

Σημειώσεις
Αναλυτικής Γεωμετρίας

Θ. Κεχαγιάς

Σεπτέμβριος 2009, υ.0.95

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	iv
1 Επιπεδα στον Τρισδιάστατο Χωρο	1
1.1 Θεωρια	1
1.2 Λυμενες Ασκησεις	4
1.3 Αλυτες Ασκησεις	25
2 Ευθειες στον Τρισδιάστατο Χωρο	31
2.1 Θεωρια	31
2.2 Λυμενες Ασκησεις	34
2.3 Αλυτες Ασκησεις	51
3 Δευτεροβαθμιες Επιφανειες στον Τρισδιάστατο Χωρο	60
3.1 Θεωρια	60
3.2 Λυμενες Ασκησεις	63
3.3 Αλυτες Ασκησεις	90

Προλογος

Το παρον τευχος περιεχει συντομη θεωρια, λυμενες και αλυτες ασκησεις Αναλυτικης Γεωμετριας. Κατα τη γνωμη μου, για τους περισσοτερους ανθρωπους, *ο μονος τροπος εξοικειωσης με τα μαθηματικα ειναι η επιλυση ασκησεων* - **οσο περισσοτερες ασκησεις λυσει ο αναγνωστης, τοσο καλυτερα θα κατανοησει το αντικειμενο**. Συμφωνα με αυτη την αποψη, στο παρον τευχος η θεωρια παρουσιαζεται σε μεγαλη συντομια, αλλα υπαρχει μεγαλος αριθμος λυμενων και αλυτων ασκησεων. Ο αναγνωστης πρεπει να χρησιμοποιησει τις λυμενες ασκησεις ως ενα ενδιαμεσο βοθημα για την επιλυση των αλυτων ασκησεων. Με αλλα λογια, *αν ο αναγνωστης δεν ηλυσει ο ιδιος μεγαλο αριθμο των αλυτων ασκησεων δεν θα ωφεληθει ιδιαitera* (**δεν αρκει δηλ. να μελετησει τις ηδη λυμενες ασκησεις**).

Σχετικα με τις προαπαιτουμενες γνωσεις και τον συμβολισμο που χρησιμοποιειται, σημειωνω τα παρακατω.

1. Τα σημεια του τριδιαστατου χωρου συμβολιζονται ως εξης: $M(x, y, z)$ ειναι το σημειο M με συντεταγμενες (x, y, z) . Ομοια το σημειο $M_1(x_1, y_1, z_1)$ κτλ.
2. Το συνολο των πραγματικων αριθμων συμβολιζεται με \mathbb{R} . Το συμβολο \mathbb{R}^3 δηλωνει το συνολο των τριαδων πραγματικων αριθμων:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

και επισης τον τριδιαστατο χωρο, δηλ. το συνολο ολων των σημειων $M(x, y, z)$ με τυχουσες πραγματικε συντεταγμενες $x, y, z \in \mathbb{R}$.

3. Τα διανυσματα συμβολιζονται με εντονους, μικρους Λατινικους χαρακτηρες. Π.χ. \mathbf{p}, \mathbf{q} κ.τ.λ.
4. Θεωρουνται γνωστα τα βασικα περι διανυσματων. Ειναι πολυ σημαντικό οτι χρησιμοποιουμε σχεδον αποκλειστικα *ελευθερα* διανυσματα. Δηλ. καθε διανυσμα εχει δεδομενο μετρο, φορα και κατευθυνση αλλα η αρχη του **δεν** θεωρειται σταθερη. Για την ακριβεια δυο διανυσματα με ιδιο μετρο, φορα και κατευθυνση θεωρουνται το **ιδιο** διανυσμα.

- (α') Για να γινει το παραπανω σαφεστερα αντιληπτο, θεωρειστε το διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$. Αυτο μπορει μα θεωρηθει οτι εχει την αρχη του στην αρχη των αξωνων, δηλ. το σημειο $A(0, 0, 0)$ και το περας του στο σημειο $B(a, b, c)$. Ομως το \mathbf{p} ειναι *το ιδιο διανυσμα* (στις παρουσες σημειωσεις) με αυτο που εχει αρχη στο

σημείο $C(1, 4, 2)$ και περας στο $D(1 + a, 4 + b, 2 + c)$, όπως και με το διανυσμα που έχει αρχή στο σημείο $E(-1, 0, 3)$ και περας στο $D(-1 + a, b, 3 + c)$ κτλ.

5. Το σύνολο των ελευθερών διανυσμάτων είναι σε 1-προς-1 αντιστοιχία με τα σημεία του τριδιάστατου χώρου. Η αντιστοιχία είναι η εξής: αν θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{r} = (x, y, z)$ τοποθετείται έτσι ώστε η αρχή του να είναι η αρχή των αξόνων, τότε το αντιστοιχικό σημείο είναι το περας του διανυσματος, δηλ. το σημείο $M(x, y, z)$.
6. Όσοσο αρκετές φορές θα ορίσουμε ένα διάνυσμα από την αρχή και το περας του. Π.χ. θα μιλάμε για το διάνυσμα με αρχή το σημείο $M_1(x_1, y_1, z_1)$ και περας το $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Αυτό το διάνυσμα είναι το $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ και μερικές φορές θα το συμβολίζουμε ως $\overrightarrow{M_1M_2}$. Τονίζουμε όμως ότι και σε αυτήν περίπτωση το $\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι ένα *ελεύθερο* διάνυσμα.
7. Το μέτρο ενός διανυσματος \mathbf{p} συμβολίζεται με $\|\mathbf{p}\|$.
8. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \mathbf{p}, \mathbf{q} συμβολίζεται με $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ και το εξωτερικό με $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$.
9. Η λέξη «αν» σημαίνει «αν και μόνον αν».

Η παρούσα μορφή των σημειώσεων απέχει πολύ από το να είναι τελική. Υπάρχουν ακόμη λάθη (ελπίζω λιγά). Ιδιαίτερα, τα σχήματα χρειάζονται μεγάλη βελτίωση. Ζητώ συγγνώμη για τις υπάρχουσες ατελείες και ελπίζω ότι μια βελτιωμένη έκδοση θα είναι διαθέσιμη σύντομα.

Θάνας Κεχαγιάς

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβρης 2009

Εισαγωγή

ΑΘ. Κεχαγιάς

Κεφάλαιο 1

Επιπεδα στον Τρισδιαστατο Χωρο

1.1 Θεωρια

1.1.1. Εστω τρια σημεια M_1, M_2, M_3 που δεν ανηκουν σε μια ευθεια και εχουν συντεταγμενες $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ και αντιστοιχα διανυσματα $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Το επιπεδο E που καθοριζεται απο τα σημεια M_1, M_2, M_3 **οριζεται** να ειναι το συνολο των διανυσματων \mathbf{r} / σημειων (x, y, z) που ικανοποιουν την *διανυσματικη* εξισωση

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1 + u \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \quad \text{οπου } u, v \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

1.1.2. Η (1.1) ειναι ισοδυναμη με την εξισωση

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2)$$

Δηλ. ενα σημειο $M(x, y, z)$ ικανοποιει την (1.2) ανν ανηκει στο επιπεδο E που οριζουν τα σημεια $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$.

1.1.3. Επισως η (1.1) ειναι ισοδυναμη με την *παραμετρικη* εξισωση

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_1 + u \cdot (x_2 - x_1) + v \cdot (x_3 - x_1), \\ y(u, v) &= y_1 + u \cdot (y_2 - y_1) + v \cdot (y_3 - y_1), \\ z(u, v) &= z_1 + u \cdot (z_2 - z_1) + v \cdot (z_3 - z_1). \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.1.4. Τελος, καθε επιπεδο E στον τριδιαστατο χωρο μπορει να περιγραφει απο μια εξισωση της μορφης

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1.4)$$

οπου A, B, C, D πραγματικοι αριθμοι. Επισως, σε καθε εξισωση της μορφης (1.4) αντιστοιχει ενα επιπεδο. Η εξισωση της μορφης (1.4) λεγεται *κανονικη* εξισωση του επιπεδου.

1.1.5. Η εξισωση επιπεδου που διερχεται απο δυο σημεια $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ και ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ειναι

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \quad (1.5)$$

Η διανυσματική εξίσωση του ίδιου επιπέδου είναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1 + u \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v \cdot \mathbf{p}.$$

1.1.6. Η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο (x_1, y_1, z_1) και είναι παραλληλο στα (μη συγγραμικά) διανύσματα $\mathbf{p} = (a, b, c)$, $\mathbf{q} = (d, e, f)$ είναι

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

Η διανυσματική εξίσωση του ίδιου επιπέδου είναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1 + u \cdot \mathbf{p} + v \cdot \mathbf{q}.$$

1.1.7. Ένα διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ αν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \quad (1.7)$$

1.1.8. Η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο (x_1, y_1, z_1) και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ είναι

$$a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) + c \cdot (z - z_1) = 0. \quad (1.8)$$

1.1.9. Ένα διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ είναι παραλληλο στο επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ αν

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0. \quad (1.9)$$

1.1.10. Δύο επίπεδα $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ είναι *παραλληλά* αν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (1.10)$$

1.1.11. Δύο επίπεδα $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ είναι *κάθετα* μεταξύ τους αν

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (1.11)$$

1.1.12. Η *διεδρη γωνία* θ μεταξύ δύο επιπέδων προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\cos \theta = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|. \quad (1.12)$$

1.1.13. Εστώ τρία επίπεδα

$$E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$E_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Για να μελετήσουμε την *σχετική θέση* των E_1, E_2, E_3 ορίζουμε τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

και διακρινουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

1. Αν $\text{rank}(P) = \text{rank}(Q) = 3$, τα τρία επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο.
2. Αν $\text{rank}(P) = 2$ και $\text{rank}(Q) = 3$, δύο από τα επίπεδα τέμνονται κατά μια ευθεία παραλληλή στο τρίτο επίπεδο.
3. Αν $\text{rank}(P) = \text{rank}(Q) = 2$, τα τρία επίπεδα περνούν από μια ευθεία.
4. Αν $\text{rank}(P) = 1$ και $\text{rank}(Q) = 2$, τα τρία επίπεδα είναι παραλληλά (και ενδεχομένως δύο εξ αυτών συμπίπτουν).
5. Αν $\text{rank}(P) = \text{rank}(Q) = 1$, τα τρία επίπεδα συμπίπτουν.

1.1.14. Δίνονται δύο επίπεδα

$$E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

τα οποία τέμνονται κατά μια ευθεία l . Η *αξονική δεσμή* των επιπέδων που περνούν από την l είναι το σύνολο όλων των επιπέδων που περνούν από αυτή την ευθεία. Κάθε τέτοιο επίπεδο έχει εξίσωση

$$\kappa \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (1 - \kappa) \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (1.13)$$

όπου $\kappa \in (-\infty, \infty)$ είναι μια *παραμετρός*: για κάθε τιμή του κ προκύπτει ένα επίπεδο της αξονικής δεσμής (παρατηρήστε ότι, όταν $\kappa = 1$ παίρνουμε το επίπεδο E_1 και όταν $\kappa = 0$ παίρνουμε το επίπεδο E_2).

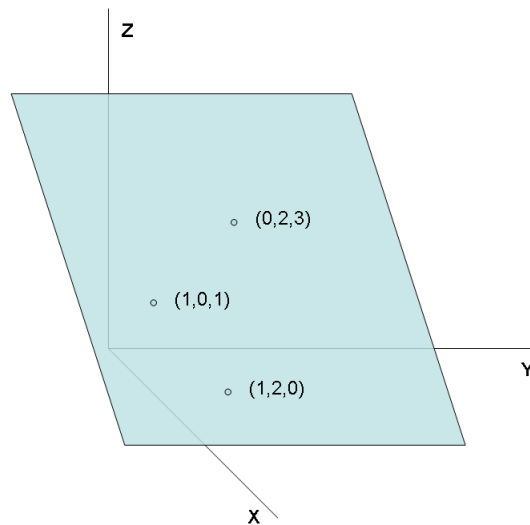
1.1.15. Εστω επίπεδο $E : Ax + By + Cz + D = 0$ και σημείο $M(x_1, y_1, z_1)$. Η απόσταση του σημείου από το επίπεδο είναι

$$d(M, E) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.14)$$

1.2 Λυμένες Ασκήσεις

1.2.1. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 3)$ και $(1, 0, 1)$.

Λυση. Το επίπεδο απεικονίζεται στο Σχ. 14.1.



Σχ.14.1

Χρησιμοποιώντας την (1.2) βλέπουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0-1 & 1-2 & 3-0 \\ 1-1 & 0-2 & 1-0 \end{vmatrix} = 5x + y + 2z - 7 = 0$$

1.2.2. Βρείτε την διανυσματική και την παραμετρική εξίσωση του παραπάνω επιπέδου

Λυση. Έχουμε τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_1 = (1, 2, 0)$$

$$\mathbf{r}_2 = (0, 1, 3)$$

$$\mathbf{r}_3 = (1, 0, 1)$$

και

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (0 - 1, 1 - 2, 3 - 0) = (-1, -1, 3)$$

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (1 - 1, 0 - 2, 1 - 0) = (0, -2, 1)$$

οπότε η διανυσματική εξίσωση είναι

$$\mathbf{r}(u, v) = (1, 2, 0) + u \cdot (-1, -1, 3) + v \cdot (0, -2, 1)$$

και η παραμετρική εξίσωση είναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - u \\ 2 - u - 2v \\ 3u + v \end{bmatrix}.$$

1.2.3. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(3, 3, 3)$.

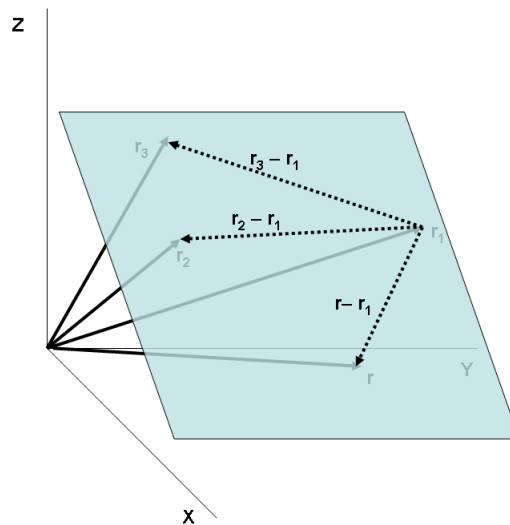
Λυση. Σύμφωνα με την (1.2), η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 3-1 & 3-1 & 3-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y - 2x - 2z = 0.$$

1.2.4. Δικαιολογήστε την **1.1.2**, δηλ. ότι το επίπεδο που καθορίζεται από τα σημεία $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Λυση. Δείτε το Σχ.14.2. Απεικονίζονται τα σημεία M_1, M_2, M_3 , το επίπεδο E που αυτά καθορίζουν και ένα τυχόν σημείο $M(x, y, z)$. Στα M, M_1, M_2, M_3 αντιστοιχούν τα διανύσματα $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.



Σχ.14.2

Τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \end{aligned}$$

είναι συνεπιπέδα, δηλ. το σύνολο $\{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και άρα πρέπει να ικανοποιούν την (1.2).

1.2.5. Αποδείξτε ότι (α) κάθε επίπεδο έχει κανονική εξίσωση της μορφής $Ax + By + Cz + D = 0$ και (β) σε κάθε τέτοια εξίσωση αντιστοιχεί ένα επίπεδο.

Λυση. Εστω ότι το επίπεδο ορίζεται από τα σημεία (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) . Τότε ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

δηλ.

$$(x - x_1) \cdot \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - (y - y_1) \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (z - z_1) \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

η οποία είναι της μορφής $Ax + By + Cz + D = 0$ με

$$A = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

$$D = -x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} - z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Αντιστρόφως, εστω E το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.15}$$

Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι τα A, B, C, D είναι όλα διάφορα του μηδενός. Τρία σημεία που ικανοποιούν την (1.15) είναι τα $(-D/A, 0, 0)$, $(0, -B/A, 0)$, $(0, 0, -D/C)$. Το επίπεδο που ορίζεται από αυτά τα τρία σημεία είναι αυτό που ικανοποιεί την

$$\begin{vmatrix} x + D/A & y - 0 & z - 0 \\ 0 + D/A & -D/B - 0 & 0 - 0 \\ 0 + D/A & 0 - 0 & -D/C - 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{D^3 + Ax D^2 + By D^2 + Cz D^2}{ABC} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{D^2}{ABC} \cdot (D + Ax + By + Cz) = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η (1.15), δηλ. το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την (1.15) είναι το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $(-D/A, 0, 0)$, $(0, -B/A, 0)$, $(0, 0, -D/C)$.

Οι περιπτώσεις στις οποίες κάποια από τα A, B, C, D είναι μηδενικά αφήνονται στον αναγνώστη.

1.2.6. Βρείτε την κανονική εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(-6, 0, 0)$, $(0, -3, 0)$ και $(0, 0, -1)$.

Λυση. Η ζητούμενη εξίσωση έχει την μορφή

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

και πρέπει να ικανοποιεί

$$-6A + 0B + 0C + D = 0$$

$$0A - 3B + 0C + D = 0$$

$$0A + 0B - C + D = 0$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $A = D/6$, $B = D/3$, $C = D$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$\frac{D}{6}x + \frac{D}{3}y + Dz + D = 0$$

ή πιο απλά

$$x + 2y + 6z + 6 = 0$$

1.2.7. Βρείτε το σημείο τομής των επιπέδων

$$E_1 : x + y + z - 1 = 0$$

$$E_2 : x + 2y + z + 1 = 0$$

$$E_3 : 3x + y + 4z = 0$$

Λυση. Άρκει να λυσουμε το σύστημα

$$x + y + z - 1 = 0$$

$$x + 2y + z + 1 = 0$$

$$3x + y + 4z = 0.$$

Με απαλοιφή *Gauss* βρίσκουμε ότι αυτό έχει λύση $x = 10, y = -2, z = -7$. Δηλ. το σημείο τομής είναι το $(10, -2, 7)$.

1.2.8. Βρείτε το σημείο τομής των επιπέδων

$$E_1 : x + y + z - 1 = 0$$

$$E_2 : x + 2y + z + 1 = 0$$

$$E_3 : 2x + 3y + 2z = 0$$

Λυση. Άρκει να λυσουμε το σύστημα

$$x + y + z - 1 = 0$$

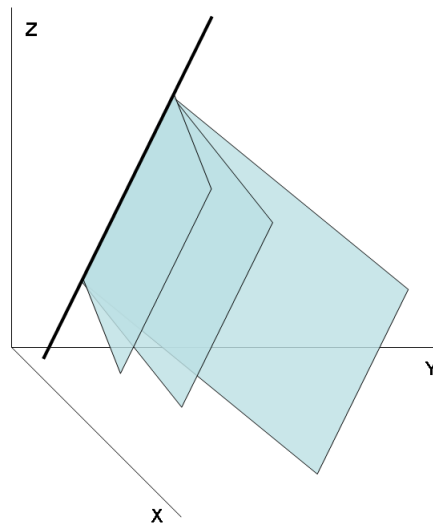
$$x + 2y + z + 1 = 0$$

$$2x + 3y + 2z = 0$$

Με απαλοιφή *Gauss* βρίσκουμε ότι αυτό έχει απείρεια λύσεων της μορφής:

$$x = 3 - t, y = -2, z = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Η γεωμετρική εξήγηση είναι ότι τα τρία επίπεδα διέρχονται από μια ευθεία. Δες και το Σχ.14.3. Πραγματι, η (1.16) είναι εξίσωση ευθείας, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2.



Σχ.14.3

1.2.9. Βρείτε το σημείο τομής των επιπέδων

$$E_1 : x + y + z - 1 = 0$$

$$E_2 : x + 2y + z + 1 = 0$$

$$E_3 : 2x + 3y + 2z + 3 = 0$$

Λυση. Αρκεί να λύσουμε το σύστημα

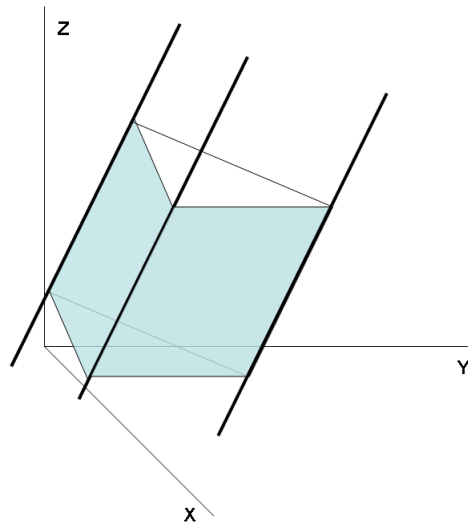
$$x + y + z - 1 = 0$$

$$x + 2y + z + 1 = 0$$

$$2x + 3y + 2z = 0$$

Ευκολά βρίσκουμε ότι το σύστημα δεν έχει καμία λύση. Η γεωμετρική εξήγηση είναι

οτι τα επιπεδα δεν τεμνονται, οπως φαινεται και στο Σχ.14.4.



Σχ.14.4

1.2.10. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 3)$ και είναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.5) είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0-1 & 1-2 & 3-0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4y - 4x - 4 = 0$$

και σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.11. Να βρεθει η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ και είναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (3, 3, 3)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.5) είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6y - 3x - 3z = 0$$

1.2.12. Να βρεθει η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ και είναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (0, 1, 2)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.5) είναι

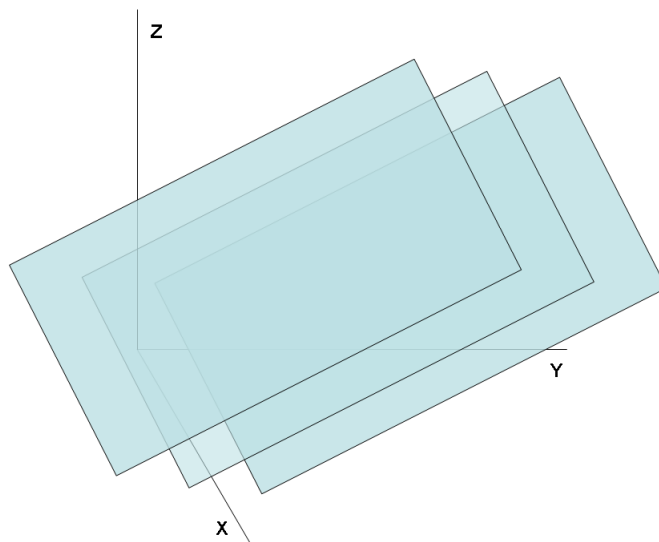
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ομως η οριζουσα εχει δυο ιδιες γραμμες, και αρα θα ειναι ταυτοτικα ιση με μηδεν, οποτε δεν μπορουμε να βρουμε την ζητουμενη εξισωση του επιπεδου. Αυτο ειναι αναμενομενο, διοτι τα διανυσματα \overrightarrow{AB} και \mathbf{p} ειναι παραλληλα και ετσι απο τα A, B διερχεται απειρια επιπεδων παραλληλων στο \mathbf{p} .

