδή **A**=diag(α_{11}, α_{11},…, α_{nn}), τότε ο αντίστροφός του είναι ένας επίσης διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τους αντιστρόφους των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα **A**. Δηλαδή $\mathbf{A}^{-1}$=diag(1/α_{11}, 1/α_{11},…, 1/α_{nn}),

Παράδειγμα

Για τον πίνακα $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ ο αντίστροφός του είναι ο $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

Λύση

Πράγματι,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot 1/2&0&0\\0&3\cdot 1/3&0\\0&0&-1\cdot(-1)\end{bmatrix}=\mathbf{I}_n$$

Ακολούθως αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού του αντιστρόφου A^{-1} ενός πίνακα **A** με τη χρήση των οριζουσών. Έστω **A** ένας μη ιδιάζων πίνακας. Δημιουργούμε τον **συμπληρωματικό** ή **προσαρτημένο** πίνακα (adjoint matrix) του A, ο οποίος συμβολίζεται με *adj*(**A**), αν αντικαταστήσουμε τα στοιχεία a_{ij} του πίνακα **A** με τα αλγεβρικά τους συμπληρώματα c_{ij} και αντιστρέψουμε τον πίνακα που προκύπτει, δηλαδή:

$$adj(\mathbf{A})=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{21}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{21}&\cdots&c_{n1}\\c_{12}&c_{22}&\cdots&c_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{1n}&c_{2n}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα, ο συμπληρωματικός πίνακας *adj*(**A**) του πίνακα $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&1\\0&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ είναι ο ακόλουθος:

$$adj(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

Ο συμπληρωματικός πίνακας έχει την ιδιότητα ο πολλαπλασιασμός του ή ο μετα-πολλαπλασιασμός του με τον πίνακα **A** να δίνει τον πίνακα $|\mathbf{A}|\cdot\mathbf{I}_n$, δηλαδή:

$$\mathbf{A}\cdot adj(\mathbf{A}) = adj(\mathbf{A})\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix}|\mathbf{A}| & 0 & 0 & 0\\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}|\end{bmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{I}_n$$

Αξιοποιώντας την ιδιότητα αυτή υπολογίζουμε τον αντίστροφο $\mathbf{A}^{-1}$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}adj(\mathbf{A})=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}adj(\mathbf{A})$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι ο αντίστροφος πίνακας υπάρχει μόνο όταν η ορίζουσα του πίνακα είναι διαφορετική του μηδενός, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A})\neq 0 \Leftrightarrow \exists\mathbf{A}^{-1}$$

Για τον ομαλό πίνακα $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$ θα έχουμε:

$$|\mathbf{A}|=\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}-\alpha_{12}\cdot\alpha_{21},\quad c_{11}=\alpha_{22},\quad c_{12}=-\alpha_{21},$$

$$c_{21}=-\alpha_{12},\quad c_{21}=-\alpha_{11}$$

και:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}-\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του επόμενου πίνακα:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Λύση

Έχουμε:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= -1-2\cdot(-3)-1=4$$

$$c_{11} = \mathbf{M}_{11} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = -1 \qquad c_{12} = -\mathbf{M}_{12} = -\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 3$$

$$c_{13} = \mathbf{M}_{13} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix} = 1 \quad c_{21} = -\mathbf{M}_{21} = -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = -1$$

$$c_{22} = \mathbf{M}_{22} = \begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix} = -1 \qquad c_{23} = -\mathbf{M}_{23} = -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix} = -3$$

$$c_{31} = \mathbf{M}_{31} = \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -3 \qquad c_{32} = -\mathbf{M}_{32} = -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 1$$

$$c_{33} = \mathbf{M}_{33} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -1$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & -3\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -3\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

Οπότε ο αντίστροφος ισούται με:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & -3/4 \\ 3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Οι ***βασικότερες ιδιότητες*** του αντίστροφου πίνακα είναι οι ακόλουθες:

1^η *ιδιότητα*:

Ο αντίστροφος $\mathbf{A}^{-1}$ ενός πίνακα **A** είναι μοναδικός

Απόδειξη

Έστω ότι η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει και ότι ο πίνακας **A** έχει δύο αντίστροφους, τον $\mathbf{A}^{-1}$ και τον $\mathbf{A}^{*}$. Σύμφωνα με τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα θα ισχύει:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ και $A \cdot A^{*} = A^{*} \cdot A = I_n$

Πολλαπλασιάζουμε με την πρώτη σχέση και έχουμε:

$A^{*} \cdot A \cdot A^{-1} = (A^{*} \cdot A) \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = A^{*} \cdot I_n \Leftrightarrow A^{-1} = A^{*}$

Επομένως ο αντίστροφος του πίνακα **A** είναι μοναδικός $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*}$.

2^η *ιδιότητα*

Αν οι πίνακες **A** και **B** είναι αντιστρέψιμοι και της ίδιας τάξης, τότε ο πίνακας **A·B** είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$

Απόδειξη

$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot A\cdot B = B^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot A)\cdot B = B^{-1}\cdot(I_n)\cdot B = B^{-1}\cdot B = I_n$.
$A\cdot B\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) = A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot(I_n)\cdot A = A^{-1}\cdot A = I_n$.

3^η *ιδιότητα*

Έστω **A** και **B** αντιστρέψιμοι πίνακες του ίδιου μεγέθους. Τότε ισχύει: $tr(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = tr(\mathbf{B})$

Απόδειξη

Για τη συνάρτηση του ίχνους πίνακα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή:

$tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$

Οπότε έχουμε:

$tr(A^{-1}\cdot B\cdot A) = tr[A^{-1}\cdot(B\cdot A)] = tr[(B\cdot A)\cdot A^{-1}] = tr[B\cdot(A\cdot A^{-1})] = tr[B\cdot(I_n)] = tr[B] = tr(B)$

Άσκηση

Δίνονται οι πίνακες

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix},$$

Ποιες από τις παραστάσεις A·B, B·A, (A+B)·C, B·C και B^2 μπορούν να υπολογιστούν;

Λύση

- Το γινόμενο **A·B** υπολογίζεται, καθόσον ο πίνακας **A** έχει μέγεθος 2×2 και ο **B** 2×3, με αποτέλεσμα να ορίζεται ο πολλαπλασιασμός.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot 1+x\cdot 0 & 2\cdot 0+x\cdot 1 & -2\cdot 2+x\cdot 3\\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1 & -2\cdot 0+1\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & x & -4+3x\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο **B·A** δεν υπολογίζεται, επειδή ο αριθμός των στηλών του **B** δεν είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του **A**.
- Ο πίνακας **A**+**B** δεν υπολογίζεται γιατί οι δύο πίνακες δεν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών.
- Για τον ίδιο με τον προηγούμενο λόγο δεν ορίζεται ούτε η παράσταση (**A**+**B**)·**C**.
- Το γινόμενο **B**·**C** υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot1-2\cdot3\\ 0\cdot1+1\cdot1+3\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\10\end{bmatrix}$$

- Ο πίνακας $\mathbf{B}^2$ δεν υπολογίζεται, επειδή ο **B** δεν είναι τετραγωνικός

Άσκηση

Δίνονται οι πίνακες

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 2 & 3\\ -1 & 14\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$ και

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}10 & -2 & 5\\ -1 & 9 & 0\end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν, εφόσον ορίζονται, οι παραστάσεις **A**+**B**, **A**+**D**, **C**·**A**, $\mathbf{D}^T\cdot\mathbf{C}^T$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}$.

Λύση

- Το άθροισμα **A**+**B** δεν υπολογίζεται, επειδή ο πίνακας **A** είναι διαφορετικού μεγέθους από το **B**.
- Οι πίνακες **A** και **D** έχουν το ίδιο μέγεθος, άρα υπολογίζεται το άθροισμά τους ως εξής:

$$\mathbf{A}+\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & -2 & 5\\ -1 & 9 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+10 & 0-2 & 3+5\\ 1-1 & -2+9 & 3+0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}11 & -2 & 8\\ 0 & 7 & 3\end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο **C**·**A** υπολογίζεται, επειδή ο αριθμός των γραμμών του **C** ισούται με τον αριθμό των στηλών του **A**. Έχουμε

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}8\cdot1+1\cdot1 & 8\cdot0+1\cdot(-2) & 8\cdot3+1\cdot3\\ -3\cdot1+2\cdot1 & -3\cdot0+2\cdot(-2) & -3\cdot3+2\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -2 & 27\\ -1 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

- Η παράσταση $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ υπολογίζεται, επειδή ο αριθμός των γραμμών του $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ ισούται με τον αριθμό των στηλών του $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$.

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}10 & -1\\ -2 & 9\\ 5 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\cdot8-1\cdot1 & -3\cdot10-1\cdot2\\ -2\cdot8+9\cdot1 & -2\cdot(-3)+9\cdot2\\ 5\cdot8+0\cdot1 & 5\cdot(-3)+0\cdot2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}79 & -32\\ -7 & 24\\ 40 & -15\end{bmatrix}$$

- Η παράσταση $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}$ δεν υπολογίζεται επειδή δεν ορίζεται το γινόμενο $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^{-1}$ (ο πίνακας **A** είναι μεγέθους 2×3, ενώ $\mathbf{C}^{-1}$ ο 2×2)

Άσκηση

Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}a & x & 2a-x\\ b & y & 2b-y\\ c & z & 2c-z\end{vmatrix}.$$

Λύση

Έχουμε:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & x & 2a-x \\ b & y & 2b-y \\ c & z & 2c-z \end{vmatrix} \overset{\text{στήλη 3} \to \text{στήλη 3} + \text{στήλη 2}}{=} \begin{vmatrix} a & x & 2a-x+x \\ b & y & 2b-y+y \\ c & z & 2c-z+z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & x & 2a \\ b & y & 2b \\ c & z & 2c \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

1. Δασκαλόπουλου Δ., *Εφαρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα,* Αθήνα.
2. Bronson R., Kosta G. (2009), *Matrix Methods, Apllied Linear Algebra, Elsevier, N.Y.*
3. Halmos P. (1995), *Linear Algebra Problem Book,* Mathematical Association of America, Washington.
4. Horn P., Johnson C. (2013), *Matrix Analysis,* Cambridge, N.Y.
5. Lancaster P., Tismenetsky M. (1985), T*he Theory of Matrices,* Academic Press, London.
6. Lay D. (2012), *Linear Algebra and its Applications,* Addison-Wesley, N.Y.
7. Leon S. (2010), *Linear Algebra with Applications, Pearson, Boston.*
8. Λουκάκη Μ. (2010), *Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών*, τ. Α και Β, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, Θεσσαλονίκη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

Ο ΧΩΡΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΣΤΟΙΧΕΊΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

4.1. Γενικά

Ο **χώρος** (space) μέσα στον οποίο βρίσκεται και αναπτύσσεται ένα φυσικό, υλικό ή άυλο σύστημα διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό των ιδιοτήτων και στη λειτουργία του συστήματος αυτού. Για παράδειγμα, ένα σύστημα που βρίσκεται στο κενό λειτουργεί υπό διαφορετικούς νόμους σε σχέση με ένα αντίστοιχο σύστημα που βρίσκεται σε ένα βαρυτικό ή ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ειδικότερα, ένα σώμα που κινείται στην επιφάνεια της γης υποβάλλεται σε διαφορετικούς περιορισμούς σε σχέση με το αν κινούταν στην επιφάνεια ή στο βυθό της θάλασσας ή στον αέρα. Περαιτέρω, στην καθημερινή μας ζωή περιγράφουμε κάθε φορά το χώρο χρησιμοποιώντας κάποιες από τις ιδιότητές του, πχ. *αστικός* χώρος, χώρος *πρασίνου*, χώρος *στάθμευσης*, αλλά και *ιδιόκτητος* χώρος ή χώρος *διαπραγματεύσεων*.

Όπως γίνεται αντιληπτό, ο χώρος αποτελεί βασικό παράγοντα στη μελέτη των συστημάτων και των φαινομένων που διαδραματίζονται σε αυτά. Όμως τι εκφράζει στην ουσία ένας χώρος; Ετυμολογικά η λέξη χώρος έχει ρίζα τη λέξη *χωρέω – χωρώ* που σημαίνει μπορώ να περιλάβω, να βρω θέση ή να συμπεριληφθώ κάπου. Προφανώς, η έννοια του χώρου είναι πολύ γενική και προσεγγίζεται τις περισσότερες φορές διαισθητικά, με τον προσδιορισμό του περιβάλλοντος που περιέχει ένα σύστημα ή έναν παρατηρητή, αλλά και με την περιγραφή των ιδιοτήτων που το περιγράφουν.

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζεται η έννοια του χώρου όπως ορίζεται και χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά, η οποία παρέχει τη δυνατότητα προσδιορισμού όλων των διαισθητικών προσεγγίσεων του χώρου υπό ένα αυστηρό πλαίσιο.

4.2. Ο χώρος στα Μαθηματικά

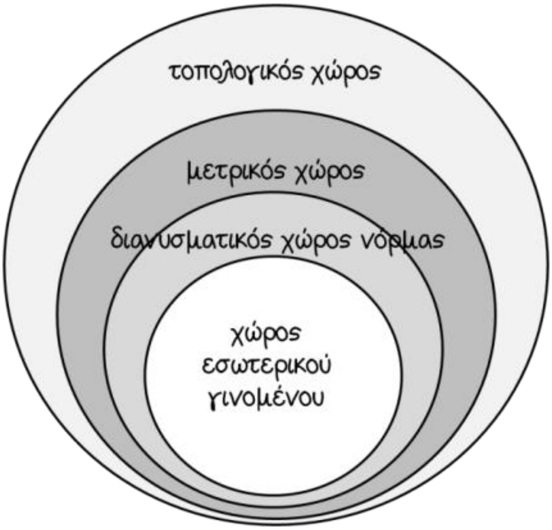
Η έννοια του χώρου στα Μαθηματικά (*μαθηματικός χώρος - mathematical space*) περιέχει γενικά **τρία στοιχεία**:

- Ένα **σύνολο *X***, το οποίο περιλαμβάνει τα στοιχεία του χώρου.
- Μια **τοπολογία *T_X***, ή οποία αποτελεί μια οικογένεια παράγωγων υποσυνόλων (**κλάση**) $\aleph$ του *X*, όπου $T_{\mathrm{X}} = \aleph = \left\{ X_i \in X \middle| \varnothing \subseteq X_i \subseteq X \right\}$. Η T_X διασφαλίζει τη δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων στο *X* αλλά και προσδιορίζει το είδος τους
- Μία **μετρική συνάρτηση $\boldsymbol{\mu_X}$**, με $\mu_{\mathrm{X}} : X \to \aleph$, η οποία επιτρέπει τη μέτρηση αποστάσεων εντός του χώρου.

Με βάση τα παραπάνω, ο χώρος συμβολίζεται με τη διατεταγμένη τριάδα $\left\langle X, T_{\mathrm{X}}, \mu_{\mathrm{X}} \right\rangle$.

Στις επόμενες παραγράφους περιγράφονται τα επιμέρους συστατικά στοιχεία του χώρου.

Η ιεράρχηση των μαθηματικών χώρων εικονίζεται στο σχήμα 4.1, σύμφωνα με την οποία ο τοπολογικός χώρος $\left\langle X, \aleph \right\rangle$ αποτελεί το πιο ευρύ εννοιολογικό πλαίσιο, εντός του οποίου ορίζονται με επιπλέον περιορισμούς, ειδικότεροι χώροι, όπως είναι ο *μετρικός χώρος* $\left\langle X, T_X, \mu_{xy} \right\rangle$, ο *διανυσματικός χώρος* με *νόρμα* (*norm vector space*) $\left\langle X, \aleph, \mu_{xy} = \left\| x - y \right\| \right\rangle$ και ο *χώρος εσωτερικού γινομένου* (*dot product space*) $\left\langle X, \aleph, \mu_{xy} = \left\langle x, y \right\rangle \right\rangle$.