1.2.13. Αποδειξτε την **1.1.5**, δηλ. οτι η εξισωση επιπεδου που διερχεται απο δυο σημεια $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ και ειναι παραλληλο σε δοθεν διανυσμα \mathbf{p} . ειναι

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Λυση. Στο Σχ.14.5 απεικονιζονται τα δοθεντα σημεια $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, το δοθεν διανυσμα \mathbf{p} και τυχον σημειο του επιπεδου (x, y, z) . Σχηματιζουμε τα διανυσματα $\mathbf{r}_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ τα οποια ειναι συνεπιπεδα με το \mathbf{p} .



Σχ.14.5

Ετσι το συνολο $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο και η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

θα πρεπει να ισουται με 0, που ειναι το ζητουμενο.

1.2.14. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1, 1, 1)$ και ειναι παραλληλο στα διανυσματα $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{q} = (3, 3, 3)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.6) ειναι

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6y - 3x - 3z = 0.$$

1.2.15. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, 2, 0)$ και είναι παραλληλο στα διανυσματα $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{q} = (1, 1, 1)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.6) είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - x - z - 3 = 0.$$

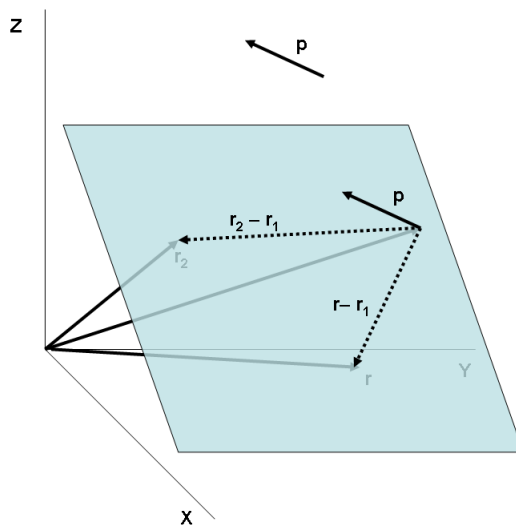
και σε διανυσματικη μορφη

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.16. Αποδειξτε την **1.1.6**, δηλ. οτι η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από σημείο (x_1, y_1, z_1) και είναι παραλληλο στα δοθεντα διανυσμα \mathbf{p}, \mathbf{q} είναι

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Λυση. Στο Σχ.14.6 απεικονιζεται το δοθεν σημείο (x_1, y_1, z_1) , τα δοθεντα διανυσματα \mathbf{p}, \mathbf{q} και τυχον σημείο του επιπέδου (x, y, z) . Εχουμε μετακινησει τα ελευθερα διανυσματα \mathbf{p}, \mathbf{q} ετσι ωστε να κεινται επι του επιπέδου. Σχηματιζουμε το διανυσμα $\mathbf{r} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ το οποια είναι συνεπιπεδο με τα \mathbf{p}, \mathbf{q} .



Σχ.14.6

Ετσι το συνολο $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ είναι γραμμικα εξαρτημενο, οποτε η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

θα πρεπει να ισουται με 0, και αυτη είναι ακριβως η ζητουμενη εξίσωση.

1.2.17. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $x + 2y + z + 10 = 0$.

Λυση. Το επίπεδο έχει $A = 1, B = 2, C = 1$ και $D = 10$. Αφού

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1}$$

το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την (1.7)

1.2.18. Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $2x + 4y + 2z + 3 = 0$.

Λυση. Το επίπεδο έχει $A = 2, B = 4, C = 2$ και $D = 3$. Αφού

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την (1.7).

1.2.19. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(3, -2, 4)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (2, 2, -3)$.

Λυση. Εστω ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι $Ax + By + Cz + D = 0$. Για να διέρχεται το επίπεδο από το $(3, -2, 4)$ θα ισχύει

$$3A - 2B + 4C + D = 0 \quad (1.17)$$

Επίσης, από την συνθήκη καθετοτητας, θα ισχύει

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{-3}. \quad (1.18)$$

Οπότε, λύνοντας τις (1.17) και (1.18) παίρνουμε $A = \frac{1}{5}D, B = \frac{1}{5}D, C = -\frac{3}{10}D$, δηλ. η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{D}{5}x + \frac{D}{5}y - \frac{3D}{10}z + D = 0$$

και το D μπορεί να πάρει αυθαίρετη τιμή. Θετώντας $D = 10$, τελικά παίρνουμε

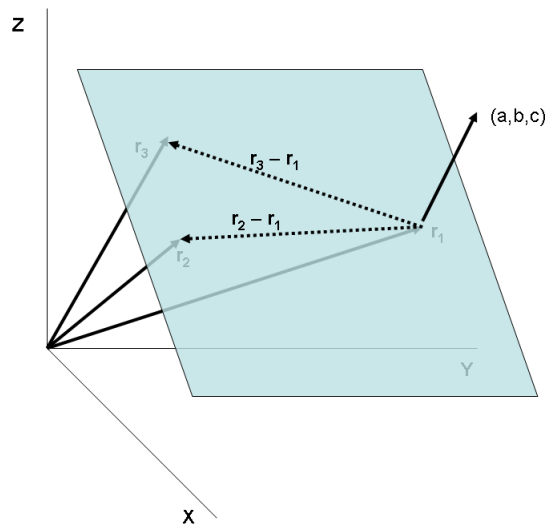
$$2x + 2y - 3z + 10 = 0.$$

1.2.20. Αποδείξτε την **1.1.9**, δηλ. ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $E : Ax + By + Cz + D = 0$ αν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

Λυση. Στο Σχ.14.7 απεικονίζουμε τρία σημεία $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$

του επιπέδου E και τα αντιστοιχα διανυσματα $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.



Σχ.14.7

Τα διανυσματα

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

ανηκουν στο E . Ενα διανυσμα \mathbf{q} είναι καθετο στο E αν είναι καθετο στα $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$. Ενα τετοιο διανυσμα είναι το (A, B, C) . Πραγματι, αφού τα $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ ανηκουν στο E , εχουμε

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

και με αφαιρεση κατα μελη εχουμε

$$A \cdot (x_2 - x_1) + B \cdot (y_2 - y_1) + C \cdot (z_2 - z_1) = 0$$

δηλ. $(A, B, C) \perp (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Με ομοιο τροπο δειχνουμε οτι $(A, B, C) \perp (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$. Αρα $(A, B, C) \perp E$ και το \mathbf{p} είναι καθετο στο E αν $\mathbf{p} \parallel (A, B, C)$ δηλ. αν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

1.2.21. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1, 2, 0)$ και είναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$

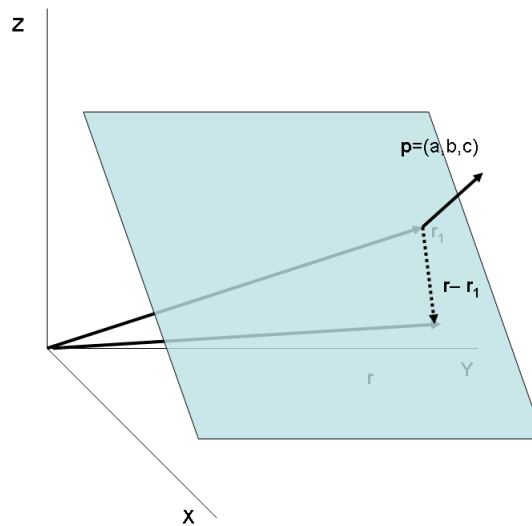
Λυση. Συμφωνα με την (1.8), η ζητουμενη εξισωση είναι

$$1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 0) = x + 2y + 3z - 4 = 0.$$

1.2.22. Αποδείξτε την **1.1.8**, δηλ. ότι το επίπεδο που διέρχεται από δοθέν σημείο (x_1, y_1, z_1) και είναι κάθετο σε δοθέν διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ είναι

$$a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) + c \cdot (z - z_1) = 0$$

Λυση. Στο Σχ.14.8 απεικονίζεται το δοθέν σημείο (x_1, y_1, z_1) , το δοθέν διάνυσμα \mathbf{p} , και τυχόν σημείο του επιπέδου (x, y, z) . Σχηματίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{r} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ το οποίο είναι κάθετο στο \mathbf{p} .



Σχ.14.8

Οποτε θα έχουμε $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0$, δηλ.

$$a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) + c \cdot (z - z_1) = 0$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

1.2.23. Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ είναι παραλληλο στο επίπεδο $x + 2y - 5z + 3 = 0$.

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την (1.10), αφού $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = 0$.

1.2.24. Αποδείξτε την **1.1.9**, δηλ. ότι το επίπεδο $E : Ax + By + Cz + D = 0$ είναι παραλληλο στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ αν

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0.$$

Λυση. Καθε διάνυσμα παραλληλο στο E θα είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{q} = (A, B, C)$. Αν λοιπον το \mathbf{p} είναι παραλληλο στο E θα έχουμε

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = Aa + Bb + Cc = 0$$

1.2.25. Δειξτε οτι τα επιπεδα $E_1 : 5x + 2y + z + 6 = 0$ και $E_2 : 10x + 4y + 2z = 0$ ειναι παραλληλα.

Λυση. Αυτο ισχυει, βασει της (1.10), διου

$$\frac{5}{10} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

1.2.26. Αποδειξτε οτι τα επιπεδα $x + 2y + z + 1 = 0$ και $2x + 4y + 2z - 5 = 0$ ειναι παραλληλα

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την εξ.(1.10), αφου

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

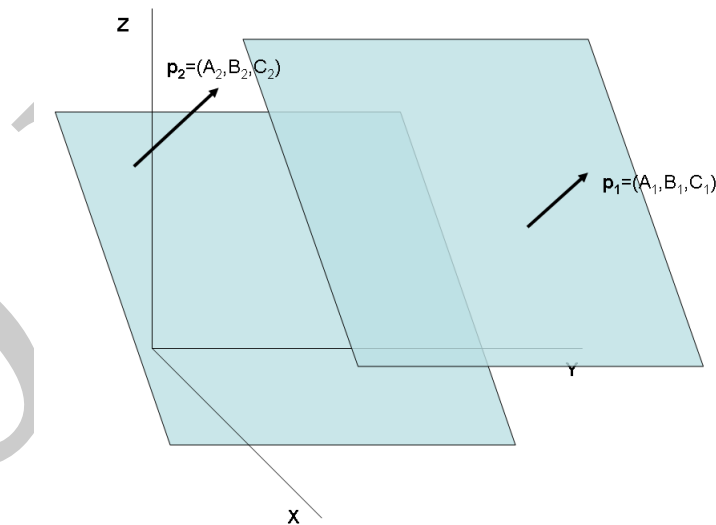
1.2.27. Αποδειξτε την **1.1.10**, δηλ. οτι δυο επιπεδα $E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ειναι *παραλληλα* αν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Λυση. Το E_1 ειναι καθετο στο $\mathbf{p}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ και το E_2 ειναι καθετο στο $\mathbf{p}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Εχουμε δε

$$E_1 \parallel E_2 \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 \parallel \mathbf{p}_2$$

και $\mathbf{p}_1 \parallel \mathbf{p}_2$ αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Δες και το Σχ.14.9.



Σχ.14.9

1.2.28. Αποδειξτε οτι τα επιπεδα $x + y + z + 1 = 0$ και $2x + y - 3z - 5 = 0$ ειναι καθετα.

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την (1.11), αφου $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$.

1.2.29. Αποδειξτε οτι τα επιπεδα $5x + 2y + z + 6 = 0$ και $x - y - 3z = 0$ ειναι καθετα μεταξυ τους.

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την (1.11), αφου $5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) = 0$.

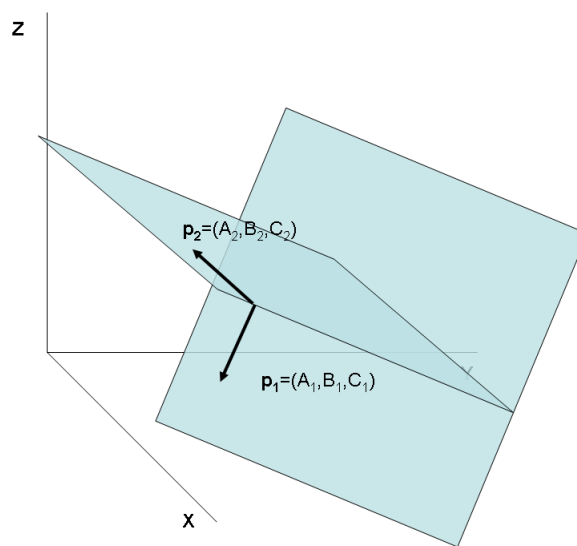
1.2.30. Αποδείξτε την **1.1.11**, δηλ. ότι δυο επιπεδα $E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ είναι καθετα μεταξύ τους αν

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Λυση. Το E_1 είναι καθετο στο $\mathbf{p}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ και το E_2 είναι καθετο στο $\mathbf{p}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Έχουμε δε

$$E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$$

και $\mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$ αν $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Δες και το Σχ.14.1.10.



Σχ.14.10

1.2.31. Βρείτε την γωνία των επιπεδων $x + y - 4 = 0$ και $x - y = 0$.

Λυση. Η γωνία θ ικανοποιεί

$$\cos \theta = \left| \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right| = 0$$

δηλ. $\theta = \pi/2$ - τα επιπεδα είναι καθετα μεταξύ τους.

1.2.32. Βρείτε την γωνία των επιπεδων $x + y + z = 0$ και $x - y + z - 5 = 0$.

Λυση. Η γωνία θ ικανοποιεί

$$\cos \theta = \left| \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{3}$$

οπότε $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 1.2310$ ακτίνια (περίπου $\frac{1.2310}{3.14159} \cdot 180 \approx 70^\circ$).

1.2.33. Βρείτε την γωνία μεταξύ των $5x - 2y + z + 1 = 0$ και $10x - 4y + 2z = 0$.

Λυση. Η ζητούμενη γωνία θ έχει συνημιτονο

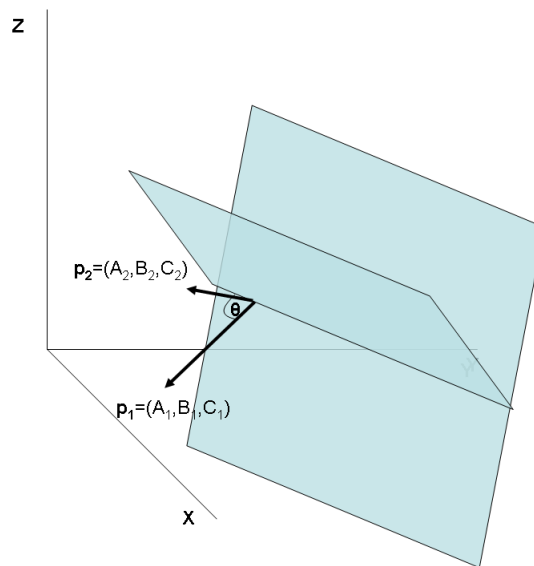
$$\cos \theta = \left| \frac{5 \cdot 10 + (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{10^2 + (-4)^2 + 2^2}} \right| = 1$$

δηλ. $\theta = 0$ και τα επιπεδα είναι παραλληλα.

1.2.34. Αποδειξτε την **1.1.12**, δηλ. ότι η γωνία μεταξύ δυο επιπεδων E_1, E_2 δινεται απο την σχεση

$$\cos \theta = \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|.$$

Λυση. Δείτε το Σχ.14.11. Η γωνία θ μεταξύ των δυο επιπεδων είναι ίση με την γωνία των καθετων σε αυτα διανυσματων $\mathbf{p}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{p}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.



Σχ.14.11

Αρα η θ δινεται απο την σχεση

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_1\| \cdot \|\mathbf{p}_2\|} = \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$$

1.2.35. Βρείτε την εξίσωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημείο $(2, -3, 6)$ και είναι παραλληλο στο επιπεδο $2x - 5y + 7 = 0$.

Λυση. Το ζητούμενο επιπεδο, λογω της συνθηκης παραλληλιας, θα έχει εξίσωση

$$2x - 5y + D = 0.$$

Για να διερχεται δε απο το σημείο $(2, -3, 6)$ θα πρέπει να έχουμε

$$2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) + D = 0 \Rightarrow D = -19.$$

Δηλ. η ζητούμενη εξίσωση είναι $2x - 5y - 19 = 0$.

1.2.36. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(1, -2, 3)$ και είναι παραλληλο στο επίπεδο $2x - 3y + 2z = 0$.

Λυση. Το ζητούμενο επίπεδο θα έχει εξίσωση $2x - 3y + 2z + D = 0$ και θα πρέπει να ικανοποιεί

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -14$$

οπότε η ζητούμενη εξίσωση θα είναι $2x - 3y + 2z - 14 = 0$.

1.2.37. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ και είναι καθето στο επίπεδο $4x - y + 2z - 7 = 0$.

Λυση. Το διάνυσμα $\mathbf{p} = (4, -1, 2)$ θα είναι παραλληλο στο ζητούμενο επίπεδο. Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1-3 & 2-2 & 3-1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

δηλ. $2x + 12y + 2z - 32 = 0$.

1.2.38. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, 2, -3)$ και είναι καθето στα επίπεδα

$$x + 3y - z = 0 \quad \text{και} \quad 3x - 2y + z - 5 = 0.$$

Λυση. Εστω ότι το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$Ax + By + Cz + 1 = 0.$$

(Πήραμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $D = 1$). Από τις συνθήκες καθετοτητας έχουμε

$$A + 3B - C = 0$$

$$3A - 2B + C = 0.$$

Και επειδή το επίπεδο διέρχεται από το $(1, 2, -3)$ έχουμε επίσης

$$A + 2B - 3C + 1 = 0.$$

Οι τρεις εξισώσεις δίνουν το σύστημα

$$A + 3B - C = 0$$

$$3A - 2B + C = 0$$

$$A + 2B - 3C + 1 = 0$$

το οποίο έχει λύση $A = -\frac{1}{26}$, $B = \frac{2}{13}$, $C = \frac{11}{26}$, δηλ. το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$-\frac{1}{26}x + \frac{2}{13}y + \frac{11}{26}z + 1 = 0$$

και πιο απλά

$$-x + 2y + 11z + 26 = 0.$$

1.2.39. Να βρεθεί η τομή των επιπέδων

$$E_1 : 5x + 3y - 11z + 72 = 0$$

$$E_2 : 4x - 5y + 7z + 26 = 0$$

$$E_3 : 6x + 11y - 3z + 66 = 0$$

Λυση. Λυνοντας το παραπανω συστημα βλεπουμε οτι τα επιπεδα τεμνονται στο σημειο $(-10, 0, 2)$. Αυτα θα μπορούσαμε να το καταλαβουμε και απο το γεγονος οτι

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 7 \\ 6 & 11 & 11 \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & -11 & 72 \\ 4 & -5 & 7 & 26 \\ 6 & 11 & 11 & 66 \end{pmatrix} \right) = 3.$$

1.2.40. Να βρεθεί η τομή των επιπέδων

$$E_1 : 5x + 3y - 11z + 72 = 0$$

$$E_2 : 4x - 5y + 7z + 26 = 0$$

$$E_3 : 6x + 11y - 3z + 66 = 0$$

Λυση. Λυνοντας το παραπανω συστημα βλεπουμε οτι τα επιπεδα τεμνονται στο σημειο $(-10, 0, 2)$. Αυτα θα μπορούσαμε να το καταλαβουμε και απο το γεγονος οτι

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 7 \\ 6 & 11 & 11 \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & -11 & 72 \\ 4 & -5 & 7 & 26 \\ 6 & 11 & 11 & 66 \end{pmatrix} \right) = 3.$$

1.2.41. Να βρεθεί η τομή των επιπέδων

$$E_1 : 5x + 3y - 11z + 72 = 0$$

$$E_2 : 4x - 5y + 7z + 26 = 0$$

$$E_3 : 6x + 11y - 3z + 66 = 0$$

$$E_4 : x + 2y + z + 8 = 0$$

Λυση. Λυνοντας το συστημα των τριων πρωτων εξισωσεων βλεπουμε οτι εχει μοναδικη λυση την $(x, y, z) = (-10, 0, 2)$. Κατοπιν παρατηρουμε οτι αυτη ικανοποιει και την τεταρτη εξισωση. Αρα τα τεσσερα επιπεδα διερχονται απο το σημειο $(-10, 0, 2)$.

1.2.42. Δινονται τα επιπεδα $E_1 : 5x + 2y + z + 1 = 0$ και $E_2 : x - y - 3z = 0$. Να βρεθεί η αξονικη δεσμη αυτων.

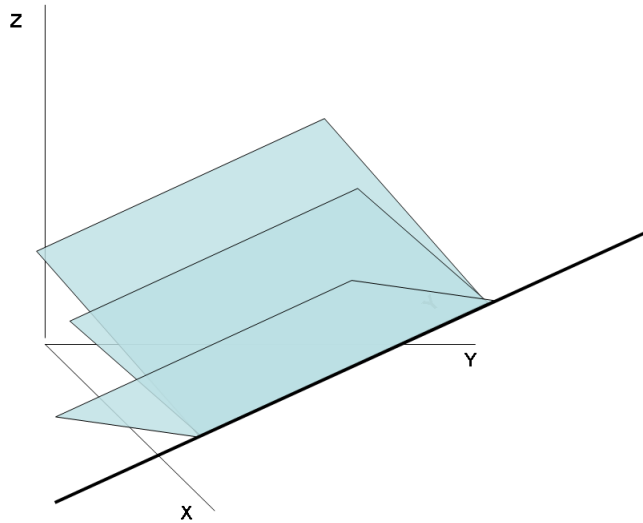
Λυση. Η αξονικη δεσμη περιεχει ολα τα επιπεδα με εξισωση

$$\begin{aligned} \kappa \cdot (5x + 2y + z + 1) + (1 - \kappa) \cdot (x - y - 3z) = \\ (4\kappa + 1) \cdot x + (3\kappa - 1) \cdot y + (4\kappa - 3) \cdot z + \kappa = 0. \end{aligned}$$

Π.χ., για $\kappa = 1/2$ παρνομε το επιπεδο

$$\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \cdot x + \left(3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) \cdot y + \left(4 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) \cdot z + \kappa = 3x + \frac{1}{2}y - z + \kappa = 0$$

το οποίο τέμνεται με τα E_1 και E_2 κατά μια ευθεία. Για $\kappa = 1$ παίρνουμε το E_1 και για $\kappa = 0$ παίρνουμε το E_2 (δες και το Σχ.14.12).



Σχ.14.12

1.2.43. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από την τομή των επιπέδων

$$E_1 : 2x - 7y + 4z - 3 = 0,$$

$$E_2 : 3x - 5y + 4z + 11 = 0$$

και από το σημείο $(-2, 1, 3)$.