Σχήμα 4.1. Η ιεράρχηση των μαθηματικών χώρων

(πηγή: Wikimedia commons, author: Geoff Richards).

4.3. Σύνολο

Σύνολο ονομάζεται μία συλλογή αντικειμένων, τα οποία καλούνται **στοιχεία** του συνόλου. Για το συμβολισμό των συνόλων χρησιμοποιούνται συνήθως κεφαλαία γράμματα A, B, …, X, …, ενώ για τα στοιχεία του μικρά α,β,γ, …, x,y,… ή με δείκτες $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,… . Βέβαια η παραπάνω σύμβαση δεν είναι απόλυτη και μπορεί να ορίζεται ανά περίπτωση διαφορετικά.

Τα στοιχεία ενός συνόλου τοποθετούνται συνήθως μέσα σε μία αγκύλη {·}. Δηλαδή ένα σύνολο A με στοιχεία τα α_1, α_2, α_3 γράφεται ως $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Για σύνολα με πολλά στοιχεία γράφουμε $A=\{\alpha_i$, με $i=1,2,\ldots,n\}$. Όταν ένα στοιχείο x ανήκει στο σύνολο X, τότε γράφουμε $x \in X$, ενώ διαφορετικά γράφουμε $x \notin X$.

Ένα σύνολο μπορεί να προσδιοριστεί και ως **γεωμετρικός τόπος** στοιχείων, χωρίς την αναγραφή όλων των στοιχείων του, δηλαδή ως τα στοιχεία που ικανοποιούν μία ιδιότητα p. Η ιδιότητα γράφεται έπειτα από μία κάθετη γραμμή ως εξής:

$$\left\{\text{περιγραφή στοιχείων του } X \,\middle|\, \text{ιδιότητα } p\right\},$$

δηλαδή $X=\left\{x \in X \,\middle|\, \text{ισχύει η } p\right\}$.

Για παράδειγμα, το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας r=5 γράφεται ως $X=\{x,y\in\mathbb{R}|x^2+y^2=25\}$. Στην περίπτωση αυτή το πρώτο σκέλος της παράστασης του συνόλου $\{x,y\in\mathbb{R}|\cdots\cdots\}$ εκφράζει ότι τα στοιχεία x και y του X ανήκουν καθένα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ το δεύτερο σκέλος $\{\cdots\cdots|x^2+y^2=25\}$ της παράστασης εκφράζει ότι τα στοιχεία x και y του X ικανοποιούν την ιδιότητα $x^2+y^2=25$.

Ο αριθμός των στοιχείων ενός συνόλου ονομάζεται **πλήθος**. Όταν τα στοιχεία ενός συνόλου X μπορούν να καταμετρηθούν, δηλαδή $1^{ο}$, $2^{ο}$,… $n^{οστό}$ στοιχείο, ανεξάρτητα με το πλήθος τους, τότε το σύνολο ονομάζεται **αριθμήσιμο**. Σε διαφορετική περίπτωση ονομάζεται **υπεραριθμήσιμο** ή **διάστημα**. Όταν τα στοιχεία ενός συνόλου είναι τοποθετημένα σε μια σειρά, με κριτήριο μία ιδιότητα p, τότε το σύνολο ονομάζεται **διατεταγμένο**. Τα *στοιχεία ενός διαστήματος είναι διατεταγμένα*, με κριτήριο την απόστασή τους από ένα δεδομένο στοιχείο αναφοράς που ονομάζεται **κέντρο**.

Όταν τα στοιχεία ενός συνόλου είναι άπειρα, τότε το σύνολο ονομάζεται **άπειρο**, ενώ σε διαφορετική περίπτωση ονομάζεται **πεπερασμένο**. Το σύνολο X χωρίς κανένα στοιχείο, δηλαδή $X=\{\cdot\}$, ονομάζεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\varnothing$. Το σύμβολο της ισότητας μεταξύ δύο συνόλων περιέχει τρεις γραμμές ≡, χωρίς η σύμβαση αυτή να είναι απόλυτη. Το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα που μπορούν να προκύψουν από το X, συμπεριλαμβανομένου του κενού $\varnothing$, ονομάζεται **δυναμοσύνολο** και συμβολίζεται με $\Im(X)$. Γράφουμε $\Im(X)=\{X_i\in X|\varnothing\subseteq X_i\subseteq X\}$.

Δύο αριθμήσιμα σύνολα A=\{α_i\} και B=\{β_i\} είναι **ίσα** όταν έχουν **ένα προς ένα** τα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή $\alpha_i=\beta_i$, για κάθε i. Κάθε άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots, \alpha_n,\ldots\}\equiv\{\alpha_i$, με $i\in\mathbb{N}\}$, έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο A ονομάζεται ισοδύναμο του $\mathbb{N}$.

Ένα σύνολο-διάστημα συμβολίζεται με τη χρήση κάθετων αγκυλών [,] και παρενθέσεων (,) ως εξής: Το σύνολο $X=[x_l,x_u]$ περιέχει όλα τα στοιχεία που παρεμβάλλονται μεταξύ των x_l και x_u, συμπεριλαμβανομένου των άκρων x_l και x_u. Όταν κάποιο άκρο δεν περιέχεται στο X χρησιμοποιούμε την παρένθεση. Δηλαδή στο σύνολο $X=(x_l,x_u]$ δεν περιέχεται το κάτω άκρο x_l. Ένα σύνολο-διάστημα $X=[x_l,x_u]$ ονομάζονται **κυρτό** όταν για οποιοδήποτε ζεύγος στοιχείων $x,y\in[x_l,x_u]$ και να επιλέξουμε το διάστημα $[x,y]$ βρίσκεται επίσης εντός του X, δηλαδή $[x,y]\in[x_l,x_u]$. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **μη κυρτό**. Επομένως, δύο σύνολα-διαστήματα $A=[\alpha_l,\alpha_u]$ και $B=[\beta_l,\beta_u]$ **είναι ίσα** όταν είναι κυρτά και όταν τα άκρα τους είναι ένα προς ένα ίσα και βρίσκονται στην ίδια κατάσταση (περιέχονται ή δεν περιέχονται αντίστοιχα) ως προς το σύνολο που ανήκουν. Για παράδειγμα, τα σύνολα $A=[1,5]$ είναι $B=[1^2,\left|\sqrt{25}\right|]$ είναι ίσα, ενώ τα σύνολα $A=[1,5]$ και $B=[1,5)$ δεν είναι ίσα.

Ένα σύνολο Γ όταν περιέχει **όλα** τα στοιχεία των συνόλων A και B ονομάζεται **ένωση** και συμβολίζεται με $\Gamma=A\bigcup B$, ενώ όταν περιέχει **μόνο τα κοινά** τους σημεία ονομάζεται **τομή** και συμβολίζεται $\Gamma=A\bigcap B$.

Παράδειγμα

Το σύνολο $X=[1,5]\bigcup[6,7]\subset\mathbb{R}$ δεν είναι κυρτό, ενώ το σύνολο $X'=[1,5]\bigcup[6,7]\subset\mathbb{N}$ είναι.

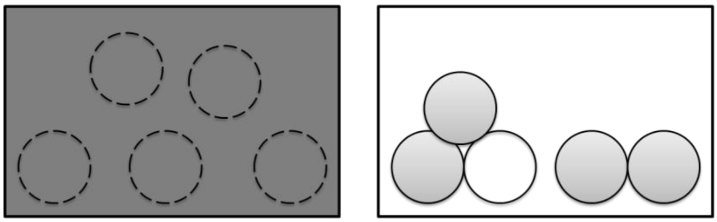
Λύση

Έστω ότι το σύνολο X είναι κυρτό. Τότε για κάθε ζεύγος στοιχείων $x,y\in[1,5]\bigcup[6,7]$ τα στοιχεία που παρεμβάλλονται μεταξύ των x και y πρέπει να ανήκουν στο X. Άτοπο, γιατί τα $x=4$ και $y=6.1\in[1,5]\bigcup[6,7]$, όμως το διάστημα $[4,\ 6.1]\notin[1,5]\bigcup[6,7]$, διότι το 5.2 δεν περιέχεται στο X, ενώ περιέχεται στο διάστημα $[4,\ 6.1]$. Αντιθέτως, το X' είναι κυρτό γιατί περιέχει μόνο φυσικούς αριθμούς ($X'=[1,5]\bigcup[6,7]\subset\mathbb{N}$), οπότε ουσιαστικά αποτελεί το σύνολο $X'=[1,5]\bigcup[6,7]=[1,7]=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

4.4. Τοπολογία και τοπολογικός χώρος

Η έννοια της τοπολογίας στα μαθηματικά είναι αρκετά γενική και *χρησιμοποιείται για να καθορίσει τις εσωτερικές σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία ενός συνόλου X*. Ένα σύνολο στοιχείων *X*, το οποίο δεν είναι εφοδιασμένο με κάποια τοπολογία, χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από την αξιωματική ιδιότητα της **αριθμησιμότητας** (**cardinality**), δηλαδή στο σύνολο αυτό είναι δυνατή μόνο η καταμέτρηση των στοιχείων του.

Για παράδειγμα, σε ένα μαύρο κλειστό κουτί που περιέχει 5 σφαίρες, η μόνη αξιοποιήσιμη πληροφορία είναι ο αριθμός τους, δηλαδή η δυνατότητα να ανοίξουμε το κουτί και να μετρήσουμε τις σφαίρες. Αν όμως το κουτί είναι διαφανές η διάταξη (εφάπτονται οι σφαίρες ή δεν εφάπτονται) ή το χρώμα των σφαιρών (άσπρο, γκρι) προσδίδει περαιτέρω πληροφορία. Η **δομή** που αποκτά το σύνολο των σφαιρών μόλις υπερβούμε την αρχική ιδιότητα της απαριθμηισιμότητας παρέχει μία διαισθητική προσέγγιση για το τι είναι τοπολογία στα Μαθηματικά.



Σχήμα 4.2. Η δομή που αποκτά το σύνολο των σφαιρών αφού ξεπεραστεί η ιδιότητα της αριθμησιμότητά τους αποτελεί μία διαισθητική προσέγγιση για το τι είναι τοπολογία στα Μαθηματικά.

Παρακάτω δίδεται ο μαθηματικός ορισμός της τοπολογίας:

Ορισμός:

Έστω *X* ένα σύνολο στοιχείων, συμπεριλαμβανομένου του κενού συνόλου *X*=Ø, και $\aleph$ μία κλάση υποσυνόλων $\varnothing \subseteq X_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ του *X*. Τότε όταν για την κλάση $\aleph$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Το σύνολο *X* και το κενό σύνολο Ø ανήκουν στην $\aleph$.
- Αν $A_i \in \aleph$, με $i \in \mathbb{N}$, τότε και η ένωση $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \aleph$
- Αν $A_j \in \aleph$, με $i \in \mathbb{N}$, τότε και η τομή $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \aleph$

Η *κλάση* $\aleph$ ονομάζεται **τοπολογία στο X** και συμβολίζεται με $\aleph$ ή με T_X.

Όταν εφαρμοστεί μια τοπολογία T_X σε ένα σύνολο *X*, τότε καθορίζονται οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του συνόλου, προσδίδοντάς του δομή που το μετατρέπει σε έναν τοπολογικό χώρο. Επομένως, *τοπολογικός χώρος* ονομάζεται το ζεύγος $\langle X,\aleph\rangle$ που παράγεται από ένα σύνολο στοιχείων *X* και μια τοπολογία T_X του *X*.

Περαιτέρω, όταν ένας τοπολογικός χώρος εφοδιαστεί με επιπλέον περιορισμούς, όπως είναι για παράδειγμα η απαίτηση να είναι καλά ορισμένη εντός του μία συνάρτηση *f*, τότε η δομή του τοπολογικού χώρου αποκτά εξειδικευμένη δομή $\langle X,T_X,f\rangle$ και μετασχηματίζεται, ανάλογα με την περίπτωση, σε ειδικότερους **παράγωγους χώρους**, όπως είναι ενδεικτικά οι πολλαπλότητες και οι μετρικοί χώροι. Ένας τοπολογικός χώρος, στον οποίον τα σημεία είναι συναρτήσεις, ονομάζεται **χώρος συναρτήσεων**.

4.5. Μετρικές συναρτήσεις

Μετρική ονομάζεται η συνάρτηση που όταν εφαρμοστεί σε έναν τοπολογικό χώρο $\langle X,T_{\mathrm{X}}\rangle$ επιτρέπει τη μέτρηση αποστάσεων και μετασχηματίζει το χώρο σε μετρικό $\langle X,T_{\mathrm{X}},\mu_{\mathrm{X}}\rangle$.

Ορισμός

Μία συνάρτηση $\mu_X = \mu(x,y)$ ονομάζεται **μετρική συνάρτηση** όταν ικανοποιεί τα τέσσερα ακόλουθα αξιώματα - συνθήκες:

- *Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού*: Για κάθε ζεύγος στοιχείων $x,y \in X$ ισχύει $\mu_X \geq 0$.
- *Αξίωμα ταύτισης*: Για κάθε ζεύγος στοιχείων $x,y \in X$ ισχύει $\mu(x,y)=0$ αν και μόνο αν $x\equiv y$.
- *Αξίωμα συμμετρίας*: Για κάθε ζεύγος στοιχείων $x,y \in X$ ισχύει $\mu(x,y)= \mu(y,x)$.
- *Τριγωνική Ιδιότητα*: Για κάθε τριάδα στοιχείων $x,y,z \in X$ ισχύει $\mu(x,y) \leq \mu(x,z) + \mu(z,y)$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι κάθε υποσύνολο $X_i \subseteq X$ ενός μετρικού χώρου $\langle X, T_X, \mu_X \rangle$ αποτελεί επίσης μετρικό χώρο με την ίδια συνάρτηση απόστασης, δηλαδή $\langle X_i, T_X, \mu_X \rangle$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι και στην περίπτωση του υποσυνόλου X_i ικανοποιούνται οι τέσσερις συνθήκες του ορισμού της μετρικής συνάρτησης. Στη συνέχεια θα περιγραφούν ορισμένα είδη μετρικών συναρτήσεων.

4.5.1. Διακριτή απόσταση (discrete distance)

Διακριτή απόσταση (**discrete distance**) ονομάζεται η μετρική συνάρτηση που παράγει, μεταξύ δύο σημείων ***x***,***y*** $\in X$, μήκη ίσα με 0 ή 1, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mu_{\Delta,X} = \mu_{\Delta}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \neq y \\ 0, & x \equiv y \end{cases}$$

Σχόλιο:

Ανάλογα με την πληροφορία που θέλουμε να αποδώσουμε χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς μ_X ή $\mu(x,y)$ ή $\mu_X(x,y)$ ή $\mu_X(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Στην πρώτη περίπτωση ο συμβολισμός μ_X της μετρικής συνάρτησης περιγράφει το σύνολο X που παράγει το μετρικό χώρο $\langle X, T_X, \mu_X \rangle$. Στη δεύτερη περίπτωση, ο συμβολισμός $\mu(x,y)$ περιγράφει τις μεταβλητές (x,y) που λαμβάνουν μέρος στο μαθηματικό τύπο της μετρικής συνάρτησης. Στην τρίτη περίπτωση $\mu_X(x,y)$ αποτυπώνεται συνολικά η πληροφορία των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Τέλος, στην τελευταία περίπτωση $\mu_X(\mathbf{x},\mathbf{y})$ τα έντονα γράμματα στις μεταβλητές **x** και **y** περιγράφουν πληρέστερα ότι οι μεταβλητές **x** και **y** που λαμβάνουν μέρος στη μαθηματική έκφραση της μετρικής είναι διανυσματικές, ότι δηλαδή ισχύει $\mathbf{x}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ και $\mathbf{y}=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$. Σε αυτή την περίπτωση, αναμένουμε να συναντήσουμε στον τύπο της μετρικής συνάρτησης παραστάσεις με x_i και y_i, ή x_n και y_n, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις συνιστώσες των διανυσματικών μεταβλητών. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης απλοποιούμε την έκφραση $\mu_X(\mathbf{x},\mathbf{y})$ σε $\mu_X(x,y)$. Ανάλογα με την περίπτωση χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς που εξυπηρετούν.

Σχόλιο:

Ο δείκτης Δ στις εκφράσεις $\mu_{\Delta,X}$ ή $\mu_{\Delta}(x,y)$ αναφέρεται στη διακριτή απόσταση. Ακολούθως χρησιμοποιούνται και άλλοι δείκτες για να περιγράψουν το είδος της μετρικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται κάθε φορά, όπως το *E* που αναφέρεται στην Ευκλείδεια, το *M* στη Μανχάταν, κλπ. Ο δείκτης της μετρικής, πλέον του συμβόλου που αναφέρεται στο σύνολο *X*, δηλώνεται όταν δεν εννοείται από τα συμφραζόμενα.

Σχόλιο:

Στην έκφραση $\mu_{\Delta,X}(x,y)$ το σύμβολο μ εκφράζει μια μετρική συνάρτηση, ο δείκτης Δ τη διακριτή μετρική, ο δείκτης *X* το σύνολο που παράγει το μετρικό χώρο $\langle X, T_X, \mu_X \rangle$ και η έκφραση (x,y) ότι οι μετρική αποτελεί συνάρτηση των μεταβλητών *x* και *y*.

Σχόλιο:

Στον κλάδο της Μαθηματικής Τοπολογίας τα σημεία συμβολίζονται συνήθως με μικρά γράμματα $x,y,z,\ldots$, καθόσον θεωρούνται στοιχεία ενός συνόλου *X*. Στην Αναλυτική Γεωμετρία, όμως, τα σημεία περιέχουν περαιτέρω πληροφορία σχετικά με τη θέση τους, με αποτέλεσμα να συμβολίζονται με διαφορετικό τρόπο. Στην περίπτωση αυτή συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα $A,B,\Gamma,\ldots$ (είτε πλάγια είτε όχι) ή με κεφαλαία γράμματα και δείκτες P_1, P_2, P_3,…. Επί του παρόντος και με την προϋπόθεση ότι δεν υφίσταται κίνδυνος σύγχυσης, επιλέγεται ο συμβολισμός των σημείων – στοιχείων με μικρά γράμματα (x,y,z). Εφίσταται η προσοχή στον αναγνώστη για τη διάκριση της χρήσης των μικρών γραμμάτων, για το πότε αυτά αναφέρονται σε σημεία ή μη.

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, για οποιαδήποτε δύο μη ταυτόσημα σημεία του συνόλου *X* η διακριτή τους απόσταση ισούται με 1, ενώ όταν τα σημεία ταυτίζονται η απόστασή τους είναι μηδέν. Προφανώς, η διακριτή απόσταση αποτελεί μέτρο που ανιχνεύει ταύτιση, όταν $d(x,y)=0$.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση της διακριτής απόστασης $\mu_{\Delta,X}$ είναι μετρική συνάρτηση.

Λύση

Έχουμε:

Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού

Όταν $x=y$ ισχύει $\mu_\Delta(x,y)=0$. Όταν $x\neq y$ ισχύει $\mu_\Delta(x,y)=1>0$. Οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $\mu(x,y)\geq 0$.

Αξίωμα ταύτισης

Από τον ορισμό της διακριτής συνάρτησης ισχύει $\mu_\Delta(x,y)=0$ αν και μόνο αν $x\equiv y$.

Αξίωμα συμμετρίας

Όταν $x=y$ ισχύει $\mu_\Delta(x,y)=0$, αλλά και $y=x$ οπότε $\mu_\Delta(y,x)=0$. Όμοια προκύπτει, για $x\neq y$, ότι $\mu_\Delta(x,y)= \mu_\Delta(y,x)=1$. Οπότε ισχύει το αξίωμα συμμετρίας.

Τριγωνική Ιδιότητα

Αρκεί για κάθε τριάδα στοιχείων x,y,z να ισχύει ότι $\mu_\Delta(x,y)\leq \mu_\Delta(x,z) + \mu_\Delta(z,y)$.

Όταν $x=y$ η παραπάνω ανίσωση γίνεται $0\leq\mu_\Delta(x,z) + \mu_\Delta(z,y)$, που ισχύει για κάθε $z\in X$, καθόσον $\mu_{\Delta,X}=0$ ή $\mu_{\Delta,X}=1$

Όταν $x\neq y$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $x=z$ ή $y=z$. Η περίπτωση $x=z=y$ αποκλείεται γιατί τότε θα ίσχυε και ότι $x=y$ που είναι άτοπο από την υπόθεση. Έστω $x=z$, τότε η ανίσωση γίνεται

  $1 \leq 0 + \mu_\Delta(z,y) \Leftrightarrow 1 \leq 0 + 1$

  οπότε ισχύει η ισότητα
- $y\neq x\neq z\neq y$. Τότε η ανίσωση γράφεται

  $1 \leq 1 + 1 = 2$

  που ισχύει για κάθε $y\neq x\neq z\neq y$.

Επομένως η συνάρτηση της διακριτής απόστασης ικανοποιεί και τα τέσσερα κριτήρια (αξιώματα) και είναι μετρική συνάρτηση.

4.5.2. Ευκλείδεια απόσταση (Euclidean distance)

Η *Ευκλείδεια απόσταση* (*Euclidean distance*) $\mu_E(x,y)$ ή *Ευκλείδεια νόρμα* (*Euclidean norm*) $\|y-x\|$ ή L_2-νόρμα (L_2-norm) είναι η μετρική συνάρτηση που αποδίδει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο σημείων του Ευκλείδειου χώρου. Ειδικότερα, αν **x**,**y** είναι δύο σημεία στο *ν*-διάστατο Ευκλείδειο χώρο, με καρτεσιανές συντεταγμένες $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ και αντίστοιχα $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, τότε η μαθηματική έκφραση της Ευκλείδειας απόστασης περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mu_E(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2=\left(\sum_n (y_n-x_n)^2\right)^{1/2}=$$
$$=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

όπου x_n και y_n είναι η *n*-οστές συνιστώσες των σημείων **x** και **y** αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η Ευκλείδεια απόσταση είναι μετρική συνάρτηση.
(Δίδεται η ανισότητα *Minkowski*:

$$\left[\sum_n (a_n+b_n)^p\right]^{1/p}\le\left[\sum_n (a_n)^p\right]^{1/p}+\left[\sum_n (b_n)^p\right]^{1/p}$$)

Λύση

Έχουμε:

Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού

Η Ευκλείδεια απόσταση παράγεται ως αποτέλεσμα τετραγωνικής ρίζας, οπότε $\mu_E(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2=\sqrt{\sum_n (y_n-x_n)^2}\ge 0$.

Αξίωμα ταύτισης

Αν ισχύει $\mu_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_n (y_n - x_n)^2} = 0$ τότε, λόγω του ότι η μετρική παράγεται ως άθροισμα τετραγώνων, προκύπτει πως $(y_n - x_n)^2 = 0 \Leftrightarrow y_n = x_n$. Η ισοδυναμία ισχύει γιατί αν $y_n = x_n$ τότε προκύπτει $y_n - x_n = 0 \Rightarrow (y_n - x_n)^2 = 0$ και με τον τρόπο αυτό κατασκευάζεται η σχέση $\mu_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_n (y_n - x_n)^2} = 0$.

Αξίωμα συμμετρίας

Ισχύει λόγω της ιδιότητας $(y_n - x_n)^2 = \left[-(x_n - y_n)\right]^2$.

Τριγωνική Ιδιότητα

Έστω τρία στοιχεία *x*,*y*,*z*. Έχουμε:

$$\mu_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_n (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_n (y_n - x_n \pm z_n)^2} =$$

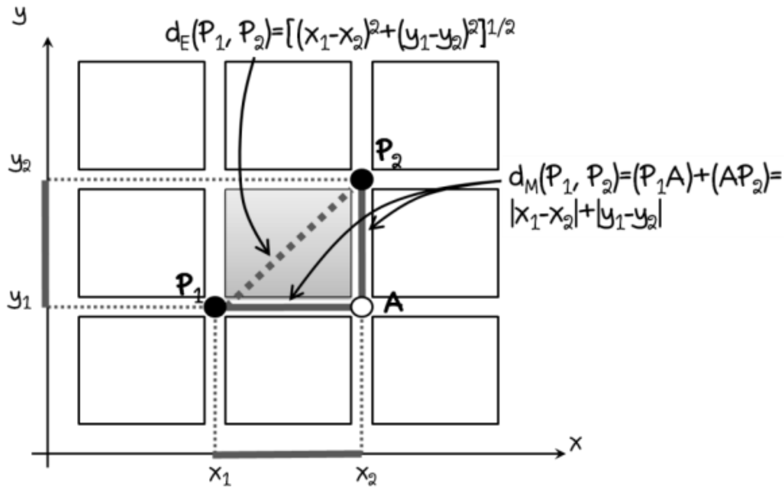
$$= \sqrt{\sum_n \left[\left(y_n - z_n\right) - \left(x_n - z_n\right)\right]^2} \leq \sqrt{\sum_n \left(y_n - z_n\right)^2} + \sqrt{\sum_n \left(x_n - z_n\right)^2} =$$

$$= \mu_E(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \mu_E(\mathbf{x},\mathbf{z})$$

σύμφωνα με την ανισότητα Minkowski για *p*=2.

4.5.3. Απόσταση Μανχάταν

Μία εναλλακτική απόσταση στον Ευκλείδειο χώρο αποτελεί η L_1-νόρμα (L_1-norm) ή αλλιώς *απόσταση Μανχάταν* ή *taxicab* (*Manhattan* or *taxicab distance*), η οποία συμβολίζεται με $\mu_{\mathrm{M}}(x, y)$. Η απόσταση αυτή θεωρεί ότι η μετακίνηση μεταξύ δύο σημείων σε ένα χωρικό δίκτυο πραγματοποιείται εντός ενός ρυμοτομημένου πλέγματος οικοδομικών τετραγώνων, διασχίζοντας δηλαδή τα οικοδομικά τετράγωνα από τις πλευρές τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3. Η απόσταση *Μανχάταν* $\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y})=d_M(\mathbf{x},\mathbf{y})$ θεωρεί ότι η κίνηση δεν πραγματοποιείται σε πλήρη ευθυγραμμία $\mu_E(\mathbf{x},\mathbf{y})=d_E(\mathbf{x},\mathbf{y})$, αλλά εντός ενός ρυμοτομημένου πλέγματος οικοδομικών τετραγώνων (πηγή: ίδια επεξεργασία).

Η μαθηματική έκφραση της απόστασης Μανχάταν δίδεται στην παρακάτω σχέση, στην οποία τα ορίσματα $|x_i - y_i|$ αντιπροσωπεύουν τις ακμές ενός υπερκύβου που συνθέτει, ως συνιστώσες, την ευκλείδεια απόσταση $d_E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ στο n-διάστατο χώρο.

$$\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η απόσταση Μανχάταν είναι μετρική συνάρτηση.

Λύση

Έχουμε:

Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού

Η απόσταση Μανχάταν παράγεται ως άθροισμα απόλυτων τιμών, οπότε $\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ ≥0.

Αξίωμα ταύτισης

Αν ισχύει $\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$, επειδή η μετρική παράγεται ως άθροισμα απόλυτων τιμών, προκύπτει η ισοδυναμία $|x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow y_i = x_i$.

Αξίωμα συμμετρίας

Ισχύει $|x_i - y_i| = |-(y_i - x_i)| = |y_i - x_i|$.

Τριγωνική Ιδιότητα

Έστω τρία στοιχεία *x*,*y*,*z*. Έχουμε:

$$\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i \pm z_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) - (y_i - z_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| =$$

$$= \mu_M(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mu_M(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

λόγω της τριγωνικής ιδιότητας που ισχύει για τις απόλυτες τιμές.

Άσκηση

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση του $\mathbb{R}^n$

$$\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

είναι μετρική.

(Δίδεται η ανισότητα *Minkowski*:

$$\left[\sum_n (a_n + b_n)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_n (a_n)^p \right]^{1/p} + \left[\sum_n (b_n)^p \right]^{1/p}$$

)

Λύση

Παρατηρούμε ότι για p=1 (L_1-norm) η παραπάνω σχέση μας δίνει την απόσταση Μανχάταν, ενώ για p=2 (L_2-norm) την Ευκλείδεια απόσταση. Έχουμε:

Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού

Η μετρική $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$ παράγεται ως άθροισμα απόλυτων τιμών $|x_i-y_i|$, οπότε ισχύει $\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ ≥0.

Αξίωμα ταύτισης

Αν ισχύει $\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}=0$, επειδή η μετρική παράγεται ως άθροισμα απόλυτων τιμών, προκύπτει η ισοδυναμία $|x_i-y_i|=0 \Leftrightarrow y_i=x_i$.

Αξίωμα συμμετρίας

Ισχύει $|x_i-y_i|^p=|-(y_i-x_i)|^p=|y_i-x_i|^p$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Τριγωνική Ιδιότητα

Έστω τρία στοιχεία x,y,z. Έχουμε:

$$\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i\pm z_i|^p\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|(x_i-z_i)-(y_i-z_i)|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^p\right)^{1/p}=$$

$$=\mu_M(\mathbf{x},\mathbf{z})+\mu_M(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

λόγω της ανισότητας του Minkowski.

Άσκηση

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση του $\mathbb{R}^n$

$$\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|\}$$

είναι μετρική, για *i*=1,…,*n*.

Λύση

Έχουμε:

Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού

Η μετρική $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|\}$ παράγεται από ορίσματα απόλυτων τιμών $|x_i - y_i|$, οπότε το αποτέλεσμά της θα είναι επίσης θετικό $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|\}$ ≥0.

Αξίωμα ταύτισης

Αν ισχύει ότι $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|\} = 0$, τότε το μεγαλύτερο από τα ορίσματα $|x_i - y_i|$ είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή αν αυτό ισχύει για δείκτη *i*=*k* τότε $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|\} = |x_k - y_k| = 0$. Αφού το μεγαλύτερο από τα ορίσματα $|x_i - y_i|$ είναι ίσο με το μηδέν και όλα τα ορίσματα είναι θετικά $|x_i - y_i| \geq 0$, ισχύει ότι

$$\max\{|x_i - y_i|\} = |x_k - y_k| = 0 \Leftrightarrow 0 \leq |x_i - y_i| \leq |x_k - y_k| = 0$$

από όπου προκύπτει ότι κάθε όρισμα $|x_i - y_i| = 0$. Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε ισοδύναμα ότι $x_i = y_i$, για κάθε *i*=1,…,*n*.

Σχόλιο

Κατά την αποδεικτική διαδικασία οφείλουμε να διασφαλίσουμε ότι η μετάβαση πραγματοποιείται με ισοδυναμία (⇔). Διαφορετικά, πρέπει να αποδεχθεί το ευθύ $(\Rightarrow)$ και το αντίστροφο $(\Leftarrow)$ της πρότασης διαδοχικά.

Αξίωμα συμμετρίας

Ισχύει $|x_i - y_i| = |-(y_i - x_i)| = |y_i - x_i|$, οπότε θα ισχύει και ότι $\max\{|x_i - y_i|\} = \max\{|y_i - x_i|\}$, οπότε ικανοποιείται αυτό το αξίωμα.

Τριγωνική Ιδιότητα

Έστω τρία στοιχεία *x*,*y*,*z*. Έχουμε:

$$|x_i - y_i| = |x_i - y_i \pm z_i| = |(x_i - z_i) - (y_i - z_i)| \le |x_i - z_i| + |y_i - z_i|$$

Λαμβάνοντας το μέγιστο από την παραπάνω παράσταση προκύπτει ότι

$$\max\{|x_i - y_i|\} \le \max\{|x_i - z_i| + |y_i - z_i|\} =$$

$$= \max\{|x_i - z_i|\} + \max\{|y_i - z_i|\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \mu(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

Επομένως η δεδομένη συνάρτηση είναι μετρική.