Λυση. Το ζητούμενο επίπεδο ανήκει στην αξονική δεσμη των δυο άλλων και άρα έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} \kappa \cdot (2x - 7y + 4z - 3) + (1 - \kappa) \cdot (3x - 5y + 4z + 11) &= 0 \Rightarrow \\ (3 - \kappa) \cdot x + (-5 - 2\kappa) \cdot y + 4 \cdot z + (11 - 14\kappa) &= 0. \end{aligned}$$

Για να περνάει από το $(-2, 1, 3)$ πρέπει να έχουμε

$$(3 - \kappa) \cdot (-2) + (-5 - 2\kappa) \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (11 - 14\kappa) = 0 \quad (1.19)$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\kappa = \frac{6}{7}$. Αντικαθιστώντας στην (1.19) βλέπουμε ότι το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$\left(3 - \frac{6}{7}\right) \cdot x + \left(-5 - 2 \cdot \frac{6}{7}\right) \cdot y + 4z + \left(11 - 14 \cdot \frac{6}{7}\right) = 0$$

και απλουστερα

$$15x - 47y + 28z - 7 = 0.$$

1.2.44. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από την τομή των επιπέδων

$$E_1 : 3x - 4y + z - 12 = 0$$

$$E_2 : 4x - 7y + 3z + 4 = 0$$

και είναι κάθετο στο επιπεδο

$$5x + 2y - z + 30 = 0.$$

Λυση. Το ζητούμενο επιπεδο ανηκει στην αξονικη δεσμη των δυο αλλων και αρα εχει εξισωση

$$\begin{aligned} \kappa \cdot (3x - 4y + z - 12) + (1 - \kappa) \cdot (4x - 7y + 3z + 4) &= 0 \Rightarrow \\ (4 - \kappa) \cdot x + (-7 + 3\kappa) \cdot y + (3 - 2\kappa) \cdot z + (4 - 16\kappa) &= 0. \end{aligned}$$

Για να είναι δε κάθετο στο τελευταίο επιπεδο, πρέπει να έχουμε

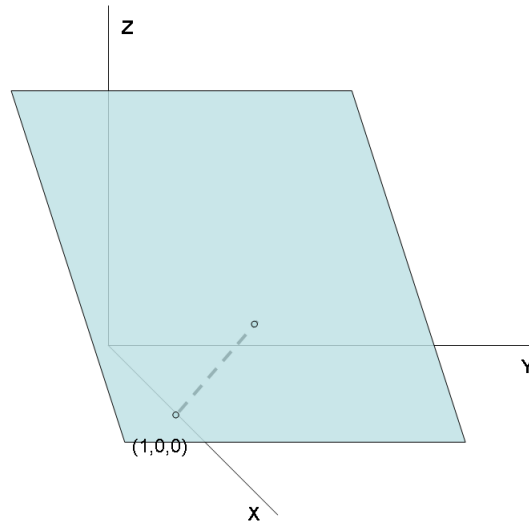
$$(4 - \kappa) \cdot 5 + (-7 + 3\kappa) \cdot 2 + (3 - 2\kappa) \cdot (-1) = 0 \quad (1.20)$$

απο το οποιο προκυπτει οτι $\kappa = -1$. Αντικαθιστώντας στην (1.20) βλέπουμε οτι το ζητούμενο επιπεδο εχει εξισωση

$$5x - 10y + 5z + 20 = 0.$$

1.2.45. Να βρεθει η αποσταση του επιπεδου $E : 5x + 2y + z + 1 = 0$ απο το σημειο $M(1, 0, 0)$

Λυση. Δες και το Σχ.14.13.



Σχ.14.13

Εφαρμοζοντας την εξ.(1.14) παίρνουμε

$$d(M, E) = \frac{|5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

1.2.46. Βρείτε την αποσταση του σημειου $M(-2, 2, 3)$ απο το επιπεδο $E : 8x - 4y - z - 8 = 0$.

Λυση. Εφαρμοζοντας την εξ.(1.14) παίρνουμε

$$d(M, E) = \frac{|8 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{35}{9}.$$

1.2.47. Βρείτε την απόσταση των επιπέδων $E_1 : 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και $E_2 : 2x - 3y - 6z + 7 = 0$.

Λυση. Παρατηρούμε ότι τα επίπεδα είναι παραλληλα. Οποτε $d(E_1, E_2) = d(M, E_2)$ όπου M είναι τυχόν σημείο του E_1 . Μπορούμε να πάρουμε ένα τέτοιο σημείο θέτοντας $x = 0, y = 0$ και υπολογίζοντας

$$z = \frac{2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 14}{6} = -\frac{14}{6}.$$

Τότε

$$d(E_1, E_2) = d(M, E_2) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot \frac{-14}{6} + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 3$$

1.2.48. Βρείτε την εξίσωση των επιπέδων που είναι παραλληλα στο $E_1 : 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και έχουν απόσταση 5 από την αρχή των αξόνων.

Λυση. Το ζητούμενο επίπεδο θα είναι (λόγω της συνθήκης παραλληλίας) $E_2 : 2x - 3y - 6z + D = 0$. Από την συνθήκη απόστασης θα έχουμε

$$d(0, E_2) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 5 \Rightarrow D = \pm 35$$

Αρα υπάρχουν *δύο* ζητούμενα επίπεδα, τα

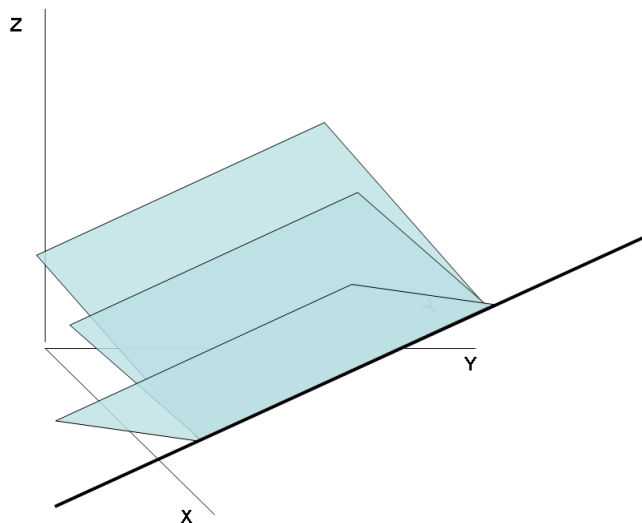
$$E_{21} : 2x - 3y - 6z + 35 = 0 \quad \text{και} \quad E_{21} : 2x - 3y - 6z - 35 = 0$$

1.2.49. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι παραλληλο στο επίπεδο xy και απέχει 3 μονάδες από αυτό.

Λυση. Το επίπεδο xy είναι το $E_1 : z = 0$. Από την συνθήκη παραλληλίας, το ζητούμενο επίπεδο E_2 θα έχει εξίσωση $z + D = 0$ και ένα σημείο αυτού θα είναι το $(0, 0, -D)$. Από την συνθήκη απόστασης

$$d(E_1, E_2) = \frac{|0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + D|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow D = \pm 3$$

Αρα υπάρχουν *δύο* ζητούμενα επίπεδα, τα $E_{21} : z + 3 = 0$ και $E_{22} : z - 3 = 0$ (δες και το Σχ.14.14).



Σχ.14.14

1.2.50. Βρείτε την εξίσωση των επιπέδων που είναι παράλληλα στο $E_1 : 4x - 4y + 7z - 3 = 0$ και απέχουν 4 μονάδες από το σημείο $M(4, 1, -2)$.

Λυση. Το ζητούμενο επίπεδο E_1 θα είναι (λόγω της συνθηκής παραλληλίας) $E_2 : 4x - 4y + 7z + D = 0$. Από την συνθήκη απόστασης θα έχουμε

$$d(M, E) = \frac{|4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = 4 \Rightarrow$$

$$\frac{|D - 2|}{9} = 4 \Rightarrow (D - 2 = 36 \text{ ή } -D + 2 = 36) \Rightarrow$$

$$D = 38 \text{ ή } D = -34$$

Τελικά υπάρχουν δύο ζητούμενα επίπεδα, τα

$$E_{21} : 4x - 4y + 7z + 38 = 0 \quad \text{και} \quad E_{22} : 4x - 4y + 7z - 34 = 0$$

1.2.51. Βρείτε ένα σημείο M το οποίο κείται στον άξονα των y και απέχει ίσες αποστάσεις από τα επίπεδα $E_1 : 2x + 3y + 6z - 6 = 0$ και $E_2 : 8x + 9y - 72z + 73 = 0$.

Λυση. Το ζητούμενο M είναι της μορφής $(0, y, 0)$ και πρέπει να ικανοποιεί

$$d(M, E_1) = d(M, E_2) \Rightarrow$$

$$\frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot y + 6 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{|8 \cdot 0 + 9 \cdot y + 72 \cdot 0 + 73|}{\sqrt{8^2 + 9^2 + 72^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{|3 \cdot y - 6|}{7} = \frac{|9 \cdot y + 73|}{73}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο λύσεις: από την

$$\frac{3 \cdot y - 6}{7} = \frac{9 \cdot y + 73}{73}$$

παιρνουμε $y = \frac{73}{12}$ και από την

$$\frac{3 \cdot y - 6}{7} = -\frac{9 \cdot y + 73}{73}$$

παιρνουμε $y = -\frac{73}{282}$. Τελικά υπάρχουν δύο τέτοια σημεία: το $M_1(0, 73/12, 0)$ και το $M_2(0, -73/282, 0)$.

1.2.52. Εστω σημείο A επί του άξονα των x , B επί του άξονα των y και C επί του άξονα των z . Η θέση των A, B, C μεταβάλλεται, αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει πάντα

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = 1. \quad (1.21)$$

Να δείχτει ότι το επίπεδο που ορίζουν τα A, B, C διέρχεται από σταθερό σημείο.

Λυση. Η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν τα A, B, C είναι

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} + \frac{z}{OC} = 1. \quad (1.22)$$

Επίσης, από τα δεδομένα έχουμε

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = 1.$$

Αφαιρώντας την (1.21) από την (1.22) παίρνουμε (για τα σημεία που ανήκουν στο επίπεδο)

$$\frac{x-1}{OA} + \frac{y-1}{OB} + \frac{z-1}{OC} = 0$$

και αυτή εξίσωση επαληθεύεται από το σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Άρα, για οποιαδήποτε θέση των A, B, C το επίπεδο που αυτά ορίζουν διέρχεται από το $(1, 1, 1)$.

1.2.53. Αποδείξτε την **1.1.15**, δηλ. ότι η απόσταση του επιπέδου $E : Ax + By + Cz + D = 0$ από το σημείο (x_1, y_1, z_1) είναι

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Λυση. (Αυτή η άσκηση απαιτεί την εξίσωση ευθείας, η οποία δίνεται στο Κεφάλαιο 2.) Εστω επίπεδο $E_1 : Ax + By + Cz + D = 0$ και σημείο $M_1 : (x_1, y_1, z_1)$. Το διάνυσμα το κάθετο στο E_1 είναι το $\mathbf{p} = (A, B, C)$. Η ευθεία l_1 η οποία διέρχεται από το M_1 και είναι παράλληλη στο \mathbf{p} είναι η

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$$

και το σημείο τομής αυτής με το επίπεδο είναι το (x_2, y_2, z_2) που είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ \frac{x-x_1}{A} &= \frac{y-y_1}{B} \\ \frac{y-y_1}{B} &= \frac{z-z_1}{C} \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} (AD - B^2x_1 - C^2x_1 + AB y_1 + AC z_1) \\ y_2 &= -\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} (BD - A^2y_1 - C^2y_1 + ABx_1 + BCz_1) \\ z_2 &= -\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} (CD - A^2z_1 - B^2z_1 + ACx_1 + BCy_1) \end{aligned}$$

και υπολογίζοντας την απόσταση $d(M_1, M_2)$ έχουμε

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Μετά από επιπλέον αλλά προφανείς υπολογισμούς προκύπτει οντως

$$d(M_1, E_1) = d(M_1, M_2) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.3 Άλυτες Ασκήσεις

1.3.1. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $x + y + z - 1 = 0$.

1.3.2. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 2, 3)$, $(3, 1, -1)$, $(1, 1, 1)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $4y - 2x - 2z = 0$.

1.3.3. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$, $(1, -1, 2)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $9y - 3x + 6z = 0$.

1.3.4. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(2, 4, 8)$, $(-3, 1, 5)$, $(6, -2, 7)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $42z - 17y - 15x - 238 = 0$.

1.3.5. Σχεδιάστε τα επίπεδα και βρείτε το σημείο τομής αυτών.

$$x + 2y + z - 1 = 0$$

$$4x + 2y + z + 1 = 0$$

$$x + y + 4z - 2 = 0$$

Απ. $x = -\frac{2}{3}, y = \frac{4}{7}, z = \frac{11}{21}$.

1.3.6. Σχεδιάστε τα επίπεδα και βρείτε το σημείο τομής αυτών.

$$x + 2y + 2z - 2 = 0$$

$$3x + 2y + 4z - 1 = 0$$

$$x + 2y + 4z + 1 = 0$$

Απ. $x = 1, y = 2, z = -\frac{3}{2}$.

1.3.7. Σχεδιάστε τα επίπεδα και βρείτε το σημείο τομής αυτών.

$$x + 2y + 2z - 2 = 0$$

$$3x + 2y + 4z - 1 = 0$$

$$4x + 4y + 6z - 5 = 0$$

Απ. Τα επίπεδα δεν τέμνονται.

1.3.8. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, 2, 3)$, $(3, 1, -1)$ και είναι παραλληλο στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $7x - 6y + 5z - 10 = 0$.

1.3.9. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(2, 2, 3)$, $(1, 1, 2)$ και είναι παραλληλο στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $z - y - 1 = 0$.

1.3.10. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(2, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$ και είναι παράλληλο στον άξονα των y . Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $x + z - 5 = 0$.

1.3.11. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(2, 2, 3)$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $(2, 1, 2)$ και $(1, 1, 0)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2y - 2x + z - 3 = 0$.

1.3.12. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, 1, 3)$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $(2, 1, 2)$ και $(1, 1, 0)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2y - 2x + z - 3 = 0$.

1.3.13. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, 0, 1)$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $(2, 1, 2)$ και $(1, 1, 0)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2y - 2x + z + 1 = 0$.

1.3.14. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, -5, 4)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $4x - 7z + 6 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2y - 2x + z + 1 = 0$.

1.3.15. Δείξτε ότι το επίπεδο $2x - 2y + z + 1 = 0$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(2, -2, 1)$.

1.3.16. Δείξτε ότι το επίπεδο $x + y + 3z + 10 = 0$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(1, 1, 3)$. Υπάρχει άλλο διάνυσμα κάθετο στο ίδιο επίπεδο;

1.3.17. Δείξτε ότι το επίπεδο $x + y + z - 3 = 0$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $(1, 1, -2)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

1.3.18. Δείξτε ότι το επίπεδο $x + y + z - 3 = 0$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $(2, 1, -3)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

1.3.19. Δείξτε ότι το επίπεδο $2x - y + z + 1 = 0$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $(2, -1, -5)$. Βρείτε ένα άλλο διάνυσμα παράλληλο στο ίδιο επίπεδο.

1.3.20. Δείξτε ότι το επίπεδο $x + y + z - 3 = 0$ είναι κάθετο στο επίπεδο $x + y - 2z = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

1.3.21. Δείξτε ότι το επίπεδο $x + y + z - 3 = 0$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $2x + y - 3z + 12 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

1.3.22. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(2, -3, 6)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $2x - 5y + 7 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2x - 5y - 19 = 0$.

1.3.23. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(3, 4, -11)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $z = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $z + 11 = 0$.

1.3.24. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(-1, 2, 4)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $2x - 3y - 5z + 6 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2x - 3y - 5z + 28 = 0$.

1.3.25. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(4, -2, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (7, 2, -3)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $7x + 2y - 3z - 21 = 0$.

1.3.26. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(3, -2, 4)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (2, 2, -3)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2x + 2y - 3z + 10 = 0$.

1.3.27. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(2, 3, 5)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(4, 6, 0)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $2x + 4y - 13 = 0$.

1.3.28. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(3, -5, -2)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(4, -6, 1)$. Σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $4x - 6y + z - 40 = 0$.

1.3.29. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $(1, -2, 2)$, $(-3, 1, -2)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x + y - z + 6 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $x - 12y - 10z - 5 = 0$.

1.3.30. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $(2, 2, 2)$ και $(0, -2, 0)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $x - 2y + 3z - 7 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $7x - 6y - z - 7 = 0$.

1.3.31. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $(2, 2, 2)$ και $(0, -2, 0)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $x - 2y + 3z - 7 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $4x - y - 2z - 2 = 0$.

1.3.32. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $(2, 1, 1)$ και $(3, 2, 2)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $x + 2y - 5z - 3 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $7x - 6y - z - 7 = 0$.

1.3.33. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $(2, -1, 6)$ και $(1, -2, 4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $x - 2y - 2z + 9 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $2x + 4y - 3z + 18 = 0$.

1.3.34. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(3, -2, 4)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $7x - 3y + z - 5 = 0$ και $4x - y - z + 9 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $4x + 11y + 5z - 10 = 0$.

1.3.35. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(1, -4, 2)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $2x + 5y - z - 5 = 0$ και $4x - 7y + 3z + 9 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $4x - 5y - 17z + 10 = 0$.

1.3.36. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(3, -2, 1)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $3y - 5z + 1 = 0$ και $x = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $5y + 3z + 7 = 0$.

1.3.37. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(1, 1, 2)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $2x - 2y - 4z - 6 = 0$ και $3x + y + 6z - 4 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $x + 3y - z - 2 = 0$.

1.3.38. Βρείτε την γωνία των επιπέδων $6x + 3y - 2z = 0$ και $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

Απ. 90° .

1.3.39. Βρείτε την γωνία των επιπέδων $2x + 5y + 7z - 1 = 0$ και $3x - 4y + 2z = 0$.

Απ. 90° .

1.3.40. Βρείτε την γωνία των επιπέδων $3x + 2y + 5z + 6 = 0$ και $x + 4y + 3z - 8 = 0$.

Απ. $\arccos \theta = \sqrt{\frac{13}{19}}$.

1.3.41. Βρείτε την γωνία των επιπέδων $3x + 4y - z + 1 = 0$ και $x - 2y - 5z + 3 = 0$.

Απ. 90°

1.3.42. Για ποια τιμή του κ είναι τα επίπεδα $3x + 4y + \kappa z - 26 = 0$ και $4x - 3y + 4z + 1 = 0$ κάθετα μεταξύ τους;

Απ. $\kappa = 0$.

1.3.43. Να εξεταστεί η φύση της τομής των επιπέδων

$$5x + 3y - 11z + 72 = 0$$

$$4x - 5y + 7z + 26 = 0$$

$$6x + 11y - 3z = -66$$

Απ. Αυτά τέμνονται στο σημείο $(-10, 0, 2)$.

1.3.44. Να εξεταστεί η φύση της τομής των επιπέδων

$$5x + 3y - 11z + 72 = 0$$

$$4x - 5y + 7z + 26 = 0$$

$$6x + 11y - 3z = -66$$

$$x + 2y + z + 8 = 0$$

Απ. Αυτά τέμνονται στο σημείο $(-10, 0, 2)$.

1.3.45. Να εξεταστεί η φύση της τομής των επιπέδων

$$x + y - 3z + 5 = 0$$

$$4x - 5y + z + 2 = 0$$

$$3x - 6y + 4z - 3 = 0$$

Απ. Αυτά τέμνονται στην ευθεία $x(t) = \frac{14}{9}t - 3, y(t) = \frac{13}{9}t - 2, z(t) = t$.

1.3.46. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι παράλληλο στο $4x - 4y + 7z - 3 = 0$ και απέχει 4 μονάδες από το σημείο $(4, 1, -2)$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $4x - 4y + 7z + 38 = 0, 4x - 4y + 7z - 34 = 0$.

1.3.47. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από την ευθεία τομής των $2x - 7y + 4z - 3 = 0$, $3x - 5y + 4z + 11 = 0$ και από το σημείο $(-2, 1, 3)$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $15x - 47y + 28z - 7 = 0$.

1.3.48. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από την ευθεία τομής των $3x - 4y + 2z - 6 = 0$, $2x + 4y - 2z + 7 = 0$ και από το σημείο $(1, 2, 3)$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $43x - 24y + 12z - 31 = 0$.

1.3.49. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από την ευθεία τομής των $2x - y + 2z - 6 = 0$, $3x - 6y + 2z - 12 = 0$ και τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $(6, 0, 0)$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $x - 5y - z = 0$.

1.3.50. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(1, -2, 3)$ και από την ευθεία

$$2x - 3y + z - 3 = 0$$

$$x + 3y + 2z + 1 = 0.$$

Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. $2x + 15y + 7z + 7 = 0$.

1.3.51. Βρείτε την απόσταση του σημείου $(-2, 2, 3)$ από το επίπεδο $8x - 4y - z - 8 = 0$.

Απ. $35/9$.

1.3.52. Υπολογίστε την απόσταση του επιπέδου $2x + y - 2z - 12 = 0$ από το σημείο $(-2, 2, 3)$.

Απ. $20/3$.

1.3.53. Υπολογίστε την απόσταση του επιπέδου $2x + 2y - z - 11 = 0$ από το σημείο $(1, 2, 4)$.

Απ. $6/\sqrt{29}$.

1.3.54. Υπολογίστε την απόσταση του επιπέδου $6x - 3y + 2z - 13 = 0$ από το σημείο $(7, 3, 4)$.

Απ. 4.

1.3.55. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $(0, 1, -3)$ από το επίπεδο που ορίζεται από τα σημεία $(3, 1, -5)$, $(8, 3, 3)$, $(-2, -1, 4)$

Απ. $6/\sqrt{29}$.

1.3.56. Βρείτε την απόσταση των επιπέδων $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και $2x - 3y - 6z + 7 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. 3.

1.3.57. Να βρεθεί η απόσταση των επιπέδων $3x + 2y - 6z - 35$ και $3x + 2y - 6z + 14 = 0$.

Απ. $d = 7$.

1.3.58. Βρείτε την απόσταση των επιπέδων $x + y + z = 0$ και $x - y + z = 1$. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. 0.

1.3.59. Βρείτε την εξίσωση των επιπέδων που είναι παραλληλα στο $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και έχουν απόσταση 5 από την αρχή των αξόνων. Σχεδιάστε τα επίπεδα.

Απ. $2x - 3y - 6z \pm 35 = 0$.

1.3.60. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι παραλληλο στο επίπεδο xy και απέχει 3 μοναδες από αυτο.

Απ. $z + 3 = 0$.

1.3.61. Βρείτε ένα σημείο το οποίο κείται στον άξονα των y και απέχει ίσες αποστάσεις από τα επίπεδα $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ και $8x + 9y - 72z + 73 = 0$.

Απ. Υπάρχουν δυο τέτοια σημεία: $(0, 73/12, 0)$ και $(0, -73/282, 0)$.

1.3.62. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που απέχει 3 μοναδες μήκους από την αρχή των αξόνων και είναι παραλληλο στο επίπεδο $3x - 6y - 2z - 4 = 0$.

Απ. $3x - 6y - 2z + 21 = 0$.

Κεφάλαιο 2

Ευθειες στον Τρισδιαστατο Χωρο

2.1 Θεωρια

2.1.1. Οι ευθεια που διερχεται απο σημειο (x_1, y_1, z_1) και είναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ (δηλ. έχει την διευθυνση του \mathbf{p}) οριζεται να είναι το συνολο των σημειων (x, y, z) που ικανοποιουν τις **δουο** εξισωσεις

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}, \quad (2.1)$$

Λεμε οτι οι (2.1) είναι οι εξισωσεις της ευθειας σε *συμμετρικη μορφη*. Ισοδυναμες με την (2.1) είναι και οι μορφες

$$\text{παραμετρικη : } x(t) = x_1 + t \cdot a, y(t) = y_1 + t \cdot b, z(t) = z_1 + t \cdot c, \quad (2.2)$$

$$\text{διανυσματικη : } \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t \cdot \mathbf{p}. \quad (2.3)$$

(οπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{p} = (a, b, c)$).

2.1.2. Οι εξισωσεις (2.1) - (2.3) έχουν την εξής *φυσικη* ερμηνεια : περιγραφουν την τροχια ενος κινητου το οποιο κινειται στον χωρο με **σταθερη** *διανυσματικη ταχυτητα* \mathbf{p} και η μεταβλητη t είναι ο *χρονος*. Προφανως η τροχια του κινητου είναι ευθεια γραμμη και την χρονικη στιγμη $t = 0$, το κινητο βρισκεται στο σημειο (x_1, y_1, z_1) .

2.1.3. Οι εξισωσεις ευθειας που διερχεται απο δυο σημεια (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) έχουν τις εξής ισοδυναμες μορφες

$$\text{συμμετρικη : } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{x_2 - z_1}, \quad (2.4)$$

$$\text{παραμετρικη : } x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1), y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1), z = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1), \quad (2.5)$$

$$\text{διανυσματικη : } \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.6)$$

(οπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$).

2.1.4. Μια ευθεια μπορεί επίσης να περιγραφεί και ως τομή δυο επιπεδων:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

2.1.5. Εστω δυο ευθειες με εξισώσεις $x = x_1 + t \cdot a_1, y = y_1 + t \cdot b_1, z = z_1 + t \cdot c_1$ και $x = x_1 + t \cdot a_2, y = y_1 + t \cdot b_2, z = z_1 + t \cdot c_2$. Η γωνια θ μεταξυ των δυο ευθειων προσδιοριζεται απο

$$\cos \theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (2.7)$$

Προσεξτε οτι οι ευθειες δεν ειναι απαραιτητο να τεμνονται.

2.1.6. Δυο ευθειες λεγονται *ασυμβατες* αν δεν ειναι παραλληλες και δεν τεμνονται.

2.1.7. Εστω δυο ευθειες με εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t \cdot a_1, & y &= y_1 + t \cdot b_1, & z &= z_1 + t \cdot c_1, \\ x &= x_2 + t \cdot a_2, & y &= y_2 + t \cdot b_2, & z &= z_2 + t \cdot c_2 \end{aligned}$$

οπου $(a_1, b_1, c_1) \nparallel (a_2, b_2, c_2)$. Οι ευθειες ειναι *ασυμβατες* (δηλ. δεν τεμνονται) αν

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.8)$$

2.1.8. Εστω δυο ασυμβατες ευθειες με εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t \cdot a_1, & y &= y_1 + t \cdot b_1, & z &= z_1 + t \cdot c_1, \\ x &= x_2 + t \cdot a_2, & y &= y_2 + t \cdot b_2, & z &= z_2 + t \cdot c_2 \end{aligned}$$

Η αποσταση των δυο ευθειων ειναι το ελαχιστο μηκος ευθυγραμμου τμηματος που εχει ενα ακρο σε καθε ευθεια. Αυτο ειναι ισο με

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}}{\sqrt{(bf - ec)^2 + (af - dc)^2 + (ae - bd)^2}}. \quad (2.9)$$

2.1.9. Εστω επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ και ευθεια $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$. Το σημειο τομης της ευθειας με το επιπεδο μπορεί να υπολογιστει λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ \frac{x - x_1}{a} &= \frac{y - y_1}{b} \\ \frac{y - y_1}{b} &= \frac{z - z_1}{c}. \end{aligned}$$

Αν το συστημα εχει απειρες λυσεις, η ευθεια ανηκει στο επιπεδο. Αν το συστημα δεν εχει καμια λυση η ευθεια ειναι παραλληλη στο επιπεδο.

2.1.10. Εστω επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ και ευθεια $x = x_1 + t \cdot a, y = y_1 + t \cdot b, z = z_1 + t \cdot c$. Αν η ευθεια τεμνει το επιπεδο τοτε το σημειο τομης ειναι η λυση του συστηματος

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ \frac{x - x_1}{a} &= \frac{y - y_1}{b} \\ \frac{y - y_1}{b} &= \frac{z - z_1}{c}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Το ιδιο σημειο τομης μπορει να περιγραφει και ως $(x_1 + at_0, y_1 + bt_0, z_1 + ct_0)$, οπου

$$t_0 = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{aA + bB + cC}. \quad (2.11)$$

2.1.11. Εστω επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ και ευθεια $x = x_1 + t \cdot a, y = y_1 + t \cdot b, z = z_1 + t \cdot c$. Η γωνια θ μεταξυ της ευθειας και του επιπεδου προσδιοριζεται απο

$$\sin \theta = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.12)$$

Ως ειδικες περιπτωσεις εχουμε οτι η ευθεια ειναι παραλληλη στο επιπεδο ανν

$$aA + bB + cC = 0 \quad (2.13)$$

και ειναι καθειτη στο επιπεδο ανν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \quad (2.14)$$

2.2 Λυμένες Ασκήσεις

2.2.1. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 2, 0)$ και είναι παραλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (2, 1, 3)$

Λυση. Σύμφωνα με την (2.1) η ευθεία έχει εξισώσεις

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z}{3}$$

και σε παραμετρική μορφή

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(δηλ. $x(t) = 1 + 2t$, $y(t) = 2 + t$, $z(t) = 3t$)

2.2.2. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 2, 0)$ και είναι παραλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (2, 1, 3)$

Λυση. Σύμφωνα με την (2.1) η ευθεία έχει εξισώσεις

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{3} \text{ δηλ.}$$

$$\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z}{3}$$

2.2.3. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(0, 2, -1)$ και είναι παραλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 0, 4)$.

Λυση. Σύμφωνα με την εξ.(2.3), οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι

$$x = t, \quad y = 2 - 0 \cdot t = 2, \quad z = -1 + 4t. \quad (2.15)$$

Για την συμμετρική μορφή, η (2.1) δίνει

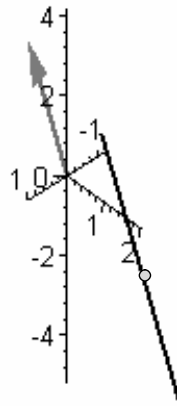
$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{4}. \quad (2.16)$$

Ποιο είναι το νοήμα του κλασματος $\frac{y-2}{0}$; Μπορούμε να εξισώσουμε τα κλασματα της (2.16) με μια πραγματική μεταβλητή t και να παρούμε

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{4} = t. \quad (2.17)$$

Ο μόνος τρόπος ώστε $\frac{y-2}{0} = t$, όπου το t μπορεί να παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, είναι να έχουμε $y-2=0$, δηλ. $y=2$. Αυτή είναι ακριβώς και η τιμή που δίνουν οι

παραμετρικές εξισώσεις (2.15). Με άλλα λόγια, η ευθεία είναι παραλληλή στο επίπεδο xy (δες και το Σχ.15.1).



Σχ.15.1

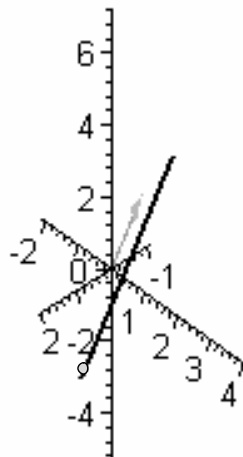
2.2.4. Αποδείξτε την **2.1.1**, δηλ. ότι η ευθεία που διέρχεται από δοθέν σημείο (x_1, y_1, z_1) και είναι παραλληλή σε δοθέν διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ έχει εξισώσεις

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}, \quad (2.18)$$

$$x(t) = x_1 + t \cdot a, y(t) = y_1 + t \cdot b, z(t) = z_1 + t \cdot c, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t \cdot \mathbf{p}. \quad (2.20)$$

Λυση. Στο Σχ.15.2 απεικονίζεται το δοθέν σημείο (x_1, y_1, z_1) , το δοθέν διάνυσμα \mathbf{p} , και τυχόν σημείο (x, y, z) της ευθείας. Σχηματίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{r} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ το οποίο είναι επί της ευθείας και άρα παραλληλό στο \mathbf{p} .



Σχ.15.2

Οποτε θα εχουμε $\mathbf{r} = t \cdot \mathbf{p}$, δηλ.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t$$

που ειναι οι εξισωσεις της (2.18). Απο αυτες προκυπτουν

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{a} = t &\Rightarrow x = x_1 + at \\ \frac{y - y_1}{b} = t &\Rightarrow y = y_1 + bt \\ \frac{z - z_1}{c} = t &\Rightarrow z = z_1 + ct \end{aligned}$$

που ειναι οι εξισωσεις της (2.19). Απο αυτες προκυπτουν και τις $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ προκυπτει οι (2.20).

2.2.5. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο τα σημεια $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 3)$.

Λυση. Οι εξισωσεις σε συμμετρικη μορφη ειναι

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{z - 0}{3 - 0} &\text{ δηλ.} \\ 1 - x = 2 - y = \frac{z}{3} \end{aligned}$$

και σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 2 \\ 3 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(δηλ. $x(t) = 1 - t$, $y(t) = 2 - t$, $z(t) = 3t$).

2.2.6. Βρειτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο τα σημεια $(-2, 1, 3)$ και $(4, 2, -2)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(2.4) οι ζητουμενες εξισωσεις ειναι

$$\frac{x + 2}{4 + 2} = \frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{z - 3}{-2 - 3}$$

δηλ.

$$\frac{x + 2}{6} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 3}{-5}$$

και σε παραμετρικη μορφη

$$x(t) = -2 + 6t, \quad y(t) = 1 + t, \quad z(t) = 3 - 5t.$$

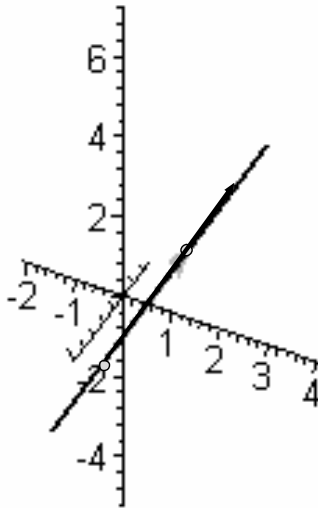
2.2.7. Αποδειξτε την **2.1.2**, δηλ. οτι η ευθεια που διερχεται απο τα σημεια (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) εχει εξισωσεις

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \tag{2.21}$$

$$x(t) = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1), y(t) = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1), z(t) = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1), \tag{2.22}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{2.23}$$

Λυση. Στο Σχ.15.3 απεικονίζεται η ευθεια και τα δοθεντα σημεια $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$. Αυτα οριζουν ενα διανυσμα $\mathbf{p} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ το οποιο ειναι παραλληλο στην ευθεια.



Σχ.15.3

Αφου η ευθεια ειναι παραλληλη στο $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, οι συμμετρικες εξισωσεις αυτης ειναι

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (2.24)$$

και αν θεσουμε καθε κλασμα στην (2.24) ισο με t , προκυπτουν και οι (2.22), 2.23).

2.2.8. Δινεται η ευθεια

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$

Να βρεθουν οι παραμετρικες εξισωσεις αυτης.

Λυση. Θετουμε

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3} = t$$

και, λυνοντας ως προς t παιρουμε

$$x = 1 + t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 3 + 3t.$$

2.2.9. Δινεται η ευθεια

$$x(t) = 1 + t, \quad y(t) = 2 - t, \quad z(t) = 1 + 2t.$$

Να βρεθουν οι συμμετρικες εξισωσεις αυτης.

Λυση. Εχουμε

$$x - 1 = t, \quad y - 2 = -t, \quad z - 1 = 2t$$

και αρα

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2} = t.$$

2.2.10. Δείξτε ότι τα $(2, -3, 1)$, $(5, 4, -4)$, $(8, 11, -9)$ κείνται πάνω σε μια ευθεία.

Λυση. Σχηματίζουμε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα $(2, -3, 1)$, $(5, 4, -4)$.

Αυτές είναι

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y+3}{4+3} = \frac{z-1}{-4-1}$$

και παρατηρούμε ότι αυτές ικανοποιούνται από το $(8, 11, -9)$:

$$\frac{8-2}{5-2} = \frac{11+3}{4+3} = \frac{-9-1}{-4-1} = 2.$$

2.2.11. Δίνεται η ευθεία

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}. \quad (2.25)$$

Να βρεθεί το σημείο αυτής το οποίο έχει συντεταγμένη $z = 1$.

Λυση. Θετώντας στην (2.25) $z = 1$ παίρνουμε

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} x-1 &= 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y-2 &= 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

2.2.12. Δίνεται η ευθεία

$$x(t) = 1+t, \quad y(t) = 2-t, \quad z(t) = 1+2t. \quad (2.26)$$

Να βρεθεί το σημείο αυτής το οποίο έχει συντεταγμένη $z = 2$.

Λυση. Για να έχουμε $z = 2$ θα πρέπει στην (2.26) να έχουμε

$$2 = 1 + 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= 1+t = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y &= 2-t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2)$.

2.2.13. Βρείτε τις συμμετρικές και παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περιγράφεται ως τομή των επιπέδων

$$2x - 3y + 3z - 4 = 0 \quad (2.27)$$

$$x + 2y - z + 3 = 0 \quad (2.28)$$

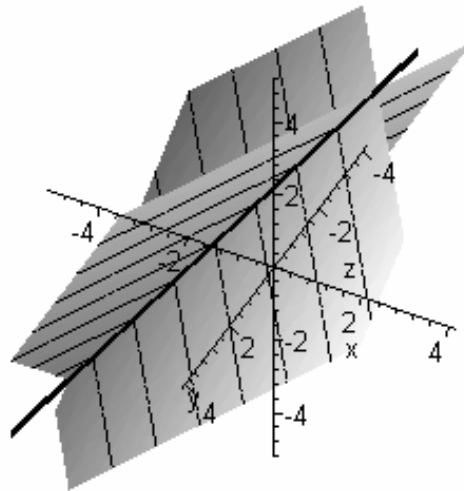
Λυση. Λύνοντας το σύστημα (2.27) - (2.28) παίρνουμε $x = -\frac{3}{7}z - \frac{1}{7}$, $y = \frac{5}{7}z - \frac{10}{7}$.
Θετώντας $t = z$ έχουμε

$$x = -\frac{3}{7}t - \frac{1}{7}, \quad y = \frac{5}{7}t - \frac{10}{7}, \quad z = t$$

και αυτές είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας. Απαλοφώντας το t από τις παραπάνω παίρνουμε τις συμμετρικές εξισώσεις

$$\frac{x + 1/7}{-3/7} = \frac{y + 10/7}{5/7} = \frac{z}{1} = t.$$

Δες και το Σχ.15.4.



Σχ.15.4

2.2.14. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που ορίζεται ως τομή των επιπέδων

$$x + 2y + z + 1 = 0$$

$$2x + y + 3z + 2 = 0$$

Λυση. Οι ζητούμενες εξισώσεις μπορούν να βρεθούν λύνοντας το παραπάνω σύστημα. Πραγματι, αυτό έχει λύσεις της μορφής

$$x(t) = -\frac{5}{3}t - 1, \quad y(t) = \frac{1}{3}t, \quad z(t) = t.$$

και σε παραμετρική διανυσματική μορφή

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.15. Δειξτε ότι οι ευθείες

$$l_1 : \frac{x+5}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-5}{4}$$

$$l_2 : \frac{x+2}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

τεμνονται.

Λυση. Οι ευθείες τεμνονται στο σημείο $(-5, 5, 5)$, επειδή αυτό είναι η λύση του συστήματος

$$\frac{x+5}{2} = y-5$$

$$y-5 = \frac{z-5}{4}$$

$$\frac{x+2}{-3} = y-4$$

$$y-4 = \frac{z-3}{2}$$

2.2.16. Δειξτε ότι οι ευθείες

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1} \quad \text{και} \quad l_2 : \frac{x+4}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{-2}$$

είναι παράλληλες.

Λυση. Η l_1 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p}_1 = (2, 3, -1)$ και η l_2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p}_2 = (4, 6, -2)$. Αλλά $\mathbf{p}_1 \parallel \mathbf{p}_2$ οπότε και $l_1 \parallel l_2$.

2.2.17. Δειξτε ότι οι ευθείες

$$l_1 : \frac{7x-15}{2} = \frac{7y+34}{-4} = \frac{z}{1} \quad \text{και} \quad l_2 : \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$$

είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λυση. Η l_1 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (2, -4, 1)$ και η l_2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{q} = (1, 1, 2)$. Επειδή $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ τα διανύσματα \mathbf{p}, \mathbf{q} είναι κάθετα μεταξύ τους και άρα το ίδιο ισχύει και για τις l_1, l_2 .

2.2.18. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας l_1 που διέρχεται από το $(-2, 4, 3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία l_2 που διέρχεται από τα $(1, 3, 4)$ και $(-2, 2, 3)$.

Λυση. Οι εξισώσεις της l_2 είναι

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z-4}{3-4}.$$

Δηλ. η l_2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (-3, -1, -1)$. Άρα η l_1 έχει εξισώσεις

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

2.2.19. Βρείτε την γωνία μεταξύ των ευθειών

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{6} \quad \text{και} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+4}{-2}.$$

Λυση. Η ζητούμενη γωνία είναι η ίδια με αυτή των διανυσμάτων $\mathbf{p} = (6, -3, 6)$, $\mathbf{q} = (3, 6, -2)$. Αυτά σχηματίζουν γωνία θ με

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{q}\|} = \frac{6 \cdot 3 - 3 \cdot 6 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 6^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = -\frac{4}{21}$$

Δηλ. $\theta = \arccos(-4/21) = 1.7624 \approx 180^\circ \frac{1.7624}{3.14159} = 101^\circ$.

2.2.20. Βρείτε την γωνία μεταξύ των ευθειών

$$\begin{aligned} l_1 : 2x - y + 3z - 4 &= 0, & 3x + 2y - z + 7 &= 0 \\ l_2 : x + y - 2z + 3 &= 0, & 4x - y + 3z + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Λυση. Καταρχήν βρισκόμαστε τις συμμετρικές εξισώσεις των ευθειών. Για την l_1 , το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - 4 &= 0 \\ 3x + 2y - z + 7 &= 0 \end{aligned}$$

έχει λύση $x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}z$, $y = \frac{11}{7}z - \frac{26}{7}$ άρα οι συμμετρικές εξισώσεις είναι

$$\frac{x - 1/7}{-5/7} = \frac{y + 26/7}{11/7} = \frac{z}{1}$$

και άρα η l_1 είναι παραλληλή στο $\mathbf{p} = (-5, 11, 7)$. Για την l_2 , το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y - 2z + 3 &= 0 \\ 4x - y + 3z + 7 &= 0 \end{aligned}$$

έχει λύση $x = -\frac{1}{5}z - 2$, $y = \frac{11}{5}z - 1$ άρα οι συμμετρικές εξισώσεις είναι

$$\frac{x + 2}{-1/5} = \frac{y + 1}{11/5} = \frac{z}{1}$$

και άρα η l_2 είναι παραλληλή στο $\mathbf{q} = (-1, 11, 5)$. Τέλος η γωνία των \mathbf{p}, \mathbf{q} είναι

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{q}\|} = \frac{-5 \cdot (-1) + 11 \cdot 11 + 7 \cdot 5}{\sqrt{5^2 + 11^2 + 7^2} \sqrt{1^2 + 11^2 + 5^2}} = \frac{23}{195} \sqrt{65} \approx 0.95093$$

οπότε $\theta \approx \arccos 0.95093 = 0.31457 \approx 18^\circ$.

2.2.21. Αποδείξτε την **2.1.5**, δηλ. ότι δύο ευθείες με εξισώσεις

$$l_1 : x = x_1 + t \cdot a_1, y = y_1 + t \cdot b_1, z = z_1 + t \cdot c_1$$

$$l_2 : x = x_1 + t \cdot a_2, y = y_1 + t \cdot b_2, z = z_1 + t \cdot c_2$$

σχηματίζουν γωνία θ που προσδιορίζεται από

$$\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (2.29)$$

Λυση. Η l_1 είναι παραλληλη στο $\mathbf{p}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ και η l_2 είναι παραλληλη στο $\mathbf{p}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Η γωνία λοιπόν μεταξύ των l_1 και l_2 είναι ίση με αυτή μεταξύ των \mathbf{p}_1 και \mathbf{p}_2 η οποία ικανοποιεί την (2.29).

2.2.22. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας l_1 που διέρχεται από το $(3, -1, 4)$ και είναι κάθετη στις ευθείες

$$l_2 : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-4} \quad \text{και} \quad l_3 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

Λυση. Η l_1 θα έχει εξισώσεις

$$\frac{x-3}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-4}{c}.$$

Τα δε a, b, c πρέπει να ικανοποιούν (λόγω καθετοτητας)

$$3a + 2b - 4c = 0$$

$$2a - 3b + 2c = 0$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $a = \frac{8}{13}c$, $b = \frac{14}{13}c$ οπότε οι εξισώσεις της l_1 είναι

$$\frac{x-3}{8c/13} = \frac{y+1}{14c/13} = \frac{z-4}{c}$$

και παίρνοντας $c = 13$ έχουμε τις ζητούμενες εξισώσεις:

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-4}{13}.$$

2.2.23. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(2, 2, -1)$ και τέμνει κάθετα την ευθεία $x = y = z$.