Άσκηση

Έστω μετρικός $\langle X, T_X, \mu_X \rangle$ χώρος. Να δείξετε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις

$\mu_X^{(1)} = \sqrt{\mu_X}$, $\mu_X^{(2)} = \min\{\mu_{\Delta,X}, \mu_X\}$ και $\mu_X^{(3)} = \dfrac{\mu_X}{1+\mu_X}$

είναι μετρικές συναρτήσεις, όπου $\mu_{\Delta,X}$ η διακριτή μετρική.

Λύση

Η συνάρτηση μ_X είναι μετρική, οπότε ισχύουν από τον ορισμό της μετρικής συνάρτησης τα αξιώματα *θετικότητας*, *ταύτισης*, *συμμετρίας*, καθώς και η *τριγωνική ιδιότητα*.

(1) Για τη $\mu_X^{(1)} = \sqrt{\mu_X}$ έχουμε:

Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού

Η μετρική $\mu_X^{(1)}$ παράγεται ως αποτέλεσμα τετραγωνικής ρίζας, οπότε ισχύει $\mu_X^{(1)} = \sqrt{\mu_X} \ge 0$.

Αξίωμα ταύτισης

Αν ισχύει ότι $\mu_X^{(1)} = \sqrt{\mu_X} = 0$, τότε υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε ισοδύναμα ότι $\left(\sqrt{\mu_X}\right)^2 = \mu_X = 0$. Επειδή η μ_X είναι εξ ορισμού μετρική συνάρτηση προκύπτει ότι για κάθε $x,y \in X$ ισχύει $x=y$, οπότε και η ικανοποιεί το κριτήριο (αξίωμα) ταύτισης.

Αξίωμα συμμετρίας

Για τη μ_X ισχύει ότι $\mu_X(x,y)=\mu_X(y,x)$. Επειδή η $\mu_X \geq 0$, μπορούμε να μεταβούμε ισοδύναμα, λαμβάνοντας την τετραγωνική ρίζα, στη σχέση:

$$\mu_X(x,y) = \mu_X(y,x) \overset{\mu_X \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\mu_X(x,y)} = \sqrt{\mu_X(y,x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu_X^{(1)}(x,y) = \mu_X^{(1)}(y,x)$$

επομένως ικανοποιείται και το αξίωμα συμμετρίας.

Τριγωνική Ιδιότητα

Έστω τρία στοιχεία x,y,z. Για τη μ_X ισχύει ότι:

$$\mu_X(x,y) = \mu_X(x,z) + \mu_X(y,z)$$

Επειδή η $\mu_X \geq 0$, μπορούμε να μεταβούμε ισοδύναμα, λαμβάνοντας την τετραγωνική ρίζα, στην παρακάτω σχέση:

$$\mu_X(x,y) = \mu_X(x,z) + \mu_X(y,z) \overset{\mu_X \geq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\mu_X(x,y)} = \sqrt{\mu_X(x,z) + \mu_X(y,z)}$$

Όμως ισχύει ότι $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (γιατί; να αποδειχθεί), άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\sqrt{\mu_X(x,y)} = \sqrt{\mu_X(x,z) + \mu_X(y,z)} \leq \sqrt{\mu_X(x,z)} + \sqrt{\mu_X(y,z)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu_X^{(1)}(x,y) \leq \mu_X^{(1)}(x,z) + \mu_X^{(1)}(y,z)$$

Επομένως ισχύει η τριγωνική ιδιότητα. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η $\mu_X^{(1)} = \sqrt{\mu_X}$ είναι μετρική συνάρτηση.

(2) Για τη $\mu_X^{(2)} = \min\{\mu_{\Delta,X}, \mu_X\}$ παρατηρούμε πως οι συνιστώσες συναρτήσεις του ορίσματος $\{\mu_{\Delta,X}, \mu_X\}$ είναι και οι δύο μετρικές συναρτήσεις. Επομένως, με παρόμοια συλλογιστική με αυτή του

υποερωτήματος (1) προκύπτει ότι και η $\mu_X^{(2)}$ είναι μετρική συνάρτηση (η απόδειξη των βημάτων αφήνεται ως άσκηση).

(3) Για τη $\mu_X^{(3)} = \frac{\mu_X}{1+\mu_X}$ έχουμε:

Αξίωμα θετικότητας ή διαχωρισμού

Είναι $\mu_X^{(3)} = \frac{\mu_X}{1+\mu_X} \geq 0$, διότι $\mu_X \geq 0$ (από τον ορισμό της μετρικής μ_X) και $1+\mu_X \geq 0$.

Αξίωμα ταύτισης

Ισχύει ότι για $\mu_X(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$. Έστω $\mu_X^{(3)} = \frac{\mu_X}{1+\mu_X} = 0$. Τότε $\mu_X^{(3)} = \frac{\mu_X}{1+\mu_X} = 0 \Leftrightarrow \mu_X = 0$, με αποτέλεσμα από τον ορισμό της μ_X να προκύπτει ισοδύναμα ότι: $\mu_X^{(3)} = \frac{\mu_X}{1+\mu_X} = 0 \Leftrightarrow \mu_X = 0 \Leftrightarrow x=y$.

Αξίωμα συμμετρίας

Επειδή ισχύει ότι $\mu_X(x,y)=\mu_X(y,x)$ έχουμε

$$\mu_X^{(3)}(x,y) = \frac{\mu_X(x,y)}{1+\mu_X(x,y)} = \frac{\mu_X(y,x)}{1+\mu_X(y,x)} = \mu_X^{(3)}(y,x).$$

Τριγωνική Ιδιότητα

Έστω τρία στοιχεία *x*,*y*,*z* του μετρικού χώρου. Για τη μ_X ισχύει ότι:
$\mu_X(x,y) \leq \mu_M(x,z) + \mu_M(y,z)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+x}$, η οποία είναι αύξουσα στο διάστημα [0,+∞). Αυτό προκύπτει από το πρόσημο της πρώτης παραγώγου

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{x'\cdot(1+x)-x\cdot(1+x)'}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}\geq 0,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αυτό σημαίνει ότι για x_1, $x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1< x_2 \Leftrightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$. Αν θεωρήσουμε $x_1=\mu_X(x,y)$ και $x_2=\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)$, τότε επειδή ισχύει ότι $\mu_X(x,y)\leq \mu_M(x,z)+\mu_M(y,z)$ θα ισχύει και ότι

$f(\mu_X(x,y))\leq f(\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z))$

Έχουμε ισοδύναμα:

$$f\left(\mu_X(x,y)\right)=\mu_X^{(3)}(x,y)=\frac{\mu_X(x,y)}{1+\mu_X(x,y)}\leq f\left(\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)\right)=$$

$$=\frac{\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}{1+\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}=\frac{\mu_X(x,z)}{1+\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}+$$

$$+\frac{\mu_X(y,z)}{1+\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}$$

Επειδή όμως η $\mu_X\geq 0$ ισχύει ότι:

$$\frac{\mu_X(x,z)}{1+\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}\leq\frac{\mu_X(x,z)}{1+\mu_X(x,z)}$$

και

$$\frac{\mu_X(y,z)}{1+\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}\leq\frac{\mu_X(y,z)}{1+\mu_X(y,z)}$$

Οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mu_X^{(3)}(x,y)\leq\frac{\mu_X(x,z)}{1+\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}+\frac{\mu_X(y,z)}{1+\mu_X(x,z)+\mu_X(y,z)}\leq$$

$$\leq\frac{\mu_X(x,z)}{1+\mu_X(x,z)}+\frac{\mu_X(y,z)}{1+\mu_X(y,z)}=\mu_X^{(3)}(x,z)+\mu_X^{(3)}(y,z)$$

Επομένως ισχύει και η τριγωνική ιδιότητα για τη $\mu_X^{(3)}(x,y)$, άρα η συνάρτηση αυτή είναι μετρική συνάρτηση.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

1. Marsden, J., Tromba, A., (2005) *Διανυσματικός Λογισμός*, Γιαννόπουλος, Α., (επ) Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
2. O'Sullivan, (2007) *Urban economics*, Seventh Edition, Portland, USA, McGraw-Hill/Irwin Publications.
3. Soundararajan, T., (1971) "Weakly Hausdorff spaces and the cardinality of topological spaces", In Franklin, S., Frolik, Z., Koutnik, V., *General topology and its relations to modern analysis and algebra*, Praha, Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, pp.301-306.
4. Μανδάλα, Μ., (1988) Μείζον Ελληνικό Λεξικό, Αθήνα, Εκδόσεις Τεγόπουλος-Φυτράκης
5. Πολύζος, Σ., (2011) *Περιφερειακή Ανάπτυξη*, Αθήνα, Εκδόσεις Κριτική
6. Σταθακόπουλος, Κ., (2003) *Πραγματική Ανάλυση*, Αθήνα, Εκδόσεις Αίθρα.
7. Kijowski, J., Tulczyjew, W., (1979) *A Symplectic Framework for Field Theories*, Heidelberg, Springer-Verlag Publications.
8. Stein, E., Shakarchi, R., (2011) *Functional Analysis, An introduction to further topics in analysis*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
9. Τσίτσας, Λ., (2003) *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός,* Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
10. Rudin, W., (2000) *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως* (μετάφραση Σταλίδης, Δ.,), Αθήνα, Εκδόσεις Leader Books.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

Η ΘΕΣΗ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΙΟ ΜΕΤΡΙΚΟ ΧΩΡΟ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

5.1. Γενικά

Η θέση ενός σημείου στο χώρο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη λειτουργία των φυσικών και γενικά των χωρικών συστημάτων που ενυπάρχουν και αναπτύσσονται στο χώρο αυτό. Η παραπάνω θέση οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε είδους μετακίνηση που συντελείται στο φυσικό χώρο προϋποθέτει τη δαπάνη ενός ποσού ενέργειας, με αποτέλεσμα η επιλογή κατάλληλων θέσεων στο χώρο να συνεισφέρει στην ελαχιστοποίησή του ενεργειακού κόστους.

Για παράδειγμα, οι πόλεις που αναπτύσσονται σε κεντρικές περιοχές ευνοούνται, έναντι των περιφερειακών πόλεων, στις διαπεριφερειακές μετακινήσεις και γενικά στην προσβασιμότητά τους, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν καλύτερες προοπτικές ανάπτυξης από τις αντίστοιχες περιφερειακές. Δίχως να δίδεται περαιτέρω έμβαση, καθίσταται προφανές ότι η θέση στο χώρο αποτελεί σημαντική παράμετρο μελέτης των χωρικών συστημάτων.

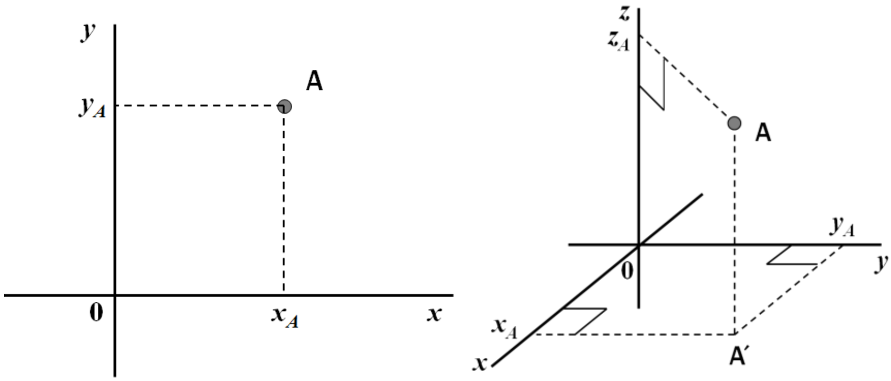
Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται συνοπτικά τα συστήματα συντεταγμένων, τα οποία έχουν αναπτυχθεί για τη μελέτη της θέσεως των αντικειμένων στο χώρο. Ο χώρος που μελετάται ακολούθως είναι ο Ευκλείδειος χώρος σε δύο ($\mathbb{R}^2$), τρεις ($\mathbb{R}^3$) και περισσότερες ($\mathbb{R}^n$) διαστάσεις.

5.2. Ορθοκανονικό ή Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Το συνηθέστερο σύστημα για την αναπαράσταση των σημείων στο χώρο είναι το λεγόμενο **ορθοκανονικό** ή **καρτεσιανό σύστημα**

συντεταγμένων. Το σύστημα αυτό αποτελείται από κάθετες ανά δύο μεταξύ τους ευθείες στο χώρο οι οποίες τέμνονται σε ένα κοινό σημείο *O*, το οποίο ονομάζεται αρχή των αξόνων, κέντρο ή απλώς **αρχή**. Οι ευθείες αυτές ονομάζονται **άξονες αναφοράς** ή **απλώς άξονες**.

Λόγω του περιορισμού της τρισδιάστατης διαίσθησής μας, μπορούμε να φανταστούμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και στον τρισδιάστατο χώρο (η περίπτωση του μονοδιάστατου χώρου – ευθείας είναι τετριμμένη).



Σχήμα 5.1. Προσδιορισμός σημείου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο (αρ.) και στον τρισδιάστατο χώρο (δεξ.).

Η θέση ενός σημείου Α στο επίπεδο προσδιορίζεται αν φέρουμε τις προβολές του Α΄ στον **οριζόντιο** (**άξονας των *x***) και τον **κατακόρυφο** ή **κάθετο άξονα** (**άξονας των *y***).

Σχόλιο: Με απόλυτη μαθηματική αυστηρότητα, η έννοια της καθετότητας είναι σχετική και δεν μπορεί να σταθεί αυτόνομα. Δηλαδή όταν χρησιμοποιούμε την έκφραση κάθετος, οφείλουμε να περιγράψουμε **το που** είναι κάθετος (πχ. κάθετος στην ευθεία (*ε*), κάθετος στο επίπεδο *xy* κλπ.)

Προφανώς στην έννοια «κάθετος άξονας» (δηλαδή ο άξονας των *y*) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων εννοείται ότι **αναφέρεται στον άξονα που είναι κάθετος στον οριζόντιο άξονα**, δηλαδή κάθετος στον άξονα των *x*. Επειδή στο ορθοκανονικό σύστημα στο επίπεδο υπάρχουν μόνο δύο άξονες, η αναφορά αυτή έχει επικρατήσει καταχρηστικά.

Μόλις φέρουμε τις προβολές x_A και y_A του σημείου Α στους δύο άξονες, έχουμε προσδιορίσει τη θέση του σημείου μας ως προς το ορθοκανονικό σύστημα που επιλέξαμε. Για το σημείο Α γράφουμε
A(x_A, y_A)
Όμοια ένα δεύτερο σημείο Β, θα έχει συντεταγμένες Β(x_B, y_B).

Σχόλιο

Όταν χρειάζεται να διαχειριστούμε στον $\mathbb{R}^2$ πολλά σημεία τότε τα αριθμούμε, χρησιμοποιώντας δείκτες, δηλαδή $P_i(x_i, y_i)$, i=1,2,…,*n*. Για παράδειγμα σε ένα σύστημα 1000 σημείων έχουμε το 1ο σημείο $P_1(x_1, y_1)$, το 2ο σημείο $P_2(x_2, y_2)$, …, το 100ο σημείο $P_{100}(x_{100}, y_{100})$, κόκ.
Οι προβολές του σημείου Α στους δύο άξονες ονομάζονται **συντεταγμένες** ή **συνιστώσες**. Αποκλειστικά για την περίπτωση του επιπέδου η οριζόντια συνιστώσα ονομάζεται **τετμημένη**, ενώ η κατακόρυφη **τεταγμένη**.

Σχόλιο

Η θέση του σημείου της αρχής του ορθοκανονικού συστήματος *O* λαμβάνεται κατά σύμβαση, ανάλογα με τη φύση και τις ιδιαίτερες συνθήκες του προβλήματος. Αυτό βέβαια δε δυσχεραίνει τη μελέτη των μαθηματικών προβλημάτων, καθόσον ένα σημείο Α(x_A, y_A) απέχει δεδομένη απόσταση από την αρχή των αξόνων, σε οποιοδήποτε σημείο και αν τοποθετηθεί η αρχή, με αποτέλεσμα κάθε σύστημα να παράγει ισοδύναμα αποτελέσματα.

Στις φυσικές και γεωγραφικές επιστήμες όμως, στην οποίες μελετούνται εφαρμογές φυσικών σωμάτων και συστημάτων, η επιλογή του συστήματος αναφοράς αποτελεί ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία, καθόσον από αυτή εξαρτάται ο όγκος της πληροφορίας και ο βαθμός δυσκολίας του προβλήματος που διαχειρίζεται ο μελετητής. Για την κοινή αντιμετώπιση τέτοιων ζητημάτων, όπως η κοινή μέτρηση των αποστάσεων κλπ, έχουν πραγματοποιηθεί διεθνείς συμβάσεις τα λεγόμενα **γεωγραφικά συστήματα αναφοράς**. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης καλείται να ανατρέξει σε σχετικές πληροφορίες.

Όμοια, μπορούμε να περιγράψουμε ένα σημείο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο ($\mathbb{R}^3$), με τη χρήση τριών συντεταγμένων (x,y,z), δηλαδή: **A(x_A, y_A, z_A).**

Στην περίπτωση του τρισδιάστατου χώρου η οριζόντια συνιστώσα ονομάζεται ***x*** ή **οριζόντια συνιστώσα**, η κάθετη στο επίπεδο ονομάζεται ***y*** ή **δεύτερη οριζόντια συνιστώσα** ενώ η κατακόρυφη ονομάζεται ***z*** ή **κατακόρυφη συνιστώσα**.

Σχόλιο

Προφανώς στην περίπτωση του τρισδιάστατου χώρου δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον καταχρηστικό όρο «κάθετος άξονας» για την ονομασία του άξονα των *y*, διότι και οι τρεις άξονες είναι ανά κάθετοι δύο μεταξύ τους.

Σχόλιο

Όταν χρειάζεται να διαχειριστούμε στον $\mathbb{R}^3$ πολλά σημεία θα έχουμε $P_i(x_i, y_i, z_i)$, i=1,2,…,*n*.
Κατά αναλογία, μπορούμε να περιγράψουμε ένα σημείο στον *n*-διάστατο Ευκλείδειο χώρο ($\mathbb{R}^n$) με τη χρήση *n* το πλήθος συντεταγμένων $(x_1, x_2,\dots, x_n)$, δηλαδή:
A($x_1, x_2,\dots, x_n$)
Στην περίπτωση του χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζουμε τις συνιστώσες ως **1η , 2η , … , *n*οστή** κλπ **συνιστώσα**, και τους άξονες ως **1ος , 2ος , … , *n*οστός** κλπ **άξονας**, αντίστοιχα .

Σχόλιο

Όταν χρειάζεται να διαχειριστούμε πολλά σημεία στον $\mathbb{R}^n$, συνήθως χρησιμοποιούμε διαφορετικά γράμματα $X(x_1, x_2,\dots, x_n)$, διότι έχουμε τοποθετήσει δείκτες για την αρίθμηση των συνιστωσών x_i, *i*=1,2,…,*n* ($n \in \mathbb{R}$). Για παράδειγμα γράφουμε $A(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n)$, $B(\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_n)$, $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2,\dots, \gamma_n)$,… κλπ.
Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διπλούς δείκτες, δηλαδή $P_j(x_1^{(j)}, x_2^{(j)},\dots, x_n^{(j)})$, με *j*=1,2,…,*k*, όπου $k \in \mathbb{R}$ ο αριθμός των διαθέσιμων σημείων.

Οι άξονες του ορθοκανονικού συστήματος είναι **βαθμονομημένοι**, δηλαδή διαθέτουν χάραξη πάνω τους με τα ακέραια μήκη των αποστάσεων από την αρχή. Η βαθμονόμηση αποτελεί μία εξίσου συμβατική διαδικασία, δηλαδή οφείλει να συμφωνηθεί πιο θα είναι το μήκος της μονάδας στο ορθοκανονικό σύστημα που χρησιμοποιούμε. Η βαθμονόμηση πραγματοποιείται με την εφαρμογή ενός κανόνα βαθμονόμησης, ο οποίος συνήθως αποτελεί ένα **κριτήριο αναλογίας**.

Ο βασικός κανόνας στη βαθμονόμηση είναι η **διατήρηση της κλίμακας**, δηλαδή οι αποστάσεις μεταξύ δύο διαδοχικών μονάδων πρέπει να είναι σταθερές. Η βαθμονόμηση αυτή ονομάζεται **ισοδιαστημική**. Παρόλα αυτά υφίστανται και άλλου είδους βαθμονομήσεις που δεν είναι ισοδιαστημικές, όπως η **λογαριθμική**. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης καλείται να αναζητήσει σχετικές πηγές.

5.2.1. Απόσταση σημείων στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

Έστω δύο σημεία P_1 και P_2 στον Ευκλείδειο n-διάστατο χώρο ($\mathbb{R}^n$), με καρτεσιανές συντεταγμένες $P_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ και $P_2(y_1, y_2,\ldots, y_n)$. Τότε η απόστασή τους $d(P_1,P_2)$ δίδεται από τη σχέση

$$d(P_1,P_2)=\left(\sum_n (y_n-x_n)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

Σχόλιο

Όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση, η συνάρτηση της απόστασης $d(P_1,P_2)$ στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο ($\mathbb{R}^n$) ισούται με την Ευκλείδεια μετρική διανυσματική συνάρτηση $\mu_E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (L_2-νόρμα), **εφόσον θεωρηθεί ότι τα σημεία P_1 και P_2 σχηματίζουν διανύσματα** με αρχή το κέντρο του ορθοκανονικού συστήματος $O(0,0,\ldots,0)$ και πέρας τα αντίστοιχα σημεία $P_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ και $P_2(y_1, y_2,\ldots, y_n)$.

Σχόλιο

Η χρήση των μεταβλητών $x,y,z,\ldots$ **πραγματοποιείται κατά σύμβαση** και δεν πρέπει να συγχέεται. Ο αναγνώστης πρέπει να κατανοήσει τον καθεαυτό μηχανισμό της μαθηματικής έκφρασης της απόστασης δύο σημείων στον Ευκλείδειο χώρο, ανεξάρτητα από τους εκάστοτε συμβολισμούς των συντεταγμένων τους. Περιγραφικά, **η απόσταση δύο σημείων στον Ευκλείδειο χώρο ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος που αποτελείται από τα τετράγωνα των ανά ζεύγη διαφορών των ομολόγων συνιστωσών των δύο σημείων**.

Για παράδειγμα, αν τα σημεία P_1 και P_2 βρίσκονται στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο ($\mathbb{R}^3$) με συντεταγμένες $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ τότε η απόστασή τους ισούται με

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση αυτή επιλέχθηκαν οι μεταβλητές x,y και z να συμβολίζουν την 1^{η} (στον άξονα των x), τη 2^{η} (στον άξονα των y) και την 3^{η} (στον άξονα των z) συνιστώσα των σημείων αντίστοιχα, ενώ οι δείκτες x_1 και x_2 επιλέχθηκε να συμβολίζουν το σημείο P_1 ή P_2, στο οποίο αναφέρονται οι συνιστώσες. Ο παραπάνω συμβολισμός είναι ο πλέον συνηθισμένος στη μελέτη του Ευκλείδειου χώρου των τριών διαστάσεων ($\mathbb{R}^3$), διότι οι άξονες του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου είναι σταθερά τρεις, οπότε συμβολίζονται με τις μεταβλητές x,y και z. Οποιοδήποτε σημείο P_i στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο συμβολίζεται με σταθερό τρόπο ως $P_i(x_i, y_i, z_i)$, για παράδειγμα $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, …, $P_{100}(x_{100}, y_{100}, z_{100})$,…, $P_{1000}(x_{1000}, y_{1000}, z_{1000})$, γεγονός που διευκολύνει τη μελέτη στον $\mathbb{R}^3$.

Παρόλα αυτά, ο παραπάνω τρόπος συμβολισμού των συντεταγμένων δεν είναι μοναδικός. Έστω ότι επιλέγουμε να συμβολίσουμε τα παραπάνω σημεία P_1 και P_2 ως A και B, αντίστοιχα, με συντεταγμένες $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Όπως γίνεται αντιληπτό, σε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης επιλέχθηκε οι συντεταγμένες του κάθε σημείου να έχουν συμβολισμό χαρακτηριστικό του κάθε σημείου, δηλ το α_i να αναφέρεται σε συντεταγμένη του σημείου A, ενώ το β_i να αναφέρεται σε συντεταγμένη του σημείου B, ενώ οι δείκτες i=1,2,3 στις συνιστώσες α_i και β_i επιλέχθηκε να αναφέρονται στους άξονες του τρισδιάστατου ορθοκανονικού συστήματος (το 1 για τον άξονα των x, το 2 για τον άξονα των y και το 3 για τον άξονα των z).

Στην περίπτωση αυτή η απόσταση των σημείων A και B δίδεται από την παρακάτω σχέση:

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + (\alpha_3 - \beta_3)^2}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η απόσταση $d(P_1,P_2)$ των σημείων $P_1(\sqrt{3},0,-1)$ και $P_2(0,\sqrt{6},3)$ του $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Έχουμε:

$$d(P_1,P_2)=\left(\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{(0-\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}-0)^2+[3-(-1)]^2}=\sqrt{3+6+16}=\sqrt{25}=5$$

Παράδειγμα

Έστω δύο σημεία $P_1(2,3,4,5,6,7,8,8,8)$ και $P_2(3,3,4,4,5,6,9,9,9)$ του $\mathbb{R}^9$. Να υπολογιστεί η απόσταση $d(P_1,P_2)$.

Λύση

Έχουμε

$$d(P_1,P_2)=\left(\sum_{i=1}^{9}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{\begin{array}{l}(3-2)^2+(3-3)^2+(4-4)^2+(4-5)^2+(5-6)^2+(6-7)^2+\\+3\cdot(9-8)^2\end{array}}=$$

$$=\sqrt{1^2+0^2+0^2+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2+3\cdot(1)^2}=$$

$$=\sqrt{1+1+1+1+3}=\sqrt{7}$$

Παράδειγμα

Έστω τρία σημεία $P_1(2,1,k)$, $P_2(1,-3,0)$ και $P_3(8,0,-2)$ του $\mathbb{R}^3$. Να υπολογιστεί το $k\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει
$d(P_1,P_2)=d(P_2,P_3)$

Λύση

Έχουμε:

$$d(P_1,P_2)=\left(\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{(1-2)^2+(-3-1)^2+(0-k)^2}=\sqrt{1+16+k^2}=\sqrt{k^2+17}$$

$$d(P_2,P_3)=\left(\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{(8-1)^2+\left[0-(-3)\right]^2+(-2-0)^2}=\sqrt{49+9+4}=\sqrt{62}$$

Θέλουμε $d(P_1,P_2)= d(P_2,P_3)$, οπότε:

$$d(P_1,P_2)=d(P_2,P_3)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{k^2+17}=\sqrt{62}\overset{k^2+17\geq 0,\ \forall k\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}k^2+17=62\Leftrightarrow$$

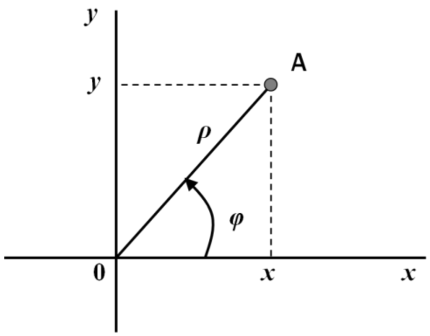
$$\Leftrightarrow k^2=62-17=45\Leftrightarrow k=\pm 3\sqrt{5}$$

Επομένως για $k=3\sqrt{5}$ και $k=-3\sqrt{5}$ ισχύει η δεδομένη συνθήκη

5.3. Πολικό σύστημα συντεταγμένων

Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης των σημείων στο επίπεδο είναι το **σύστημα των πολικών συντεταγμένων**, το οποίο αναφέρεται αποκλειστικά στο επίπεδο. Η ομοιότητά του με το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι ότι και σε αυτή την περίπτωση για τον προσδιορισμό ενός σημείου χρειαζόμαστε δύο στοιχεία (συντεταγμένες), οι οποίες ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες**. Σε αντίθεση όμως με το καρτεσιανό σύστημα, αυτή τη φορά οι συντεταγμένες δεν αναφέρονται σε προβολές στους άξονες αναφοράς, αλλά σε μία **απόσταση** *ρ* ή *r*, η οποία ονομάζεται **ακτίνα**, και σε μία **γωνία** *θ* ή *φ* (κλπ)

Ειδικότερα, ως ακτίνα στο πολικό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται **η απόσταση του σημείου *A* από την αρχή των αξόνων *O***, ενώ η γωνία *θ* είναι η αριστερόστροφη γωνία που σχηματίζει η ακτίνα *ρ* με τον οριζόντιο άξονα (των *x*).



Σχήμα 5.2. Προσδιορισμός σημείου στο πολικό σύστημα συντεταγμένων.

Η ακτίνα *ρ* είναι, ως απόσταση, πάντοτε θετική (*ρ*≥0), ενώ η γωνία θ μπορεί να διαγράφει ένα πλήρη κύκλο (0≤*θ*<2π).

Σχόλιο

Παρατηρείστε ότι η τιμή 2π δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού της γωνίας *θ*, διότι για στο μετρικό κυκλικό σύστημα ισχύει 0≡2π. Δηλαδή η γωνία ενός πλήρους κύκλου είναι ίση με μηδέν.
Από το σύστημα των πολικών συντεταγμένων μπορούμε να μεταβούμε στο καρτεσιανό σύστημα με τη χρήση **μετασχηματισμών**. Οι μετασχηματισμοί αυτοί προκύπτουν με εφαρμογή τριγωνομετρίας στο τρίγωνο που σχηματίζεται με υποτείνουσα την απόσταση *ρ*, και με κάθετες πλευρές τις συνιστώσες *x* και *y* των καρτεσιανών συντεταγμένων. Έχουμε:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} \\ \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} \\ \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{cases}$$

Σχόλιο

Η χρήση των πολικών συντεταγμένων ενδείκνυται στη μελέτη των εφαρμογών που παρουσιάζουν **κυκλική συμμετρία**. Οδηγός για την αναγνώριση τέτοιων περιπτώσεων είναι η εμφάνιση της παράστασης x^2+y^2 ή ισοδύναμων στα προβλήματα που μελετούμε.

Παράδειγμα

Να μετατραπεί το σημείο $P(6,6)$ από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες.

Λύση

Δίδεται ότι x=6 και y=6. Από τους μετασχηματισμούς των πολικών συντεταγμένων βρίσκουμε

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{cases}$$

Έχουμε:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{6}{6}=1 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(1) \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο $P(6,6)$ σε πολικές συντεταγμένες είναι το $P(6\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η καμπύλη που έχει εξίσωση στο πολικό σύστημα

$$\rho=5\left(\frac{1}{\rho}+\cos\varphi\right)$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\rho=5\left(\frac{1}{\rho}+\cos\varphi\right)\Leftrightarrow \rho^2=5\left(1+\rho\cdot\cos\varphi\right) \overset{\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{cases}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=5(1+x)\Leftrightarrow x^2-5x+y^2=5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\cdot\frac{5}{2}x\pm\left(\frac{5}{2}\right)^2+y^2=5\Leftrightarrow$$

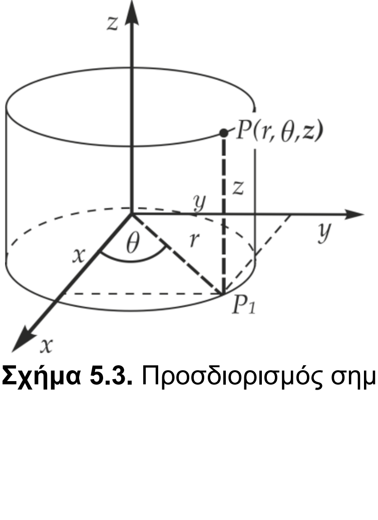
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=5+\frac{25}{4}=\frac{20+25}{4}=\frac{45}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Οπότε η ζητούμενη καμπύλη στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $O\left(\frac{5}{2},0\right)$ και ακτίνα *r*= $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

5.4. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Ουσιαστικά πρόκειται για το πολικό σύστημα στο επίπεδο (πχ. το *x*,*y*) με την προσθήκη ενός κατακόρυφου άξονα (πχ. του z). Ονομάζεται κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων γιατί με την προέκταση του πολικού συστήματος κατά τον άξονα των *z* σχηματίζεται κύλινδρος.