Λυση. Έστω ότι οι ζητούμενες εξισώσεις είναι

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z+1}{c}. \quad (2.30)$$

Πρέπει να ισχύει

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0$$

Ακομη, εστω (x_0, y_0, z_0) το σημείο τομής των δυο ευθειών. Επειδή αυτό ανήκει στην $x = y = z$, θα είναι (x_0, x_0, x_0) και θα πρέπει να ικανοποιεί την (2.30). Δηλ. έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{x_0 - 2}{a} &= \frac{x_0 - 2}{b} \\ \frac{x_0 - 2}{b} &= \frac{x_0 + 1}{c} \\ a + b + c &= 0. \end{aligned}$$

Απο την πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι $a = b$, οπότε από την τρίτη παίρνουμε $c = -2b$. Άρα κάθε λύση ικανοποιεί $(a, b, c) = (a, a, -2a)$ (δεν χρειάζεται να λύσουμε την δεύτερη εξίσωση αν δεν μας ενδιαφέρει η τιμή του x_0). Έτσι οι ζητούμενες εξισώσεις της ευθείας είναι

$$\frac{x - 2}{a} = \frac{y - 2}{a} = \frac{z + 1}{-2a}$$

και πιο απλά

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{-2}.$$

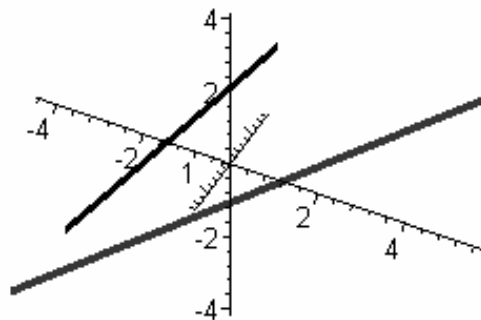
2.2.24. Δείξτε την 2.1.7, δηλ. ότι δυο ευθείες με εξισώσεις

$$\begin{aligned} l_1 : x &= x_1 + t \cdot a_1, y = y_1 + t \cdot b_1, z = z_1 + t \cdot c_1, \\ l_2 : x &= x_2 + t \cdot a_2, y = y_2 + t \cdot b_2, z = z_2 + t \cdot c_2. \end{aligned}$$

είναι ασυμβάτες αν

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.31)$$

Λυση. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλ. ότι οι ευθείες τέμνονται. Δείτε το Σχ.15.5.



Σχ.15.5

Η l_1 διέρχεται από το (x_1, y_1, z_1) και έχει διεύθυνση αυτή του $\mathbf{p}_1 = (a_1, b_1, c_1)$. Η l_2 διέρχεται από το (x_2, y_2, z_2) και έχει διεύθυνση αυτή του $\mathbf{p}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Τα $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ και $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ είναι συνεπιπεδα, άρα η οριζούσα που έχει αυτά ως γραμμές είναι μηδενική. Με άλλα λόγια

$$\text{οι } l_1, l_2 \text{ τέμνονται} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.32)$$

Άρα ισχύει και το αντιστρόφιο

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{οι } l_1, l_2 \text{ δεν τέμνονται}$$

δηλ. είναι ασυμβάτες.

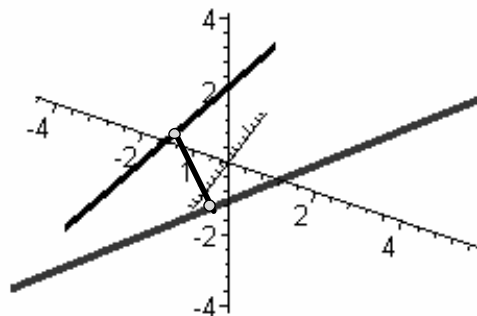
2.2.25. Υπολογίστε την απόσταση των ευθειών

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, & y &= 1 + t, & z &= 2 + t, \\ x &= 2t, & y &= 1 + t, & z &= 0. \end{aligned}$$

Λυση. Αυτές έχουν απόσταση

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

και άρα είναι ασυμβάτες (δες και το Σχ.15.6)



Σχ.15.6

2.2.26. Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t, & y &= 1 + t, & z &= 1 - t, \\ x &= 3t, & y &= 1 + 2t, & z &= 1. \end{aligned}$$

Λυση. Οι ευθείες έχουν απόσταση

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & & 1 & & -1 & \\ 3 & & 2 & & 0 & \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}} = \frac{2}{5}.$$

και άρα είναι ασυμβάτες.

2.2.27. Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών

$$\begin{aligned} l_1 &: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3} \\ l_2 &: x = y = z \end{aligned}$$

Λυση. Οι δύο ευθείες έχουν παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} l_1 &: x = -1 + t & y &= 2 + 2t & z &= -3 + 3t \\ l_2 &: x = t & y &= t & z &= t. \end{aligned}$$

Οπότε η απόσταση τους είναι

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 & -2 & 0 & +3 \\ 1 & & 2 & & 3 & \\ 1 & & 1 & & 1 & \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

2.2.28. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(1, 1, -2)$ από την ευθεία

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}.$$

Λυση. Η ευθεία l_1 έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 1 + 2t \quad y = -5 + 2t \quad z = t.$$

Εστώ τυχόν σημείο $M(1 + 2t, -5 + 2t, t)$ της ευθείας. Το τετράγωνο της απόστασης από το M στο A είναι

$$f(t) = (1 - 1 - 2t)^2 + (1 + 5 - 2t)^2 + (-2 - t)^2 = 9t^2 - 20t + 40$$

Η συνάρτηση $f(t)$ ελαχιστοποιείται όταν $f'(t) = 0$, δηλ. για $t = 10/9$. Οπότε το σημείο M με ελαχιστή απόσταση από το A είναι το $(1 + 2 \cdot \frac{10}{9}, -5 + 2 \cdot \frac{10}{9}, \frac{10}{9}) = (29/9, -25/9, 10/9)$ και τότε η ελαχιστή απόσταση των $d(A, M) = \sqrt{f(10/9)} = \sqrt{\frac{260}{9}} \simeq 5.3748$ που είναι η ζητούμενη απόσταση του σημείου από την ευθεία.

2.2.29. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(1, 1, 1)$ από την ευθεία

$$l_1 : x = y - 1 = z.$$

Λυση. Η ευθεία l_1 έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t \quad y = 1 + t \quad z = t.$$

Εστω τυχόν σημείο $M(t, 1 + t, t)$ της ευθείας Το τετράγωνο της απόστασης από το M στο A είναι

$$f(t) = (1 - t)^2 + (1 - 1 - t)^2 + (1 - t)^2 = 3t^2 - 4t + 2$$

Η συνάρτηση $f(t)$ ελαχιστοποιείται όταν $f'(t) = 0$, δηλ. για $t = 3/2$. Οπότε το σημείο M με ελαχιστή απόσταση από το A είναι το $(3/2, 5/2, 3/2)$ και τότε η ελαχιστή απόσταση των $d(A, M) = \sqrt{f(3/2)} = \frac{\sqrt{11}}{2} = 1.6583$ που είναι η ζητούμενη απόσταση του σημείου από την ευθεία.

2.2.30. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(1, 1, 1)$ από την ευθεία

$$l_1 : x = y, \quad z = 0.$$

Λυση. Η ευθεία l_1 έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t \quad y = t \quad z = 0.$$

Εστω τυχόν σημείο $M(t, t, 0)$ της ευθείας Το τετράγωνο της απόστασης από το M στο A είναι

$$f(t) = (1 - t)^2 + (1 - t)^2 + (1 - 0)^2 = 2t^2 - 4t + 3$$

Η συνάρτηση $f(t)$ ελαχιστοποιείται όταν $f'(t) = 0$, δηλ. για $t = 1$. Οπότε το σημείο M με ελαχιστή απόσταση από το A είναι το $(1, 1, 0)$ και τότε η ελαχιστή απόσταση των $d(A, M) = \sqrt{f(1)} = 1$ που είναι η ζητούμενη απόσταση του σημείου από την ευθεία.

2.2.31. Βρείτε το σημείο τομής της ευθείας

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z - 7}{-1}$$

με το επίπεδο $x + y + z = 0$.

Λυση. Το ζητούμενο προκύπτει από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{x + 1}{2} &= \frac{y - 5}{3} \\ \frac{y - 5}{3} &= \frac{z - 7}{-1} \end{aligned}$$

$$x + y + z = 0$$

το οποίο έχει λύση $(x, y, z) = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{13}{4}, \frac{39}{4}\right)$.

2.2.32. Βρείτε το σημείο στο οποίο η ευθεία

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{-1}$$

τεμνει το επιπεδο xy .

Λυση. Το επιπεδο xy εχει $z = 0$. Αρα το ζητουμενο σημειο δινεται απο τις εξισωσεις

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{0-6}{-1}$$

και ειναι $(x, y, z) = (13, 3, 0)$.

2.2.33. Δειξτε οτι η ευθεια

$$\frac{x-2}{10} = \frac{2y-2}{11} = \frac{z-5}{7} \quad (2.33)$$

ανηκει στο επιπεδο $3x - 8y + 2z - 8 = 0$.

Λυση. Λυνοντας τις εξ.(2.33) ως προς x βρισκουμε

$$y = \frac{11}{20}x - \frac{1}{10} \quad \text{και} \quad z = \frac{7}{10}x + \frac{18}{5}.$$

Δηλ. τυχον σημειο της ευθειας εχει συντεταγμενες $(x, \frac{11}{20}x - \frac{1}{10}, \frac{7}{10}x + \frac{18}{5})$. Αντικαθιστωντας αυτα στην εξισωση του επιπεδου βλεπουμε οτι

$$3x - 8 \cdot \left(\frac{11}{20}x - \frac{1}{10}\right) + 2 \cdot \left(\frac{7}{10}x + \frac{18}{5}\right) - 8$$

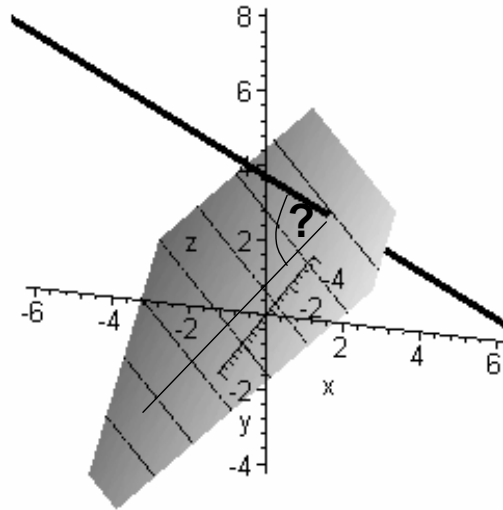
ειναι ταυτοτικα ισο με 0. Δηλ. καθε σημειο της ευθειας ικανοποιει την εξισωση του επιπεδου, αρα η ευθεια ανηκει στο επιπεδο.

2.2.34. Να βρεθει η γωνια της ευθειας $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}$ με το επιπεδο $z = 0$

Λυση. Απο την (2.12) η ζητουμενη γωνια ικανοποιει

$$\sin \theta = \frac{1 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

δηλ. $\theta = \pi/6$ (δες και το Σχ.15.7).



Σχ.15.7

2.2.35. Δειξτε οτι η ευθεια $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ ειναι παραλληλη στο επιπεδο $x + y - 5z = 0$

Λυση. Αυτο προκυπτει αμεσα αφου

$$aA + bB + cC = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0.$$

2.2.36. Δειξτε οτι η ευθεια

$$l_1 : \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-10} = \frac{z-3}{4}$$

ειναι καθετη στο επιπεδο $E : 3x - 5y + 2z + 4 = 0$.

Λυση. Αυτο προκυπτει αμεσα αφου

$$\frac{a}{A} = \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{b}{B} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad \frac{c}{C} = \frac{4}{2} = 2.$$

2.2.37. Αποδειξτε την **2.1.11**, δηλ. οτι η γωνια θ μεταξυ επιπεδου

$$E : Ax + By + Cz + D = 0$$

και ευθειας

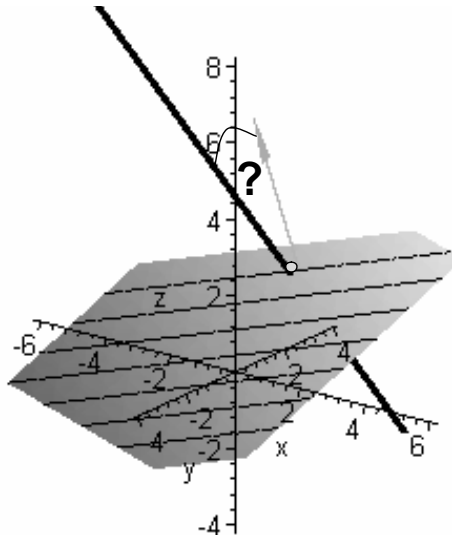
$$l : x = x_1 + t \cdot a, y = y_1 + t \cdot b, z = z_1 + t \cdot c.$$

προσδιοριζεται απο την

$$\sin \theta = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.34)$$

Δειξτε οτι η συνθηκη παραλληλιας (2.13) και καθετοτητας (2.14) ειναι ειδικες περιπτωσεις της (2.34).

Λυση. Δείτε το Σχ.15.8.



Σχ.15.8

Το $\mathbf{p} = (A, B, C)$ είναι το διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο E . Αυτό σχηματίζει γωνία ϕ με την l και έχουμε $\theta + \phi = \pi/2$. Άρα $\cos \theta = \sin \phi$ και η (2.34) προκύπτει από την σχέση (2.7) για την γωνία μεταξύ ευθείας και διανυσματος. Για να είναι $l \parallel E$ θα πρέπει $\theta = 0$ οπότε προκύπτει η συνθήκη παραλληλίας

$$aA + bB + cC = 0. \tag{2.35}$$

Για να είναι $l \perp E$ θα πρέπει $\phi = 0$ οπότε προκύπτει η συνθήκη καθετοτητας

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \tag{2.36}$$

2.2.38. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας l_1 που διέρχεται από το $(1, -2, 3)$ και είναι παραλληλη στα επίπεδα $E_1 : 2x - 4y + z - 3 = 0$ και $E_2 : x + 2y - 6z + 4 = 0$.

Λυση. Εστω ότι η ευθεία έχει εξισώσεις

$$\frac{x - 1}{a} = \frac{y + 2}{b} = \frac{z - 3}{c}$$

δηλ. είναι παραλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$. Αυτό το διάνυσμα πρέπει να είναι κάθετο στα κάθετα διανύσματα των επιπέδων E_1 και E_2 , δηλ. στα

$$\mathbf{p}_1 = (2, -4, 1) \quad \text{και} \quad \mathbf{p}_2 = (1, 2, -6).$$

Δηλ. πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned} 2a - 4b + c &= 0 \\ a + 2b - 6c &= 0 \end{aligned}$$

που έχει λύση $a = \frac{11}{4}c$, $b = \frac{13}{8}c$. Οποτε η l_1 έχει εξισώσεις

$$\frac{x-1}{11c/4} = \frac{y+2}{13c/8} = \frac{z-3}{c}$$

και παίρνοντας $c = 8$

$$\frac{x-1}{22} = \frac{y+2}{13} = \frac{z-3}{8}.$$

2.2.39. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(1, 2, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $x + 2y - z = 0$.

Λυση. Το διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, -1)$ είναι κάθετο στο δοθέν επίπεδο και άρα παράλληλο στη ζητούμενη ευθεία. Οποτε η ευθεία έχει εξισώσεις

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

2.2.40. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που περνάει από το $(-6, 4, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x - 2y + 5z + 8 = 0$.

Λυση. Η ευθεία έχει εξισώσεις

$$\frac{x+6}{a} = \frac{y-4}{b} = \frac{z-1}{c}$$

και μπορούμε να πάρουμε το διάνυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ίσο με το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου δηλ. $\mathbf{p} = (3, -2, 5)$. Οποτε τελικά η ευθεία έχει εξισώσεις

$$l_1 : \frac{x+6}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{5}$$

2.2.41. Βρείτε τις εξισώσεις του επιπέδου που περιέχει τις ευθείες

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}.$$

Λυση. Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4} &= \frac{y+1}{2} \\ \frac{y+1}{2} &= \frac{z-2}{3} \\ \frac{x-1}{5} &= \frac{y+1}{4} \\ \frac{y+1}{4} &= \frac{z-2}{3} \end{aligned}$$

βρισκουμε ότι έχει μοναδική λύση $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$. Άρα οι δυο ευθείες τέμνονται στο $(1, -1, 2)$ το οποίο ανήκει στο ζητούμενο επίπεδο. Το δε επίπεδο είναι παράλληλο στα διανύσματα $\mathbf{p} = (4, 2, 3)$ και $\mathbf{q} = (5, 4, 3)$ οποτε έχει εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3y - 6x + 6z - 3 = 0.$$

2.3 Άλυτες Ασκήσεις

2.3.1. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(0, 2, -1)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, -3, 4)$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $x = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

2.3.2. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $x = y = z$.

2.3.3. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(-2, 4, 3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα $(1, 3, 4)$ και $(-2, 2, 3)$. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $x - 3y + 14 = 0, y - z - 1 = 0$.

2.3.4. Βρείτε τις συμμετρικές και παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 1, 3)$ και $(4, 2, -2)$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-5}$.

2.3.5. Βρείτε τις συμμετρικές και παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(4, 1, 3)$ και $(4, 2, -2)$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $\frac{x-4}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{5}$ ή $x = 4, y = 1 - t, z = 3 + 5t$.

2.3.6. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{8}$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $x = 1 + t, y = 2 + 3t, z = 4 + 8t$.

2.3.7. Βρείτε τις συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας $x = 2 + 3t, y = 1 - 3t, z = -4 + 8t$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+4}{8}$.

2.3.8. Δίνεται η ευθεία

$$2x - y + t - 6 = 0$$

$$x + 4y - 2t - 8 = 0.$$

Να βρεθούν οι συμμετρικές και οι παραμετρικές εξισώσεις αυτής, καθώς και το σημείο αυτής το οποίο έχει συντεταγμένη $z = 1$. Σχεδιάστε τα επίπεδα και την ευθεία.

Απ. $x = \frac{32}{9} - \frac{2}{9}t, y = \frac{5}{9}t + \frac{10}{9}, z = t$ και $\frac{x-32/9}{-2} = \frac{y-10/9}{5} = \frac{z}{9}$. Το σημείο είναι $x = \frac{10}{3}, y = \frac{5}{3}, z = 1$.

2.3.9. Βρείτε τις συμμετρικές και παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περιγράφεται ως τομή των επιπέδων

$$2x - 3y + 3z - 4 = 0$$

$$x + 2y - z + 3 = 0.$$

Σχεδιάστε τα επίπεδα και την ευθεία.

Απ. $x = -\frac{3}{7}t - \frac{1}{7}, y = \frac{5}{7}t - \frac{10}{7}, z = t$ και $\frac{x+1/7}{-3} = \frac{y+10/7}{5} = \frac{z}{7}$.

2.3.10. Μπορείτε για την παραπάνω άσκηση να βρείτε παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας άλλες από αυτές που δίνονται στην απάντηση; Αν ναι, πώς το εξηγείτε;

Απ. Μια πιθανότητα είναι $x = -\frac{3}{5}t - 1$, $y = t$, $z = \frac{7}{5}t + 2$

2.3.11. Δείξτε ότι τα $(2, -3, 1)$, $(5, 4, -4)$, $(8, 11, -9)$ κείνται πάνω σε μια ευθεία. Σχεδιάστε την ευθεία.

2.3.12. Βρείτε τις συντεταγμένες y, z του σημείου που ανήκει στην

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

και έχει $x = 3$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $(3, -14/3, 5/3)$.

2.3.13. Δίνεται η ευθεία

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Να βρεθεί το σημείο αυτής το οποίο έχει συντεταγμένη $z = 6$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $x = 1, y = 4, z = 6$.

2.3.14. Δίνεται η ευθεία

$$x(t) = 2 + t, \quad y(t) = 2 - t, \quad z(t) = 1 + t.$$

Να βρεθεί το σημείο αυτής το οποίο έχει συντεταγμένη $z = 2$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $x = 3, y = 1, z = 2$.

2.3.15. Βρείτε τις συντεταγμένες y, z του σημείου που ανήκει στην

$$x = 4 - 3t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 2t - 3$$

και έχει $z = -5$. Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $x = 7, y = -5, z = -5$.

2.3.16. Δείξτε ότι οι ευθείες

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1} \quad \text{και} \quad \frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$$

είναι κάθετες μεταξύ τους. Σχεδιάστε τις ευθείες.

2.3.17. Δείξτε ότι οι ευθείες

$$\frac{7x-15}{2} = \frac{7y+34}{-5} = \frac{z}{1} \quad \text{και} \quad \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

είναι κάθετες μεταξύ τους. Σχεδιάστε τις ευθείες.

2.3.18. Δειξτε οτι η ευθεια

$$2x - 3y + 3z - 4 = 0$$

$$x + 2y - z + 3 = 0$$

ειναι καθετη στην ευθεια $x = t, y = 2t, z = -t$. Σχεδιαστε τις ευθειες.

2.3.19. Γραψτε τις εξισωσεις δυο επιπεδων των οποιων η τομη ειναι η ευθεια που περναι απο το $(-2, 4, 3)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $(3, 1, 1)$ Σχεδιαστε την ευθεια και τα επιπεδα.

Απ. $x - 3y + 14 = 0, y - z - 1 = 0$.

2.3.20. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$$

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

τεμνονται. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.21. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{-4}$$

$$\frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$$

ειναι παραλληλες. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.22. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$x = t, y = 2t + 3, z = -t + 2 \text{ και } x = 2t + 1, y = 4t, z = -2t + 766$$

ειναι παραλληλες. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.23. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$x + y + z + 1 = 0$$

$$x + 2y + 3z = 0$$

και

$$2x + 3y - 4z - 1 = 0$$

$$4x + 6y = 0$$

τεμνονται. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.24. Εξετάστε αν οι ευθείες

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{1}$$

είναι ασυμβάτες. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. Ναι.

2.3.25. Εξετάστε αν οι ευθείες

$$x + 2y - 5z - 1 = 0$$

$$x - 2y + 3z - 9 = 0$$

και

$$x + y - 3z + 1 = 0$$

$$x - y + z + 3 = 0$$

είναι ασυμβάτες. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. Όχι.

2.3.26. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(3, -1, 4)$ και είναι κάθετη στις ευθείες

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-4} \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-4}{13}$.

2.3.27. Εξετάστε αν οι ευθείες

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{και} \quad \frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{1}$$

είναι κάθετες μεταξύ τους. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. Ναι.

2.3.28. Για ποιες τιμές του κ είναι οι ευθείες

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x-3}{\kappa} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

κάθετες μεταξύ τους; Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $\kappa = 2$.