Σχήμα 5.3. Προσδιορισμός σημείου στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Οι μετασχηματισμοί από καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Δηλαδή για να μεταβούμε από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο κυλινδρικό μετασχηματίζουμε τις δύο πρώτες συντεταγμένες σε πολικές και διατηρούμε την Τρίτη αμετάβλητη.
Για τα πεδία ορισμού των κυλινδρικών συντεταγμένων ισχύει
$\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ και $z \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Να μετατραπεί το σημείο *P*(6,6,8) από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες.

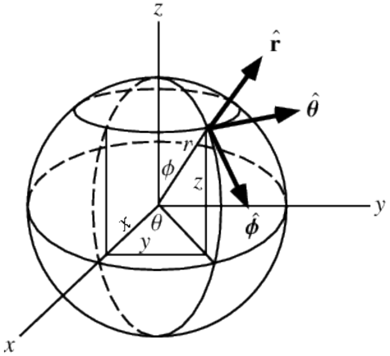
Λύση

Από προηγούμενο παράδειγμα στις πολικές συντεταγμένες έχουμε βρει ότι το σημείο *P*(6,6) σε πολικές συντεταγμένες είναι το $P(6\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Επειδή στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων η συνιστώσα *z* παραμένει ως έχει, τότε το σημείο *P*(6,6,8) γράφεται σε πολικές συντεταγμένες $P(6\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 8)$.

5.5. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Το **σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων** αποτελεί ένα χρήσιμο σύστημα συντεταγμένων για τις περιπτώσεις προβλημάτων που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία, όπως το βαρυντικό πεδίο της γης. Το σύστημα αυτό περιέχει το πολικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, αλλά στην περίπτωση αυτή έχουμε διαφορετικό χειρισμό της τρίτης συνιστώσας. Σε αντίθεση με το κυλινδρικό σύστημα, στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων η τρίτη συντεταγμένη μετριέται επίσης με γωνία, την οποία συμβολίζουμε με *φ*: Ένα σημείο *P* στο σύστημα αυτό περιγράφεται από τις συνιστώσεις

***P*(*r*,*θ*,*φ*)**
όπου
r είναι η απόσταση από την αρχή (η ακτίνα) ($r \geq 0$).
θ είναι η γωνία που ορίζεται όπως και η πολική ($0 \leq \theta < 2\pi$).
και *φ* είναι η **δεξιόστροφη γωνία που μετριέται πάντα από το θετικό ημιάξονα των *z***, με $0 \leq \varphi \leq \pi$.



Σχήμα 5.4. Προσδιορισμός σημείου στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Οι μετασχηματισμοί από το καρτεσιανό στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων είναι οι εξής:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Παράδειγμα

Ένας σφαιρικός πλανήτης έλκει ένα γειτονικό ουράνιο σώμα με δύναμη *F* που δίνεται από τη σχέση:

$$F(r) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

όπου m_1, m_2 είναι οι μάζες των δύο πλανητών, *G* η παγκόσμια βαρυτική σταθερά, και *r* η μεταξύ των πλανητών απόσταση. Να εκφραστεί η παραπάνω σχέση στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ποια από τις δύο σχέσεις συμφέρει έναν μελετητή να χρησιμοποιήσει και γιατί;

Λύση

Γνωρίζουμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς από το καρτεσιανό στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ z = r\cdot\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = r^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta \\ y^2 = r^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta \\ z^2 = r^2\cdot\cos^2\theta \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη και έχουμε

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta + r^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta +$$
$$+r^2\cdot\cos^2\theta = r^2\left(\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=$$
$$=r^2\left[\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta\right]=$$
$$=r^2\left(1\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=r^2\cdot 1=r^2$$

Επομένως, η μαθηματική έκφραση της βαρυτικής δύναμης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων γράφεται:

$$F(r) = -G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2} \Rightarrow F(x,y,z) = -G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{x^2+y^2+z^2}$$

Προφανώς, η χρήση της σχέσης *F*(*r*) είναι περισσότερο συμφέρουσα από τη χρήση της σχέσης *F*(*x*,*y*,*z*), διότι στη δεύτερη περίπτωση χρειαζόμαστε περισσότερη πληροφορία (τρία στοιχεία, τα *x*,*y* και *z*) για να περιγράψουμε την απόσταση των σωματιδίων.

Σχόλιο

Όπως διαφάνηκε στο κεφάλαιο αυτό, για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο χώρο των *n*-διαστάσεων χρειάζονται ακριβώς *n* στοιχεία, ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

1. Καρανικόλας, Ν., (2011) *Εισαγωγή στο Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών*, Β΄ Έκδοση, Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη.
2. Marsden, J., Tromba, A., (2005) *Διανυσματικός Λογισμός*, Γιαννόπουλος, Α., (επ) Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

3. Πολύζος, Σ., (2011) *Περιφερειακή Ανάπτυξη*, Αθήνα, Εκδόσεις Κριτική
4. Τσίτσας, Λ., (2003) *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός,* Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο}

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

6.1. Γενικά

Η ανάπτυξη της Άλγεβρας διανυσμάτων καθιερώθηκε στις Φυσικές Επιστήμες και ιδίως στη Μηχανική. Υπάρχουν ορισμένα μεγέθη όπως η **μάζα**, η **θερμοκρασία** και η **απόσταση** τα οποία προσδιορίζονται μόνο με το μέτρο τους (στη φυσική χρειάζεται και η κατάλληλη μονάδα μέτρησης). Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**.

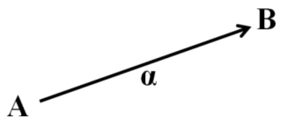
Υπάρχουν όμως και μεγέθη όπως η **ταχύτητα**, η **δύναμη**, η **ορμή**, η **μετατόπιση** κ.α., τα οποία για να προσδιοριστούν επακριβώς δεν είναι αρκετό να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο τους (και τη μονάδα μέτρησης). Αυτά τα μεγέθη για να τα προσδιορίσουμε χρειάζεται να ξέρουμε επιπλέον πληροφορίες για τη θέση τους στο χώρο. Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται **διανυσματικά μεγέθη** ή απλώς **διανύσματα**.

Το πλεονεκτήματα της χρήσης διανυσμάτων είναι η πραγματοποίηση **αλγεβρικών πράξεων με γεωμετρική ερμηνεία**, δηλαδή αλγεβρικές πράξεις που εμπεριέχουν χωρική (γεωμετρική) πληροφορία.

Ορισμός:

Ευκλείδειο διάνυσμα ή απλά διάνυσμα ή άνυσμα (vector) ονομάζεται ένα προσανατολισμένο το ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα, με το πρώτο άκρο να ονομάζεται **αρχή** του διανύσματος ή **σημείο εφαρμογής** και το δεύτερο **πέρας** του διανύσματος.

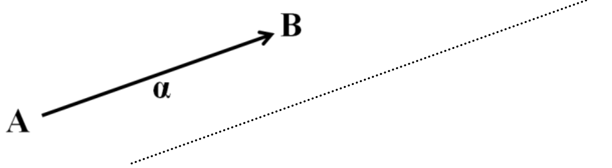
Ένα διάνυσμα με αρχή το Α και πέρας το Β παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινά από το σημείο Α και καταλήγει στο Β. Συμβολίζεται είτε χρησιμοποιώντας τα άκρα του $\overrightarrow{AB}$, είτε με ένα ενιαίο σύμβολο $\vec{a}$, είτε χωρίς βέλη $\overline{AB}$ και $\bar{a}$, είτε άλλοτε στη βιβλιογραφία με **έντονα γράμματα** (**bold**) ***a***.



Σχήμα 6.1. Αναπαράσταση διανύσματος **α**.

Το διάνυσμα χαρακτηρίζεται από τρία στοιχεία: το **μήκος** ή **μέτρο**, τη **διεύθυνση** ή **φορέα** και τη **φορά**. Τα τελευταία δύο ονομάζονται **κατεύθυνση** του διανύσματος.

- **Μέτρο** ή **μήκος** ενός διανύσματος ονομάζεται η απόσταση μεταξύ των άκρων του **Α** και **Β**, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ**. **Συμβολίζεται** με $|\overrightarrow{AB}|$ ή $|\vec{a}|$ ή $|\boldsymbol{\alpha}|$ ή όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με *α*. Αν το διάνυσμα έχει μέτρο 1 τότε ονομάζεται **μοναδιαίο διάνυσμα** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα **e.**
- **Φορέας** ή **διεύθυνση** ενός μη μηδενικού διανύσματος ονομάζεται η **ευθεία** πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα. Για παράδειγμα φορέας του διανύσματος είναι η ευθεία **ΑΒ**.



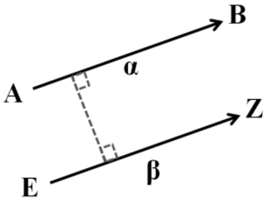
Σχήμα 6.2. Φορέας ή διεύθυνση διανύσματος.

Αν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{EZ}$ έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς λέγονται **συγγραμμικά** ή **παράλληλα** και λέμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουν ίδια **διεύθυνση**. Γράφουμε:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EZ}$

- **Φορά** ενός μη μηδενικού διανύσματος ονομάζεται ο **προσανατολισμός του πέρατός** του, δηλαδή η θέση πάνω στη διεύθυνση του διανύσματος που βρίσκεται το πέρας του. Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε **ομόρροπα** και **αντίρροπα**.

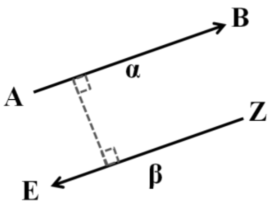
Ομόρροπα είναι τα διανύσματα που έχουν **παράλληλους φορείς** και **ίδια φορά**, δηλαδή **ίδια κατεύθυνση**:



Σχήμα 6.3. Ομόρροπα διανύσματα.

Για τα ομόρροπα διανύσματα γράφουμε
$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EZ}$

Αντίρροπα είναι τα διανύσματα που έχουν **παράλληλους φορείς** και **αντίθετη φορά**, δηλαδή **αντίθετη κατεύθυνση**:



Σχήμα 6.4. Αντίρροπα διανύσματα.

Για τα αντίρροπα διανύσματα γράφουμε
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EZ}$

6.2. Καρτεσιανή αναπαράσταση διανυσμάτων στο χώρο

Τα διανύσματα αναπαρίστανται στο **χώρο των *n*-διαστάσεων** με τη χρήση του **καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων**.
Έστω (x_1, x_2,…, x_n) οι **συντεταγμένες** ενός διανύσματος $\boldsymbol{x}$ ως προς την **ορθοκανονική *n*-διάστατη βάση** **e**=($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,…, $\boldsymbol{e}_n$). Η ορθοκανονική βάση αποτελείται από n μοναδιαία διανύσματα ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,…, $\boldsymbol{e}_n$), καθένα

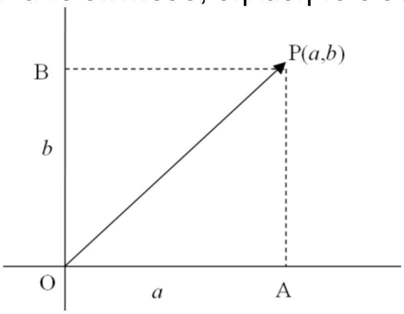
προς την κατεύθυνση των αξόνων που συνθέτουν τον εκάστοτε χώρο. Στην περίπτωση μας εργαζόμαστε στο n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Τότε το **x** γράφεται:

$\mathbf{x} = x_1\, \boldsymbol{e_1} + x_2\, \boldsymbol{e_2} + \ldots + x_n\, \boldsymbol{e}_n$

την έκφραση αυτή θα την ονομάζουμε **διανυσματική αναπαράσταση του x,** ή απλούστερα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Την έκφραση αυτή θα την ονομάζουμε **καρτεσιανή αναπαράσταση του x**.

Για το **επίπεδο**, δηλαδή το δισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο έχουμε:



Σχήμα 6.5. Αναπαράσταση διανύσματος ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

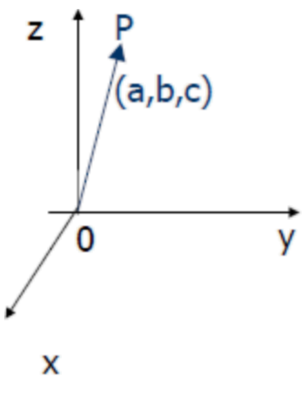
και γράφουμε:

$\mathbf{x} = a\, \boldsymbol{e}_1 + b\, \boldsymbol{e}_2 = a\, \boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$

ή

$\mathbf{x} = (a,b)$

Για τον **τρισδιάστατο** χώρο έχουμε:



Σχήμα 6.6. Αναπαράσταση διανύσματος ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στον τρισδιάστατο χώρο.

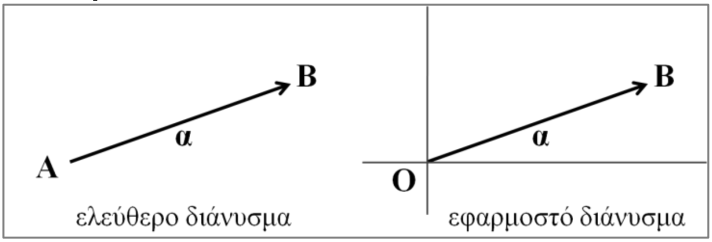
και γράφουμε:

$\mathbf{x} = a\,\boldsymbol{e}_1 + b\,\boldsymbol{e}_2 + c\,\boldsymbol{e}_3 = a\,\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$

ή

$\mathbf{x} = (a,b,c)$

Ένα διάνυσμα που το σημείο εφαρμογής του βρίσκεται σε καθορισμένη θέση (σημείο) στον καρτεσιανό χώρο (έστω στην αρχή των αξόνων) ονομάζεται **εφαρμοστό**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **ελεύθερο**.



Σχήμα 6.7. Ελεύθερο (αρ.) και εφαρμοστό διάνυσμα (δεξ.).

Το **μέτρο διανύσματος** με χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων ονομάζεται και **νόρμα** και προκύπτει από την εφαρμογή του γενικευμένου **Πυθαγορείου Θεωρήματος**. Στην περίπτωση του επιπέδου, ισούται με την υποτείνουσα του τριγώνου που έχει κάθετες πλευρές τις ορθοκανονικές συνιστώσες (a,b).

Γράφουμε

$$|\mathbf{x}| = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Στην περίπτωση n-διαστάσεων, όταν δηλαδή $\mathbf{x}=(x_1,x_1,\ldots, x_n)$, το μέτρο του διανύσματος **x** (η διανυσματική νόρμα) γράφεται:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}\right]^{1/2} = \sqrt{\sum_{n} x_n^{\ 2}}$$

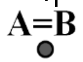
Σχόλιο

Το μέτρο διανύσματος είναι πάντοτε θετικός αριθμός γιατί αντιστοιχεί σε μήκος ευθύγραμμου τμήματος. Για το λόγο αυτό όταν υπολογίζουμε το μέτρο με χρήση της Ευκλείδειας μετρικής $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_n a_n^2}$, λαμβάνουμε μόνο τη θετική τιμή που παράγεται από την τετραγωνική ρίζα, αιτιολογώντας ότι $\|\mathbf{a}\| \geq 0$.