2.3.29. Βρείτε την γωνία μεταξύ των ευθειών

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{6} \quad \text{και} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+4}{-2}.$$

Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. 79°

2.3.30. Βρείτε την γωνία μεταξύ των ευθειών

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z - 4 &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-4}{-6}.$$

Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. 49°

2.3.31. Βρείτε την γωνία μεταξύ των ευθειών

$$\begin{aligned} l_1 : 2x - y + 3z - 4 &= 0, & 3x + 2y - z + 7 &= 0 \\ l_2 : x + y - 2z + 3 &= 0, & 4x - y + 3z + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. 18°

2.3.32. Είναι οι ευθείες

$$x = \frac{2}{7}t + \frac{15}{7}, \quad y = -\frac{5}{7}t - \frac{34}{7}, \quad z = t$$

και

$$\begin{aligned} x - y - z - 7 &= 0 \\ 3x - 4y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

καθètes μεταξύ τους;

Απ. Ναι

2.3.33. Γραψτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(3, -1, 4)$ και είναι καθète στα διανύσματα $\mathbf{p} = (3, 2, -4)$ και $\mathbf{q} = (2, -3, 2)$. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $x = 8t + 3, y = 14t - 1, z = 13t + 4.$

2.3.34. Γραψτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(2, 2, -3)$ και είναι καθète στα διανύσματα $\mathbf{p} = (2, -1, 3)$ και $\mathbf{q} = (-1, 2, 0)$. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $x = -2t - 4, y = -t - 1, z = t$

2.3.35. Δείξτε ότι οι ευθείες

$$\begin{aligned} x - y - z + 8 &= 0 \\ 5x + y + z + 10 &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x + y + z - 2 &= 0 \\ 2x + y - 3z + 9 &= 0 \end{aligned}$$

τεμνόνται και βρείτε το σημείο τομής αυτών. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $x = -3, y = 3, z = 2.$

2.3.36. Δειξτε ότι οι ευθείες

$$\frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z-2}{1} \text{ και } x-3 = y-2 = z-3$$

τεμνονται και βρείτε το σημείο τομής αυτών. Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $x = 3, y = 2, z = 3$.

2.3.37. Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών

$$x = 2y = z \text{ και } x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$$

Σχεδιάστε τις ευθείες.

2.3.38. Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-6}{7} \text{ και } x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3}$$

Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $4/\sqrt{3}$.

2.3.39. Να βρεθεί η απόσταση της ευθείας $x-1 = y+1 = z-2$ από τον άξονα των x .

Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. $3/\sqrt{2}$.

2.3.40. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας η οποία διέρχεται από το $(-3, 5, -9)$ και τέμνει τις ευθείες

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+3}{2} \text{ και } \frac{x}{1} = \frac{y+7}{4} = \frac{z-10}{5}.$$

Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $\frac{x}{1} = \frac{y-71}{22} = \frac{z+3}{2}$.

2.3.41. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας η οποία περνάει από το $(2, -3, -1)$, σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με τον άξονα των z και γωνία $\pi/4$ με τον άξονα των x . Σχεδιάστε τις ευθείες.

Απ. $\sqrt{2} \cdot (x-2) = \pm 2 \cdot (x+3) = 2 \cdot (z+1)$ (δύο ευθείες).

2.3.42. Να βρεθεί η απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-5}.$$

Σχεδιάστε την ευθεία.

Απ. 3.

2.3.43. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $(1, 1, -2)$ από την ευθεία. Σχεδιάστε το σημείο και την ευθεία

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}.$$

Απ. $d = 2$.

2.3.44. Βρείτε το σημείο τομής της ευθείας

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

με το επίπεδο $x + y + z = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. $x = -\frac{13}{2}, y = -\frac{13}{4}, z = \frac{39}{4}$.

2.3.45. Βρείτε το σημείο στο οποίο η ευθεία

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{-1}$$

τεμνει το επίπεδο xy . Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. $(13, 3, 0)$.

2.3.46. Βρείτε το σημείο στο οποίο η ευθεία

$$\frac{x}{1} = \frac{2y-3}{1} = \frac{2z-1}{5}$$

τεμνει το επίπεδο $4x - 2y + z - 3 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. $(1, 2, 3)$

2.3.47. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ της ευθείας

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{-6}$$

και του επιπέδου $2x - 2y + z - 3$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. 26° .

2.3.48. Δειξτε οτι η ευθεία

$$\frac{x-2}{10} = \frac{y-1}{11/2} = \frac{z-5}{7}$$

ανηκει στο επίπεδο $3x - 8y + 2z - 8 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

2.3.49. Δειξτε οτι η ευθεία

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

ανηκει στο επίπεδο $2x + 3y - 2z + 10 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

2.3.50. Δειξτε οτι η ευθεία

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

ειναι παραλληλη στο επίπεδο $6x + 7y - 5z - 8 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

2.3.51. Δειξτε οτι η ευθεία

$$x-1 = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

ειναι καθετη στο επίπεδο $x - 3y + 2z + 4 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

2.3.52. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(1, -2, 3)$ και είναι παράλληλη στα επίπεδα $2x - 4y + z - 3 = 0$ και $x + 2y - 6z + 4 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα και την ευθεία.

Απ. $\frac{x-1}{22} = \frac{y+2}{13} = \frac{z-3}{8}$.

2.3.53. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $(1, 4, -2)$ και είναι παράλληλη στα επίπεδα $6x + 2y + 2z + 3 = 0$ και $3x - 5y - 2z - 1 = 0$. Σχεδιάστε τα επίπεδα και την ευθεία.

Απ. $x - 1 = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{-6}$

2.3.54. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που περνάει από το $(-6, 4, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x - 2y + 5z + 8 = 0$.

Απ. $x = \frac{3}{5}t - \frac{33}{5}, y = \frac{22}{5} - \frac{2}{5}t, z = t$.

2.3.55. Γραψτε τις εξισώσεις της ευθείας που περνάει από το $(2, 0, -3)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $2x - 3y + 6 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. $x = 2 - \frac{2}{3}t, y = t, z = -3$.

2.3.56. Βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, -3, 4)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.

Απ. $x - 1 = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{2}$.

2.3.57. Βρείτε τις εξισώσεις του επιπέδου που περιέχει τις ευθείες

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}.$$

Σχεδιάστε το επίπεδο και τις ευθείες.

Απ. $2x - y - 2z + 1 = 0$.

2.3.58. Να βρεθεί η απόσταση της ευθείας

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

από το επίπεδο $6x + 7y - 5z - 8 = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. 5.

2.3.59. Να βρεθεί η απόσταση της ευθείας

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

και του επιπέδου $x + y + z = 0$. Σχεδιάστε το επίπεδο και την ευθεία.

Απ. 0.

2.3.60. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας της οποίας κάθε σημείο ισαπέχει από τα τρία σημεία $(3, -1, 2)$, $(4, -6, -5)$, $(0, 0, -3)$. Σχεδιάστε τα σημεία και την ευθεία.

Απ. $\frac{x}{16} = \frac{y+175/32}{13} = \frac{z+19/32}{-7}$.

2.3.61. Βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας που περνάει από το $(2, -3, 4)$ και είναι κάθετη στις ευθείες

$$x = y = z + 5 \text{ και } \frac{x-8}{3} = \frac{y+4}{-2} = z-2.$$

Απ. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = z-4.$

2.3.62. Ποια είναι η σχετική θέση των ευθειών

$$x = -3 + 2t, y = -1 + 2t, z = 4t \text{ και } x = 3 + t, y = -1 + 2t, z = 4.$$

Απ. Είναι ασυμβάτες.

2.3.63. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τοπος των σημείων τα οποία ισαπεχουν από τα $(3, -2, 4)$, $(5, 3, -2)$ και $(0, 4, 2)$. Σχεδιάστε τον γεωμετρικό τοπο.

Απ. Είναι ευθεία με εξισώσεις $\frac{x-18/11}{26} = \frac{y}{22} = \frac{z+9/44}{27}.$

Κεφάλαιο 3

Δευτεροβαθμιες Επιφάνειες στον Τρισδιάστατο Χωρο

3.1 Θεωρια

3.1.1. Οπως ειδαμε στο Κεφαλαιο 1, ενα επιπεδο μπορει να παρασταθει ως το συνολο των σημειων (x, y, z) τα οποια ικανοποιουν την εξισωση

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

3.1.2. Γενικευοντας το παραπανω, μια *επιφανεια* οριζεται να ειναι το συνολο των σημειων (x, y, z) τα οποια ικανοποιουν μια εξισωση

$$F(x, y, z) = c \tag{3.1}$$

(οπου c μια σταθερα). Η (3.1) λεγεται *πεπλεγμενη* αναπαρασταση της επιφανειας.

3.1.3. Π.χ. μια σφαιρα ειναι το συνολο των σημειων τα οποια απεχουν σταθερη αποσταση R απο ενα δοθεν σημειο (x_0, y_0, z_0) . Αυτη η ιδιοτητα περιγραφεται απο την εξισωση της σφαιρας με κεντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτινα R , η οποια ειναι

$$\bullet (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

(δηλ. σε αυτη την περιπτωση $F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, $c = R^2$).

3.1.4. Στο παρον κεφαλαιο θα ασχοληθουμε με τις *δευτεροβαθμιες επιφανειες*, δηλ. αυτες για τις οποιες οι $F(x, y, z)$ εχει την μορφη

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'xy + E'yz + F'zx + G'x + H'y + J'z + K' = 0$$

δηλ. ειναι πολυωνυμο το πολυ δευτερου βαθμου ως προς τις μεταβλητες x, y, z .

3.1.5. Καθε δευτεροβαθμια επιφανεια, με καταλληλη *μεταμορφωση* της αρχης των αξωνων και *αντιμεταθεση* των μεταβλητων x, y, z μπορει να αναχθει σε μια απο τις εξης δυο βασικες μορφες

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \tag{3.2}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz = 0. \tag{3.3}$$

3.1.6. Αν η επιφάνεια είναι της μορφής (3.2) μπορεί να αναχθεί περαιτέρω σε μια από τις παρακάτω μορφές

	Επιφάνεια
Ελλειψοειδές	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Μονοχώνο Υπερβολοειδές	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Διχώνο Υπερβολοειδές	$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$
Κώνος	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{y^2}{c^2}$
Ελλειπτικός Κυλινδρός	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Υπερβολικός Κυλινδρός	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

με κατάλληλη επιλογή των a, b, c (εξαρτώμενη από τις τιμές των A, B, C, D).

3.1.7. Αν η επιφάνεια είναι της μορφής (3.3) μπορεί να αναχθεί σε μια από τις παρακάτω μορφές

Ελλειπτικό Παραβολοειδές	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Υπερβολικό Παραβολοειδές	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
Ελλειπτικός Κυλινδρός	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

με κατάλληλη επιλογή των a, b (εξαρτώμενη από τις τιμές των A, B, C).

3.1.8. Μια ειδική κατηγορία επιφανειών είναι οι επιφάνειες εκ περιστροφής. Εστω ότι στο επίπεδο yz δίνεται μια καμπύλη C με εξίσωση $z = f(y)$. Αν περιστρέψουμε την C γύρω από τον άξονα των x , παίρνουμε μια επιφάνεια S με εξίσωση

$$x^2 + z^2 = (f(y))^2. \tag{3.4}$$

3.1.9. Αναλογές επιφάνειες προκύπτουν από την περιστροφή μιας καμπύλης του επιπέδου zx γύρω από τον άξονα των y κτλ.

3.1.10. Ειδικές κατηγορίες των δευτεροβαθμίων επιφανειών προκύπτουν από την περιστροφή καμπυλών είναι οι εξής.

	Καμπύλη	Άξονας Περιστροφής	Επιφάνεια
Ελλειψοειδές	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Oy	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$
Μονοχώνο Υπερβολοειδές	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Oz	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Διχώνο Υπερβολοειδές	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Oy	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$
Κώνος	$z = ay$	Oy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = y^2$
Ελλειπτικός Κυλινδρός	$z = a$	Oy	$x^2 + z^2 = a^2$
Ελλειπτικό Παραβολοειδές	$y = z^2$	Oy	$y = x^2 + z^2$

3.1.11. Εκτός από την πεπλεγμένη μορφή, μια επιφάνεια μπορεί επίσης να παρασταθεί σε παραμετρική μορφή, από τρεις εξισώσεις της μορφής

$$x(u, v) = f(u, v), \quad y(u, v) = g(u, v), \quad z(u, v) = h(u, v)$$

και ισοδυναμεί σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v)).$$

Οι μεταβλητές u, v είναι οι παραμετροί, και παίρνουν τιμές σε κατάλληλα σύνολα.

3.1.12. Το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

έχει παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = (x_0 + a \cos u \cos v, y_0 + b \sin u \cos v, z_0 + c \sin v)$$

όπου $u \in [0, 2\pi]$ και $v \in [0, \pi]$.

3.1.13. Η επιφάνεια που περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \quad (3.5)$$

λεγεται *κωνική επιφάνεια* με *κορυφή* το σημείο \mathbf{r}_0 και *οδηγό καμπύλη* την $\mathbf{r}_1(u)$. Εάν η $\mathbf{r}_1(u)$ είναι ένας κύκλος, τότε η (3.5) δίνει τον «κλασικό» κώνο.

3.1.14. Η επιφάνεια που περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση

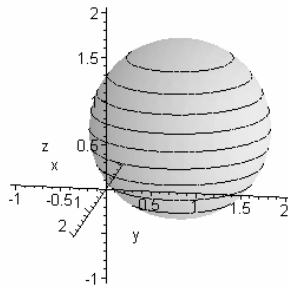
$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1(u) + v \cdot \mathbf{r}_2$$

λεγεται *κυλινδρική επιφάνεια* με *γενέτειρα* το διάνυσμα \mathbf{r}_2 και *οδηγό καμπύλη* την $\mathbf{r}_1(u)$. Εάν η $\mathbf{r}_1(u)$ είναι ένας κύκλος και το \mathbf{r}_2 παράλληλο σε ένα από τους άξονες Ox, Oy, Oz τότε η (3.5) δίνει τον «κλασικό» κυλινδρό.

3.2 Λυμένες Ασκήσεις

3.2.1. Γραψτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 1, 1)$ και ακτινα 4.

Λυση. Είναι $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4^2$. Δες και το Σχ.16.1.



Σχ.16.1

3.2.2. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $A(1, 2, 3)$ και διερχομενη απο το σημειο $B(2, 3, 4)$.

Λυση. Η ζητουμενη σφαιρα εχει ακτινα ιση με την αποσταση

$$d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}.$$

Οποτε η ζητουμενη εξίσωση θα ειναι

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 3.$$

3.2.3. Δειξτε οτι η επιφανεια με εξίσωση

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 13 = 0$$

ειναι μια σφαιρα.

Λυση. Θα βρουμε την εξίσωση με συμπληρωση του τετραγωνου. Εχουμε

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 13 &= 0 \Rightarrow \\ x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 + y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 + z^2 - 2 \cdot 3 \cdot z + 3^2 + 13 - 1^2 - 2^2 - 3^2 &= 0 \Rightarrow \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Αρα η ζητουμενη σφαιρα εχει κεντρο $(1, 2, 3)$ και ακτινα 1.

3.2.4. Δείξτε ότι η επιφάνεια με εξίσωση

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 4 = 0$$

είναι μια σφαίρα.

Λυση. Παρομοία με την προηγούμενη άσκηση, με συμπλήρωση του τετραγώνου η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 4 \\ &= x - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + z^2 - 4 \\ &= (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 3^2 \end{aligned}$$

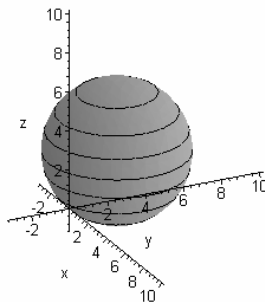
που είναι η εξίσωση σφαίρας:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3^2$$

με κέντρο το $(2, 1, 0)$ και ακτίνα 3.

3.2.5. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο $(1, 2, 3)$ και εφαπτομένης στον άξονα των x .

Λυση. Η απόσταση τυχόντος σημείου (x_0, y_0, z_0) από τον άξονα των x είναι $d = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$. Δες και το Σχ.16.2.



Σχ.16.2

Οπότε η ζητούμενη σφαίρα θα έχει ακτίνα

$$R = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

και η εξίσωση της θα είναι

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 13.$$

3.2.6. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που έχει κεντρο το $(3, 6, -4)$ και εφαπτεται στο επιπεδο $E : 2x - 2y - z - 10 = 0$.

Λυση. Η αποσταση απο το κεντρο ως το επιπεδο E είναι

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 4$$

Αρα η εξίσωση της σφαιρας είναι $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 4)^2 = 4^2$.

3.2.7. Βρείτε την σφαιρα που διερχεται απο τα σημεια $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$.

Λυση. Αν η εξίσωση τη σφαιρας έχει την μορφη

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

τοτε η συγκεκριμενη σφαιρα πρεπει να ικανοποιει

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + D &= 0 \\ 2^2 + 0^2 + 2^2 + A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 2 + D &= 0 \\ 1^2 + 0^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D &= 0 \\ 0^2 + 1^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + D &= 0. \end{aligned}$$

δηλ.

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= -3 \\ 2A + 2C + D &= -8 \\ A + C + D &= -2 \\ B + C + D &= -2 \end{aligned}$$

που έχει λυση $A = -1$, $B = -1$, $C = -5$, $D = 4$. Αρα η ζητουμενη εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 5z + 4 &= 0 \Rightarrow \\ x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2} + y^2 - 2\frac{1}{2}y + \frac{1}{2^2} + z^2 - 2\frac{5}{2}z + \frac{5^2}{2^2} + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{25}{4} &= 0 \Rightarrow \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

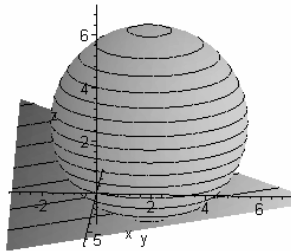
Δηλ. η ζητουμενη σφαιρα έχει κεντρο $(1/2, 1/2, 5/2)$ και ακτινα $3/2$.

3.2.8. Στο επιπεδο xy δινεται ο κυκλος με κεντρο $(5, 4, 0)$ και ακτινα 6. Να βρεθει η σφαιρα που διερχεται απο αυτο τον κυκλο και εφαπτεται στο επιπεδο $E : 3x + 2y + 6z - 1 = 0$.

Λυση. Ο δοθεις κυκλος είναι τομη της σφαιρας

$$S : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 6^2$$

και του επιπέδου $z = 0$. Δες και το Σχ.16.3.



Σχ.16.3

Καθε σφαιρα που διερχεται απο αυτο τον κυκλο θα εχει εξισωση

$$S'(\kappa) : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y + 5 - \kappa z = 0$$

Πρεπει να βρουμε κ τετοιο ωστε η $S'(\kappa)$ να εφαιπεται στο E . Δηλ. πρεπει το κεντρο της $S'(\kappa)$ να εχει αποσταση d απο το E ιση με την ακτινα $R(\kappa)$ της $S'(\kappa)$. Χρησιμοποιωντας τον τυπο για την αποσταση σημειου απο επιπεδο και βρισκοντας την ακτινα της $S'(\kappa)$ με συμπληρωση τετραγωνου παιρνοουμε την εξισωση

$$\left| \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot \frac{\kappa}{2} - 1}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} \right| = \sqrt{\frac{100 + 64 + \kappa^2}{4}} - 5$$

η οποια ειναι ισοδυναμη με την εξισωση

$$\left(\frac{22 + 3\kappa}{7} \right)^2 = \frac{164 + \kappa^2}{4} - 5$$

η οποια εχει δυο λυσεις: $\kappa = \frac{320}{13}$ και $\kappa = 16$. Οποτε υπαρχουν δυο σφαιρες που ικανοποιουν τα ζητουμενα:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y + 5 + \frac{320}{13}z = 0$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y + 5 + 16z = 0$$

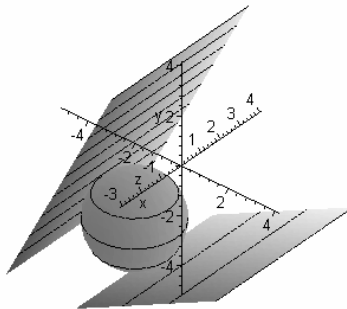
Τελικα, με συμπληρωση του τετραγωνου βρισκουμε οτι οι σφαιρες αυτες ειναι

$$S_1 : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 + \left(z - \frac{160}{3} \right)^2 = \left(\frac{178}{13} \right)^2$$

$$S_2 : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 8)^2 = 10^2.$$

3.2.9. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που εφαπτεται στα επιπεδα $E_1 : x - 2z - 8 = 0$, $E_2 : 2x - z + 5 = 0$ και εχει κεντρο επι της ευθειας $l_1 : x = -2, y = 0$.

Λυση. Το κεντρο της σφαιρας θα βρισκεται στο διχοτομουν επιπεδο E_3 των E_1 και E_2 (δες Σχ.16.4)



Σχ.16.4

Το E_3 εχει εξίσωση

$$E_3 : \frac{1}{2} \cdot (x - 2z - 8) + \frac{1}{2} \cdot (2x - z + 5) = 0$$

δηλ.

$$E_3 : x - z - 1 = 0$$

Αφου το κεντρο της σφαιρας βρισκεται επισης πανω στην l_1 θα εχουμε

$$x = -2, \quad y = 0, \quad z = (-2 - 1) = -3.$$

Η ακτινα της σφαιρας θα ειναι η αποσταση του $(-2, 0, -3)$ απο το επιπεδο E_1 :

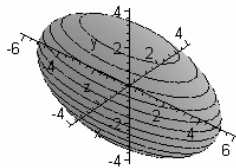
$$d = \frac{|1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) - 8|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Οποτε η σφαιρα θα εχει εξίσωση

$$(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{5}$$

3.2.10. Σχεδιαστε και περιγραψτε το ελλειψοειδες $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Λυση. Η γραφική παρασταση του ελλειψοειδους δινεται στο Σχ.16.5.



Σχ.16.5

Παρατηρουμε οτι καθε επιπεδο $z = c_1 \in [-c, c]$ (παρλληλο στο επιπεδο xy) τεμνει το ελλειψοειδες κατα μια ελλειψη. Πραγματι επι της τομης θα εχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c_1^2}{c^2}$$

που ειναι η εξισωση ελλειψης. Το ιδιο ισχυει και για τομες απο επιπεδα παρλληλα ειτε στο επιπ. yz ειτε στο zx .

3.2.11. Εξηγειστε γιati η σφαιρα (με κεντρο $(0, 0, 0)$ και ακτινα R) ειναι μια ειδικη περιπτωση ελλειψοειδους, με $a = b = c = R$.

Λυση. Πραγματι, αν στην εξισωση του ελλειψοειδους θεσουμε $a = b = c = R$ παιρνοουμε

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

3.2.12. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Λυση. Η επιφανεια ειναι ελλειψοειδες με $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

3.2.13. Δειξτε οτι η επιφανεια

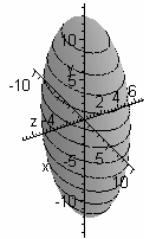
$$x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

ειναι ενα ελλειψοειδες.

Λυση. Χρησιμοποιούμε και πάλι συμπλήρωση τετραγώνου.

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 &= 0 \Rightarrow \\
 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) + 3 \cdot (y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2) + (z^2 - 2 \cdot 2 \cdot z + 2^2) - 4 - 1 - 4 - 3 &= 0 \Rightarrow \\
 2 \cdot (x - 2)^2 + 3 \cdot (y + 1)^2 + (z - 2)^2 &= 12 \Rightarrow \\
 \frac{(x - 2)^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{(y + 1)^2}{2^2} + \frac{(z - 2)^2}{(2\sqrt{3})^2} &= 1
 \end{aligned}$$

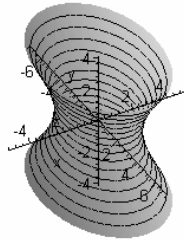
που αναγνωρίζεται ως εξίσωση ελλειψοειδούς με κέντρο το $(2, -1, 2)$ και $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$. Δες και το σχήμα 16.6, όπου φαίνεται η μετατόπιση του κέντρου του ελλειψοειδούς.



Σχ.16.6

3.2.14. Σχεδιάστε και περιγράψτε το μονοχωνο υπερβολοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Λυση. Η γραφική παρασταση του μονοχώνου υπερβολοειδούς δίνεται στο Σχ.16.7.



Σχ.16.7

Παρατηρούμε ότι κάθε επίπεδο $z = c_1 \in \mathbb{R}$ (παράλληλο στο επίπεδο xy) τέμνει το μονοχώνο υπερβολοειδές κατά μια ελλειψη. Πραγματι επί της τομής θα έχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{c_1^2}{c^2}$$

που είναι η εξίσωση ελλειψής. Κάθε επίπεδο $x = a_1 \in \mathbb{R}$ (παράλληλο στο επίπεδο yz) τέμνει το μονοχώνο υπερβολοειδές κατά μια υπερβολή. Πραγματι επί της τομής θα έχουμε

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{a_1^2}{a^2}$$

που είναι η εξίσωση υπερβολής. Το ίδιο ισχύει και για τομές από επίπεδα παράλληλα στο επίπεδο zx .

3.2.15. Αναγνώριστε την επιφάνεια

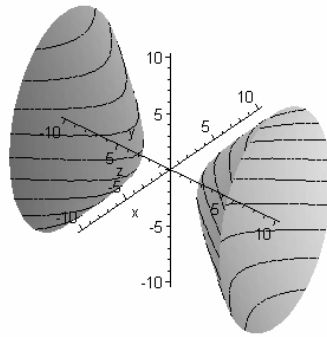
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

Λυση. Αυτή αναγνωρίζεται ως μονοχώνο υπερβολοειδές με $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$.

3.2.16. Σχεδιάστε και αναγνώριστε την επιφάνεια

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \tag{3.6}$$

Λυση. Η γραφική παρασταση της (3.6) δίνεται στο Σχ. Σχ.16.8.



Σχ.16.8

Βλεπουμε οτι ειναι μονοχωνο υπερβολοειδες, αλλα ο κυριος αξονας του ειναι ο Oy και οχι ο Oz (οπως ηταν π.χ. στο Σχ. 16.7). Με αλλα λογια εγινε *αντιμεταθεση* των μεταβλητων y, z (και αντιστοιχα των αξωνων Oy και Oz). Αυτος ο μετασχηματισμος μπορει να εφαρμοστει και σε πολλες αλλες δευτεροβαθμιες επιφανειες, οπως θα δουμε παρακατω.

3.2.17. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 - 6y - \frac{1}{9}z^2 + \frac{33}{4} = 0. \quad (3.7)$$

Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνου η (3.7) μετασχηματιζεται στην

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{9} = 1$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση μονοχωνου υπερβολοειδους, με κεντρο $(1, 3, 0)$ και $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.

3.2.18. Σχεδιαστε και περιγραψτε το *διχωνο υπερβολοειδες*

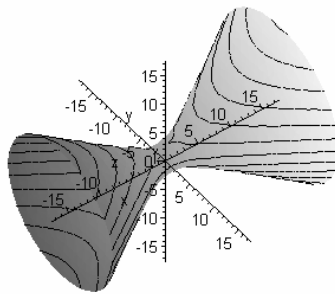
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Λυση. Η γραφική παρασταση δίνεται στο Σχ.16.8. Παρατηρουμε οτι οι τομες του διχωνου υπερβολοειδους απο επιπεδα παραλληλα στο xy και στο zx ειναι υπερβολες, ενω οι τομες απο επιπεδα παραλληλα στο yz ειναι ελλειψεις.

3.2.19. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$-\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} + \frac{(z-2)^2}{2^2} = 1$$

Λυση. Είναι διχωνο υπερβολοειδης με αντιμεταθεση των αξονων $0x$ και $0z$ και το κεντρο μετατοπισμενο στο $(1, -1, 2)$. Δειτε και το Σχ. 16.9



Σχ.16.9

3.2.20. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x - y^2 - z^2 - \frac{8}{9} = 0.$$

Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνων η εξισωση της επιφανειας γινεται

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} - y^2 - z^2 = 1$$

δηλ. αυτη ειναι διχωνο υπερβολοειδης.

3.2.21. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$-\frac{1}{4}x^2 + y^2 - \frac{1}{9}z^2 + \frac{2}{9}z - \frac{1}{9} - 1 = 0$$

Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνων η εξισωση της επιφανειας γινεται

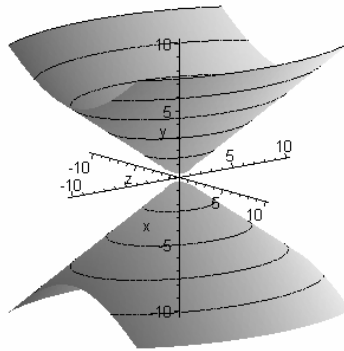
$$y^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{9} = 1$$

δηλ. αυτη ειναι διχωνο υπερβολοειδης.

3.2.22. Σχεδιάστε και περιγράψτε τον ελλειπτικό κώνο

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \quad (3.8)$$

Λυση. Η γραφική παρασταση δίνεται στο Σχ.16.10. Παρατηρούμε ότι οι τομές του κώνου υπερβολοειδούς από επίπεδα παραλλήλα στο xy είναι ελλειψεις, επειδή για $z = c_1$ η (3.8) γίνεται $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c_1^2}{c^2}$. Οι τομές από επίπεδα παραλλήλα στο yz είναι υπερβολές, επειδή για $y = b_1$ η (3.8) γίνεται $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{b_1^2}{b^2}$ (παρομοια και για τις τομές από επίπεδα παραλλήλα στο zx).



Σχ.16.10

3.2.23. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$y^2 + 4z^2 - x^2 = 0 \quad (3.9)$$

Λυση. Η (3.9) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} = \frac{x^2}{2^2}$$

που αναγνωρίζεται ως εξίσωση ελλειπτικού κώνου με αντιμεταθεση των αξόνων Ox και Oz .

3.2.24. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y - z^2 - 2z + 4 = 0$$

Λυση. Με συμπλήρωση των τετραγώνων η εξίσωση ξαναγραφεται ως

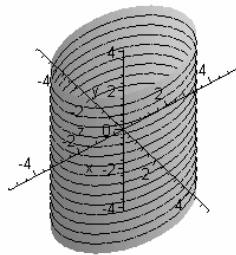
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - (z + 1)^2 = 0$$

και αναγνωρίζεται ως ελλειπτικός κώνος με $a = b = c = 1$ και την κορυφή του κώνου μετατοπισμένη στο $(1, 2, -1)$.

3.2.25. Σχεδιάστε και περιγράψτε τον ελλειπτικό κυλινδρο

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.10)$$

Λυση. Η γραφική παρασταση δίνεται στο Σχ.16.11.



Σχ.16.11

Προσεξτε ότι η (3.10) είναι η εξίσωση μιας επιφανείας στον χώρο και δεν πρέπει να συγχέεται με την ίδια εξίσωση στο επίπεδο (η οποία περιγράφει μια ελλειψη). Με άλλα λόγια, ο ελλειπτικός κυλινδρος είναι το σύνολο των σημείων (x, y, z) (μια επιφάνεια) που ικανοποιούν την (3.10). Αν το σημείο $(x_1, y_1, 0)$ ανήκει στην επιφάνεια το ίδιο ισχύει και για κάθε σημείο (x_1, y_1, z) . Αυτό συμβάνει επειδή η συντεταγμένη z δεν εμφανίζεται στην (3.10). Οι τομές του υπερβολικού κυλινδρου από επίπεδα παραλληλα στο xy είναι ελλειψεις.

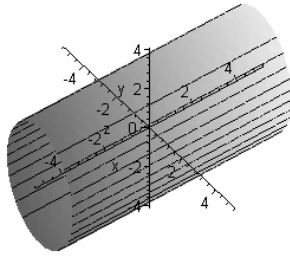
3.2.26. Σχεδιάστε και αναγνωρίστε την επιφάνεια $4x^2 + 9z^2 = 36$.

Λυση. Η εξίσωση γραφεται ως

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

και αναγνωρίζεται ως ελλειπτικός κυλινδρος με αντιμεταθεση των αξόνων Oy και Oz

εναλλαγμένους. Δες και το Σχ.16.12.

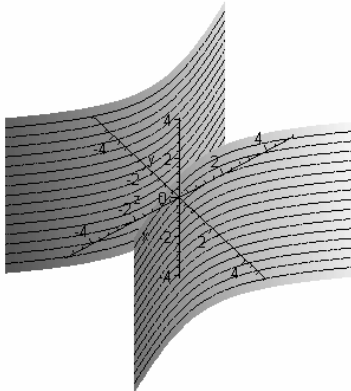


Σχ.16.12

3.2.27. Σχεδιάστε και περιγράψτε τον *υπερβολικό κυλινδρο*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Λυση. Η γραφική παρασταση δίνεται στο Σχ.16.13. Οι τομές από επίπεδα παραλληλα στο xy είναι υπερβολές.



Σχ.16.13

3.2.28. Σχεδιάστε και αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9}z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{7}{4} = 0$$

Λυση. Με συμπλήρωση των τετραγώνων, η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί ως

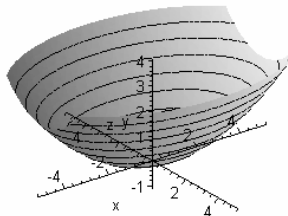
$$\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(z-3)^2}{3^2} = 1$$

και αναγνωρίζεται ως υπερβολικός κυλινδρός.

3.2.29. Σχεδιάστε και περιγράψτε το *ελλειπτικό παραβολοειδές*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Λυση. Η γραφική παρασταση δίνεται στο Σχ.16.14.



Σχ.16.14

Οι τομές από επίπεδα $z = c_1$ είναι ελλειψείς. Οι τομές από επίπεδα $x = a_1$ και $y = b_1$ είναι παραβολές.

3.2.30. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$4x^2 + 9y^2 = 36z$$

Λυση. Η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί

$$z = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2}$$

που αναγνωρίζεται ως εξίσωση ελλειπτικού παραβολοειδούς.

3.2.31. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$x - \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{8}y - \frac{1}{9}z^2 - \frac{2}{9}z - \frac{25}{144} = 0$$

Λυση. Με συμπλήρωση του τετραγώνου βρίσκουμε ότι η εξίσωση είναι ισοδυναμη με την

$$x = \frac{(y-1)^2}{4^2} + \frac{(z+1)^2}{3^2}$$

δηλ. η επιφάνεια είναι ένα ελλειπτικό παραβολοειδές με κορυφή στο $(0, 1, -1)$

3.2.32. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - 6y - z + \frac{37}{4}$$

Λυση. Με συμπλήρωση τετραγώνων η εξίσωση της επιφάνειας ξαναγράφεται ως εξής

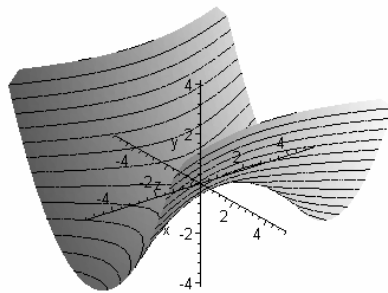
$$z = \frac{1}{4}(x+1)^2 + (y-3)^2$$

και αναγνωρίζουμε ότι είναι ελλειπτικό παραβολοειδές.

3.2.33. Σχεδιάστε και περιγράψτε το υπερβολικό παραβολοειδές

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Λυση. Η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχ.16.15.



Σχ.16.15

Οι τομές από επίπεδα $z = c_1$ είναι υπερβολές. Οι τομές από επίπεδα $x = a_1$ και $y = b_1$ είναι παραβολές.

3.2.34. Αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$9x^2 - 4y^2 = 36z$$

Λυση. Η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$z = \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2}$$

που αναγνωρίζεται ως εξίσωση υπερβολικού παραβολοειδους.

3.2.35. Βρείτε την εξίσωση του παραβολοειδους με κορυφή το $(0, 0, 0)$, άξονα τον Oy , και διερχομενο απο τα σημεια $(1, 1, 1)$ και $(1, 2, 3)$.

Λυση. Αφου η κορυφή είναι το $(0, 0, 0)$ και άξονας συμμετρίας ο άξονας των Oy , η εξίσωση του παραβολοειδους θα είναι

$$y = Ax^2 + Cz^2.$$

Για να διερχεται δε το παραβολοειδες απο τα $(1, 1, 1)$ και $(1, 2, 3)$ θα πρέπει να ισχυει

$$1 = A \cdot 1^2 + C \cdot 1^2$$

$$1 = A \cdot 2^2 + C \cdot 3^2$$

που έχει λύση $A = \frac{8}{5}, C = -\frac{3}{5}$. Δηλ. η ζητούμενη εξίσωση είναι

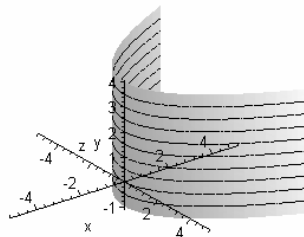
$$y = \frac{8}{5}x^2 - \frac{3}{5}z^2$$

και το παραβολοειδες είναι ελλειπτικό.

3.2.36. Σχεδιάστε και περιγράψτε τον παραβολικό κυλινδρο

$$y = \frac{x^2}{a^2}$$

Λυση. Η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχ.16.16.



Σχ.16.16

Οι τομές από επίπεδα $z = c_1$ είναι παραβολές.

3.2.37. Βρείτε τον γεωμετρικό τοπο των σημείων M για τα οποία $\frac{AM}{BM} = \frac{2}{3}$, όπου το σημείο A είναι $(-2, 2, -2)$ και το B είναι $(3, -3, 3)$.

Λυση. Εστω τυχόν $M(x, y, z)$. Αυτό θα πρέπει να ικανοποιεί

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$9 \cdot ((x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2) = 4 \cdot ((x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2) \Rightarrow$$

$$5x^2 + 60x + 5y^2 - 60y + 5z^2 + 60z = 0 \Rightarrow$$

$$5 \cdot ((x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 - 108) = 0.$$

(Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε συμπλήρωση του τετραγώνου). Οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τοπος είναι σφαίρα με κέντρο το $(-6, 6, -6)$ και ακτίνα $6\sqrt{3}$.

3.2.38. Βρείτε τον γεωμετρικό τοπο των σημείων των οποίων η απόσταση από τον άξονα των y είναι τριπλάσια από την απόσταση από τον άξονα των z .

Λυση. Θυμίζουμε ότι η απόσταση σημείου (x, y, z) από τον άξονα των y είναι $\sqrt{x^2 + z^2}$ και από τον άξονα των z είναι $\sqrt{x^2 + y^2}$. Οπότε τα δεδομένα του προβλήματος εκφράζονται από την εξίσωση

$$\sqrt{x^2 + z^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$8x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$$

που αναγνωρίζεται ως εξίσωση ελλειπτικού κώνου.

3.2.39. Βρείτε τον γεωμετρικό τοπο των σημείων που το τετράγωνο της απόστασης τους από τον άξονα των y είναι τετραπλάσιο από την απόσταση από το επίπεδο xz .

Λυση. Θυμίζουμε ότι η απόσταση σημείου (x, y, z) από τον άξονα των y είναι $\sqrt{x^2 + z^2}$, από δε το επίπεδο xz είναι, φυσικά, y . Άρα τα δεδομένα του προβλήματος εκφράζονται από την εξίσωση $4y = x^2 + z^2$ δηλ.

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

που αναγνωρίζεται ως εξίσωση ελλειπτικού παραβολοειδούς.

3.2.40. Βρείτε τον γεωμετρικό τοπο των σημείων M για τα οποία $AM + BM = 8$, όπου το σημείο A είναι $(2, 3, 4)$ και το B είναι $(2, -3, 4)$.

Λυση. Εστω τυχόν $M(x, y, z)$. Αυτό θα πρέπει να ικανοποιεί

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 8$$

δηλ.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} &= 8 - \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} \Rightarrow \\ 3y + 16 &= 4\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} \Rightarrow \\ 9y^2 + 96y + 256 &= 16 \cdot ((x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2) \Rightarrow \\ 16x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 64x - 128z + 208 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{(x-2)^2}{7} + \frac{y^2}{16} + \frac{(z-4)^2}{7} &= 1\end{aligned}$$

που αναγνωρίζεται ως εξίσωση ελλειψοειδούς με κέντρο το $(2, 0, 4)$.

3.2.41. Βρείτε τον γεωμετρικό τοπο των σημείων M για τα οποία η απόσταση από το σημείο $(2, -1, 3)$ είναι δύο φορές η απόσταση από τον άξονα των x .

Λυση. Θα είναι

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2} &= 2\sqrt{y^2 + z^2} \Rightarrow \\ x^2 - 4x - 3y^2 + 2y - 3z^2 - 6z + 14 &= 0 \Rightarrow \\ (x-2)^2 - 3 \cdot (y-1/3)^2 - 3 \cdot (z+1)^2 &= -\frac{40}{3}\end{aligned}$$

που μπορεί να γραφτεί και ως

$$\frac{(y-1/3)^2}{\frac{40}{9}} + \frac{(z+1)^2}{\frac{40}{9}} - \frac{(x-2)^2}{\frac{40}{3}} = 1$$

και αναγνωρίζεται ως εξίσωση μονοχώνου υπερβολοειδούς με κέντρο το $(1/3, -1, 2)$.

3.2.42. Βρείτε τον γεωμετρικό τοπο των σημείων M για τα οποία $AM - BM = 6$, όπου το σημείο A είναι $(-4, 3, 1)$ και το B είναι $(4, 3, 1)$.

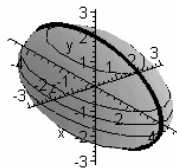
Λυση. Θα πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}\right)^2 &= \left(6 + \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}\right)^2 \Rightarrow \\ 4x - 9 &= 3\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \Rightarrow \\ 16x^2 - 72x + 81 &= 9 \cdot ((x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2) \Rightarrow \\ 7x^2 - 9y^2 - 9z^2 + 54y + 18z &= 153 \Rightarrow \\ \frac{x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{7} - \frac{(z-1)^2}{7} &= 1\end{aligned}$$

που αναγνωρίζουμε ως εξίσωση διχώνου υπερβολοειδούς.

3.2.43. Βρείτε την εξίσωση της επιφάνειας που δημιουργείται από την περιστροφή της ελλειψης $x^2 + 4z^2 = 16$ (η οποία κείται στο επίπεδο xz) γύρω από τον Ox .

Λυση. Δείτε το Σχ.16.17.



Σχ.16.17

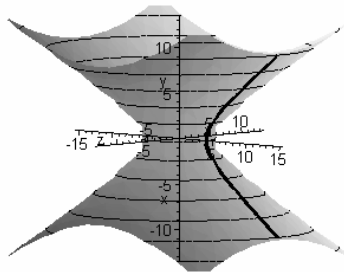
Εστω M τυχόν σημείο της επιφανείας και MB κάθετο στο επίπεδο xy . Τότε το τρίγωνο ABM είναι ορθογώνιο και $AB = y$, $BM = z$, $AP^2 = y^2 + z^2$. Επίσης, από την εξίσωση της ελλειψης, $x^2 = 16 - 4AP^2 = 16 - 4 \cdot (y^2 + z^2)$ δηλ.

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16 \quad (3.11)$$

δηλ. η επιφάνεια είναι ένα ελλειψοειδές. Φυσικά η εξίσωση (3.11) είναι ακριβώς αυτή που θα περναμε και με εφαρμογή της (3.4).

3.2.44. Βρείτε την εξίσωση της επιφανείας που δημιουργείται από την περιστροφή της υπερβολής $x^2 - 2z^2 = 16$ (η οποία κείται στο επίπεδο xz) γύρω από τον Oz .

Λυση. Δείτε το Σχ.18.



Σχ.16.18

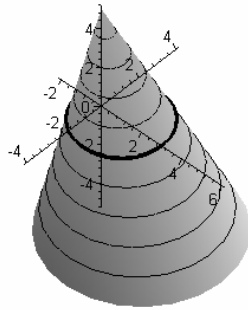
Εστω $M_1(x_1, 0, z)$ τυχόν σημείο της υπερβολής και $M'(0, 0, z)$ η προβολή του M_1 στον Oz . Καθώς το M_1 περιστρέφεται γύρω από τον Oz , η εικόνα του είναι ένας κύκλος. Εστω $M(x, y, z)$ τυχόν σημείο του κύκλου. Θα έχουμε $x_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ και στην περιστραμμένη υπερβολή

$$x_1^2 - 2z^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2z^2 = 16. \quad (3.12)$$

Δηλ. η επιφάνεια είναι ένα μονοχώνο υπερβολοειδές. Φυσικά η εξίσωση (3.12) είναι ακριβώς αυτή που θα περναμε και με εφαρμογή της (3.4).

3.2.45. Βρείτε την εξίσωση της επιφάνειας που δημιουργείται από την περιστροφή της ευθείας $2x + 3y = 6$ (η οποία κείται στο επίπεδο xy) γύρω από τον Oy .

Λυση. Δείτε το Σχ.16.19.



Σχ.16.19

Η εξίσωση της επιφανειας προκύπτει αντικαθιστώντας το x στην εξίσωση της ελλειψης με το $\sqrt{x^2 + z^2}$ οποτε η επιφανεια εχει εξίσωση

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \cdot (2 - y) \Rightarrow 4 \cdot (x^2 + z^2) = 9 \cdot (2 - y)^2$$

που είναι ένας κώνος με κορυφή στο $(0, 2, 0)$.

3.2.46. Δειξτε οτι η επιφανεια με παραμετρικες εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi. \end{aligned} \tag{3.13}$$

είναι η σφαιρα

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{3.14}$$

Κατοπιν βρείτε μια διαφορευτικη παραμετρικη εξίσωση της ιδιας σφαιρας.

Λυση. Αυτό μπορεί να δείχτει με απαλοιφη των u, v απο την (3.13). Εχουμε

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos u \cos v \\ y &= R \sin u \cos v \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \cdot (\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v) = R^2 \cos^2 v$$

και μαζί με την $z^2 = \sin^2 v$ παίρνουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \cos^2 v + R^2 \sin^2 v = R^2.$$

Μια διαφορευτικη παραμετροποίηση είναι η

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (R \sin u \sin v, R \cos v, R \sin u \cos v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi \end{aligned} \tag{3.15}$$

η οποια επίσης δίνει $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (οπως μπορεί να αποδεχτει με απαλοιφη των u, v).