6.3. Πράξεις και Ιδιότητες διανυσμάτων

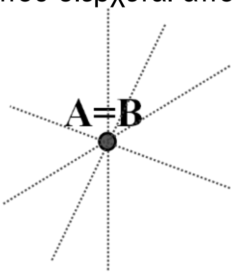
6.3.1. Μηδενικό Διάνυσμα

Είναι το διάνυσμα του οποίου η **αρχή** Α **και το πέρας** Β **συμπίπτουν**, δηλαδή **Α≡Β** και συμβολίζεται με $\vec{0}$ ή **0**. Για παράδειγμα τα διανύσματα $\overrightarrow{AA}$ ή $\overrightarrow{BB}$ είναι μηδενικά.



Σχήμα 6.8. Το μηδενικό διάστημα ισοδυναμεί με ένα σημείο.

Προφανώς το μηδενικό διάνυσμα ταυτίζεται με ένα σημείο στο χώρο. Ως **φορέα ενός μηδενικού διανύσματος** θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από την αρχή του.



Σχήμα 6.9. Το μηδενικό διάστημα έχει άπειρες κατευθύνσεις.

6.3.2. Μοναδιαίο Διάνυσμα

Είναι το διάνυσμα **e** του οποίου το **μέτρο ισούται με τη μονάδα**, δηλαδή $|\mathbf{e}| = \|\mathbf{e}\| = 1$. Η καρτεσιανή βάση (***i***,***j***,***k***) αποτελείται από τα μοναδιαία διανύσματα $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$, με ***i*** = (1,0,0), ***j*** = (0,1,0) και ***k*** = (0,0,1).

6.3.3. Ισότητα διανυσμάτων

Δύο μη μηδενικά διανύσματα ονομάζονται **ίσα** όταν έχουν **ίδια κατεύθυνση** (**διεύθυνση** και **φορά**) και ίσα **μέτρα.** Δηλαδή τα διανύσματα $\overline{AB}$ και $\overline{EZ}$ είναι ίσα $\overline{AB}=\overline{EZ}$ όταν:

- $|\overline{AB}|=|\overline{EZ}|$
- $\overline{AB}\in\varepsilon_1$, $\overline{EZ}\in\varepsilon_2$: $\varepsilon_1\|\varepsilon_2$
- $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{EZ}$

6.3.4. Αντίθετα διανύσματα

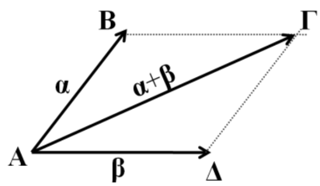
Δύο μη μηδενικά διανύσματα ονομάζονται **αντίθετα** όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα, δηλαδή:

- $|\overline{AB}|=|\overline{EZ}|$
- $\overline{AB}\in\varepsilon_1$, $\overline{EZ}\in\varepsilon_2$: $\varepsilon_1\|\varepsilon_2$
- $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{EZ}$

6.3.5. Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

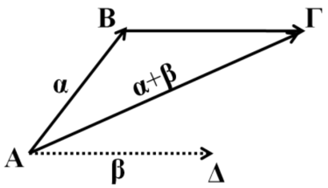
Πραγματοποιείται για **ελεύθερα διανύσματα** με τον **κανόνα του παραλληλογράμμου**.

1^{ος} τρόπος (μέθοδος του παραλληλογράμου): **Μετατοπίζουμε παράλληλα** τα διανύσματα ώστε να έχουν **κοινό σημείο εφαρμογής** (το **Α**) και σχεδιάζουμε την υποτείνουσα του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται.



Σχήμα 6.10. Πρόσθεση διανυσμάτων με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.

2^{ος} τρόπος (μέθοδος της μετόπισης): **Μετατοπίζουμε παράλληλα** το **δεύτερο διάνυσμα** ώστε το **σημείο εφαρμογής** του να **συμπίπτει με το πέρας του πρώτου** και έπειτα **ενώνουμε** το **σημείο εφαρμογής του πρώτου με το πέρας του δεύτερου**.



Σχήμα 6.11. Πρόσθεση διανυσμάτων με τη μέθοδο της μετατόπισης.

Για τα **διανύσματα** στο **καρτεσιανό χώρο** πραγματοποιείται με άθροιση των συντεταγμένων τους:

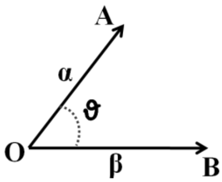
v = (a,b), **w** = (a΄,b΄)

v + **w** = (a+a΄,b+b΄)

v - **w** = (a-a΄,b-b΄)

6.3.6. Γωνία δύο διανυσμάτων

Γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων ονομάζουμε τη κυρτή γωνία που σχηματίζουν αν τα μετατοπίσουμε παράλληλα ώστε να έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.



Σχήμα 6.12. Γωνία δύο διανυσμάτων.

Η γωνία των διανυσμάτων είναι ανεξάρτητη από το σημείο εφαρμογής που επιλέγουμε. Συμβολίζεται με $\widehat{(\mathbf{\alpha},\mathbf{\beta})}$ ή χρησιμοποιώντας για **α** και **β** τον εκάστοτε συμβολισμό των διανυσμάτων αντίστοιχα ή, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, με τον απλό συμβολισμό των γωνιών με γράμματα, όπως *θ*, *φ*, *ω* κλπ.

Έστω δύο διανύσματα **α** και **β**, έστω *α*,*β* τα μέτρα τους αντίστοιχα και *θ* η γωνία τους. Με χρήση της γωνίας *θ* ορίζεται η προβολή του διανύσματος **α** πάνω στο **β** ως εξής, η οποία συμβολίζεται ως $\pi\rho o\beta_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{\alpha}$ ή $prob_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{\alpha}$. Ως όρισμα **α** στο συμβολισμό της προβολής γράφουμε το διάνυσμα που προβάλλουμε πάνω στο διάνυσμα υποδοχέα **β**, το οποίο διάνυσμα υποδοχέα το γράφουμε ως δείκτη.

Το **μοναδιαίο διάνυσμα** στην κατεύθυνση του **β** ισούται με $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}/\beta$.

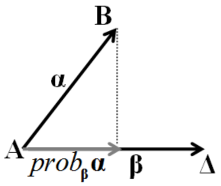
Η συνιστώσα του διανύσματος **α** στην κατεύθυνση του **β** ισούται με

$$prob_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha} = \alpha \cdot \cos\theta \cdot \mathbf{e}_{\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \cos\theta\right) \cdot \boldsymbol{\beta}$$

ή

$$prob_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha} = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot \cos\theta \cdot \mathbf{e}_{\beta} = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot \cos\theta \cdot \frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|} = \left(\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\beta}|}\cos\theta\right) \cdot \boldsymbol{\beta}$$

και ονομάζεται προβολή του α πάνω στο β $prob_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}$.



Σχήμα 6.13. Πρόσθεση διανυσμάτων με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.

6.3.7. Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού *λ* με ένα διάνυσμα **α** ονομάζεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** και αφορά τη μεταβολή του μέτρου του διανύσματος **α** κατά λ, **δίχως τη μεταβολή της διεύθυνσης** του διανύσματος. Δηλαδή, για $\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{e}$ είναι:

$\boldsymbol{\alpha}'=\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda|\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{e}=(\lambda|\boldsymbol{\alpha}|)\mathbf{e}$

Στην καρτεσιανή αναπαράσταση αν $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$ ισχύει ότι:

$\boldsymbol{\alpha}'=\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n)=\lambda\alpha_1\mathbf{e_1}+\lambda\alpha_2\mathbf{e_2}+\ldots+\lambda\alpha_n\mathbf{e}_n=(\lambda\alpha_1)\mathbf{e_1}+(\lambda\alpha_2)\mathbf{e_2}+\ldots+(\lambda\alpha_n)\mathbf{e}_n=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2,\ldots, \lambda\alpha_n)$.

Όταν λ>0 ισχύει: $\boldsymbol{\alpha}'=\lambda\boldsymbol{\alpha}\uparrow\uparrow\boldsymbol{\alpha}$

Όταν λ<0 ισχύει: $\boldsymbol{\alpha}'=\lambda\boldsymbol{\alpha}\uparrow\downarrow\boldsymbol{\alpha}$

Πόρισμα

Οποιοδήποτε διάνυσμα μπορούμε να το ανάγουμε σε μοναδιαίο αν το διαιρέσουμε με το μέτρο του, δηλαδή:
v = (a,b), **v** ≠ **0** → το **v**/|*v*| = **v**/*v* έχει μέτρο 1.

Απόδειξη

Προφανώς $\left|\dfrac{\mathbf{v}}{v}\right| = \dfrac{|v|}{|v|} = 1$

Για κάθε διάνυσμα **α**,**β** και για κάθε πραγματικό αριθμό *λ*,*μ* αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
1. λ(**α**+**β**) = λ**α** + λ**β**

Απόδειξη

1ος τρόπος:

λ(**α**+**β**) = λ $\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}$ (**α**+**β**) = λ $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|$. $\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}$ = λ($|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|$ ·$\mathbf{e}_{\alpha+\beta}$) = λ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ·$\mathbf{e}_{\alpha+\beta}$ =(χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε λ>0)= $\sqrt{\lambda^2\alpha^2+\lambda^2\beta^2}$ ·$\mathbf{e}_{\alpha+\beta}$ =(κανόνας παραλληλογράμμου)= λα·$\mathbf{e}_{\alpha}$ + λα·$\mathbf{e}_{\beta}$ = λ**α** + λ**β**

2ος τρόπος (με καρτεσιανή αναπαράσταση):

λ(**α**+**β**) = λ($\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_2+\beta_2$,…, $\alpha_n+\beta_n$) = (λα_1+ λβ_1, λα_2+ λβ_2,…, λα_n+ λβ_n)= (λα_1, λα_2,…, λα_n) + (λβ_1, λβ_2,…, λβ_n)= λ**α** + λ**β**
2. (λ+μ)**α** = λ**α** + μ**α**

Απόδειξη: Όμοια
3. λ(μ**α**) = (λμ)**α**

Απόδειξη: Όμοια

Πόρισμα

Δύο διανύσματα **α**,**β** είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός *λ*, ώστε **α**=*λ***β**.

Απόδειξη

Ευθύ: Έστω ότι $\boldsymbol{\alpha} \| \boldsymbol{\beta}$. Τότε από προηγούμενο πόρισμα ισχύει ότι **α**/α=**β**/β⇔ **α** =(α/β)**β** → λ=(α/β)

Αντίστροφο: Έστω ότι υπάρχει λ πραγματικός, ώστε **α**=λ**β**. Τότε **α**=α·$\mathbf{e}_a$ και **β**=β·$\mathbf{e}_a$

Άσκηση

Να υπολογίσετε **με δύο τρόπους** το μήκος του αθροίσματος των διανυσμάτων **α**=(1,0,5) και **β**=(2,1,1) και το μήκος της διαφοράς τους.

Λύση

Για το άθροισμα των διανυσμάτων έχουμε:

1ος τρόπος: (Με διανυσματική άθροιση):

Θεωρώ τη διανυσματική βάση του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου (***i***,***j***,***k***). Είναι **α**=1***i***+0***j***+5***k*** και **β**=2***i***+1***j***+1***k***. Έχουμε:

α+**β**=1***i***+0***j***+5***k*** + 2***i***+1***j***+1***k*** = (1+2)***i***+(0+1)***j***+(5+1)***k*** = 3***i***+1***j***+6***k***

Επομένως το μέτρο του αθροίσματος είναι:

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{3^2+1^2+6^2} = \sqrt{9+1+36} = \sqrt{46} = \sqrt{2\cdot 23}$$

2ος τρόπος (Με απευθείας άθροιση των καρτεσιανών συντεταγμένων):

Έχουμε

α+**β**=(1,0,5)+(2,1,1)=(1+2, 0+1, 5+1) = (3,1,6)

Το μέτρο του αθροίσματος υπολογίζεται όπως παραπάνω

Για τη διαφορά των διανυσμάτων έχουμε:

1ος τρόπος: (Με διανυσματική άθροιση) Θεωρώ τη διανυσματική βάση (***i***,***j***,***k***). Τότε:

α+**β**=1***i***+0***j***+5***k*** - 2***i***+1***j***+1***k*** = (1-2)***i***+(0-1)***j***+(5-1)***k*** = -1***i***-1***j***+4***k***

Επομένως το μέτρο του αθροίσματος είναι:

$$\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 9} = 3\sqrt{2}$$

2^{ος} τρόπος: (Με απευθείας άθροιση των καρτεσιανών συντεταγμένων) Έχουμε

α-**β**=(1,0,5)-(2,1,1)=(1-2, 0-1, 5-1) = (-1,-1,4)

Το μέτρο του αθροίσματος υπολογίζεται όπως παραπάνω.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

1. Καρανικόλας, Ν., (2011) *Εισαγωγή στο Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών*, Β΄ Έκδοση, Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη.
2. Marsden, J., Tromba, A., (2005) *Διανυσματικός Λογισμός*, Γιαννόπουλος, Α., (επ) Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
3. Τσίτσας, Λ., (2003) *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός,* Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{o}

ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

7.1. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Το **εσωτερικό** ή **βαθμωτό** ή **αριθμητικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων αποτελεί βασικό μέγεθος στη μελέτη των διανυσμάτων και γενικά του διανυσματικού λογισμού. Η χρήση του βοηθά στον υπολογισμό της γωνίας που σχηματίζουν δύο διανύσματα και στον έλεγχο της καθετότητάς τους, καθώς και σε πολλές εφαρμογές στη Φυσική.

Ορισμός

Εσωτερικό γινόμενο $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ δύο διανυσμάτων **α** και **β** ονομάζεται ο αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του μέτρου των διανυσμάτων *α* και *β* αντίστοιχα επί τη γωνία *θ* που σχηματίζουν. Ισχύει:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \cdot \cos(\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \cdot \cos\theta = \alpha \cdot \beta \cdot \cos(\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta}) =$$

$$= \alpha \cdot \beta \cdot \cos\theta$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **α** και **β** συμβολίζεται είτε με τη χρήση αγκυλών, ως $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$, είτε απλά ως γινόμενο των διανυσμάτων **α**·**β**.

Δηλαδή ισχύει $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ = α·β

Σχόλιο

Το εσωτερικό γινόμενο εκφράζει γεωμετρικά το γινόμενο του μήκους του ενός διανύσματος επί του μήκους της προβολής του δεύτερου διανύσματος πάνω στο πρώτο. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \cdot \cos\theta$

αντικαθιστώντας $|prob_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot \cos\theta$ ή $|prob_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\beta}| \cdot \cos\theta$, οπότε

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |prob_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}| = |prob_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\beta}| \cdot |\boldsymbol{\alpha}|$

Για το εσωτερικό γινόμςνο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1*η* *ιδιότητα*: $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq 0$

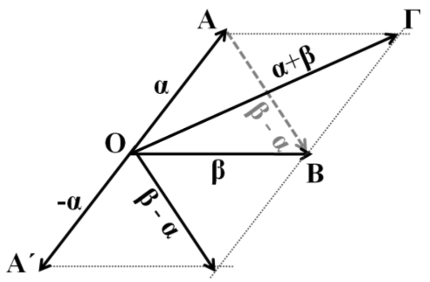
Απόδειξη

Από τον ορισμό έχουμε

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\alpha}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 \cdot 1 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 \geq 0$.

Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο για να εκφράσουμε την **απόσταση ανάμεσα στις κορυφές δύο διανυσμάτων α** και **β** ως εξής:

Η διαφορά των διανυσμάτων **β-α** είναι το διάνυσμα που αποτελείται από τη δεύτερη διαγώνιο όταν εφαρμόσουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση τους.



Σχήμα 7.1. Πρόσθεση διανυσμάτων με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.