3.2.47. Βρείτε μια παραμετροποίηση της σφαιρας

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Λυση. Μια δυνατη παραμετροποίηση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (x_0 + R \cos u \cos v, y_0 + R \sin u \cos v, z_0 + R \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Πραγματι, απο την (3.16) παίρνουμε

$$\begin{aligned} x - x_0 &= R \cos u \cos v \\ y - y_0 &= R \sin u \cos v \\ z - z_0 &= R \sin v \end{aligned}$$

και απο τις παραπάνω, όπως και στην προηγούμενη άσκηση, παίρνουμε $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

3.2.48. Βρείτε μια παραμετροποίηση του ημισφαιριου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \quad z \geq 0.$$

Λυση. Μια δυνατη παραμετροποίηση είναι η

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (x_0 + R \cos u \cos v, y_0 + R \sin u \cos v, z_0 + R \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi/2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Η μόνη διαφορά απο την (3.16) είναι ότι $v \in [0, \pi/2]$ αντί του $[0, \pi]$.

3.2.49. Βρείτε μια παραμετροποίηση του ελλειψοειδους

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = R^2.$$

Λυση. Μια δυνατη παραμετροποίηση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (x_0 + a \cos u \cos v, y_0 + b \sin u \cos v, z_0 + c \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

όπως μπορεί να ελεγχθει με απαλοιφή των u, v απο την (3.18).

3.2.50. Ποια επιφάνεια περιγράφουν οι παραμετρικες εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (a\sqrt{1+u^2} \sin v, a\sqrt{1+u^2} \cos v, cu), \\ u &\in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Λυση. Έχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{a^2 \cdot (1+u^2)}{a^2} \cdot (\sin^2 v + \cos^2 v) = 1 + u^2 = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

αρα η (3.19) είναι η παραμετρικη εξίσωση ενός μονοχωνου υπερβολοειδους.

3.2.51. Ποια επιφάνεια περιγράφουν οι παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (\sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, c \cosh u), \quad u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \frac{a^2 \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v)}{a^2} \cdot \sinh^2 u - \frac{c^2 \cosh^2 u}{c^2} \\ &= \sinh^2 u - \cosh^2 u = -1 \end{aligned}$$

δηλ.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

που είναι η εξίσωση ενός διχώνου υπερβολοειδούς.

3.2.52. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του παραβολοειδούς $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Λυση. Θέλουμε να εκφράσουμε τα x, y, z ως συναρτήσεις $x(u, v), y(u, v)$ τέτοιες ώστε

$$z = \frac{x^2(u, v)}{a^2} + \frac{y^2(u, v)}{b^2}.$$

Μια προφανής επιλογή είναι

$$x(u, v) = a\sqrt{u} \cos v, \quad y(u, v) = b\sqrt{u} \sin v, \quad z(u, v) = u.$$

3.2.53. Ποια επιφάνεια περιγράφει η

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (av \cos u, bv \sin u, v), \quad u \in [0, 2\pi]. \quad (3.21)$$

Λυση. Έχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = v^2 \cdot (\cos^2 u + \sin^2 u) = z^2$$

οπότε η (3.21) είναι η εξίσωση ενός ελλειπτικού κώνου.

3.2.54. Βρείτε μια παραμετροποίηση του ελλειπτικού κυλινδρού

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Λυση. Θέλουμε να εκφράσουμε τα x, y, z ως συναρτήσεις $x(u, v), y(u, v)$ τέτοιες ώστε

$$\frac{x^2(u, v)}{a^2} + \frac{y^2(u, v)}{b^2} = 1$$

και το πεδίο τιμών της $z(u, v)$ να είναι ολό το \mathbb{R} . Μια προφανής επιλογή είναι

$$x(u, v) = a \cos u, \quad y(u, v) = b \sin u, \quad z(u, v) = v.$$

3.2.55. Δειξτε ότι η παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = (v + 2v \cos u, 2v \sin u, 5 - v) \quad (3.22)$$

περιγράφει μια κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $(0, 0, 5)$ και οδηγό καμπύλη τον κύκλο $(3 + 4 \cos u, 4 \sin u, 0)$, δηλ. τον κύκλο που ανήκει στο xy επίπεδο, έχει κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα 2 .

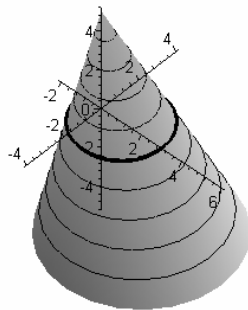
Λυση. Η (3.22) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$\mathbf{r}(u, v) = (0, 0, 5) + v \cdot ((1 + 2 \cos u, 2 \sin u, 0) - (0, 0, 1)) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \quad (3.23)$$

με

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 5), \quad \mathbf{r}_1(u) = (1 + 2 \cos u, 2 \sin u, 0).$$

Το Σχ.16.19 απεικονίζει την (3.23).



Σχ.16.19

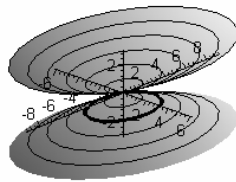
Το $\mathbf{r}_1(u) = (1 + 2 \cos u, 2 \sin u, 0)$ είναι η παραμετρική εξίσωση του κύκλου στο επίπεδο xy με ακτίνα 2 και κέντρο το $(1, 0, 0)$. Το δε $\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0$ είναι ο ίδιος κύκλος μετατοπισμένος κατά $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 1)$, δηλ. ανυψωμένος στο επίπεδο $z = 1$. Τώρα, η επιφάνεια της (3.23) κατασκευάζεται προσθετώντας στο σταθερό διάνυσμα $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 1)$ διανύσματα συγγραμικά με το $\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0$. Με άλλα λόγια, η επιφάνεια αποτελείται από ευθείες οι οποίες περνούν από το σταθερό σημείο $(0, 0, 1)$ (κορυφή) και τα σημεία του κύκλου (γενετείρα). Έτσι δημιουργείται ένας «κεκλιμένος» κώνος, ένα παράδειγμα κωνικής επιφάνειας.

3.2.56. Γραψτε τον «ορθό» κώνο της (3.21) στην μορφή $\mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0)$

Λυση. Η εξίσωση του κώνου είναι

$$(av \cos u, bv \sin u, v) = (0, 0, 0) + v \cdot (a \cos u, b \sin u, 1).$$

Δηλ. $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}_1(u) = (a \cos u, b \sin u, 1)$, μια ελλειψη στο επιπεδο $z = 1$. Πραγματι, ο κωνος του Σχ. 16.20



Σχ. 16.20

δημιουργείται απο τις ευθειες οι οποιες οριζονται απο την κορυφη $(0, 0, 0)$ και τα σημεια της γενετειρας ελλειψης.

3.2.57. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του ελλειπτικου κυλινδρου $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στην μορφη

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1(u) + v \cdot \mathbf{r}_2 \quad (3.24)$$

Λυση. Αν θεσουμε

$$\mathbf{r}_1(u) = (a \cos u, b \sin u, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (0, 0, 1)$$

η (3.24) γινεται

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v \cdot (0, 0, 1) = (a \cos u, b \sin u, v) \Rightarrow$$

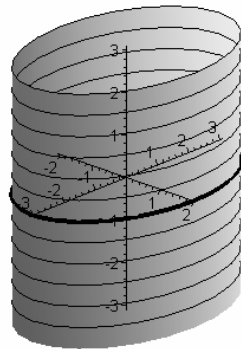
$$x(u, v) = a \cos u, \quad y(u, v) = b \sin u, \quad z(u, v) = v$$

οι οποιες ικανοποιουν

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ και } z \in \mathbb{R}.$$

Με αλλα λογια, ο κυλινδρος σχηματιζεται φερνοντας απο καθε σημειο της ελλειψης

$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0\right)$ ευθείες παράλληλες στο διάνυσμα $(0, 0, 1)$ Δες και το Σχ.16.21



Σχ.16.21

3.2.58. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κυλινδρικής επιφάνειας με με γενετήρα το διάνυσμα $(0, 1, 1)$ και οδηγό καμπυλή τον κύκλο $x^2 + z^2 = 1$ στο επίπεδο xz . Σχεδιάστε την κυλινδρική επιφάνεια.

Λυση. Οι ζητούμενες είναι

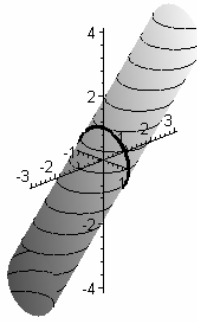
$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, 0, \sin u) + v \cdot (0, 1, 1) = (\cos u, v, v + \sin u).$$

Δηλ.

$$\mathbf{r}_1(u) = (\cos u, 0, \sin u) \text{ και } \mathbf{r}_2 = (0, 1, 1).$$

Με άλλα λόγια η κυλινδρική επιφάνεια σχηματίζεται φερνοντας απο κάθε σημείο της

παραβολής ($z = x^2, y = 0$) ευθείες παραλλήλες στο διανυσμα $(0, 1, 1)$. Δες και το Σχ.16.22.



Σχ.16.22

3.3 Αλυτες Ασκησεις

3.3.1. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(-2, 3, 1)$ και ακτινα 4.

Απ. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 16.$

3.3.2. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 0, 4)$ και ακτινα 1.

Απ. $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 1.$

3.3.3. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 1, 1)$ και διερχομενης απο το σημειο $(1, 1, 2)$.

Απ. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1.$

3.3.4. Βρείτε το κεντρο και την ακτινα της σφαιρας $x^2 + 6x + y^2 - 4y + z^2 - 10z - 11 = 0.$

Απ. $(-3, 2, 5)$ και 7.

3.3.5. Βρείτε το κεντρο και την ακτινα της σφαιρας $x^2 + 2x + y^2 + 8y + z^2 - 6z + 22 = 0.$

Απ. $(-1, -4, 3)$ και 2.

3.3.6. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο το $(3, 6, -4)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $2x - 2y - z - 10 = 0.$

Απ. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 4)^2 = 16.$

3.3.7. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που μια διαμετρος της εχει ακρα τα σημεια $(3, -5, 6)$ και $(5, 7, -1)$.

Απ. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 4)^2 = 16.$

3.3.8. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(7, 9, 1)$, $(-2, -3, 2)$, $(1, 5, 5)$ και $(-6, 2, 5)$.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 14y + 18z - 79 = 0.$

3.3.9. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$

3.3.10. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(2, 1, 3)$, $(3, -2, 1)$, $(-4, 1, 1)$, $(1, 1, -3)$.

Απ. $51x^2 + 51y^2 + 51z^2 + 45x + 37y - 33z - 742 = 0.$

3.3.11. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(2, -5, 8)$, $(8, -2, 5)$, $(5, -8, 2)$ και $(-2, -8, -5)$.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 = 93.$

3.3.12. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(-4, 2, 3)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $2x - y - 2z + 7 = 0.$

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 6z + 20.$

3.3.13. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(2, 3, -4)$ και εφαπτομενης στην σφαιρα $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 6.$

Απ. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 9 \pm \sqrt{6}.$

3.3.14. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας S εφαπτομενης στις σφαιρες

$$S_1 : (x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 6)^2 = 16,$$

$$S_2 : (x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2 = 9,$$

αν είναι γνωστο οτι το κεντρο της S βρισκεται επι του ευθυγραμμου τμηματος που οριζουν τα κεντρα των S_1 και S_2 .

Απ. Υπαρχουν τεσσερις λυσεις: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4.5)^2 = R^2$ οπου $R^2 \in \{2.25, 72.25, 30.25, 20.25\}$.

3.3.15. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(6, 3, -4)$ και εφαπτομενης στον αξονα των x .

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 6y + 8z + 36 = 0$.

3.3.16. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(-4, -2, 3)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο yz .

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 6z + 13 = 0$.

3.3.17. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(2, -3, 2)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $6x - 3 + 2z - 8 = 0$.

Απ. $49x^2 + 49y^2 + 49z^2 - 196x + 294y - 196z + 544 = 0$.

3.3.18. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 2, 4)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $3x - 2y + 4z - 7 = 0$.

Απ. $29x^2 + 29y^2 + 29z^2 - 58x - 118y - 232z + 545 = 0$.

3.3.19. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας με κεντρο $(0, 0, 0)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $9x - 2y + 6z + 11 = 0$.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.3.20. Τα σημεια $(7, -2, 4)$ και $(9, -8, 6)$ βρισκονται στην επιφανεια μιας σφαιρας S και ανηκουν σε μια ευθεια που περναι απο το κεντρο της S . Βρείτε την εξίσωση της S .

Απ. $(x - 8)^2 + (y + 5)^2 + (z - 5)^2 = 11$.

3.3.21. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που εφαπτεται στα επιπεδα $x - 2z - 8 = 0$, $2x - z + 5 = 0$ και εχει κεντρο επι της ευθειας $x = -2$, $y = 0$.

Απ. Δυο σφαιρες: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z + 49/5 = 0$ και $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 22z + 481/5 = 0$.

3.3.22. Βρείτε την εξίσωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$, $(1, -3, 0)$ και εχει το κεντρο στο επιπεδο $x + y + z = 0$.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 10 = 0$.

3.3.23. Εφαπτεται η ευθεια που οριζουν τα σημεια $(11, 6, 5)$ και $(-16, -3, 8)$ στην σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = 49$;

Απ. Ναι, στο σημειο $(2, 3, 6)$

3.3.24. Να βρεθει η εξίσωση της σφαιρας που διερχεται απο το $(8, 15, 10)$ και τεμνει το επιπεδο xy σε κυκλο κεντρου 0 και ακτινας 7 .

Απ. $x^2 + y^2 + (z - 17)^2 = 338$.

3.3.25. Σχεδιάστε και αναγνωρίστε την επιφάνεια

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Απ. Είναι ελλειψοειδές.

3.3.26. Σχεδιάστε την επιφάνεια

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

και δείξτε ότι είναι ένα ελλειψοειδές.

3.3.27. Σχεδιάστε την επιφάνεια

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

και δείξτε ότι είναι ένα ελλειψοειδές.

3.3.28. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίο είναι παράλληλο στο $2x - 3y + 5z = 0$ και εφαπτεται στο ελλειψοειδές

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Απ. Δύο λύσεις: $2x - 3y + 5z \pm \sqrt{265}$.

3.3.29. Σχεδιάστε την επιφάνεια $x^2 - y^2 + 2y + z^2 - 6z + 7 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένα μονοχώνο υπερβολοειδές.

3.3.30. Σχεδιάστε την επιφάνεια $x^2 - 2x - y^2 + 2y + z^2 - 1 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένα μονοχώνο υπερβολοειδές.

3.3.31. Σχεδιάστε την επιφάνεια $x^2 + y^2 - 8y - z^2 + 6z + 6 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένα μονοχώνο υπερβολοειδές.

3.3.32. Σχεδιάστε την επιφάνεια $x^2 - y^2 + 2y - z^2 + 6z - 11 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένα διχώνο υπερβολοειδές.

3.3.33. Σχεδιάστε την επιφάνεια $-x^2 - y^2 + 2y + z^2 - 6z + 7 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένα διχώνο υπερβολοειδές.

3.3.34. Σχεδιάστε την επιφάνεια $x^2 - y^2 + 2y - z^2 + 6z - 10 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένας κώνος.

3.3.35. Σχεδιάστε την επιφάνεια $x^2 + y^2 - 2y - z^2 + 6z - 8 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένας κώνος.

3.3.36. Σχεδιάστε την επιφάνεια $y^2 - 2y + z^2 - 6z + 6 = 0$ και δείξτε ότι είναι ένας ελλειπτικός κυλινδρός.

3.3.37. Σχεδιαστε την επιφανεια $-y^2 + 2y + z^2 - 6z + 12 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενας υπερβολικος κυλινδρος.

3.3.38. Σχεδιαστε την επιφανεια $y^2 - 2y + z^2 - 6z - x + 10 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα ελλειπτικο παραβολοειδες.

3.3.39. Σχεδιαστε την επιφανεια $-y^2 + 2y + z^2 - 6z + x + 8 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα υπερβολικο παραβολοειδες.

3.3.40. Σχεδιαστε την επιφανεια $-x^2 + 8x - z^2 - 2z + y - 17 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα ελλειπτικο παραβολοειδες.

3.3.41. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη το $(0, 0, 0)$, αξονα αυτο τον z , και διερχομενο απο τα σημεια $(3, 0, 1)$ και $(3, 2, 2)$.

Απ. $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$.

3.3.42. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη στο $(0, 0, 0)$, κυριο αξονα τον Oz και διερχομενο απο τα $(2, 0, 3)$ και $(1, 2, 3)$.

Απ. $12x^2 + 9y^2 - 16z = 0$.

3.3.43. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη στο $(0, 0, 0)$, κυριο αξονα τον Oz και διερχομενο απο τα $(1, 0, 1)$ και $(0, 2, 1)$.

Απ. $4x^2 + y^2 = 4z$.

3.3.44. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη στο $(0, 0, 0)$, κυριο αξονα τον Ox και διερχομενο απο τα $(1, 2, 2)$ και $(2, 6, 8)$.

Απ. $z^2 - 2y^2 + 4x = 0$.

3.3.45. Σχεδιαστε την επιφανεια $-x^2 + 2x + y - 2 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενας παραβολικος κυλινδρος

3.3.46. Σχεδιαστε την επιφανεια $-z^2 + 6z + x - 7 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενας παραβολικος κυλινδρος.

3.3.47. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ελλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oy . Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$.

3.3.48. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ελλειψης $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oz . Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$

3.3.49. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της υπερβολης $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Ox . Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{36} = 1$

3.3.50. Γραψτε την εξίσωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της παραβολης $x = y^2/2$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Ox . Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$.

3.3.51. Γραψτε την εξίσωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ευθειας $2x = 3z$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Ox . Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $x^2 = \frac{9}{4} \cdot (y^2 + z^2)$.

3.3.52. Γραψτε την εξίσωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της υπερβολης $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oz . Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$.

3.3.53. Γραψτε την εξίσωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ευθειας $x = 3$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oz . Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $x^2 + y^2 = 9$.

3.3.54. Βρειτε την εξίσωση και σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που το αθροισμα των αποστασεων του απο τα $(0, 3, 0)$ και $(0, -3, 0)$ ειναι 8.

Απ. $16x^2 + 7y^2 + 16z^2 = 112$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.55. Βρειτε την εξίσωση και σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που οι αποστασεις τους απο τα $(1, 1, -2)$ και $(-2, 3, 2)$ εχουν λογο $3/4$.

Απ. $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 68x + 22y + 100z - 57 = 0$.

3.3.56. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε το αθροισμα των αποστασεων του απο τα σημεια $(3, 2, -4)$ και $(3, 2, 4)$ να ισοιται με 10. Βρειτε την εξίσωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου και σχεδιαστε.

Απ. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.57. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε η αποσταση του απο το επιπεδο yz ισοιται με δυο φορες την αποσταση του απο το σημειο $(1, -2, 2)$. Βρειτε την εξίσωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου και σχεδιαστε.

Απ. $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y - 16z + 36 = 0$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.58. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που η αποσταση του απο τον αξονα των x ισοιται με τρεις φορες την αποσταση του απο το $(2, 3, -3)$.

Απ. $9x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 36x - 54y + 54z + 198 = 0$.

3.3.59. Βρειτε την εξίσωση και σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που η διαφορα των αποστασεων του απο τα $(0, 0, 3)$ και $(0, 0, -3)$ ειναι 4.

Απ. $5z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 20$, διχωνο υπερβολοειδες.

3.3.60. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε το αθροισμα των τετραγωνων αποστασεων του απο τα επιπεδα

$$x + 4y + 2z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

$$2x + y - 3z = 0$$

να ισούνται με 10. Βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τοπού του σημείου.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, μια σφαιρα.

3.3.61. Ένα σημείο κινείται με τρόπο τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα σημεία $(3, 2, -4)$ και $(3, 2, 4)$ να ισούνται με 10. Βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τοπού του σημείου και σχεδιάστε.

Απ. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$, ένα ελλειψοειδές.

3.3.62. Ένα σημείο κινείται με τρόπο τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα σημεία $(-5, 0, 2)$ και $(5, 0, 2)$ να ισούνται με 12. Βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τοπού του σημείου και σχεδιάστε.

Απ. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} + \frac{(z-2)^2}{11} = 1$, ένα ελλειψοειδές.

3.3.63. Βρείτε την εξίσωση και σχεδιάστε τον γεωμετρικό τόπο ενός σημείου του οποίου το τετράγωνο της απόστασης από τον Oz ισούνται με το διπλάσιο της απόστασης από το επίπεδο xy .

Απ. $2z = x^2 + y^2$, ένα ελλειπτικό παραβολοειδές.

3.3.64. Ένα σημείο κινείται με τρόπο τέτοιο ώστε η απόσταση του από το επίπεδο $y = -4$ ισούνται με $1/4$ την απόσταση του από το σημείο $(2, -3, 1)$. Βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τοπού του σημείου και σχεδιάστε.

Απ. $16x^2 + 15y^2 + 16z^2 - 64x + 88y - 33z + 208 = 0$, ένα ελλειψοειδές.

3.3.65. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της σφαιρας $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (1 + 2 \cos u \cos v, 2 + \sin u \cos v, 1 + \sin v)$.

3.3.66. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (2 \cos u \cos v, 3 \sin u \cos v, 5 \sin v)$.

3.3.67. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\sqrt{u} \cos v, \sqrt{u} \sin v, u)$.

3.3.68. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του κώνου $x^2 = z^2 + y^2$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (u, u \cos v, u \sin v)$.

3.3.69. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $(0, 0, 1)$ και οδηγό καμπυλή τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ στο επίπεδο xy . Σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (0, 0, 1) + v \cdot ((\cos u, \sin u, 0) - (0, 0, 1)) = (v \cos u, v \sin u, 1 - v)$.

3.3.70. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $(0, 1, 0)$ και οδηγό καμπυλή την παραβολή $x^2 = z$ στο επίπεδο xz . Σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (0, 1, 0) + v \cdot ((u, 0, u^2) - (0, 1, 0)) = (vu, 1 - v, vu^2)$.

3.3.71. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κυλινδρικής επιφάνειας με γενετήρα το διάνυσμα $(0, 1, 0)$ και οδηγό καμπυλή τον κύκλο $x^2 + z^2 = 1$ στο επίπεδο xz . Σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, 0, \sin u) + v \cdot (0, 1, 0) = (\cos u, v, \sin u)$.

3.3.72. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κυλινδρικης επιφανειας με με γενετειρα το διανυσμα $(1, 1, 1)$ και οδηγο καμπυλη την ελλειψη $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ στο επιπεδο xz . Σχεδιαστε την κυλινδρικη επιφανεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, 0, 2 \sin u) + v \cdot (1, 1, 1) = (v + \cos u, v, v + 2 \sin u)$.