Επομένως, η απόσταση των δύο κορυφών (των σημείων πέρατος) των διανυσμάτων **α** και **β** ως με χρήση του εσωτερικού γινομένου ορίζεται ως εξής:

$$\|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\| = \langle \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\rangle^{1/2} = \sqrt{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})} =$$
$$= \sqrt{(\beta_1-\alpha_1)^2+(\beta_2-\alpha_2)^2+\ldots+(\beta_n-\alpha_n)^2}$$

Σχόλιο: Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο Ευκλείδειος χώρος αποτελεί χώρο εσωτερικού γινομένου, με αποτέλεσμα η Ευκλείδεια απόσταση να περιγράφεται και με τη χρήση της συνάρτησης του *εσωτερικού γινομένου* (*dot product*). Η απόσταση δύο διανυσμάτων x και y με χρήση του εσωτερικού γινομένου δίδεται από τη σχέση.

$$d_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle^{1/2} = \sqrt{(\mathbf{y}-\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} =$$
$$= \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}$$

$2^η$ *ιδιότητα*: $\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=0$

Απόδειξη

Από τον ορισμό έχουμε

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle = |\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\cdot\cos(\boldsymbol{\alpha}\hat{,}\boldsymbol{\alpha}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2\cdot 1 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 .$$

Αν ισχύει $\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle = 0$ έχουμε

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle = 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}|^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=0$$

γιατί το μοναδικό διάνυσμα με μέτρο ίσο με το μηδέν είναι το μηδενικό.

$3^η$ *ιδιότητα*: Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\langle \lambda\cdot\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \lambda\cdot\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ και $\langle \boldsymbol{\alpha},\lambda\cdot\boldsymbol{\beta}\rangle = \lambda\cdot\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$

Απόδειξη

Προφανώς

$$\langle \lambda\cdot\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = |\lambda\cdot\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\cdot\cos(\boldsymbol{\alpha}\hat{,}\boldsymbol{\beta}) = \lambda\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\cdot\cos(\boldsymbol{\alpha}\hat{,}\boldsymbol{\beta}) = \lambda\cdot\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$$

$4^η$ *ιδιότητα*: $\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle + \langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle$

και $\langle \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle + \langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$

Απόδειξη

Προκύπτει από την εφαρμογή του παρακάτω πορίσματος

Πόρισμα 7.1
Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύει

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \beta_i .$$

Απόδειξη

Θεωρώ τη διανυσματική βάση του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,…, $\boldsymbol{e}_n$). Είναι **α**=$\alpha_1\boldsymbol{e}_1$+ $\alpha_2\boldsymbol{e}_2$+…+ $\alpha_n\boldsymbol{e}_n$ και **β**=$\beta_1\boldsymbol{e}_1$+ $\beta_2\boldsymbol{e}_2$+…+ $\beta_n\boldsymbol{e}_n$. Έχουμε:

$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$=$(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 +\ldots+ \alpha_n\boldsymbol{e}_n) \cdot (\beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 +\ldots+ \beta_n\boldsymbol{e}_n) = (\alpha_1\cdot\beta_1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + (\alpha_1\cdot\beta_2)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 +\ldots+ (\alpha_1\cdot\beta_n)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_n + (\alpha_2\cdot\beta_1)\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 + (\alpha_2\cdot\beta_2)\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 +\ldots+ (\alpha_2\cdot\beta_n)\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_n +\ldots+ (\alpha_n\cdot\beta_1)\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_1 + (\alpha_n\cdot\beta_2)\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_2 +\ldots+ (\alpha_n\cdot\beta_n)\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_n$

Όμως τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,…, $\boldsymbol{e}_n$ είναι ανά δύο κάθετα, οπότε ισχύει $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$=0, για κάθε $i\neq j$, ενώ $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$=1 όταν $i=j$. Επομένως, η παραπάνω παράσταση γίνεται:

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \alpha_1\cdot\beta_1\cdot\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + \alpha_2\cdot\beta_2\cdot\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\beta_n\cdot\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n =$$

$$= \alpha_1\cdot\beta_1 + \alpha_2\cdot\beta_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\beta_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_i$$

Με βάση το παραπάνω πόρισμα έχουμε:

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\rangle = \alpha_1\cdot(\beta_1+\gamma_1) + \alpha_2\cdot(\beta_2+\gamma_2) + \ldots + \alpha_n\cdot(\beta_n+\gamma_n) =$$

$$= \alpha_1\cdot\beta_1 + \alpha_1\cdot\gamma_1 + \alpha_2\cdot\beta_2 + \alpha_2\cdot\gamma_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\beta_n + \alpha_n\cdot\gamma_n =$$

$$= (\alpha_1\cdot\beta_1 + \alpha_2\cdot\beta_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\beta_n) + (\alpha_1\cdot\gamma_1 + \alpha_2\cdot\gamma_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\gamma_n) =$$

$$= \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle + \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle$$

Όμοια αποδεικνύεται και η $\langle \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle + \langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$.

5^{η} *ιδιότητα*: $\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$

Απόδειξη

Προκύπτει προφανώς από την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, ως εξής:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}) = |\boldsymbol{\beta}| \cdot |\boldsymbol{\alpha}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}) = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε **με δύο τρόπους** το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **α**=(1,0,5) και **β**=(2,1,1).

Λύση

1ος τρόπος: (Με διανυσματική αναπαράσταση) Θεωρώ τη διανυσματική βάση του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου (***i***,***j***,***k***). Είναι **α**=1***i***+0***j***+5***k*** και **β**=2***i***+1***j***+1***k***. Έχουμε:

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$=(1***i***+0***j***+5***k***)·(2***i***+1***j***+1***k***) = (1·2)***i***·***i*** + (1·1)***i***·***j*** + (1·1)***i***·***k*** + (0·2)***j***·***i*** + (0·1)***j***·***j*** + (0·1)***j***·***k*** + (5·2)***k***·***i*** + (5·1)***k***·***j*** + (5·1)***k***·***k***

Όμως τα διανύσματα ***i***,***j*** και ***k*** είναι ανά δύο κάθετα, οπότε ισχύει ***i***·***j***=***i***·***k***=***j***·***k***=0, ενώ ***i***·***i***=***j***·***j*** =***k***·***k*** =1. Επομένως, η παραπάνω παράσταση γίνεται:

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$= (1·2) ·1 + (1·1)·0 + (1·1)·0 + (0·2)·0 + (0·1)·1 + (0·1)·0 + (5·2)·0 + (5·1)·0 + (5·1)·1 = 2+5=7

2ος τρόπος: (Με χρήση της καρτεσιανής αναπαράστασης) Χρησιμοποιώ τον τύπο

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \beta_i$$

και έχω

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 2 + 5 = 7$$

Άσκηση

Να αποδειχθεί η ανίσωση του **Cauchy**

$$\sum_n a_n \cdot \beta_n \le \left(\sum_n {a_n}^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_n {\beta_n}^2\right)^{1/2}$$

Λύση

Έστω δύο διανύσματα **α**=(α_1,α_2,…,α_n) και **β**=(β_1,β_2,…,β_n). Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \cos(\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta})$$

όπου είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα **α** και **β**. Η ανίσωση του Cauchy αποδεικνύεται αν παρατηρήσουμε ότι:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \beta_n$$

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}$$

$$|\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2}$$

και ότι :

$$\cos(\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta}) \le 1$$

(να λυθεί ως άσκηση)

7.1.1. Υπολογισμός γωνίας δύο διανυσμάτων

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = |\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}| \cdot \cos(\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta}) \Leftrightarrow \cos(\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta}) = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta}) = \arccos\left(\frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|}\right)$$

Περαιτέρω από το Πόρισμα του ορισμού του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι:

$$(\boldsymbol{\alpha} \hat{,} \boldsymbol{\beta}) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}}\right)$$

Από τα παραπάνω καθίσταται προφανές ότι το εσωτερικό γινόμενο συνεισφέρει στον υπολογισμό της γωνίας που σχηματίζουν δύο διανύσματα στο χώρο.

Άσκηση

Ποια είναι η ελάχιστη γωνία των διανυσμάτων **α**=(k,k^2,2), με $k \in \mathbb{R}$, και **β**=(-2,1,1/2), όταν k=0; Για ποιες άλλες γωνίες ισχύει η παραπάνω συνθήκη (k=0);

Λύση

Για k=0 το διάνυσμα **α** γίνεται **α**=(0,0,2).

Η γωνία $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ βρίσκεται από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|}$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \rangle}{|\boldsymbol{\alpha}| \cdot |\boldsymbol{\beta}|} = \frac{0\cdot(-2)+0\cdot 1+2\cdot(1/2)}{\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(1/2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{4+1+(1/4)}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4+1+(1/4)}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{21}{4}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{21} \Rightarrow (\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = arc\cos\left(\frac{\sqrt{21}}{21}\right) \approx 77.4^{o}$$

Η οικογένεια των γωνιών που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη είναι

$$(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = k\cdot 360^{o} + 77.4^{o}, \quad \text{όπου } k \in \mathbb{Z}$$

διότι ισχύει $\cos(77.4^{o}) = \cos(-77.4^{o})$

7.1.2. Καθετότητα δύο διανυσμάτων

Όταν δύο διανύσματα **α** και **β** είναι κάθετα μεταξύ τους (**α**$\perp$**β**) τότε τι εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν. Αυτό ισχύει διότι το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων ισούται με μηδέν όταν $\theta = \frac{\pi}{2}$ ή $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση ως γωνία των διανυσμάτων λαμβάνεται πάλι η κυρτή γωνία, δηλαδή η $(\widehat{\mathbf{\alpha},\mathbf{\beta}}) = \frac{\pi}{2}$, οπότε η συνθήκη της καθετότητας των διανυσμάτων με τη χρήση του εσωτερικού γινομένου αποτελεί **ικανή και αναγκαία συνθήκη**.

Άσκηση

Να βρεθεί το διάνυσμα **α**, με **α**=(k,k^2,2) $k \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι κάθετο στο διάνυσμα **β**=(-2,1,1/2).

Λύση

Για να είναι τα διανύσματα **α** και **β** κάθετα θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με το μηδέν. Έχουμε:

$$\langle \mathbf{\alpha},\mathbf{\beta} \rangle = 0 \Leftrightarrow k\cdot(-2) + k^2\cdot 1 + 2\cdot 1/2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Άρα το ζητούμενο διάνυσμα είναι **α**=(k,k^2,2)

7.2. Εξωτερικό/Διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Μέχρι στιγμής έχει ορισθεί ο πολλαπλασιασμός δύο διανυσμάτων **α** και **β** με τη χρήση του εσωτερικού γινομένου ως βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή ως ένας αριθμός. Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται ένας μηχανισμός για τον πολλαπλασιασμό των διανυσμάτων **α** και **β**, **του οποίου το αποτέλεσμα παράγει ένα διάνυσμα** και όχι έναν αριθμό. Ο πολλαπλασιασμός αυτός των διανυσμάτων **ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο** (**vector or cross product**) των **α** και **β** και συμβολίζεται με τη χρήση του συμβόλου «×», δηλαδή **α**×**β**. Για τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου χρησιμοποιούμε την έννοια της ορίζουσας det(**A**) ενός πίνακα **A**, όπως αυτή ορίστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Ορισμός

Εξωτερικό *ή* ***διανυσματικό*** *γινόμενο δύο διανυσμάτων* **α**=(α_1,α_2,α_3) *και* **β**=(β_1,β_2,β_3), στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, ονομάζεται το διάνυσμα που προκύπτει από την ορίζουσα

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}$$

όπου (***i***,***j***,***k***) είναι η ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^3$.
Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου
i×***i***=**0**, ***j***×***j***=**0**, ***k***×***k***=**0**,
i×***j***=***k***, ***j***×***k***=***i***, ***k***×***i***=***j***,
i×***k***=-***j***, ***j***×***i***=-***k***, ***k***×***j***=-***j***,

Σχόλιο

Ένας μνημονικός κανόνας για την αποστήθιση των παραπάνω προσήμων του πολλαπλασιασμού του εξωτερικού γινομένου είναι ο εξής: Τοποθετούμε στις τρεις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου τα διανύσματα (***i***,***j***,***k***) με την αυτή σειρά. Η δεξιόστροφη μετάβαση κατά τον πολλαπλασιασμό του εξωτερικού γινομένου παράγει θετικό πρόσημο, ενώ η αριστερόστροφη αρνητικό.
α×(λ***β***+*μ**γ***) = λ(***α***×***β***) + *μ*(***α***×***γ***)
(λ***α***+*μ**β***)×***γ*** = λ(***α***×***γ***) + *μ*(***β***×***γ***)

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **α**=(3,-1,1) και **β**=(1,2,-1).

Λύση

Είναι

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\left(3\cdot\mathbf{i}-1\cdot\mathbf{j}+1\cdot\mathbf{k}\right)\times\left(1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}-1\cdot\mathbf{k}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+7\cdot\mathbf{k}$$

7.3. Τριπλά γινόμενα

Ως τριπλό γινόμενο ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος **α** με το εξωτερικό γινόμενο **β**×**γ** δύο διανυσμάτων **β** και **γ**. Η πράξη αυτή ορίζεται καθόσον το εξωτερικό γινόμενο **β**×**γ** είναι διάνυσμα.

Πόρισμα 7.2

Το τριπλό γινόμενο των διανυσμάτων **α**=(α_1,α_2,α_3), **β**=(β_1,β_2,β_3) και **γ**=(γ_1,γ_2,γ_3) υπολογίζεται από την ορίζουσα

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=$$

$$(\alpha_1\cdot\mathbf{i}+\alpha_2\cdot\mathbf{j}+\alpha_3\cdot\mathbf{k})\cdot\left(\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\cdot\mathbf{i}-\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}\cdot\mathbf{j}+\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\cdot\mathbf{k}\right)=$$

$$=\alpha_1\cdot\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\cdot\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

Άσκηση

Να δειχθεί ότι

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\beta_i$$
.

Λύση

Θεωρώ τη διανυσματική βάση του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου (e_1, e_2,…, e_n). Είναι $\alpha=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_n e_n$ και $\beta=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\ldots+\beta_n e_n$. Έχουμε:

$\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_n e_n)\cdot(\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\ldots+\beta_n e_n)=(\alpha_1\cdot\beta_1)e_1\cdot e_1+(\alpha_1\cdot\beta_2)e_1\cdot e_2+\ldots+(\alpha_1\cdot\beta_n)e_1\cdot e_n+(\alpha_2\cdot\beta_1)e_2\cdot e_1+(\alpha_2\cdot\beta_2)e_2\cdot e_2+\ldots+(\alpha_2\cdot\beta_n)e_2\cdot e_n+\ldots+(\alpha_n\cdot\beta_1)e_n\cdot e_1+(\alpha_n\cdot\beta_2)e_n\cdot e_2+\ldots+(\alpha_n\cdot\beta_n)e_n\cdot e_n$

Όμως τα διανύσματα e_1, e_2,…, e_n είναι ανά δύο κάθετα, οπότε ισχύει $e_i\cdot e_j=0$, για κάθε $i\neq j$, ενώ $e_i\cdot e_j=1$ όταν $i=j$. Επομένως, η παραπάνω παράσταση γίνεται:

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha_1\bullet\beta_1\bullet e_1\bullet e_1+\alpha_2\bullet\beta_2\bullet e_2\bullet e_2+\ldots+\alpha_n\bullet\beta_n\bullet e_n\bullet e_n=$$

$$=\alpha_1\bullet\beta_1+\alpha_2\bullet\beta_2+\ldots+\alpha_n\bullet\beta_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\beta_i$$

Βιβλιογραφία κεφαλαίου

1. Καρανικόλας, Ν., (2011) *Εισαγωγή στο Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών*, Β΄ Έκδοση, Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη.
2. Marsden, J., Tromba, A., (2005) *Διανυσματικός Λογισμός*, Γιαννόπουλος, Α., (επ) Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
3. Τσίτσας, Λ., (2003) *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός,* Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία.