

Σημειώσεις:
Λογισμος Συναρτησεων Πολλων Μεταβλητων
και Διανυσματικων Συναρτησεων

υ. 0.95

Θ. Κεχαγιας

Σεπτεμβρης 2010

Περιεχόμενα

Προλογος	iv
1 Οριο και Συνεχεια	1
1.1 Θεωρια	1
1.2 Λυμενα Προβληματα	2
1.3 Αλυτα Προβληματα	6
2 Παραγωγιση	8
2.1 Θεωρια	8
2.2 Λυμενα Προβληματα	10
2.3 Αλυτα Προβληματα	17
3 Αλυσωτη και Πεπλεγμενη Παραγωγιση	21
3.1 Θεωρια	21
3.2 Λυμενα Προβληματα	23
3.3 Αλυτα Προβληματα	30
4 Συστηματα Συντεταγμενων	33
4.1 Θεωρια	33
4.2 Λυμενα Προβληματα	36
4.3 Αλυτα Προβληματα	40
5 Σειρες Taylor και Ακροτατα Συναρτησεων	42
5.1 Θεωρια	42
5.2 Λυμενα Προβληματα	44
5.3 Αλυτα Προβληματα	59
6 Διπλα Ολοκληρωματα	64
6.1 Θεωρια	64
6.2 Λυμενα Προβληματα	66
6.3 Αλυτα Προβληματα	75
7 Τριπλα Ολοκληρωματα	78
7.1 Θεωρια	78
7.2 Λυμενα Προβληματα	80
7.3 Αλυτα Προβληματα	90

8 Καμπυλες και Διανυσματικες Συναρτησεις	94
8.1 Θεωρια	94
8.2 Λυμενα Προβληματα	96
8.3 Αλυτα Προβληματα	101
9 Επικαμπυλια Ολοκληρωματα	105
9.1 Θεωρια	105
9.2 Λυμενα Προβληματα	109
9.3 Αλυτα Προβληματα	119
10 Βαθμωτα και Διανυσματικα Πεδια	124
10.1 Θεωρια	124
10.2 Λυμενα Προβληματα	126
10.3 Αλυτα Προβληματα	132
11 Επιφανειες σε Παραμετρικη Αναπαρασταση	136
11.1 Θεωρια	136
11.2 Λυμενα Προβληματα	138
11.3 Αλυτα Προβληματα	166
12 Επιφανειακα Ολοκληρωματα	169
12.1 Θεωρια	169
12.2 Λυμενα Προβληματα	173
12.3 Αλυτα Προβληματα	192

ΑΘ. Κεχαγιάς

Προλογος

Το παρον τευχος περιεχει μια συνοψη του λογιςμου συναρτησεων πολλων μεταβλητων και διανυσματικων συναρτησεων, για χρηση των φοιτητων της Πολυτεχνικης Σχολης του ΑΠΘ. Το τευχος προοριζεται να χρησημοποιηθει σε συνδυασμο με ενα πιο εκτενες διδακτικο βιβλιο. Το τευχος υποκειται σε συνεχη αναθεωρηση· η παρουμε εκδοση ειναι η v.0.9 (Μαρτιος 2010).

Ασχολουμαστε με συναρτησεις της μορφης $\phi(x, y)$, $\phi(x, y, z)$, $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ κτλ. Η εμφαση δινεται στις συναρτησεις δυο και τριων μεταβλητων. Επισης εξεταζουμε *διανυσματικες συναρτησεις*, π.χ. $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ (διαν. συναρτηση μιας ανεξαρτητης μεταβλητης), $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}P(x, y, z) + \mathbf{j}Q(x, y, z) + \mathbf{k}R(x, y, z)$ (διαν. συναρτηση τριων ανεξαρτητων μεταβλητων) κτλ.

Υπενθυμιζουμε στον αναγνωστη μερικους βασικους συμβολισμους της αλγεβρας των διανυσματων.

1. Τα διανυσματα συμβολιζονται με εντονα γραμματα: $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ή και $\mathbf{u} = (a, b, c)$.
2. Τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ειναι τα μοναδιαια διανυσματα κατα τις κατευθυνσεις των αξωνων x, y, z αντιστοιχα.
3. Παντοτε ο ορος "διανυσμα" σημαινει "ελευθερο διανυσμα", δηλ. $\mathbf{u} = (a, b, c)$ σημαινει το διανυσμα με συνιστωσες a, b, c αλλα χωρις να προσδιοριζεται το αρχικο και το τελικο σημειο του διανυσματος. Ετσι, π.χ., το διανυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$ με αρχη το σημειο $M_1(0, 0, 0)$ και τελος το $M_2(1, 2, 3)$ ειναι ισοδυναμο με το διανυσμα $\overrightarrow{N_1N_2}$ με αρχη το $N_1(1, -1, 1)$ και τελος το $N_2(2, 1, 4)$ · και τα δυο ειναι το ιδιο ακριβως διανυσμα, το $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$.

4. Το εσωτερικο γινομενο των $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$ ειναι

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \cdot (d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}) = ad + be + cf.$$

5. Το εξωτερικο γινομενο των $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$ ειναι

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \times (d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (bf - ce)\mathbf{i} + (dc - af)\mathbf{j} + (ae - db)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

6. Το μετρο του $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ είναι

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

7. Γενικότερα, ένα N -διαστατο διανυσμα είναι μια N -άδα αριθμών: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$. Το σύνολο των N -διαστατων διανυσματων είναι εφοδιασμενο με τις παρξεις προσθεσης (διανυσματων) και πολλαπλασιασμου (αριθμου επι διανυσμα).

8. Το μετρο N -διαστατου διανυσματος $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ είναι $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_N^2}$ και το εσωτερικο γινομενο των \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{n=1}^N a_n b_n$.

Χρησιμοποιουμε τον ορο *χωριο* στον \mathbb{R}^2 για να δηλωσουμε ενα σύνολο σημειων. Π.χ. ενα χωριο είναι το

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

δηλ. ο δισκος με κεντρο το $(0, 0)$ και ακτινα 1.

Παρομοια ο ορος *χωριο* στον \mathbb{R}^3 δηλωνει ενα σύνολο σημειων. Π.χ. ενα χωριο είναι το

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

δηλ. η μπαλα με κεντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτινα 1.

Συμβουλευω τον αναγνώστη να λύσει όσο μπορεί περισσότερες απο τις αλυτες ασκησεις του παροντος τευχους. Η θεωρια παρουσιαζεται εντελως συνοπτικα, με μονο σκοπο την υποστηριξη της διαδικασιας επιλυσης. Για τους περισσότερους απο εμας ο *μονος τροπος εκμαθησης των μαθηματικων είναι μεσω της επιλυσης ασκησεων*. Καλη δουλεια λοιπον!

Θανασης Κεχαγιας

Θεσσαλονικη, Μαρτης 2010

Κεφάλαιο 1

Οριο και Συνεχεια

1.1 Θεωρια

1.1.1. Εστω οτι μας δινεται μια συναρτηση δυο μεταβλητων $\phi(x, y)$. Λεμε οτι "το οριο της $\phi(x, y)$, οταν το σημειο (x, y) τεινει στο (x_0, y_0) , ειναι το ϕ_0 " (και γραφουμε " $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x, y) = \phi_0$ ") ανν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |\phi(x, y) - \phi_0| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

1.1.2. Το νοημα της (1.1) ειναι το εξης: μπορουμε να εξασφαλισουμε οτι η διαφορα της μεταβλητης ποσοτητας $\phi(x, y)$ και τη σταθερης ποσοτητας ϕ_0 δεν θα ειναι μεγαλυτερη (κατ' απολυτη τιμη) απο ε , αρκει να χρησιμοποιησουμε σημεια (x, y) τα οποια δεν εχουν αποσταση απο την (x_0, y_0) μεγαλυτερη απο δ . για καθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει $\delta > 0$ που εξασφαλίζει αυτη την απαιτηση.

1.1.3. Προσοχη: **μπορει να ισχυει** οτι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x, y) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(x, y) \right)$$

και μαλιστα υπαρχουν παραδειγματα οπου

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(x, y) \right) \neq \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x, y) \right).$$

1.1.4. Λεμε οτι η $\phi(x, y)$ ειναι *συνεχης στο σημειο* (x_0, y_0) αν ισχυει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x, y) = \phi(x_0, y_0).$$

1.1.5. Λεμε οτι η $\phi(x, y)$ ειναι *συνεχης στο χωριο* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ανν ειναι συνεχης σε καθε σημειο $(x_0, y_0) \in D$.

1.1.6. Καθε πολυωνυμο δυο μεταβλητων

$$\phi(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \dots + a_{mn}x^m y^n$$

είναι συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R}^2 , δηλ. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x,y) = \phi(x_0, y_0).$$

1.1.7. Καθε ρητη συνάρτηση δυο μεταβλητων

$$\phi(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

οπου $f(x,y), g(x,y)$ είναι πολυωνυμα, είναι συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R}^2 , δηλ. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - P$ ισχύει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x,y) = \phi(x_0, y_0)$$

οπου P είναι το σύνολο των ριζών της $g(x,y)$:

$$P = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}.$$

1.1.8. Αν οι $f(x,y), g(x,y)$ είναι συνεχής στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ τότε και οι

$$f(x,y) + g(x,y), \quad f(x,y) - g(x,y), \quad f(x,y) \cdot g(x,y), \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

είναι συνεχείς στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (για την $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ εξαιρούμε από το D σημεία μηδενισμού της $g(x,y)$).

1.1.9. Αν $f(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $g(x,y)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R}^2 τότε και η $f(g(x,y))$ είναι συνεχής στο \mathbb{R}^2 .

1.1.10. Αντιστοίχα πράγματα ισχύουν και για συναρτήσεις τριών ή περισσότερων μεταβλητων. Π.χ. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \phi(x,y,z) = \phi_0$ ανν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta \Rightarrow |\phi(x,y,z) - \phi_0| < \varepsilon$$

και λέμε ότι η $\phi(x,y,z)$ είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ανν

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \phi(x,y,z) = \phi(x_0, y_0, z_0).$$

1.2 Λυμένα Προβλήματα

1.2.1. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} 3x = 3a$.

Λυση. Αρκεί, σύμφωνα με τον ορισμό, να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |3x - 3a| < \varepsilon.$$

Πραγματι, ας πάρουμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/3$. Τότε

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |3x - 3a| < \varepsilon$$

που ήταν το ζητούμενο.

1.2.2. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Λυση. Πραγματι, ας παρούμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/3$. Τότε

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \sqrt{y^2} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |y| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Εχουμε επίσης,

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} < 1$$

Οποτε

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = 3|y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} < 3 \frac{\varepsilon}{3} 1 = \varepsilon$$

που αποδεικνυει ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

1.2.3. Να αποδειχτεί ότι το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Λυση. Εάν το ζητούμενο όριο υπάρχει, θα πρέπει να είναι ίσο με τα επαναληπτικά όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1. \end{aligned}$$

Αρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

1.2.4. Να αποδειχτεί ότι το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Λυση. Εάν το ζητούμενο όριο υπάρχει, θα πρέπει να είναι ίσο με οποιοδήποτε όριο το οποίο παίρνουμε προσεγγίζοντας το $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = kx$, δηλ. για κάθε k θα πρέπει να έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{xkx}{x^2 + k^2x^2} \\ &= \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2k}{x^2(1+k^2)} = \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{k}{(1+k^2)} = \frac{k}{(1+k^2)}. \end{aligned}$$

Ομως η ποσότητα $\frac{k}{(1+k^2)}$ δεν είναι σταθερή, αρα το ζητούμενο όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

1.2.5. Να υπολογιστούν τα όρια

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3$. Είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, άρα

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3 &= (x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)_{(x,y)=(1,1)} \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1^2 + 5 \cdot 1^2 \cdot 1^3 = 7 \end{aligned}$$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Το όριο αυτό αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις και ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Οπότε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 1, y \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Ο παρονομαστής αυτού του ορίου μηδενίζεται. Εστω $y = Kx$ - αν $x \rightarrow 0$ τότε και $y = Kx \rightarrow 0$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - K^2x^2}{x^2 + K^2x^2} = \frac{1 - K^2}{1 + K^2}$$

Το όριο λοιπόν εξαρτάται από τον τρόπο που $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, άρα το όριο δεν υπάρχει

4. $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 1} \frac{x^2 + x \cdot y + y^2}{x^2 + y^2}$. Το όριο αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις και ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Οπότε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 + x \cdot y + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{0 + 0 \cdot 1 + 1}{0 + 1} = 1$$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + x \cdot y + y^2}{x^2 + y^2}$. Παρομοία έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1, y \rightarrow 1} \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{2}{3}$

1.2.6. Να υπολογιστούν τα όρια

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)$. Η $g(z) = \sin(z)$ είναι συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής. Η $g(x, y) = x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3$ είναι πολυωνυμική και άρα συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών. Άρα η $\sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)$ είναι συνεχής συνάρτηση και άρα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3) = \sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)_{(x,y)=(1,1)} = \sin(7).$$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)}$. Η $p(x, y) = \sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)$ είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα και η $e^{p(x,y)}$ είναι συνεχής συνάρτηση και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)} = \left[e^{\sin(x^2 + 2xy - x^2 + 5y^2x^3)} \right]_{(x,y)=(1,1)} = e^{\sin(7)} ..$$

1.2.7. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

Λυση. Εδώ ο παρονομαστής μηδενίζεται στο $(0, 0)$. Ωστόσο παρατηρούμε το εξής

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x \cdot (x - y)}{x - y} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})) = 0. \end{aligned}$$

1.2.8. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}.$$

Λυση. Εδώ ο αριθμητής και παρονομαστής μηδενίζεται στο $(0, 0)$. Ωστόσο παρατηρούμε το εξής

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x + y} + 2}{\sqrt{x + y} + 2} \right) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y - 4) \cdot (\sqrt{x + y} + 2)}{(x + y - 4)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x + y} + 2) = 2.. \end{aligned}$$

1.2.9. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{x + y + z - 1}{x^2 + 2yz}.$$

Λυση. Εχουμε

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{x + y + z - 1}{x^2 + 2yz} = \frac{0 + 1 + 2 - 1}{0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

1.2.10. Να ορίσετε την σημασία του συμβολισμού

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x, y) = \infty$$

και να την εξηγήσετε.

Λυση. Κατ' αναλογία με $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x, y) = \phi_0 \in \mathbb{R}$ (και χρησιμοποιώντας στοιχεία γνωστά από τα όρια συναρτήσεων μιας μεταβλητής) μπορούμε να ορίσουμε $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \phi(x, y) = \infty$ αν

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |\phi(x, y)| > M.$$

το οποίο έχει την εξής σημασία: το όριο της $\phi(x, y)$ είναι το ∞ όταν το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0) σημαίνει μπορούμε να κάνουμε την $f(x, y)$ μεγαλύτερη από κάθε πραγματικό αριθμό M , αρκεί το (x, y) να μην απέχει από το (x_0, y_0) περισσότερο από δ .

1.2.11. Σε ποια σημεία του \mathbb{R}^2 είναι συνεχής η $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3x + 2}$;

Λυση. Ως ρητη συναρτηση, η $f(x, y)$ θα είναι συνεχής σε κάθε (x_0, y_0) το οποίο δεν μηδενίζει τον παρονομαστή. Άρα θα είναι συνεχής στο

$$D = \{(x, y) : x \notin \{1, 2\}\}.$$

1.2.12. Σε ποια σημεία του \mathbb{R}^2 είναι συνεχής η $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y}$;

Λυση. Ως ρητη συναρτηση, η $f(x, y)$ θα είναι συνεχής σε κάθε (x_0, y_0) το οποίο δεν μηδενίζει τον παρονομαστή. Άρα θα είναι συνεχής στο

$$D = \{(x, y) : y \neq x^2\}.$$

1.3 Άλυτα Προβλήματα

1.3.1. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x + y - 1 = 1$.

1.3.2. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} xy = 1$.

1.3.3. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 + y^2 = 2$.

1.3.4. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$.

1.3.5. Να αποδειχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

1.3.6. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x+y}$

Απ. 0.

1.3.7. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/2, \pi/2)} \sin(x + y)$

Απ. 0.

1.3.8. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Απ. 1.

1.3.9. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$.

Απ. 0.

1.3.10. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$

Απ. Δεν υπάρχει.

1.3.11. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

Απ. 2.

1.3.12. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

Απ. 0.

1.3.13. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Απ. 1.

1.3.14. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

Απ. Δεν υπάρχει.

1.3.15. Από την γραφική παρασταση της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ βρείτε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y)$.

1.3.16. Από την γραφική παρασταση της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ δείξτε ότι το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$ δεν υπάρχει. Σε ποια άλλα σημεία του \mathbb{R}^2 φαίνεται να μην έχει όριο η συνάρτηση;

1.3.17. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $\phi(0, 0) = 1$. Είναι αυτή συνεχής στο $(0, 0)$;

Απ. Ναι.

1.3.18. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $\phi(0, 0) = 0$. Είναι αυτή συνεχής στο $(0, 0)$;

Απ. Ναι.

1.3.19. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $\phi(0, 0) = 1$. Είναι αυτή συνεχής στο $(0, 0)$;

Απ. Όχι.

1.3.20. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$ για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $\phi(0, 0) = 1$. Είναι αυτή συνεχής στο $(0, 0)$;

Απ. Όχι.

1.3.21. Να δείχτεί ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2} = \infty$.

1.3.22. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$ για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $\phi(0, 0) = 1$. Είναι αυτή συνεχής στο $(0, 0)$;

Απ. Όχι.

1.3.23. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{x^2}{x+y+z}$

Απ. 1/3.

1.3.24. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2}{x+y+z}$

Απ. 0.

1.3.25. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$

Απ. Δεν υπάρχει.

Κεφάλαιο 2

Παραγωγή

2.1 Θεωρία

2.1.1. Η μερική παραγωγός της $\phi(x, y)$ ως προς x συμβολίζεται με $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ή και με ϕ_x και ορίζεται ως εξής

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y) - \phi(x, y)}{\Delta x}.$$

Δηλ. η $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ είναι η παραγωγός της $\phi(x, y)$ ως προς x , αν θεωρήσουμε την μεταβλητή y σταθερή. Ομοία συμβολίζουμε την μερική παραγωγή της $\phi(x, y)$ ως προς y με $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ ή ϕ_y και την ορίζουμε ως εξής

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y + \Delta y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta y}.$$

2.1.2. Ορίζουμε τις μερικές παραγωγούς ανώτερης τάξης με αντιστοιχο τρόπο. Π.χ.

$$\begin{aligned}\phi_{xx} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right), & \phi_{yx} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \\ \phi_{yy} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right), & \phi_{xy} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

2.1.3. Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν και για συναρτησεις τριων η περισσοτερων μεταβλητων. Π.χ. η $\phi(x, y, z)$ εχει μερικες παραγωγους πρωτης ταξης ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z ; η $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ εχει τις $\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_N}$ κτλ.

2.1.4. Επισης θα χρησιμοποιησουμε τον συμβολισμο των διαφορικων τελεστων. Ετσι, $D_x\phi = \phi_x, D_y\phi = \phi_y, D_{xx} = D_x^2\phi = \phi_{xx}, D_x D_y\phi = \phi_{xy}$ κτλ.

2.1.5. Οταν οι μεταβλητες x, y υφιστανται μικρες μεταβολες, $\Delta x, \Delta y$, τοτε η συναρτηση $\phi(x, y)$ μεταβαλλεται προσεγγιστικα κατα

$$\Delta\phi = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y) \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y.$$

Στο οριο $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ εχουμε μεταβολη ιση με το διαφορικο της $\phi(x, y)$ που είναι

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy.$$

2.1.6. Μπορούμε να συνδυάσουμε όλες τις μερικές παραγωγούς της $\phi(x, y)$ σε μια διανυσματική παραγωγή. Η κλίση της $\phi(x, y)$, συμβολίζεται $grad\phi$ και ορίζεται ως εξής:

$$grad\phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

2.1.7. Αντιστοίχα, μπορούμε να συνδυάσουμε όλες τις μερικές παραγωγούς της $\phi(x, y, z)$ σε μια διανυσματική παραγωγή, την κλίση της $\phi(x, y, z)$, που συμβολίζεται $grad\phi$ και ορίζεται ως εξής:

$$grad\phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

2.1.8. Ο τελεστής *αναδεήτα* συμβολίζεται με ∇ και ορίζεται ως εξής :

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \text{ για συναρτήσεις δυο μεταβλητών και}$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ για συναρτήσεις τριών μεταβλητών}$$

2.1.9. Τότε η κλίση της ϕ μπορεί να γραφτεί

$$grad\phi = \nabla\phi$$

2.1.10. Επίσης το διαφορικό της ϕ μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

όπου, για συναρτήσεις δυο μεταβλητών, έχουμε $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ και $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$ (για συναρτήσεις τριών μεταβλητών έχουμε $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ και $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$). Δηλ. το \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης.

2.1.11. Η κλίση έχει ιδιότητες παρομοίες με αυτές της συνηθούς παραγωγού. Π.χ. ισχύει ότι $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi)$.

2.1.12. Γεωμετρικά, η $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ δίνει τον ρυθμό μεταβολής της $\phi(x, y)$ όταν το διάνυσμα (x, y) μεταβάλλεται κατά την κατεύθυνση x .

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \lim_{|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} \frac{|\phi(x + \Delta x, y) - \phi|}{|\Delta x|}.$$

Αντιστοίχα πράγματα ισχύουν για τις $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ κ.τ.λ.

2.1.13. Αν τώρα τα x, y μεταβαλλονται ταυτόχρονα κατά την κατεύθυνση του διανυσματος $\mathbf{v} = \mathbf{i}a + \mathbf{j}b$, τότε ο ρυθμός μεταβολής (δηλ. η παραγωγός) της $\phi(x, y)$ κατά την κατεύθυνση \mathbf{v} είναι

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{v}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\phi(x + a\Delta s, y + b\Delta s) - \phi(x, y)}{\Delta s}$$

και δίνεται από την σχέση

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{v}} = \nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (2.1)$$

2.1.14. Η κατεύθυνση κατά την οποία μεγιστοποιείται η $\frac{d\phi}{dv}$ είναι η $\nabla\phi$ και όταν $\mathbf{v} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ τότε έχουμε

$$\frac{d\phi}{dv} = |\nabla\phi|.$$

2.1.15. Εστω ότι ορίζεται μια επιφάνεια στην πεπλεγμένη μορφή $\phi(x, y, z) = 0$. Τότε ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, στο σημείο (x_0, y_0, z_0) , είναι το

$$\nabla\phi|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}.$$

Η κάθετη ευθεία στην επιφάνεια, στο σημείο (x_0, y_0, z_0) , έχει εξίσωση

$$\frac{x - x_0}{\phi_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\phi_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\phi_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Το δε εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια, στο σημείο (x_0, y_0, z_0) , έχει εξίσωση

$$\phi_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \phi_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \phi_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

2.1.16. Η Λαπ्लाσιανή της $\phi(x, y)$ ορίζεται ως

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

και της $\phi(x, y, z)$ ορίζεται ως

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

2.2 Λυμένα Προβλήματα

2.2.1. Να υπολογιστούν οι μερικές παραγώγοι πρώτης τάξης της $\phi(x, y) = x^2 \cdot e^{y+x^3}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cdot e^{y+x^3}) &= 2xe^{y+x^3} + x^2e^{y+x^3}(x^3)' = 2xe^{y+x^3} + 3x^4e^{y+x^3} \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot e^{y+x^3}) &= x^2e^{y+x^3}(y)' = x^2e^{y+x^3} \end{aligned}$$

2.2.2. Να υπολογιστούν οι μερικές παραγώγοι πρώτης τάξης της $\phi(x, y) = \frac{1}{y+x^3}$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\frac{1}{(y+x^3)^2}(y+x^3)' = -\frac{3x^2}{(y+x^3)^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -\frac{1}{(y+x^3)^2}(y)' = -\frac{1}{(y+x^3)^2} \end{aligned}$$

2.2.3. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της $\phi(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 4x^2$.

Λυση. Για τις πρώτης τάξης παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} D_x(x^3 + xy + y^3 + 4x^2) &= 3x^2 + 8x + y \\ D_y(x^3 + xy + y^3 + 4x^2) &= 3y^2 + x \end{aligned}$$

Για τις δεύτερης τάξης παραγώγους έχουμε :

$$\begin{aligned} D_{xx}(x^3 + xy + y^3 + 4x^2) &= D_x(D_x(x^3 + xy + y^3 + 4x^2)) = D_x(3x^2 + 8x + y) = 6x + 8 \\ D_{yy}(x^3 + xy + y^3 + 4x^2) &= D_y(D_y(x^3 + xy + y^3 + 4x^2)) = 6y \\ D_{xy}(x^3 + xy + y^3 + 4x^2) &= D_y(D_x(x^3 + xy + y^3 + 4x^2)) = 1 \\ D_{yx}(x^3 + xy + y^3 + 4x^2) &= D_x(D_y(x^3 + xy + y^3 + 4x^2)) = 1 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $D_{xy}(x^3 + xy + y^3 + 4x^2) = D_{yx}(x^3 + xy + y^3 + 4x^2)$.

2.2.4. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x, y) = x^2 \sin(x + y)$.

$$\begin{aligned} D_x(x^2 \sin(x + y)) &= 2x \sin(x + y) + x^2 \cos(x + y), \quad D_y(x^2 \sin(x + y)) = x^2 \cos(x + y) \\ D_{xx}(x^2 \sin(x + y)) &= D_x(2x \sin(x + y) + x^2 \cos(x + y)) = 2 \sin(x + y) + 4x \cos(x + y) - x^2 \sin(x + y) \\ D_{yy}(x^2 \sin(x + y)) &= D_y(x^2 \cos(x + y)) = -x^2 \sin(x + y) \\ D_{xy}(x^2 \sin(x + y)) &= D_y(2x \sin(x + y) + x^2 \cos(x + y)) = 2x \cos(x + y) - x^2 \sin(x + y) \\ D_{yx}(x^2 \sin(x + y)) &= D_x(x^2 \cos(x + y)) = 2x \cos(x + y) - x^2 \sin(x + y) \end{aligned}$$

2.2.5. Υπολογίστε το το διαφορικό της $\phi(x, y) = x + 2y$

Λυση. Εχουμε

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = dx + 2dy.$$

2.2.6. Υπολογίστε το το διαφορικό της $\phi(x, y) = x^2 + y^3$

Λυση. Εχουμε

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 2x dx + 3y^2 dy.$$

2.2.7. Υπολογίστε το το διαφορικό της $\phi(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

Λυση. Εχουμε

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 2x dx + 3y^2 dy + 4z^3 dz.$$

2.2.8. Υπολογίστε το το διαφορικό της $\phi(x, y, z) = \sin(x + y^2 + z^3)$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\ &= -\sin(y^2 + z^3 + x) dx - 2y \sin(y^2 + z^3 + x) dy - 3z^2 \sin(y^2 + z^3 + x) dz. \end{aligned}$$

2.2.9. Να υπολογιστεί το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x, y) = (x_0, y_0)$ για $\phi(x, y) = x^3 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ και (α) για $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$ (β) για $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = 0.01$.

Λυση. Έχουμε

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 3x^2dx + 2ydy.$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι το ίδιο για τις περιπτώσεις (α) και (β). Τώρα, στην περίπτωση (α) έχουμε $\Delta x = \Delta y = 0.1$ και

$$\Delta\phi = \phi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \phi(x_0, y_0) = (1.1^3 + 1.1^2) - (1^3 + 1^2) = 0.541.$$

Στην περίπτωση (β) έχουμε $\Delta x = \Delta y = 0.01$ και

$$\Delta\phi = \phi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \phi(x_0, y_0) = (1.01^3 + 1.01^2) - (1^3 + 1^2) = 0.504.$$

Η προσέγγιση με το διαφορικό δίνει

$$d\phi(\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.1) = 3x^2\Delta x + 2y\Delta y = 0.3 + 0.2 = 0.5.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, όταν τα $\Delta x, \Delta y$ είναι μικρότερα, η προσέγγιση του $\Delta\phi$ από το $d\phi$ είναι καλύτερη (έχει μικρότερο σφάλμα).

2.2.10. Να υπολογιστεί το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x, y) = (x_0, y_0)$ για $\phi(x, y) = \sin(x + y)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$

Λυση. Έχουμε

$$\Delta\phi = \sin(0.1 + 0.2) - \sin(0.0 + 0.0) = 0.29552 - 0 = 0.29552$$

$$d\phi = \cos(x + y) \cdot \Delta x + \cos(x + y) \cdot \Delta y = \cos(0) \cdot 0.1 + \cos(0) \cdot 0.2 = 0.3.$$

2.2.11. Να υπολογιστεί η κλίση των παρακάτω συναρτήσεων.

1. $\text{grad } \phi$ για $\phi = x^2 + y^3$. Εδώ είναι

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}.$$

2. $\text{grad } \phi$ για $\phi = x^2y^3z$. Εδώ είναι

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = 2xy^3z\mathbf{i} + 3xy^2z\mathbf{j} + x^2y^2z\mathbf{k}.$$

3. $\text{grad } \phi$ για $\phi = x^2e^{y+x^3}$. Εδώ είναι

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = (2xe^{y+x^3} + 3x^4e^{y+x^3})\mathbf{i} + (x^2e^{y+x^3})\mathbf{j}$$

4. $\text{grad } \phi$ για $\phi = x^2ye^{zy}$. Εδώ είναι

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2xye^{zy})\mathbf{i} + (x^2e^{zy} + x^2ye^{zy})\mathbf{j} + (x^2ye^{zy})\mathbf{k}$$

5. $\text{grad } \phi$ για $\phi = \frac{1}{y+x^3}$. Εδώ είναι

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} = \left[-\frac{1}{(y+x^3)^2} (x^3) \right] \mathbf{i} + \left[-\frac{1}{(y+x^3)^2} (y) \right] \mathbf{j} = -\frac{3x^2}{(y+x^3)^2} \mathbf{i} - \frac{1}{(y+x^3)^2} \mathbf{j}$$

2.2.12. Να βρεθεί η κλίση $\nabla \phi$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο σημείο $(x, y) = (2, 3)$ για $\phi(x, y) = y \sin x + \frac{x}{y}$

Λυση. Έχουμε $\nabla \phi(x, y) = \mathbf{i} \left(y \cos x + \frac{1}{y} \right) + \mathbf{j} \left(\sin x - \frac{x}{y^2} \right)$ και $\nabla \phi(2, 3) = \mathbf{i} \left(3 \cos 2 + \frac{1}{3} \right) + \mathbf{j} \left(\sin 2 - \frac{2}{9} \right)$.

2.2.13. Να βρεθεί η κλίση $\nabla \phi$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ για $\phi(x, y, z) = x^2 y^3 z$

Λυση. Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι $\nabla \phi = \mathbf{i} 2xy^3z + \mathbf{j} 3x^2y^2z + \mathbf{k} x^2y^3$. Στο $(1, 1, 1)$ θα είναι $\nabla \phi(1, 1, 1) = \mathbf{i} 2 + \mathbf{j} 3 + \mathbf{k}$.

Απ. $6 \cos(x^2 + y^2 + z^2) - 4(\sin(x^2 + y^2 + z^2))x^2 - 4(\sin(x^2 + y^2 + z^2))y^2 - 4(\sin(x^2 + y^2 + z^2))z^2$.

2.2.14. Αποδείξτε ότι $d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$.

Λυση. Πραγματι, αν $\nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y}$ και $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy$, τότε το εσωτερικό γινόμενο είναι

$$\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = d\phi.$$

Αναλογία είναι αποδείξει όταν η ϕ είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών.

2.2.15. Αν \mathbf{c} είναι σταθερό διάνυσμα, να δείχτεί ότι $\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}$.

2.2.16. Λυση. Πραγματι, αν $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ και $\mathbf{c} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, τότε

$$\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \nabla(ax + by) = \mathbf{i} D_x(ax + by) + \mathbf{j} D_y(ax + by) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{c}.$$

2.2.17. Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $P(x, y), Q(x, y)$. Να δείχτεί ότι

$$(\exists \phi : P(x, y) dx + Q(x, y) dy = d\phi) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

2.2.18. Λυση. Εστώ ότι υπάρχει ϕ τέτοια ώστε

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = d\phi.$$

Ομως, για κάθε dx, dy , ισχύει και ότι

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

Άρα θα έχουμε

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ και } Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

οπότε έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2.2.19. Να υπολογιστεί η παραγωγός της $\phi = xy$ στο σημείο $A(1, 2)$ και κατά την κατεύθυνση $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

Λυση. Το \mathbf{n} έχει μέτρο $|\mathbf{n}| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Οπότε

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{8}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\mathbf{j} + 0 \text{ και μοναδιαίο διάνυσμα } \mathbf{n}_o = \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, 0\right).$$

Επίσης $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (2xy^2, 2yx^2, -\sin z)$ και $\nabla\phi|_{1,1,0} = (2, 2, 0)$. Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dn} &= \nabla\phi(x_o, y_o, z_o) \cdot \mathbf{n}_o \\ &= (2, 2, 0) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, 0\right) = \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{8}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{8}} = \frac{8}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2.2.20. Να υπολογιστεί η παραγωγός της $\phi = y^2x^2 + \cos z$ στο σημείο $A(1, 1, 0)$ και κατά την κατεύθυνση $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.

Λυση. Το \mathbf{n} έχει μέτρο $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0} = \sqrt{8}$. Οπότε

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} \text{ και μοναδιαίο διάνυσμα } \mathbf{n}_o = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Επίσης $\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x$ και $\nabla\phi|_{1,2} = (2, 1)$. Οπότε

$$\frac{d\phi}{dn} = \nabla\phi(x_o, y_o) \cdot \mathbf{n}_o = (2, 1) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

2.2.21. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $\phi = xyz$ στο σημείο $(1, 2, 3)$ και κατά την κατεύθυνση προς το σημείο $(2, 3, 2)$.

Λυση. Έχουμε

$$\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy$$

και

$$\nabla\phi(1, 2, 3) = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Επίσης το διάνυσμα από το $A(5, 1, 2)$ προς το $B(9, 4, 14)$ είναι

$$\vec{AB} = \mathbf{n} = \mathbf{i}(2 - 1) + \mathbf{j}(3 - 2) + \mathbf{k}(2 - 3) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

και το μοναδιαίο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{n}_o = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}.$$

Οπότε η παραγωγός είναι

$$\frac{d\phi}{dn} = \frac{1}{\sqrt{3}}(6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

2.2.22. Υπολογίστε την παραγώγο κατά κατεύθυνση της $u = x^2 + y^2 + z^2$ στο σημείο $(1, 1, 1)$ και κατά την κατεύθυνση προς το σημείο $(0, 1, 1)$.

Λυση. Έχουμε

$$\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y + \mathbf{k}2z$$

και

$$\nabla\phi(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Επίσης το διάνυσμα από το $A(1, 1, 1)$ προς το $B(0, 1, 1)$ είναι

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{n} = \mathbf{i}(0 - 1) + \mathbf{j}(1 - 1) + \mathbf{k}(1 - 1) = \mathbf{i}$$

το οποίο είναι μοναδιαίο: $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$. Οπότε η παραγώγος είναι

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{n}} = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 2.$$

Αυτή είναι η $\phi_x(1, 1, 1)$ (γιατί;).

2.2.23. Υπολογίστε την παραγώγο κατά κατεύθυνση της $\phi = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ σε τυχόν σημείο και κατά την κατεύθυνση $\nabla\phi$.

Λυση. Με άλλα λόγια το ζητούμενο είναι το μέτρο $\|\nabla\phi\|$ (γιατί;). Έχουμε δε

$$\nabla\phi = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\mathbf{i} + \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\mathbf{j} + \frac{-2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\mathbf{k}$$

οπότε η ζητούμενη παραγώγος είναι $\sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^4}}$

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{n}} = \|\nabla\phi\| = \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^4}} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{r^3}.$$

2.2.24. Να υπολογιστεί το εφαπτομένο επίπεδο και η κάθετη ευθεία, στην επιφάνεια $x^2 + 2y^2 - z = 0$ στο σημείο $(3, 1, 2)$.

Λυση. Στο τυχόν σημείο (x, y, z) η επιφάνεια έχει κάθετο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_y + \mathbf{k}\phi_z = \mathbf{i}2x + \mathbf{j}4y - \mathbf{k}.$$

και στο σημείο $(3, 1, 2)$ έχει κάθετο διάνυσμα

$$\mathbf{n}_1 = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Οπότε η κάθετη ευθεία έχει εξισώσεις

$$\frac{x - 3}{6} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 2}{-1}.$$

και το εφαπτομένο επίπεδο έχει εξίσωση

$$6(x - 3) + 4(y - 1) - (z - 2) = 0$$

δηλ.

$$6x + 4y - z - 20 = 0.$$

2.2.25. Να υπολογιστεί το εφαπτομενο επιπεδο και η καθετη ευθεια, στην επιφανεια $xyz = a^3$ στο σημειο (x_0, y_0, z_0) .

Λυση. Στο τυχον σημειο (x_0, y_0, z_0) η επιφανεια εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_y + \mathbf{k}\phi_z = \mathbf{i}y_0z_0 + \mathbf{j}x_0z_0 + \mathbf{k}x_0y_0.$$

Οποτε η καθετη υθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x - x_0}{y_0z_0} = \frac{y - y_0}{x_0z_0} = \frac{z - z_0}{x_0y_0}.$$

και το εφαπτομενο επιπεδο εχει εξισωση

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$$

δηλ.

$$xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0z_0 - 3x_0y_0z_0 = 0$$

ή και

$$xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0z_0 - 3a^3$$

(αφου (x_0, y_0, z_0) ειναι σημειο της επιφανειας θα ικανοποιει την εξισωση $xyz = a^3$).

2.2.26. Να υπολογιστεί το εφαπτομενο επιπεδο και η καθετη ευθεια, στην επιφανεια $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ στο σημειο $(1, 1, 2)$.

Λυση. Στο τυχον σημειο (x, y, z) η επιφανεια εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_y + \mathbf{k}\phi_z = \mathbf{i}\frac{2x}{a^2} + \mathbf{j}\frac{2y}{b^2} + \mathbf{k}\frac{2z}{c^2}.$$

και στο σημειο $(1, 1, 2)$ εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}\frac{2}{a^2} + \mathbf{j}\frac{2}{b^2} + \mathbf{k}\frac{4}{c^2}.$$

Οποτε η καθετη ευθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x - 1}{2/a^2} = \frac{y - 1}{2/b^2} = \frac{z - 2}{4/c^2}.$$

και το εφαπτομενο επιπεδο εχει εξισωση

$$\frac{2}{a^2}(x - 1) + \frac{2}{b^2}(y - 1) + \frac{4}{c^2}(z - 2) = 0$$

δηλ.

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} + \frac{4z}{c^2} - \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{8}{c^2}\right) = 0.$$

2.2.27. Να υπολογιστεί η Λαπλασιανη των παρακατω συναρτησεων.

1. $\nabla^2\phi$ για $\phi = x^2e^{y+x^3}$. Εδώ είναι

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xe^{y+x^3} + 3x^4e^{y+x^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2e^{y+x^3}) \\ &= 2e^{y+x^3} + 6x^3e^{y+x^3} + 12x^3e^{y+x^3} + 9x^6e^{y+x^3} + x^2e^{y+x^3}\end{aligned}$$

2. $\nabla^2\phi$ για $\phi = e^{x+y+z^3}$. Εδώ είναι

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y+z^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(2ye^{x+y+z^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(3z^2e^{x+y+z^3}) \\ &= e^{x+y+z^3} + 2e^{x+y+z^3} + 4y^2e^{x+y+z^3} + 6ze^{x+y+z^3} + 9z^4e^{x+y+z^3} \\ &= 3e^{x+y+z^3} + 4y^2e^{x+y+z^3} + 6ze^{x+y+z^3} + 9z^4e^{x+y+z^3}\end{aligned}$$

3. $\nabla^2\phi$ για $\phi = \frac{1}{y+x^3}$, οπότε

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3x^2}{(y+x^3)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{(y+x^3)^2}\right) \\ &= \frac{-6x^2(y+x^3+6x^2(y+x^3)3x^2)}{(y+x^3)^4} + \frac{2(y+x^3)3x^2}{(y+x^3)^4} \\ &= \frac{-6(y+x^3)^2+18x(y+x^3)+6x^2(y+x^3)}{(y+x^3)^4} = \frac{-6(y+x^3)+18x^4+6x^2}{(y+x^3)^3}\end{aligned}$$

4. $\nabla^2\phi$ για $\phi = \frac{1}{x+y^2+z^3}$, οπότε

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{(x+y^2+z^3)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{(x+y^2+z^3)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{3z^2}{(x+y^2+z^3)^2}\right) \\ &= \frac{2}{(x+y^2+z^3)^3} - \frac{2(x+y^2+z^3)^2}{(x+y^2+z^3)^4} + \frac{8y^2(x+y^2+z^3)}{(x+y^2+z^3)^4} - \frac{6z(x+y^2+z^3)}{(x+y^2+z^3)^4} + \frac{18z^4(x+y^2+z^3)}{(x+y^2+z^3)^4} \\ &= \frac{2}{(x+y^2+z^3)^3} - \frac{2}{(x+y^2+z^3)^2} + \frac{8y^2}{(x+y^2+z^3)^3} - \frac{6z}{(x+y^2+z^3)^3} + \frac{18z^4}{(x+y^2+z^3)^3}\end{aligned}$$

2.3 Άλυτα Προβλήματα

2.3.1. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x, y) = x^2 + 2xy + y^3 + 4x$.

Απ. $2x + 2y + 4, 3y^2 + 2x, 2, 6y, 2$.

2.3.2. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x, y) = x^2 \sin(x + y)$.

Απ. $2x \sin(x + y) + x^2 \cos(x + y), x^2 \cos(x + y), 2 \sin(x + y) + 4x \cos(x + y) - x^2 \sin(x + y), -x^2 \sin(x + y), 2x \cos(x + y) - x^2 \sin(x + y)$.

2.3.3. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x, y) = \frac{x+y}{xy-1}$.

Απ. $x^2 \sin(x+y)$

2.3.4. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x, y) = x^2 \sin(x+y)$.

Απ. $-\frac{1}{(xy-1)^2}(y^2+1), -\frac{1}{(xy-1)^2}(x^2+1), 2\frac{y}{(xy-1)^3}(y^2+1), 2\frac{x}{(xy-1)^3}(x^2+1), \frac{2(x+y)}{(xy-1)^3}$.

2.3.5. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\phi_x, \phi_y, \phi_z, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x, y, z) = x^3yz + y^2z^3 + \cos(xyz)$.

Απ. $-yz(\sin xyz - 3x^2), x^3z + 2yz^3 - xz \sin xyz, x^3y + 3y^2z^2 - xy \sin xyz$.

2.3.6. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\phi_x, \phi_y, \phi_z, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x, y, z) = ze^{\sin(x+y)}$.

Απ. $z(\cos(x+y))e^{\sin(x+y)}, z(\cos(x+y))e^{\sin(x+y)}, e^{\sin(x+y)}$.

2.3.7. Υπολογίστε την μερική παραγωγή $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ και την ολική παραγωγή $\frac{d\phi}{dx}$ αν $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ και $y(x) = x^3$.

Απ. $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x, \frac{d\phi}{dx} = 2x + 6x^5$.

2.3.8. Υπολογίστε το διαφορικό της $\phi(x, y) = x^2 \sin(x+y)$.

Απ. $d\phi = (2x \sin(x+y) + x^2 \cos(x+y))dx + x^2 \cos(x+y)dy$.

2.3.9. Υπολογίστε το διαφορικό της $\phi(x, y) = x^3y + x^2y^2$.

Απ. $d\phi = (3x^2y + 2xy^2)dx + (x^3 + 2yx^2)dy$.

2.3.10. Υπολογίστε το διαφορικό της $\phi(x, y, z) = x + y + z$

Απ. $d\phi = dx + dy + dz$.

2.3.11. Υπολογίστε το διαφορικό της $\phi(x, y, z) = x^2y^3z^4$

Απ. $d\phi = 2xy^3z^4dx + 3x^2y^2z^4dy + 4x^2y^3z^3dz$.

2.3.12. Υπολογίστε το διαφορικό της $\phi(x, y, z) = \cos(x + y^2 + z^3)$

Απ. $d\phi = -\sin(y^2 + z^3 + x)dx - 2y \sin(y^2 + z^3 + x)dy - 3z^2 \sin(y^2 + z^3 + x)dz$.

2.3.13. Να υπολογίσει το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x, y) = (x_0, y_0)$ για $\phi(x, y) = x^2y^2, (x_0, y_0) = (1, 1), \Delta x = 0.1, \Delta y = 0.1$

Απ. $\Delta\phi = 0.464, d\phi = 0.4$.

2.3.14. Να υπολογίσει το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x, y) = (x_0, y_0)$ για $\phi(x, y) = \sin(x^2 + y^2), (x_0, y_0) = (0, 0), \Delta x = 0.1, \Delta y = 0.1$

Απ. $\Delta\phi = 0.019999, d\phi = 0.39992$.

2.3.15. Να βρεθεί η κλίση $\nabla\phi$ και να υπολογίσει η τιμή της στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ για $\phi(x, y, z) = x^2y^3z$

Απ. $i2xy^3z + j3x^2y^2z + kx^2y^3$ και $i2 + j3 + k$.

2.3.16. Να βρεθεί η κλίση $\nabla\phi$ και να υπολογίσει η τιμή της στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ για $\phi(x, y, z) = yz \sin x + \frac{x}{y} \ln z$

Απ. $i\left(yz \cos x + \frac{1}{y} \ln z\right) + j\left(z \sin x - \frac{x}{y^2} \ln z\right) + k\left(y \sin x + \frac{x}{yz}\right)$ και $i \cos 1 + j \sin 1 + k(\sin 1 + 1)$.

2.3.17. Να βρεθεί η κλίση $\nabla\phi$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ για $\phi(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Απ. $-\mathbf{i}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \mathbf{j}\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \mathbf{k}\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ και $-\mathbf{i}\frac{2}{9} - \mathbf{j}\frac{2}{9} - \mathbf{k}\frac{2}{9}$.

2.3.18. Να βρεθεί η κλίση $\nabla\phi$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ για $\phi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

Απ. $\mathbf{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$ και $\mathbf{i}\frac{2}{9} + \mathbf{j}\frac{2}{9} + \mathbf{k}\frac{2}{9}$.

2.3.19. Δίνεται η $\phi(x, y, z) = x^2 + xyz^3 + 2y^2z$. Να υπολογιστεί η $\nabla^2\phi$.

Απ. $2 + 4z + 6xyz$.

2.3.20. Δίνεται η $\phi(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$. Να υπολογιστεί η $\nabla^2\phi$.

Απ. $6\cos(x^2 + y^2 + z^2) - 4(\sin(x^2 + y^2 + z^2))x^2 - 4(\sin(x^2 + y^2 + z^2))y^2 - 4(\sin(x^2 + y^2 + z^2))z^2$.

2.3.21. Να βρεθεί η παραγωγός της $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ κατά την κατεύθυνση $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ στο σημείο $(-1, 3, 2)$.

Απ. $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

2.3.22. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2$ στο σημείο $(3, 1)$ και κατά την κατεύθυνση προς το σημείο $(6, 5)$.

Απ. 0.

2.3.23. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $z = \tan^{-1}(xy)$ στο σημείο $(1, 1)$ και κατά την κατεύθυνση $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Απ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.3.24. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ στο σημείο $(2, 1)$ και κατά την κατεύθυνση που οδηγεί στο $(0, 0)$.

Απ. $-\sqrt{5}$.

2.3.25. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $z = \ln(e^x + e^y)$ στο σημείο $(0, 0)$ και κατά την κατεύθυνση του διανυσματος που σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα των x .

Απ. $\frac{\cos\phi + \sin\phi}{2}$.

2.3.26. Να βρεθεί η παραγωγός της $u(x, y, z) = xyz$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ στο σημείο $(-1, 3, 2)$.

Απ. $\frac{11}{3}\sqrt{3}$.

2.3.27. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $u = xy^2 + z^3 - xyz$ στο σημείο $(1, 1, 2)$ και κατά την κατεύθυνση που σχηματίζει με τους άξονες γωνίες $\pi/3, \pi/4, \pi/3$.

Απ. 5.

2.3.28. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $u = xyz$ στο σημείο $(5, 1, 2)$ και κατά την κατεύθυνση προς το σημείο $(9, 4, 14)$.

Απ. $\frac{98}{13}$.

2.3.29. Υπολογίστε την παραγωγή κατά κατεύθυνση της $u = x^2y^2z^2$ στο σημείο $(1, -1, 3)$ και κατά την κατεύθυνση προς το σημείο $(0, 1, 1)$.

Απ. -22.

2.3.30. Υπολογίστε την παραγώγο κατά κατεύθυνση της $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ σε τυχόν σημείο και κατά την κατεύθυνση ∇u .

Απ. $\frac{1}{r^2}$.

2.3.31. Να υπολογιστεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $z = x^2 + 2y^2$ στο σημείο $(1, 1, 3)$.

Απ. $2x + 4y - z = 3$.

2.3.32. Να υπολογιστεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $xy = z^2$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Απ. $xy_0 + yx_0 = 2zz_0$.

2.3.33. Να υπολογιστεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $xyz = a^3$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Απ. $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 = 3a^3$.

2.3.34. Να υπολογιστεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Απ. $\frac{zz_0}{c^2} - \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

2.3.35. Να δείχτεί ότι αν $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0$, τότε $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

2.3.36. Να δείχτεί ότι αν $F(x + y - z, x^2 + y^2) = 0$, τότε $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$.

2.3.37. Να δείχτεί ότι $\nabla^2\left(\frac{1}{|r|}\right) = 0$.

2.3.38. Να δείχτεί ότι $\nabla^2\left(\frac{1}{|r|^2}\right) = \frac{2}{|r|^4}$.

2.3.39. Να δείχτεί ότι $\nabla^2(\phi\psi) = \psi\nabla^2\phi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\nabla^2\psi$.

2.3.40. Αν \mathbf{c} είναι σταθερό διάνυσμα, να δείχτεί ότι $\nabla(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \mathbf{c}$.

2.3.41. Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Να δείχτεί ότι

$$(\exists \phi : P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = d\phi) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}.$$

2.3.42. Μια συνάρτηση ϕ λέγεται αρμονική αν $\nabla^2\phi = 0$. Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές.

1. $\phi(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. $\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3. $\phi(x, y, z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

4. $\phi(x, y, z) = -\ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z)$

5. $\phi(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2}$ (ως συνάρτηση τριών μεταβλητών!).

Κεφάλαιο 3

Αλυσωτη και Πεπλεγμένη Παραγωγή

3.1 Θεωρία

3.1.1. Δίνεται συνάρτηση $\phi(x, y)$ και υποθέτουμε ότι οι x, y είναι συναρτήσεις μιας άλλης μεταβλητής t : $x(t), y(t)$. Τότε και η ϕ είναι συνάρτηση της t : $\phi(x(t), y(t))$. Η παραγωγός της ϕ ως προς t λέγεται *ολική παραγωγός* και είναι

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.1)$$

η και

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi \cdot \left(\mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} \right).$$

3.1.2. Παρομοια, για συναρτήσεις $\phi(x, y, z)$ και $x(t), y(t), z(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \nabla\phi \cdot \left(\mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

3.1.3. Παρομοια, εστώ ότι δίνεται συνάρτηση $\phi(x, y)$ και υποθέτουμε ότι οι x, y είναι συναρτήσεις άλλων μεταβλητών u, v : $x(u, v), y(u, v)$. Τότε

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad (3.2)$$

η και (με συμβολισμό πινακών)

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

3.1.4. Παρομοια, εστώ ότι δίνεται συνάρτηση $\phi(x, y, z)$ και υποθέτουμε ότι οι x, y, z είναι συναρτήσεις άλλων μεταβλητών u, v : $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$. Τότε

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad (3.3)$$

η και

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

3.1.5. Παρομοια, εστω οτι δινονται συναρτησεις $P(x, y), Q(x, y)$ και υποθετουμε οτι οι x, y ειναι συναρτησεις αλλων μεταβλητων u, v : $x(u, v), y(u, v)$. Τοτε

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (3.5)$$

3.1.6. Οι παραπανω σχεσεις μπορουν να γραφτουν και με συμβολισμο πινακων.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

3.1.7. Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν για συναρτησεις $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ και $x(u, v, w), y(u, v, w)$. Τοτε

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \\ \frac{\partial R}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} \\ \frac{\partial R}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial w} \\ \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

3.1.8. Εστω οτι $P(u, v)$ και $Q(u, v)$ εχουν μερικες παραγωγους πρωτης ταξης. Οριζουμε την *Ιακωβιανη οριζουσα*

$$\frac{D(P, Q)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix} = P_u Q_v - P_v Q_u.$$

3.1.9. Εστω οτι $P(u, v, w), Q(u, v, w)$ και $R(u, v, w)$ εχουν μερικες παραγωγους πρωτης ταξης. Οριζουμε την *Ιακωβιανη οριζουσα*

$$\frac{D(P, Q, R)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} P_u & P_v & P_w \\ Q_u & Q_v & Q_w \\ R_u & R_v & R_w \end{vmatrix}.$$

3.1.10. Μια ή περισσότερες συναρτήσεις μπορούν να οριστούν *εμμεσα*. Π.χ. η

$$\phi(x, y, z) = 0$$

ορίζει την z ως συνάρτηση των x και y . Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις z_x και z_y

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi_z}, \quad z_y = -\frac{\phi_y}{\phi_z}.$$

3.1.11. Παρομοια, μπορεί να μας δίνονται δυο εξισώσεις της μορφής

$$P(x, y, u, v) = 0, \quad Q(x, y, u, v) = 0. \quad (3.6)$$

Κατω απο καταλληλες συνθήκες (παραγωγισιμοτητας και συνεχειας), η (3.6) προσδιορίζει τις συναρτήσεις $u(x, y)$, $v(x, y)$ (ή, αντιστροφα, τις $x(u, v)$, $y(u, v)$). Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, *χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε τις εξισώσεις (3.6)*, ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(y,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,y)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}.$$

3.1.12. Αντιστοίχα πράγματα ισχύουν αν μας δοθούν τρεις εξισώσεις

$$P(x, y, u, v, w) = 0, \quad Q(x, y, u, v, w) = 0, \quad R(x, y, u, v, w) = 0.$$

Τότε, κατω απο καταλληλες συνθήκες, έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q,R)}{D(x,v,w)}}{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,w)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,x,w)}}{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,w)}}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,x)}}{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,w)}}$$

και με αντιστιχο τροπο υπολογιζονται οι $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, ... κτλ.

3.1.13. Ο κανόνας της αλυσωτης παραγωγωσης ισχυει και για τις Ιακωβιανες, με την εξής εννοια:

$$\frac{D(x, y)}{D(r, s)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(r, s)}, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(r, s, t)} = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \frac{D(u, v, w)}{D(r, s, t)} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

3.2 Λυμενα Προβληματα

3.2.1. Να υπολογιστεί η ολική παραγώγος της $\phi(x, y) = x^3 + y^3$ ως προς t , όταν $x(t) = t$ και $y(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 3x^2 \cdot 1 + 3y^2 \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ &= 3t^2 + 3 \frac{t^2}{t^2+1} \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} = 3t^2 \frac{(t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 2t + 1)}{(t^2+1)^3}. \end{aligned}$$

3.2.2. Να υπολογιστεί η ολική παραγωγός της $\phi(x, y) = u^2 + v^2$, $u = \sin t$, $v = \cos t$.

Λυση. Έχουμε

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial v} \frac{dv}{dt} = 2u \cdot \cos t - 2v \cdot \sin t = 2 \sin t \cos t - 2 \cos t \sin t = 0$$

που ήταν αναμενόμενο, αφού

$$\phi = u^2 + v^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

3.2.3. Να υπολογιστεί η ολική παραγωγός της $\phi(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ ως προς t , όταν $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$ και $z(t) = e^t$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial w} \frac{dw}{dt} \\ &= -\cos(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (2x \cdot 1 - 2y \cdot \sin t + 2z \cdot e^t) \\ &= -\cos(t^2 + \cos^2 t + e^{2t}) \cdot (2t - 2 \cos t \sin t + 2e^{2t}). \end{aligned}$$

3.2.4. Να υπολογιστούν οι μερικές παραγώγοι ϕ_u, ϕ_v της $\phi(x, y) = x^3 + y^3$, όταν $x(u, v) = u + v$ και $y(u, v) = uv$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_u &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} \\ &= 3x^2 + 3y^2 v = 3(u+v)^2 + 3u^2 v^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_v &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} \\ &= 3x^2 + 3y^2 u = 3(u+v)^2 + 3u^3 v^2 \end{aligned}$$

3.2.5. Να υπολογιστούν οι μερικές παραγώγοι ϕ_u, ϕ_v της $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, όταν $x(u, v) = u^2 + v^2$ και $y(u, v) = u$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_u &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2u \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= 4xu + 2y = 4u^3 + 4v^2 u + 2u. \end{aligned}$$

3.2.6. Να υπολογιστούν οι μερικές παραγώγοι ϕ_u, ϕ_v της $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, όταν $x(u, v) = u^2 + v^2$, $y(u, v) = uv$ και $z(u, v) = u$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_u &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 2z + 4ux + 2vy = 2u + 2u(2u^2 + 2v^2) + 2uv^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_v &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2v \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 2z + 2uy + 4vx = 2u + 2v(2u^2 + 2v^2) + 2u^2v.\end{aligned}$$

3.2.7. Να υπολογιστούν οι P_u, P_v, Q_u, Q_v όταν $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = xy$ και $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = uv$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + 2v + 2uv \\ u + v + uv \end{bmatrix}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2xv + 2yu \\ yv + xu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2uv + 2v^2 + 2u^2v \\ uv^2 + u^2 + uv \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3.2.8. Να υπολογιστούν οι P_u, P_v, Q_u, Q_v όταν $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = xy$ και $x(u, v) = \cos(u + v)$, $y(u, v) = \sin(uv)$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(u + v) \\ v \cos(uv) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2vy \cos(uv) - 2x \sin(u + v) \\ vx \cos(uv) - y \sin(u + v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v \sin(uv) \cos(uv) - 2 \cos(u + v) \sin(u + v) \\ v \cos(u + v) \cos(uv) - \sin(uv) \sin(u + v) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(u + v) \\ u \cos(uv) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2vy \cos(uv) - 2x \sin(u + v) \\ ux \cos(uv) - y \sin(u + v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v \sin(uv) \cos(uv) - 2 \sin(uv) \sin(u + v) \\ u \cos(u + v) \cos(uv) - \sin(uv) \sin(u + v) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.2.9. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (1) \Rightarrow \frac{2}{a^2}x - \frac{2}{c^2}z z_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} (1) \Rightarrow \frac{2}{b^2}y - \frac{2}{c^2}z z_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}.\end{aligned}$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε την απάντηση κατευθείαν χρησιμοποιώντας

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi_z} = -\frac{2x/a^2}{-2z/c^2} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{x}{z},$$

$$z_y = -\frac{\phi_y}{\phi_z} = -\frac{2y/b^2}{-2z/c^2} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}.$$

3.2.10. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $x^2 - 2y^2 + z^2 - 6x + 7z - 5 = 0$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2y^2 + z^2 - 6x + 7z - 5) = \frac{\partial}{\partial x} (0) \Rightarrow 2x + 2zz_x - 6 + 7z_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{6 - 2x}{7 + 2z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 2y^2 + z^2 - 6x + 7z - 5) = \frac{\partial}{\partial y} (0) \Rightarrow -4y + 2zz_y + 7z_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{4y}{7 + 2z}.$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε την απάντηση κατευθείαν χρησιμοποιώντας

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi_z} = -\frac{2x - 6}{2z + 7},$$

$$z_y = -\frac{\phi_y}{\phi_z} = -\frac{-4y}{2z + 7}.$$

3.2.11. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $z^2 + 3xyz = a^3$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} (z^2 + 3xyz) = \frac{\partial}{\partial x} (a^3) \Rightarrow 2zz_x + 3yz + 3xyz_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{3yz}{2z + 3xy}$$

και ομοια προκύπτει

$$z_y = -\frac{3xz}{2z + 3xy}$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε την απάντηση κατευθείαν χρησιμοποιώντας

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi_z} = -\frac{3yz}{2z + 3xy}, \quad z_y = -\frac{\phi_y}{\phi_z} = -\frac{3xz}{2z + 3xy}.$$

3.2.12. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ όταν $u = x^2 - y^2, v = 2xy$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2.$$

3.2.13. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ και η $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $x = u \cos v, y = u \sin v$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u (\cos^2 v + \sin^2 v) = u.$$

Εχουμε επίσης ότι

$$x^2 + y^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 \Rightarrow u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

και άρα

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3.2.14. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ αν $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $v = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$, $w = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Εχουμε επίσης ότι

$$u_x = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad u_z = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Με συμμετρικό τρόπο υπολογίζουμε και τις υπολοιπές παραγώγους και τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{x^2 - y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{x^6 + 3x^4y^2 + 3x^4z^2 + 3x^2y^4 + 6x^2y^2z^2 + 3x^2z^4 + y^6 + 3y^4z^2 + 3y^2z^4 + z^6} \\ &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}. \end{aligned}$$

3.2.15. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ αν $x = 2u - 3v + 4w$, $y = u^2 - v^2 - w^2$, $z = u^3 + v$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2u & -2v & -2w \\ 3u^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4w + 8u + 18u^2w + 24u^2v..$$

3.2.16. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ αν $u = x^2 + y^2$, $v = y^2 + z^2$, $w = z^2 + x^2$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \end{vmatrix} = 16xyz.$$

3.2.17. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ αν $u = xy^2$, $v = xyz$, $w = x + y + z$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -y^2zx - y^3x + 2x^2y^2.$$

3.2.18. Να υπολογιστούν οι u_x, u_y, v_x, v_y αν δίνεται ότι $x + 2y - u + 3v - 1 = 0$ και $3x + y - 4u + v - 2 = 0$.

Λυση. Εχουμε

$$P(x, y, u, v) = x + 2y - u + 3v - 1 = 0$$

$$Q(x, y, u, v) = 3x + y - 4u + v - 2 = 0$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_x & P_v \\ Q_x & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(y,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_y & P_v \\ Q_y & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_x \\ Q_u & Q_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,y)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_y \\ Q_u & Q_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

3.2.19. Να υπολογιστούν οι u_x, v_x αν δίνεται ότι $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0$ και $u^2 - v^2 - 2xy + y^2 = 0$.

Λυση. Εχουμε

$$P(x, y, u, v) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0$$

$$Q(x, y, u, v) = u^2 - v^2 - 2xy + y^2 = 0$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_x & P_v \\ Q_x & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & 2v \\ -2y & -2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{-4xv + 4vy}{8uv} = \frac{y - x}{2u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_x \\ Q_u & Q_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & 2x \\ 2u & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{-4yu - 4xu}{8uv} = -\frac{x + y}{2v}$$

3.2.20. Να υπολογιστούν οι u_x, u_y, v_x, v_y αν δίνεται ότι $x^2 + y^2 - uv - 1 = 0$ και $xy - u + v - 2 = 0$.

Λυση. Έχουμε

$$P(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - uv - 1 = 0$$

$$Q(x, y, u, v) = xy - u + v - 2 = 0$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_x & P_v \\ Q_x & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & -u \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2x + uy}{u + v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(y,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_y & P_v \\ Q_y & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2y & -u \\ x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2y + ux}{u + v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_x \\ Q_u & Q_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -v & 2x \\ -1 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-vy + 2x}{u + v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,y)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_y \\ Q_u & Q_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -v & 2y \\ -1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-vx + 2y}{u + v}$$

3.2.21. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ικανοποιεί $x\phi_x + y\phi_y = 0$.

Λυση. Θετούμε $z = \frac{y}{x}$. Έχουμε

$$\phi_x = \phi_z z_x = \phi_z \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right), \quad \phi_y = \phi_z z_y = \phi_z \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

οπότε

$$x\phi_x + y\phi_y = x\phi_z \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + y\phi_z \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \phi_z \cdot \left(-\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\right) = 0$$

3.2.22. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi(x^2 + y^2)$ ικανοποιεί $y\phi_x - x\phi_y = 0$.

Λυση. Θετούμε $z = x^2 + y^2$. Έχουμε

$$\phi_x = \phi_z z_x = \phi_z \cdot 2x, \quad \phi_y = \phi_z z_y = \phi_z \cdot 2y$$

οπότε

$$y\phi_x - x\phi_y = y\phi_z \cdot 2x - x\phi_z \cdot 2y = \phi_z \cdot (2xy - 2xy) = 0.$$

3.2.23. Δειξτε ότι αν $z = y\phi(x^2 - y^2)$ τότε $\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = \frac{z}{y^2}$.

Λυση. Θετουμε $u = x^2 - y^2$. Εχουμε

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial}{\partial x} (y\phi(x^2 - y^2)) = y\phi_u(u) u_x = y\phi_u 2x \\ z_y &= \frac{\partial}{\partial y} (y\phi(x^2 - y^2)) = \frac{\partial}{\partial y} (y)\phi(u) + y\phi_u(u) u_y = \phi - y\phi_u 2y. \end{aligned}$$

Οποτε εχουμε

$$\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = \frac{1}{x}y\phi_u 2x + \frac{1}{y}\phi - y\phi_u 2y = \frac{\phi}{y} = \frac{z/y}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

3.2.24. Δειξτε ότι αν $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, για καθε συναρτηση $u(x, y)$ εχουμε $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_\rho)^2 + \frac{1}{\rho^2}(u_\phi)^2$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_\rho & u_\phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\rho & x_\phi \\ y_\rho & y_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_x \cos \phi + u_y \sin \phi & \rho \cdot (-u_x \sin \phi + u_y \cos \phi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned} (u_\rho)^2 + \frac{1}{\rho^2}(u_\phi)^2 &= (u_x \cos \phi + u_y \sin \phi)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\rho \cdot (-u_x \sin \phi + u_y \cos \phi))^2 \\ &= u_x^2 \cos^2 \phi + 2u_x (\cos \phi) u_y \sin \phi + u_y^2 \sin^2 \phi + u_x^2 \sin^2 \phi - 2u_x (\cos \phi) u_y \sin \phi + u_y^2 \cos^2 \phi \\ &= (u_x)^2 \cdot (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + (u_y)^2 \cdot (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = (u_x)^2 + (u_y)^2. \end{aligned}$$

3.3 Άλυτα Προβλήματα

3.3.1. Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ ως προς t , οταν $x(t) = t$ και $y(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

Απ. $\frac{2t \cdot (t^4 + 2t^2 + 2)}{(t^2 + 1)^2}$.

3.3.2. Να υπολογιστει η για τις παρακατω περιπτωσεις $f(x, y) = u^2 + v^2$, $u = \sin t$, $v = t \cos t$.

Απ. 0.

3.3.3. Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi(x, y) = \cos(x + y + z)$ ως προς t , οταν $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$ και $z(t) = e^t$.

Απ. $-(\sin(t + \cos t + e^t))(e^t - \sin t + 1)$.

3.3.4. Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi(x, y) = \sin(x + y^3 + z)$ ως προς t , οταν $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$ και $z(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

Απ. $-\frac{\cos \frac{1}{t^2+1}(t^3 + t^2 \cos^3 t + t^2 + t + \cos^3 t)}{(t^2+1)^2} \cdot \left(\frac{3}{4} \sin t - 2t + \frac{3}{4} \sin 3t + \frac{3}{2} t^2 \sin t + \frac{3}{4} t^4 \sin t + \frac{3}{2} t^2 \sin 3t + \frac{3}{4} t^4 \sin 3t - 2\right)$

3.3.5. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Απ. $z_x = -\frac{c^2x}{a^2z}, z_y = -\frac{c^2y}{b^2z}$.

3.3.6. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

Απ. $z_x = \frac{2-x}{z+1}, z_y = \frac{2y}{z+1}$.

3.3.7. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $z^3 + 3xyz = a^3$.

Απ. $z_x = -\frac{yz}{xy+z^2}, z_y = -\frac{xz}{xy+z^2}$.

3.3.8. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

Απ. $z_x = \frac{3-x}{z}, z_y = -\frac{y}{z}$.

3.3.9. Να υπολογιστούν οι z_x, z_y αν ισχύει $z^2 = xy$.

Απ. $z_x = \frac{y}{z}, z_y = \frac{x}{z}$.

3.3.10. Να υπολογιστούν ϕ_u, ϕ_v όταν $\phi(x, y) = \sin(x^2 + y^3), x(u, v) = u + v, y(u, v) = u - v$.

Απ. $\phi_u = (\cos(u^3 - 3u^2v + u^2 + 3uv^2 + 2uv - v^3 + v^2))(3u^2 - 6uv + 2u + 3v^2 + 2v),$

$\phi_v = (\cos(u^3 - 3u^2v + u^2 + 3uv^2 + 2uv - v^3 + v^2))(-3u^2 + 6uv + 2u - 3v^2 + 2v).$

3.3.11. Να υπολογιστούν ϕ_u, ϕ_v όταν $\phi(x, y) = \sin(x + y), x(u, v) = u^2 + v^2, y(u, v) = uv$.

Απ. $\phi_u = (\cos(u^2 + uv + v^2))(2u + v), \phi_v = (\cos(u^2 + uv + v^2))(u + 2v).$

3.3.12. Να υπολογιστούν ϕ_u, ϕ_v όταν $\phi(x, y, z) = \sin(x + y + z), x(u, v) = u^2 + v^2, y(u, v) = u, z(u, v) = \frac{1}{u+v}$.

Απ. $\phi_u = \frac{\cos \frac{1}{u+v}(u^3 + u^2v + u^2 + uv^2 + uv + v^3 + 1)}{(u+v)^2} (2u^3 + 4u^2v + u^2 + 2uv^2 + 2uv + v^2 - 1),$

$\phi_v = \frac{\cos \frac{1}{u+v}(u^3 + u^2v + u^2 + uv^2 + uv + v^3 + 1)}{(u+v)^2} (2u^2v + 4uv^2 + 2v^3 - 1).$

3.3.13. Να υπολογιστούν ϕ_u, ϕ_v, ϕ_w όταν $\phi(x, y, z) = e^{x+y+z}, x(u, v, w) = w^2, y(u, v, w) = u + v, z(u, v, w) = u - v$.

Απ. $D_w e^{w^2+u+v+u-v} =$
 $\phi_u = 2e^{w^2+2u}, \phi_v = 0, 2we^{w^2+2u}.$

3.3.14. Να υπολογιστούν ϕ_u, ϕ_v, ϕ_w όταν $\phi(x, y, z) = \sin(x + y + z), x(u, v, w) = w \sin u \cos v, y(u, v, w) = w \sin u \sin v, z(u, v, w) = w \cos u$.

Απ. $\phi_u = (\cos(w \cos u + w \cos v \sin u + w \sin u \sin v))(w \cos u \cos v - w \sin u + w \cos u \sin v),$

$\phi_v = w(\cos(w \cos u + w \cos v \sin u + w \sin u \sin v) \sin u)(\cos v - \sin v),$

$\phi_w = (\cos(w \cos u + w \cos v \sin u + w \sin u \sin v))(\cos u \sin v + \sin u \cos v + \cos u).$

3.3.15. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ όταν $u = x^2 + y^2, v = 2xy$.

Απ. $4x^2 - 4y^2.$

3.3.16. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ και την $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $x = u \cos v, y = u \sin v$.

Απ. $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u, \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{1}{u}.$

3.3.17. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $u = 3x^2 - xy$, $v = 2xy^2 + y^3$.

Απ. $24x^2y + 16xy^2 - 3y^3$.

3.3.18. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $u = \frac{x+y}{1-xy}$, $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$.

Απ. $\begin{vmatrix} \frac{y}{(xy-1)^2}(x+y) - \frac{1}{xy-1} & \frac{x}{(xy-1)^2}(x+y) - \frac{1}{xy-1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{1}{y^2+1} \end{vmatrix} = 0$.

3.3.19. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ αν $x = u - v + w$, $y = u^2 - v^2 - w^2$, $z = u^3 + v$

Απ. $6uw^2 + 2u + 6u^2v + 2w$

3.3.20. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ αν $x = u \cos v \sin w$, $y = u \sin v \sin w$, $z = u \cos w$

Απ. $u^2 \sin w$.

3.3.21. Να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ αν $u = x^2y$, $v = zx$, $w = x + y + z$

Απ. $-2x^2y - zx^2 + x^3$.

3.3.22. Να υπολογιστούν οι u_x , v_x , u_y , v_y για τις παρακάτω περιπτώσεις. $u^2 + v^2 = x + y$ και $u - v = x \cos y$

Απ. $u_x = \frac{2v \cos y + 1}{2u + 2v}$, $v_x = -\frac{2u \cos y - 1}{2u + 2v}$, $u_y = -\frac{2vx \sin y - 1}{2u + 2v}$, $v_y = \frac{2ux \sin y + 1}{2u + 2v}$.

3.3.23. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \phi(x - y)$ ικανοποιεί $z_x + z_y = 0$.

3.3.24. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \phi(x, y)$ όπου $x = s + t$ και $y = s - t$, ικανοποιεί $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z_s z_t$.

3.3.25. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \arctan \frac{x}{y}$ ικανοποιεί $z_u + z_v = \frac{u-v}{u^2+v^2}$ όταν $x = u+v$, $y = u - v$.

3.3.26. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \frac{y}{\phi(x^2 - y^2)}$ ικανοποιεί $\frac{1}{x}\phi_x + \frac{1}{y}\phi_y = 0$.

3.3.27. Δείξτε ότι αν $z = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$ τότε $z_{xx} - 2z_{xy}z_{yy} = 0$.

3.3.28. Δείξτε ότι αν $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, τότε $u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} + \frac{1}{\rho}u_{\rho}$.

3.3.29. Δείξτε ότι η συνάρτηση $x^k \phi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$ ικανοποιεί $x\phi_x + y\phi_y + z\phi_z = k\phi$.

3.3.30. Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $z = f(x - at) + g(x + at)$ ικανοποιεί την σχέση $z_{tt} = a^2 z_{xx}$.

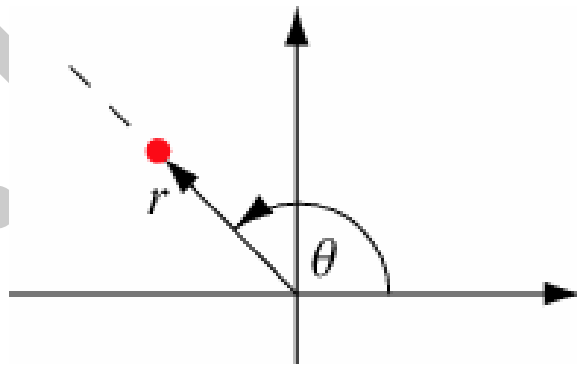
Κεφάλαιο 4

Συστήματα Συντεταγμένων

4.1 Θεωρία

4.1.1. Στο Κεφάλαιο ;; προσδιορίσαμε την θέση ενός σημείου στον χώρο χρησιμοποιώντας τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Σε πολλές εφαρμογές (π.χ. στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων) είναι πιο βολικό να χρησιμοποιήσουμε άλλα συστήματα συντεταγμένων. Π.χ. στο λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής έχουμε χρησιμοποιήσει τις πολικές συντεταγμένες. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

4.1.2. Πολικές Συντεταγμένες. Εστώ ένα σημείο M στον R^2 με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . Το M μπορεί να προσδιοριστεί και με τις πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) (δες Σχ.5.1).



Σχῆμα 5.1

Ισχύουν οι σχέσεις

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = 0$$

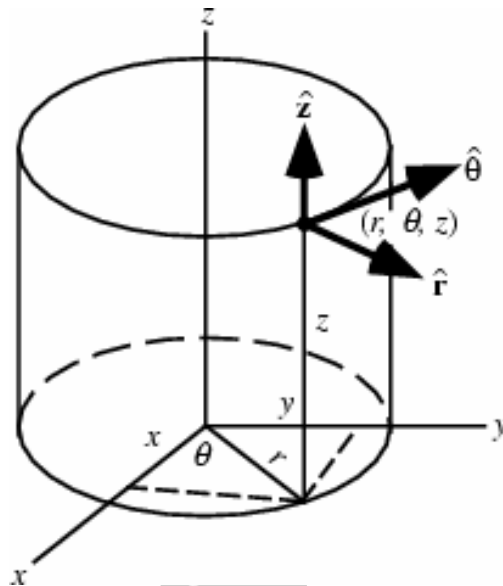
και

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = 0.$$

Το στοιχειώδες εμβαδόν μετασχηματίζεται σε πολικό σύστημα συντεταγμένων ως εξής

$$dA = dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} d\rho d\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta.$$

4.1.3. Κυλινδρικές Συντεταγμένες. Εστω ένα σημείο M στον R^3 με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Το M μπορεί να προσδιοριστεί και με τις κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, θ, z) (δες Σχ.5.2).



Σχημα 5.2

Ισχύουν οι σχέσεις

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

και

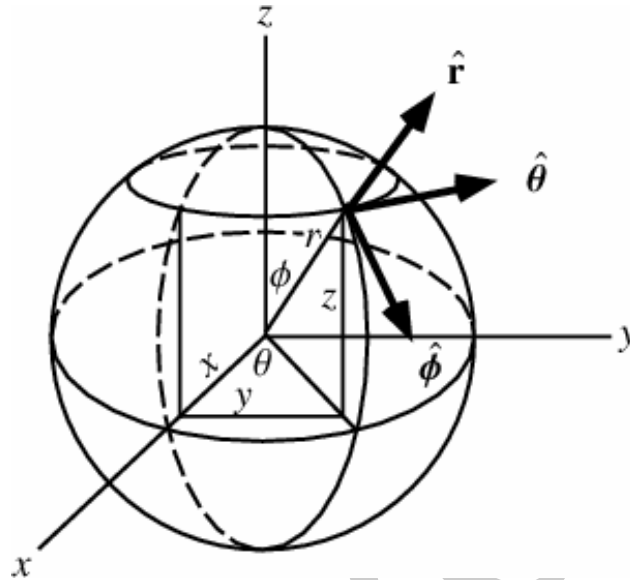
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Ο στοιχειώδης όγκος μετασχηματίζεται σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ως εξής

$$dV = dx dy dz = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\rho, \theta, z)} d\rho d\theta dz = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz.$$

4.1.4. Σφαιρικές Συντεταγμένες. Εστω ένα σημείο M στον R^3 με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Το M μπορεί να προσδιοριστεί και με τις σφαιρικές συντεταγμένες

(r, θ, ϕ) (δες Σχ.5.3).



Σχημα 5.3

Ισχύουν οι σχέσεις

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi$$

και

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \theta = \cos^{-1} \frac{z}{r}.$$

Ο στοιχειώδης ογκος μετασχηματίζεται σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ως εξής

$$dV = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} dr d\theta d\phi = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & 0 \\ r \cos \theta \cos \phi & r \sin \theta \cos \phi & -r \sin \phi \end{vmatrix} dr d\theta d\phi = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi.$$

4.1.5. Τα προηγούμενα ήταν ειδικά παραδείγματα. Στην γενική περίπτωση εισαγούμε μεταβλητές u, v, w τέτοιες ώστε να ισχύει

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

Τότε σε κάθε σημείο (x, y, z) αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} με αναπαράσταση

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}$$

και το διαφορικό διάνυσμα θέσης είναι

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw. \tag{4.1}$$

Αν τώρα ορίσουμε

$$a = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, \quad b = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, \quad c = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| \tag{4.2}$$

θα έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = a\mathbf{m}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = b\mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = c\mathbf{p}, \quad (4.3)$$

όπου τα $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ είναι μοναδιαία διανύσματα :

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|}. \quad (4.4)$$

Απο τις (4.1) - (4.4) παίρνουμε

$$d\mathbf{r} = a\mathbf{m}du + b\mathbf{n}dv + c\mathbf{p}dw$$

και βλέπουμε ότι τα $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ παίζουν τον ρόλο των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Επίσης ο στοιχειώδης όγκος είναι

$$dV = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw. \quad (4.5)$$

4.1.6. Από την (4.5) βλέπουμε και την γεωμετρική σημασία της Ιακωβιανής οριζουσας. Στο σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) ο στοιχειώδης όγκος είναι $dV = dx dy dz$ και στο (u, v, w) ο στοιχειώδης όγκος είναι $dU = du dv dw$. Οπότε, αν ξαναγραφουμε την (4.5) ως

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{du dv dw}{dx dy dz} = \frac{dU}{dV}$$

δηλ. η Ιακωβιανή οριζούσα είναι η "παραγωγός όγκου".

4.2 Λυμένα Προβλήματα

4.2.1. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου με ορθογωνίες συντεταγμένες $(0, 1, 0)$;

Λυση. Έχουμε $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. Άρα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1, \quad \theta = \arctan \frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}, \quad z = 0.$$

Δηλ. $(\rho, \theta, z) = (1, \pi/2, 0)$.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$$0 = x = r \cos \theta \sin \phi, \quad 1 = y = r \sin \theta \sin \phi, \quad 0 = r \cos \phi.$$

Έχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Άρα

$$0 = r \cos \phi = \cos \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Τέλος

$$0 = x = r \cos \theta \sin \phi = \cos \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Τελικά λοιπόν, σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε $(r, \theta, \phi) = (1, \pi/2, \pi/2)$.

4.2.2. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου με ορθογώνιες συντεταγμένες $(1, 1, \sqrt{2})$;

Λυση. Έχουμε $(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2})$. Άρα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \quad z = \sqrt{2}.$$

Δηλ. $(\rho, \theta, z) = (\sqrt{2}, \pi/4, \sqrt{2})$.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$$1 = x = r \cos \theta \sin \phi, \quad 1 = y = r \sin \theta \sin \phi, \quad \sqrt{2} = r \cos \phi.$$

Έχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2.$$

Άρα

$$1 = r \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}.$$

Επίσης έχουμε $\sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Τέλος

$$\tan \theta = \frac{r \sin \theta \sin \phi}{r \cos \theta \sin \phi} = \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Τελικά λοιπόν, σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε $(r, \theta, \phi) = (2, \pi/4, \pi/3)$.

4.2.3. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου με ορθογώνιες συντεταγμένες $(2, 2, 2)$;

Λυση. Έχουμε $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. Άρα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad z = 2.$$

Δηλ. $(\rho, \theta, z) = (2\sqrt{2}, \pi/4, 2)$.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{3}.$$

Άρα

$$2 = r \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.95 \text{ ακτίνια.}$$

Επίσης έχουμε $\sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - (1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{2/3}$. Τέλος

$$\tan \theta = \frac{r \sin \theta \sin \phi}{r \cos \theta \sin \phi} = \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Τελικά λοιπόν, σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε $(r, \theta, \phi) = \left(2, \pi/4, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4.2.4. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και ορθογωνίες συντεταγμένες του σημείου με σφαιρικές συντεταγμένες $(1, \pi/2, \pi/3)$;

Λυση. Για ορθογωνίες συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \sin \phi = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 0 \\y &= \rho \sin \theta \sin \phi = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\z &= \rho \cos \theta \cos \phi = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 0.\end{aligned}$$

Δηλ. $(x, y, z) = (0, \sqrt{3}/2, 0)$. Από τις ορθογωνίες βρίσκουμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}/2 \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{0} = \pi/2 \\ z &= 0\end{aligned}$$

δηλ. $(\rho, \theta, z) = (\sqrt{3}/2, \pi/2, 0)$.

4.2.5. Ποιες είναι οι σφαιρικές και ορθογωνίες συντεταγμένες του σημείου με κυλινδρικές συντεταγμένες $(2, \pi/6, 3)$;

Λυση. Για ορθογωνίες συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\y &= \rho \sin \theta = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 1 \\z &= z = 3.\end{aligned}$$

Δηλ. $(x, y, z) = (\sqrt{3}, 1, 3)$. Από τις ορθογωνίες βρίσκουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3 + 1 + 9} = \sqrt{13} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6 \\ \phi &= \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

δηλ. $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{13}, \pi/6, \arccos \frac{3}{\sqrt{13}})$.

4.2.6. Βρείτε τον στοιχειώδη ογκο στο σύστημα συντεταγμένων

$$x = u + 2v, y = u - v + w, z = u + w.$$

Λυση. Είναι

$$\frac{dxdydz}{dudv dw} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow dxdydz = -1 \cdot dudv dw.$$

4.2.7. Βρείτε τον στοιχειώδη όγκο στο σύστημα συντεταγμένων

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = w.$$

Λυση. Είναι

$$\frac{dxdydz}{dudv dw} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v & 0 \\ e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow dxdydz = e^u \cdot dudv dw.$$

4.2.8. Βρείτε τον στοιχειώδη όγκο στο σύστημα συντεταγμένων

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, y = uv, z = w.$$

Λυση. Είναι

$$\frac{dxdydz}{dudv dw} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} u & -v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow dxdydz = (u^2 + v^2) dudv dw$$

4.2.9. Βρείτε τον στοιχειώδη όγκο στο σύστημα συντεταγμένων $x = \cosh u \sin v \cos w$, $y = \sinh u \sin v \sin w$, $z = \sinh u$.

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned} dxdydz &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} dudv dw \\ &= \begin{vmatrix} \sinh(u) \sin(v) \cos(w) & \cosh(u) \cos(v) \cos(w) & -\cosh(u) \sin(v) \sin(w) \\ \sinh(u) \sin(v) \sin(w) & \cosh(u) \cos(v) \sin(w) & \cosh(u) \sin(v) \cos(w) \\ \cosh(u) \cos(v) & -\sinh(u) \sin(v) & 0 \end{vmatrix} dudv dw \\ &= (\cos^2 v \cos^2 w \sin v \cosh^3 u + \cos^2 v \sin v \sin^2 w \cosh^3 u + \cos^2 w \sin^3 v \cosh u \sinh^2 u + \sin^3 v \sin^2 w \cosh u) \\ &= \left(\frac{3}{4} \sin v \cosh u + \frac{1}{4} \cosh 3u \sin v - \sin^3 v \cosh u \right) \cdot dudv dw \end{aligned}$$

4.2.10. Βρείτε τον στοιχειώδη όγκο στο σύστημα συντεταγμένων

$$x = \frac{uv \cos w}{(u^2 + v^2)^2}, y = \frac{uv \sin w}{(u^2 + v^2)^2}, z = \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned} dxdydz &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} dudv dw \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\cos(w)v}{(u^2+v^2)^2} - 4 \frac{u^2 \cos(w)v}{(u^2+v^2)^3} & -4 \frac{u \cos(w)v^2}{(u^2+v^2)^3} + \frac{u \cos(w)}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{u \sin(w)v}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{\sin(w)v}{(u^2+v^2)^2} - 4 \frac{u^2 \sin(w)v}{(u^2+v^2)^3} & -4 \frac{u \sin(w)v^2}{(u^2+v^2)^3} + \frac{u \sin(w)}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u \cos(w)v}{(u^2+v^2)^2} \\ 2 \frac{u}{(u^2+v^2)^2} - 4 \frac{(u^2-v^2)u}{(u^2+v^2)^3} & -2 \frac{v}{(u^2+v^2)^2} - 4 \frac{(u^2-v^2)v}{(u^2+v^2)^3} & 0 \end{vmatrix} dudv dw \\ &= -\frac{2u^5 v \cos^2 w + 2u^5 v \sin^2 w + 4u^3 v^3 \cos^2 w + 10u^3 v^3 \sin^2 w + 2uv^5 \cos^2 w}{u^{14} + 7u^{12}v^2 + 21u^{10}v^4 + 35u^8v^6 + 35u^6v^8 + 21u^4v^{10} + 7u^2v^{12} + v^{14}} \cdot dudv dw \\ &= -\frac{uv^5 + 2u^5v + 7u^3v^3 - 3u^3v^3 \cos 2w + uv^5 \cos 2w}{(u^2 + v^2)^7} \cdot dudv dw. \end{aligned}$$

4.3 Άλυτα Προβλήματα

4.3.1. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου με ορθογωνίες συντεταγμένες $(1, 0, 0)$;

Απ. $(1, 0, 0), (1, \pi/2, 0)$

4.3.2. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου με ορθογωνίες συντεταγμένες $(1, 1, 1)$;

Απ. $(\sqrt{2}, \pi/4, 1), (\sqrt{3}, \arctan \sqrt{2}, \pi/4)$

4.3.3. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου με ορθογωνίες συντεταγμένες $(1, 2, 3)$;

Απ. $(\sqrt{5}, \arctan 2, 3), (\sqrt{14}, \arctan \frac{\sqrt{5}}{3}, \arctan 2)$

4.3.4. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και ορθογωνίες συντεταγμένες του σημείου με σφαιρικές συντεταγμένες $(3, 0, \pi/3)$;

Απ. $(0, 0, 3), (0, 0, 3)$.

4.3.5. Ποιες είναι οι κυλινδρικές και ορθογωνίες συντεταγμένες του σημείου με σφαιρικές συντεταγμένες $(1, \pi/4, \pi/3)$;

Απ. $(\sqrt{2}/2, \pi/3, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/4, \sqrt{6}/4, \sqrt{2}/2)$.

4.3.6. Ποιες είναι οι σφαιρικές και ορθογωνίες συντεταγμένες του σημείου με κυλινδρικές συντεταγμένες $(1, 0, 3)$;

Απ. $(\sqrt{10}, \arctan(1/3), 0), (1, 0, 3)$

4.3.7. Ποιες είναι οι σφαιρικές και ορθογωνίες συντεταγμένες του σημείου με κυλινδρικές συντεταγμένες $(1, \pi/4, 1)$;

Απ. $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1), (\sqrt{2}/2, \pi/4, \pi/4)$.

4.3.8. Βρείτε τον στοιχειώδη όγκο στο σύστημα συντεταγμένων $x = u + v, y = u - v, z = w$.

Απ. $dV = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dudvdw = -2dudvdw$.

4.3.9. Βρείτε τον στοιχειώδη όγκο στο σύστημα συντεταγμένων

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = w.$$

Απ. $dV = dx dy dz = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v & 0 \\ \sin v & u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dudvdw = ududvdw$.

4.3.10. Βρείτε τον στοιχειώδη όγκο στο σύστημα συντεταγμένων

$$x = uv \cos(w), y = uv \sin(w), z = \frac{u^2 - v^2}{2}.$$

Απ. $dV =$

$$\begin{vmatrix} \cos(w)v & u \cos(w) & -u \sin(w)v \\ \sin(w)v & u \sin(w) & u \cos(w)v \\ u & -v & 0 \end{vmatrix} dudvdw$$

$$= (u^3v \cos^2 w + u^3v \sin^2 w + uv^3 \cos^2 w + uv^3 \sin^2 w) dudvdw.$$

4.3.11. Βρείτε τον στοιχειώδη ογκο στο σύστημα συντεταγμένων

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2 + w^2}, y = \frac{v}{u^2 + v^2 + w^2}, z = \frac{w}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Απ.

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{-u^2+v^2+w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2 \frac{uv}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2 \frac{uw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \\ -2 \frac{uv}{(u^2+v^2+w^2)^2} & \frac{u^2-v^2+w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2 \frac{vw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \\ -2 \frac{uw}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2 \frac{vw}{(u^2+v^2+w^2)^2} & \frac{u^2+v^2-w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} \end{vmatrix} \cdot dudvdw$$

$$= \frac{dudvdw}{u^6 + 3u^4v^2 + 3u^4w^2 + 3u^2v^4 + 6u^2v^2w^2 + 3u^2w^4 + v^6 + 3v^4w^2 + 3v^2w^4 + w^6}$$

4.3.12. Εκφραστε σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$.

Απ. Σε κυλινδρικές:

4.3.13. Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο σύστημα συντεταγμένων $x = u + v, y = u - v, z = w$.

4.3.14. Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο σύστημα παραβολικών συντεταγμένων $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), y = uv, z = \frac{u^2+v^2}{2}$.

4.3.15. Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο σύστημα παραβολοειδών συντεταγμένων $x = uv \cos(w), y = uv \sin(w), z = \frac{u^2-v^2}{2}$.

4.3.16. Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο σύστημα ελλειπτικών κυλινδρικών συντεταγμένων $x = r \cosh u \cos v, y = r \sinh u \sin v, z = z$.

Κεφάλαιο 5

Σειρες *Taylor* και Ακροτατα Συναρτησεων

5.1 Θεωρια

5.1.1. Οπως ακριβως μια συναρτηση μιας μεταβλητης μπορεί να αναπτυχθει σε σειρα *Taylor* γυρω απο το σημειο x_0 , ετσι και μια συναρτηση δυο μεταβλητων μπορεί να αναπτυχθει σε σειρα *Taylor* γυρω απο το σημειο (x_0, y_0) . Ο τυπος για την σειρα *Taylor* της $\phi(x, y)$ γυρω απο το (x_0, y_0) ειναι

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \phi(x_0, y_0) + \frac{\phi_x(x_0, y_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{\phi_y(x_0, y_0)}{1!} (y - y_0) \\ & + \frac{\phi_{xx}(x_0, y_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{2\phi_{xy}(x_0, y_0)}{2!} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\phi_{yy}(x_0, y_0)}{2!} (y - y_0)^2 \\ & + \frac{\phi_{xxx}(x_0, y_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \frac{3\phi_{xxy}(x_0, y_0)}{3!} (x - x_0)^2 (y - y_0) \\ & + \frac{3\phi_{xyy}(x_0, y_0)}{3!} (x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\phi_{yyy}(x_0, y_0)}{3!} (y - y_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

Η δομη του αναπτυγματος γινεται καλυτερα κατανοητη με χρηση των διαφορικων τελεστων D_x, D_y (οπου $D_x \phi = \phi_x, D_y \phi = \phi_y$). Τοτε

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x - x_0) D_x + (y - y_0) D_y)^n \phi}{n!}$$

οπου

$$D_x^k D_y^l \phi = \phi_{x \dots x y \dots y}(x_0, y_0),$$

δηλ. η μερικη παραγωγος της ϕ , ταξεως k ως προς x και l ως προς y , υπολογισμενη στο σημειο $(x, y) = (x_0, y_0)$.

5.1.2. Για σειρά *MacLaurin*, δηλ. για $x_0 = y_0 = 0$ ο τύπος (5.1) γίνεται

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \phi(x_0, y_0) + \frac{\phi_x(x_0, y_0)}{1!}x + \frac{\phi_y(x_0, y_0)}{1!}y \\ & + \frac{\phi_{xx}(x_0, y_0)}{2!}x^2 + \frac{2\phi_{xy}(x_0, y_0)}{2!}xy + \frac{\phi_{yy}(x_0, y_0)}{2!}y^2 \\ & + \frac{\phi_{xxx}(x_0, y_0)}{3!}x^3 + \frac{3\phi_{xxy}(x_0, y_0)}{3!}x^2y + \frac{3\phi_{xyy}(x_0, y_0)}{3!}xy^2 + \frac{\phi_{yyy}(x_0, y_0)}{3!}y^3 + \dots \end{aligned}$$

5.1.3. Αντιστοίχα, για συνάρτηση $\phi(x, y, z)$, η σειρά *Taylor* γύρω από το (x_0, y_0, z_0) είναι

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \phi(x_0, y_0, z_0) \\ & + \frac{\phi_x(x_0, y_0, z_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\phi_y(x_0, y_0, z_0)}{1!}(y - y_0) + \frac{\phi_z(x_0, y_0, z_0)}{1!}(z - z_0) \\ & + \frac{\phi_{xx}(x_0, y_0, z_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{\phi_{yy}(x_0, y_0, z_0)}{2!}(y - y_0)^2 + \frac{\phi_{zz}(x_0, y_0, z_0)}{2!}(z - z_0)^2 \\ & + \frac{2\phi_{xy}(x_0, y_0, z_0)}{2!}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{2\phi_{yz}(x_0, y_0, z_0)}{2!}(y - y_0)(z - z_0) + \\ & + \frac{2\phi_{zx}(x_0, y_0, z_0)}{2!}(z - z_0)(x - x_0) + \dots \end{aligned}$$

5.1.4. Εστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi(x, y)$. Αυτή μπορεί να παρουσιάζει ένα *τοπικό μέγιστο* ή *ελάχιστο* στο σημείο (x_0, y_0) . Για να συμβαίνει αυτό, αναγκαία συνθήκη είναι

$$\phi_x(x_0, y_0) = \phi_y(x_0, y_0) = 0. \tag{5.2}$$

Εφόσον ικανοποιείται η (5.2), λέμε ότι το (x_0, y_0) είναι *στασιμο σημείο* της $\phi(x, y)$. Τα στασιμα σημεία ταξινομούνται ως εξής.

1. Εχουμε *τοπικό μέγιστο* αν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0, y_0) & \phi_{xy}(x_0, y_0) \\ \phi_{yx}(x_0, y_0) & \phi_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$ και $\phi_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
2. Εχουμε *τοπικό ελάχιστο* αν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0, y_0) & \phi_{xy}(x_0, y_0) \\ \phi_{yx}(x_0, y_0) & \phi_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$ και $\phi_{xx}(x_0, y_0) > 0$.
3. Εχουμε *σαγματικό σημείο* αν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0, y_0) & \phi_{xy}(x_0, y_0) \\ \phi_{yx}(x_0, y_0) & \phi_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$.
4. Δεν μπορούμε να ταξινομήσουμε το σημείο (χρησιμοποιώντας μόνο παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης) αν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0, y_0) & \phi_{xy}(x_0, y_0) \\ \phi_{yx}(x_0, y_0) & \phi_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$.

5.1.5. Παρομοία πράγματα ισχύουν για συνάρτηση τριών μεταβλητών $\phi(x, y, z)$ ή και N μεταβλητών $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Σε αυτή την περίπτωση τα κριτήρια για αναγκαία συνθήκη μέγιστου ή ελάχιστου είναι αρκετά πολύπλοκα, αλλά η αναγκαία συνθήκη (για την ύπαρξη στασιμου σημείου - μέγιστου, ελάχιστου ή σαγματικού) είναι

$$\phi_x(x_0, y_0, z_0) = \phi_y(x_0, y_0, z_0) = \phi_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

και

$$\phi_{x_1} = \phi_{x_2} = \dots = \phi_{x_N} = 0$$

αντιστοίχα.

5.1.6. Εστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi(x, y, z)$. Για να βρούμε τοπικά μέγιστα ή ελαχίστα της $\phi(x, y, z)$ υπο τον περιορισμό

$$\psi(x, y, z) = 0$$

σχηματίζουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$\omega(x, y, z, \lambda) = \phi(x, y, z) + \lambda\psi(x, y, z)$$

και βρισκουμε τα μέγιστα / ελαχίστα αυτής χωρίς περιορισμούς.

5.1.7. Παρομοία, εστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Για να βρούμε τοπικά μέγιστα ή ελαχίστα της $\phi(x, y, z)$ υπο τους περιορισμούς

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \dots, \psi_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

σχηματίζουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_M) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_N) + \sum_{m=1}^M \lambda_m \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

και βρισκουμε τα μέγιστα / ελαχίστα αυτής χωρίς περιορισμούς.

5.2 Λυμένα Προβλήματα

5.2.1. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = e^{2x+3y}$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 3ης τάξης.

Λυση. Γνωρίζουμε ότι

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots$$

Αν τώρα θέσουμε $z = 2x + 3y$ και αντικαταστήσουμε στην παραπάνω έχουμε

$$e^{2x+3y} = 1 + (2x + 3y) + \frac{1}{2!}(2x + 3y)^2 + \frac{1}{3!}(2x + 3y)^3 + \dots$$

Δεν έχουμε ακόμη την σειρά *Taylor* της $F(x, y)$. Για να φτάσουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα πρέπει να έχουμε μια έκφραση μόνο με δυνάμεις της μορφής $x^m y^n$. Οπότε αναπτύσσουμε τις δυνάμεις $(2x + 3y)^k$:

$$e^{2x+3y} = 1 + (2x + 3y) + \frac{1}{2!}(4x^2 + 12xy + 9y^2) + \frac{1}{3!}(8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) + \dots$$

Τέλος εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς με $\frac{1}{2!}$ και $\frac{1}{3!}$ και παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 6x^2y + 9xy^2 + \frac{9}{2}y^3 + \dots$$

5.2.2. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = e^{x+y}$ γύρω από το σημείο $(2, 1)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 3ης τάξης.

Λυση. Θέλουμε η σειρά να περιέχει δυνάμεις $(x-2)^m (y-1)^n$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι

$$e^{x+y} = e^3 e^{(x-2)+(y-1)}.$$

Κατόπιν αναπτύσσουμε την $e^{(x-2)+(y-1)}$ όπως και στην προηγούμενη άσκηση

$$\begin{aligned} e^{(x-2)+(y-1)} &= 1 + ((x-2) + (y-1)) + \frac{1}{2!} ((x-2) + (y-1))^2 + \frac{1}{3!} ((x-2) + (y-1))^3 \\ &= 1 + (x-2) + (y-1) + \frac{1}{2!} (x-2)^2 + (x-2)(y-1) + \frac{1}{2!} (y-1)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} (x-2)^3 + \frac{1}{3!} 3(x-2)^2(y-1) + \frac{1}{3!} 3(x-2)(y-1)^2 + \frac{1}{3!} (y-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

Τέλος, για να πάρουμε την σειρά της e^{x+y} πολλαπλασιάζουμε την σειρά της $e^{(x-2)+(y-1)}$ με e^3 και παίρνουμε

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^3 + e^3(x-2) + e^3(y-1) + \frac{e^3}{2} (x-2)^2 + e^3(x-2)(y-1) + \frac{e^3}{2} (y-1)^2 + \\ &\quad \frac{e^3}{6} (x-2)^3 + \frac{e^3}{2} (x-2)^2(y-1) + \frac{e^3}{2} (x-2)(y-1)^2 + \frac{e^3}{6} (y-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

5.2.3. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 8ης τάξης.

Λυση. Γνωρίζουμε ότι

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Αν τώρα θέσουμε $z = x^2 + y^2$ και αντικαταστήσουμε στην παραπάνω έχουμε

$$\cos(x^2 + y^2) = 1 - \frac{1}{2!} (x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{4!} (x^2 + y^2)^4 - \dots$$

Οπότε, αναπτύσσοντας τις δυνάμεις $(x^2 + y^2)^2$ και $(x^2 + y^2)^4$ (ποιο είναι το αναπτύγμα της $(a+b)^4$;) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cos(x^2 + y^2) &= 1 - \frac{1}{2} x^4 - x^2 y^2 - \frac{1}{2} y^4 + \\ &\quad \frac{1}{24} x^8 + \frac{1}{6} y^2 x^6 + \frac{1}{4} y^4 x^4 + \frac{1}{6} y^6 x^2 + \frac{1}{24} y^8 + \dots \end{aligned}$$

5.2.4. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = xy \cos(x^2 + y^2)$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 6ης τάξης.

Λυση. Αν θέσουμε $F(x, y) = G(x, y)H(x, y)$ όπου $G(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ και $H(x, y) = xy$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την σειρά της. Θα υπολογίσουμε την σειρά της $F(x, y)$ αρκεί να υπολογίσουμε αυτές των $G(x, y)$, $H(x, y)$ και να τις πολλαπλασιάσουμε. Από την προηγούμενη άσκηση, κρατώντας όρους μέχρι και 4ης τάξης ξέρουμε ότι

$$G(x, y) = \cos(x^2 + y^2) = 1 - \frac{1}{2} x^4 - x^2 y^2 - \frac{1}{2} y^4 + \dots$$

Επίσης, η σειρά *Taylor* της $H(x, y) = xy$ είναι απλά

$$H(x, y) = xy = xy.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} F(x, y) &= G(x, y)H(x, y) = \left(1 - \frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \dots\right) \cdot xy \\ &= xy - \frac{1}{2}x^5y - x^3y^3 - \frac{1}{2}xy^5 + \dots \end{aligned}$$

5.2.5. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \frac{e^x}{1-y}$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 4ης τάξης.

Λυση. Παρομοία με την προηγούμενη, θέτουμε $F(x, y) = G(x, y)H(x, y)$ όπου $G(x, y) = e^x$ και $H(x, y) = \frac{1}{1-y}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} G(x, y) &= e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ H(x, y) &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots \end{aligned}$$

Οπότε

$$F(x, y) = G(x, y)H(x, y) = \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \cdot (1 + y + y^2 + y^3 + \dots)$$

και τώρα μένει να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό δυο "πολυωνυμων απειρης τάξης". Αυτον τον πολλαπλασιασμό θα τον εκτελέσουμε χιαστί και κατά "ανιούσα τάξη", δηλ. πρώτα θα υπολογίσουμε όλα τα γινόμενα μηδενικής τάξης, μετά όλα τα γινόμενα 1ης τάξης, μετά όλα τα γινόμενα 2ης τάξης κ.ο.κ. (έτσι θα είμαστε σίγουροι ότι δεν μας διαφεύγει κανείς όρος). Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \\ &\quad \cdot (1 + y + y^2 + y^3 + \dots) \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}yx^2 + y^2x + y^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{2}y^2x^2 + y^3x + y^4 + \dots \end{aligned}$$

5.2.6. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = e^{x+y} \sin(x+y)$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 3ης τάξης.

Λυση. Με τον ίδιο τρόπο όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις έχουμε

$$\begin{aligned} G(x, y) &= e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \dots \\ H(x, y) &= \sin(x+y) = x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + \dots \end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned} F(x, y) &= G(x, y) H(x, y) \\ &= \left(1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \dots\right) \\ &\quad \cdot \left(x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + \dots\right) \\ &= x + y + x^2 + 2xy + y^2 + \frac{1}{3}x^3 + yx^2 + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \dots \end{aligned}$$

Προσεξτε οτι στο παραπάνω γινόμενο κρατήσαμε ορους μεχρι τριτης ταξης. Αν και δημιουργηθηκαν και οροι π.χ. 6ης ταξης, αυτοι δεν ειναι *πληρεις*, διοτι στην πληρη σειρα της $F(x, y)$ υπαρχουν και αλλοι οροι 6ης ταξης οι οποιοι δεν εμφανιστηκαν στο γινόμενο (αφου εμεις χρησιμοποιησαμε προσεγγιση 3ης ταξης για τις $G(x, y)$ και $H(x, y)$).

5.2.7. Να υπολογιστει η σειρα *Taylor* της $F(x, y) = e^{x^2+y^2}/(1-x-y)$ γυρω απο το σημειο $(0, 0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

Λυση. Με τον ιδιο τροπο οπως και στις προηγουμενες ασκησεις εχουμε

$$\begin{aligned} G(x, y) &= e^{x^2+y^2} = 1 + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 + \dots \\ H(x, y) &= \frac{1}{1-x-y} = 1 + x + y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + \dots \end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned} F(x, y) &= G(x, y) H(x, y) \\ &= \left(1 + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 + \dots\right) \cdot \\ &\quad (1 + x + y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + \dots) \\ &= 1 + x + y + 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + 2y^3 + \dots \end{aligned}$$

5.2.8. Να υπολογιστει η σειρα *Taylor* της $F(x, y) = 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3$ γυρω απο το σημειο $(0, 0)$. Βρειτε ολους τους ορους της σειρας.

Λυση. Η λυση της ασκησης ειναι εξαιρετικα απλη, η ζητουμενη σειρα ειναι

$$5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3$$

δηλ. ακριβως αυτη που μας δινεται. Αυτο ισχυει επειδη η σειρα *Taylor* γυρω απο το $(0, 0)$ ειναι ενα πολυωνυμο με δυναμεις $x^m y^n$ και η $F(x, y)$ μας δινεται ακριβως σε αυτη την μορφη. Εαν εχετε αμφιβολιες, μπορειτε να επαληθευσετε οτι τα πραγματα ειναι ετσι χρησιμοποιωντας τους τυπους:

$$F(x, y) = F(0, 0) + \frac{F_x(0, 0)}{1!}x + \frac{F_y(0, 0)}{1!}y + \frac{F_{xx}(0, 0)}{2!}x^2 + \frac{2F_{xy}(0, 0)}{2!}xy + \frac{F_{yy}(0, 0)}{2!}y^2 + \dots$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3, & F(0, 0) &= 0, \\ F_x(x, y) &= 5 - 6y + 3x^2, & F_x(0, 0) &= 5, \\ F_y(x, y) &= 4 - 6x - 2y, & F_y(0, 0) &= 4, \\ F_{xx}(x, y) &= 6x, & F_{xx}(0, 0) &= 0, \\ F_{xy}(x, y) &= -6, & F_{xy}(0, 0) &= -6, \\ F_{yy}(x, y) &= -2, & F_{yy}(0, 0) &= -2 \end{aligned}$$

κ.τ.λ. Όλες οι υψηλότερης τάξης παραγωγοί είναι 0 εκτός της $F_{xxx}(0, 0) = 6$ (γιατί:).
Οποτε με αντικατάσταση στον τυπο εχουμε

$$F(x, y) = 0 + 5x + 4y + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2 \cdot (-6)}{2!}xy + \frac{-2}{2!}y^2 + \frac{6}{3!}x^3 = 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3.$$

5.2.9. Να υπολογιστει η σειρα *Taylor* της $F(x, y) = 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3$ γυρω απο το σημειο $(1, 2)$. Βρειτε ολους τους ορους της σειρας.

Λυση. Η ασκηση ειναι παρομοια με τηνπροηγουμενη αλλα τωρα θελουμε οι οροι της σειρας να εχουν την μορφη $(x - 1)^m (y - 2)^n$. Αν εφαρμοσοουμε τους τυπους εχουμε

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3, & F(1, 2) &= -2 \\ F_x(x, y) &= 5 - 6y + 3x^2, & F_x(1, 2) &= -4 \\ F_y(x, y) &= 4 - 6x - 2y, & F_y(1, 2) &= -6 \\ F_{xx}(x, y) &= 6x, & F_{xx}(1, 2) &= 6 \\ F_{xy}(x, y) &= -6, & F_{xy}(1, 2) &= -6 \\ F_{yy}(x, y) &= -2, & F_{yy}(1, 2) &= -2 \\ \vdots & & & \\ F_{xxx}(x, y) &= 6, & F_{xxx}(1, 2) &= 6. \end{aligned}$$

Οποτε

$$F(x, y) = -2 - 4(x - 1) - 6(y - 2) + 3(x - 1)^2 - 6(x - 1)(y - 2) - (y - 2)^2 + (x - 1)^3$$

Αν αναπτυξουμε τα γινομενα και τις δυναμεις στην παραπανω εκφραση βλεπουμε (οπως και περιμεναμε) οτι

$$\begin{aligned} -2 - 4(x - 1) - 6(y - 2) + 3(x - 1)^2 - 6(x - 1)(y - 2) - (y - 2)^2 + (x - 1)^3 &= \\ 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3 &= F(x, y). \end{aligned}$$

5.2.10. Να υπολογιστει η σειρα *Taylor* της $F(x, y, z) = e^{x+y+z}$ γυρω απο το σημειο $(0, 0, 0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 2ης ταξης.

Λυση. Εχουμε

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots$$

οποτε, θειοντας $u = x + y + z$ εχουμε

$$\begin{aligned} e^{x+y+z} &= 1 + x + y + z + (x + y + z)^2 + \dots \\ &= 1 + x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + \dots \end{aligned}$$

5.2.11. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \frac{e^{x+y}}{1-x-z}$ γύρω από το σημείο $(0, 0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 2ης τάξης.

Λυση. Έχουμε

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2!} (x^2 + 2xy + y^2) + \dots$$

$$\frac{1}{1-x-z} = 1 + x + z + x^2 + 2xz + z^2 + \dots$$

Οποτε, εκτελώντας τον πολλαπλασιασμο των δυο σειρων εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{e^{x+y}}{1-x-z} &= \left(1 + x + y + \frac{1}{2!} (x^2 + 2xy + y^2) + \dots \right) \\ &\cdot (1 + x + z + x^2 + 2xz + z^2 + \dots) \\ &= 1 + 2x + y + z + \frac{5}{2}x^2 + 2xy + 3xz + \frac{1}{2}y^2 + yz + z^2 + \dots \end{aligned}$$

5.2.12. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^2 + y^2$.

Λυση. Καταρχήν βρίσκουμε τα στασιμα σημεία. Θα έχουμε

$$F_x = 2x = 0$$

$$F_y = 2y = 0.$$

Προφανώς η μόνη λύση του συστήματος είναι $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Για να προσδιορίσουμε την φύση αυτού υπολογίζουμε τις δευτερές παραγώγους

$$F_{xx}(x, y) = 1, \quad F_{xx}(x_1, y_1) = 1 > 0$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Άρα το (x_1, y_1) είναι τοπικό ελάχιστο. Ευκολά καταλαβαίνουμε ότι στην πραγματικότητα είναι το μοναδικό ολικό ελάχιστο της συναρτησης $F(x, y) = x^2 + y^2$.

5.2.13. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = 4xy - x^2 - 3y^2 + 3x + 4$.

Λυση. Καταρχήν βρίσκουμε τα στασιμα σημεία. Θα έχουμε

$$F_x = 4y - 2x + 3 = 0$$

$$F_y = 4x - 6y = 0.$$

Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε ένα στασιμο σημείο, το $(x_1, y_1) = (-9/2, -3)$. Για να προσδιορίσουμε την φύση αυτού υπολογίζουμε τις δευτερές παραγώγους

$$F_{xx}(x, y) = -2, \quad F_{xx}(x_1, y_1) = -2 < 0$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Άρα το (x_1, y_1) είναι σαγματικό σημείο της $F(x, y)$.

5.2.14. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Λυση. Καταρχήν βρισκουμε τα στασιμα σημεία. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ F_y &= 3y^2 - 3x = 0. \end{aligned}$$

Εχουμε λοιπον

$$x^2 = y \Rightarrow x^4 = y^2 = x \Rightarrow x \cdot (x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (0, 0) \\ (x_2, y_2) = (1, 1) \end{cases}.$$

Τωρα υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x, y) = 6x, \quad D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Τελος εχουμε

$$\begin{aligned} F_{xx}(x_1, y_1) &= 6 \cdot 0 = 0, & D(x_1, y_1) &= -9 < 0. \\ F_{xx}(x_2, y_2) &= 6 \cdot 1 > 0, & D(x_2, y_2) &= 27 > 0. \end{aligned}$$

Αρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικο σημείο και το $(1, 1)$ τοπικο ελαχιστο της $F(x, y)$.

5.2.15. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Λυση. Καταρχήν βρισκουμε τα στασιμα σημεία. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 3yx^2 + 24x = 0 \\ F_y &= x^3 - 8 = 0. \end{aligned}$$

Εχουμε λοιπον $x = 2$ και $12y + 48 = 0 \Rightarrow y = -4$. Δηλ. το μονο στασιμο σημείο είναι το $(x_1, y_1) = (2, -4)$. Υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x, y) = 6x, \quad D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xy + 24 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = -9x^4.$$

Τελος εχουμε

$$F_{xx}(x_1, y_1) = 6 \cdot 2 = 12 > 0, \quad D(x_1, y_1) = -9 \cdot 2^4 < 0.$$

Αρα το $(2, -4)$ είναι σαγματικο σημείο της $F(x, y)$.

5.2.16. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$.

Λυση. Καταρχήν βρισκουμε τα στασιμα σημεία. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 3yx^2 + 24x = 0 \\ F_y &= x^3 - 8 = 0. \end{aligned}$$

Εχουμε λοιπον $x = 2$ και $12y + 48 = 0 \Rightarrow y = -4$. Δηλ. το μονο στασιμο σημειο ειναι το $(x_1, y_1) = (2, -4)$. Υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x, y) = 6x, \quad D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xy + 24 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = -9x^4.$$

Τελος εχουμε

$$F_{xx}(x_1, y_1) = 6 \cdot 2 = 12 > 0, \quad D(x_1, y_1) = -9 \cdot 2^4 < 0.$$

Αρα το $(2, -4)$ ειναι σαγματικο σημειο της $F(x, y)$.

5.2.17. Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$.

Λυση. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 4x^3 - 4y = 0 \\ F_y &= 4y^3 - 4x = 0. \end{aligned}$$

Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned} x^3 = y &\Rightarrow x^9 = y^3 = x \Rightarrow x \cdot (x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x \cdot (x^4 - 1) \cdot (x^4 + 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (0, 0) \\ (x_2, y_2) = (1, 1) \\ (x_3, y_3) = (-1, -1) \end{cases}. \end{aligned}$$

Τωρα υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16.$$

Τελος εχουμε

$$\begin{aligned} F_{xx}(x_1, y_1) &= 12 \cdot 0 = 0, & D(x_1, y_1) &= -16 < 0. \\ F_{xx}(x_2, y_2) &= 12 \cdot 1 > 0, & D(x_2, y_2) &= 128 > 0. \\ F_{xx}(x_3, y_3) &= 12 \cdot 1 > 0, & D(x_3, y_3) &= 128 > 0. \end{aligned}$$

Αρα το $(0, 0)$ ειναι σαγματικο σημειο και τα $(1, 1), (-1, -1)$ τοπικα ελαχιστα της $F(x, y)$.

5.2.18. Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x, y) = (1 + xy) \cdot (x + y)$.

Λυση. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= y(x + y) + 1 + xy = 0 \\ F_y &= x(x + y) + 1 + xy = 0. \end{aligned}$$

Ευκολα βλέπουμε ότι καμμία λύση τοπυ συστήματος δεν μπορεί να έχει $x = 0$ ούτε και $y = 0$. Οποτε έχουμε $y \cdot (x + y) = x \cdot (x + y)$ και, είτε $x = -y$, είτε $x = y$. Αλλα αν $x = y$ τότε παίρνουμε $3x^2 + 1 = 0$. Οποτε η μονη περιπτωση που απομεινει είναι $x = -1$. Τότε έχουμε

$$0 + 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (1, -1) \\ (x_2, y_2) = (-1, 1) \end{cases}.$$

Τώρα υπολογίζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x, y) = 2y, \quad D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x \end{vmatrix} = -4x^2 - 4xy - 4y^2.$$

Τελος έχουμε

$$\begin{aligned} F_{xx}(x_1, y_1) &= 2 > 0, & D(x_1, y_1) &= -4 < 0. \\ F_{xx}(x_2, y_2) &= -2 < 0, & D(x_2, y_2) &= -4 > 0. \end{aligned}$$

Αρα τα $(1, -1)$ και $(-1, 1)$ είναι σαγματικά σημεια της $F(x, y)$.

5.2.19. Να βρεθουν και να χαρακτηρισουν τα στασιμα σημεια της $F(x, y) = xy \cdot (1 - x - y)$.

Λυση. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= y(-x + 1 - y) - xy = 0 \\ F_y &= x(-x + 1 - y) - xy = 0. \end{aligned}$$

Μια λύση του συστήματος είναι η $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Επίσης μπορεί να έχουμε $x = 0, y \neq 0$ οποτε

$$y \cdot (1 - y) = 0$$

και αρα $(x_2, y_2) = (0, 1)$ · συμμετρικα παίρνουμε $(x_3, y_3) = (1, 0)$. Τελος, αν $(x, y) \neq (0, 0)$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} -x + 1 - y &= x \\ -x + 1 - y &= y \end{aligned}$$

οποτε $(x_4, y_4) = (1/3, 1/3)$. Δηλ. έχουμε τεσσερα στασιμα σημεια. Τώρα υπολογίζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$\begin{aligned} F_{xx}(x, y) &= -2y, \\ D(x, y) &= \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix} \\ &= -4x^2 - 4xy + 4x - 4y^2 + 4y - 1. \end{aligned}$$

Τελος έχουμε

$$\begin{aligned} F_{xx}(x_1, y_1) &= 0, & D(x_1, y_1) &= -1 < 0. \\ F_{xx}(x_2, y_2) &= -2 < 0, & D(x_2, y_2) &= -1 < 0. \\ F_{xx}(x_3, y_3) &= 0, & D(x_3, y_3) &= -1 < 0. \\ F_{xx}(x_4, y_4) &= -2/3 < 0, & D(x_4, y_4) &= \frac{1}{3} > 0. \end{aligned}$$

Αρα τα $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ είναι σαγματικά σημεια της $F(x, y)$ και το και $(1/3, 1/3)$ είναι τοπικο μεγιστο.

5.2.20. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^2 + y^2 - z^2$.

Λυση. Καταρχήν βρίσκουμε τα στασιμα σημεία. Θα έχουμε

$$F_x = 2x = 0$$

$$F_y = 2y = 0.$$

$$F_z = 2z = 0$$

Προφανώς, το μόνο στασιμο σημείο είναι το $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$. Υπολογίζουμε τον *Hessian* πίνακα

$$D(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Τέλος έχουμε

$$D_1(x, y, z) = |F_{xx}(x, y, z)| = 2 > 0$$

$$D_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} F_{xx}(x, y, z) & F_{xy}(x, y, z) \\ F_{yx}(x, y, z) & F_{yy}(x, y, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$D_3(x, y, z) = \begin{vmatrix} F_{xx}(x, y, z) & F_{xy}(x, y, z) & F_{xz}(x, y, z) \\ F_{yx}(x, y, z) & F_{yy}(x, y, z) & F_{yz}(x, y, z) \\ F_{zx}(x, y, z) & F_{zy}(x, y, z) & F_{zz}(x, y, z) \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Άρα το $(0, 0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της $F(x, y, z)$.

5.2.21. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + xz - 3y$.

Λυση. Καταρχήν βρίσκουμε τα στασιμα σημεία. Θα έχουμε

$$F_x = -2x + 2y + z = 0$$

$$F_y = -2y + 2x - 3 = 0.$$

$$F_z = -2z + x = 0$$

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα με τον κανόνα του *Cramer* και βρίσκουμε την μοναδική λύση $(x_1, y_1, z_1) = (6, 9/2, 3)$. Υπολογίζουμε τον *Hessian* πίνακα

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$D_1(x, y, z) = |-2| = -2 < 0$$

$$D_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3(x, y, z) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Οι ανισότητες ισχύουν σε κάθε σημείο (x, y, z) άρα και στο $(x_1, y_1, z_1) = (6, 9/2, 3)$. Οπότε το (x_1, y_1, z_1) είναι σαγματικό σημείο της $F(x, y, z)$.

5.2.22. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

Λυση. Καταρχήν βρισκουμε τα στασιμα σημεία. Θα εχουμε

$$F_x = 4x^3 - 4yz = 0$$

$$F_y = 4y^3 - 4xz = 0.$$

$$F_z = 4z^3 - 4xy = 0$$

Με απλη επισκοπηση βλεπουμε οτι μια λυση του συστηματος ειναι $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ και αλλη μια $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$. Αν $x \neq 0$ τοτε και $yz \neq 0$ οποτε μπορουμε, π.χ., να γραφουμε

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^4 = y^4 \Rightarrow y = \pm x$$

και ομοια $z = \pm x$. Απο τις

$$x^3 = yz, \quad y = \pm x, \quad z = \pm x$$

βλεπουμε οτι οι μονες λυσεις (αλλες απο αυτες που ηδη υπολογισαμε) ειναι

$$(x_3, y_3, z_3) = (1, -1, -1)$$

$$(x_4, y_4, z_4) = (-1, 1, -1)$$

$$(x_5, y_5, z_5) = (-1, -1, 1).$$

Υπολογιζουμε τωρα τον *Hessian* πινακα

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε

$$D_1(x, y, z) = \begin{vmatrix} 12x^2 \end{vmatrix} = 12x^2$$

$$D_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4z \\ -4z & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16z^2$$

$$D_3(x, y, z) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{vmatrix} = -192x^4 + 1728x^2y^2z^2 - 128xyz - 192y^4 - 192z^4.$$

1. Στο $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ εχουμε

$$D_1(0, 0, 0) = D_2(0, 0, 0) = D_3(0, 0, 0) = 0$$

οποτε δεν μπορουμε να αποφανθουμε για την φυση του στασιμου σημειου $(0, 0, 0)$.

2. Στο $(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1)$ εχουμε

$$D_1(x_2, y_2, z_2) = 12 > 0$$

$$D_2(x_2, y_2, z_2) = 128 > 0$$

$$D_3(x_2, y_2, z_2) = 1024 > 0.$$

αρα το (x_2, y_2, z_2) ειναι τοπικο ελαχιστο της $F(x, y, z)$.

3. Στο $(x_3, y_3, z_3) = (1, -1, -1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x_2, y_2, z_2) &= 12 > 0 \\ D_2(x_2, y_2, z_2) &= 128 > 0 \\ D_3(x_2, y_2, z_2) &= 1280 > 0. \end{aligned}$$

αρα το (x_3, y_3, z_3) είναι τοπικό ελαχιστο της $F(x, y, z)$.

4. Τα $(x_4, y_4, z_4) = (-1, 1, -1)$ και $(x_5, y_5, z_5) = (-1, -1, 1)$ είναι επίσης τοπικά ελαχίστα, λόγω συμμετρίας.

5.2.23. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^2 - xyz$.

Λυση. Καταρχήν βρίσκουμε τα στασιμα σημεία. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - yz = 0 \\ F_y &= 3y^2 - xz = 0. \\ F_z &= -2z - xy = 0 \end{aligned}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ και $(x_2, y_2, z_2) = (-6, -6, -18)$. Υπολογίζουμε τον *Hessian* πίνακα

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -z & -y \\ -z & 6y & -x \\ -y & -x & -2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x, y, z) &= |6x| = 6x \\ D_2(x, y, z) &= \begin{vmatrix} 6x & -z \\ -z & 6y \end{vmatrix} = 36xy - z^2 \\ D_3(x, y, z) &= \begin{vmatrix} 6x & -z & -y \\ -z & 6y & -x \\ -y & -x & -2 \end{vmatrix} = -6x^3 - 2xyz - 72xy - 6y^3 + 2z^2. \end{aligned}$$

Τώρα στο $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ έχουμε

$$D_1(0, 0, 0) = D_2(0, 0, 0) = D_3(0, 0, 0) = 0$$

οπότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την φύση του στασιμου σημείου $(0, 0, 0)$. Στο $(x_2, y_2, z_2) = (-6, -6, -18)$ έχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x_2, y_2, z_2) &= |6 \cdot (-6)| = -36 < 0 \\ D_2(x_2, y_2, z_2) &= \begin{vmatrix} 6 \cdot (-6) & 18 \\ 18 & 6 \cdot (-6) \end{vmatrix} = 972 > 0 \\ D_3(x_2, y_2, z_2) &= \begin{vmatrix} 6 \cdot (-6) & 18 & 6 \\ 18 & 6 \cdot (-6) & 6 \\ 6 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 1944 > 0. \end{aligned}$$

αρα το (x_2, y_2, z_2) είναι σαγματικό σημείο της $F(x, y, z)$.

5.2.24. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ υπο τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 1$.

Λυση. Επειδή έχουμε περιορισμό, θα δουλέψουμε με την μέθοδο των πολ/στων *Lagrange*. Η αρχική μας συνάρτηση είναι $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ και η βοηθητική συνάρτηση είναι

$$L(x, y) = F(x, y) + \lambda \cdot G(x, y) = x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1).$$

Παίρνουμε τις πρώτες παραγώγους:

$$L_x = 2x + 2\lambda x = 0$$

$$L_y = 4y + 2\lambda y = 0$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Οπότε έχουμε

$$2x = -2x\lambda$$

$$4y = -2y\lambda$$

Απο την πρώτη θα έχουμε $x = 0$ ή $\lambda = -1$. Αν $x = 0$, τότε η τρίτη δίνει $y = \pm 1$. Αν $\lambda = -1$, τότε η δεύτερη δίνει $y = 0$ και η τρίτη δίνει $x = \pm 1$. Οπότε έχουμε τέσσερα πιθανά ακρότατα σημεία: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$F(0, 1) = F(0, -1) = 2 \text{ και } F(1, 0) = F(-1, 0) = 1.$$

Άρα έχουμε μέγιστο στα σημεία $(0, 1)$ και $(0, -1)$ και ελάχιστο στα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$.

5.2.25. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $F(x, y) = 3x + 4y$ υπο τον περιορισμό $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Λυση. Επειδή έχουμε περιορισμό, θα δουλέψουμε με την μέθοδο των πολ/στων *Lagrange*. Η αρχική μας συνάρτηση είναι $F(x, y) = 3x + 4y$ και η βοηθητική συνάρτηση είναι

$$L(x, y) = F(x, y) + \lambda \cdot G(x, y) = 3x + 4y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1).$$

Παίρνουμε τις πρώτες παραγώγους:

$$L_x = 3 + 2\lambda x = 0$$

$$L_y = 4 + 2\lambda y = 0$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Απο τις δυο πρώτες εξισώσεις βλέπουμε ότι $x, y, \lambda \neq 0$. Οπότε απο την τρίτη εξίσωση έχουμε

$$x = -\frac{3}{2\lambda}, \quad y = -\frac{2}{\lambda}$$

και αντικαθιστώντας στην τρίτη παίρνουμε

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{5}{2}.$$

Αρα έχουμε δυο στασιμα σημεία :

$$(x_1, y_1) = \left(-\frac{3}{2\lambda_1}, -\frac{2}{\lambda_1} \right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$(x_2, y_2) = \left(-\frac{3}{2\lambda_2}, -\frac{2}{\lambda_2} \right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right).$$

Έχουμε δε

$$F(x_1, y_1) = 3x_1 + 4y_1 = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = 5$$

$$F(x_2, y_2) = 3x_2 + 4y_2 = 3\frac{-3}{5} + 4\frac{-4}{5} = -5.$$

Δηλ. η $F(x, y)$ έχει μέγιστο στο $(x_1, y_1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$ και ελάχιστο στο $(x_2, y_2) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$.

5.2.26. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $F(x, y, z) = x + y + z$ υπό τον περιορισμό $xyz = 1$.

Λυση. Επειδή έχουμε περιορισμό, θα δουλέψουμε με την μέθοδο των πολ/στων *Lagrange*. Η αρχική μας συνάρτηση είναι $F(x, y, z) = x + y + z$ και η βοηθητική συνάρτηση είναι

$$L(x, y, z) = F(x, y, z) + \lambda \cdot G(x, y, z) = x + y + z + \lambda \cdot (xyz - 1).$$

Παίρνουμε τις πρώτες παραγώγους:

$$L_x = 1 + \lambda yz = 0$$

$$L_y = 1 + \lambda xz = 0$$

$$L_z = 1 + \lambda xy = 0$$

$$L_\lambda = xyz - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι αποδεκτές λύσεις με $xyz = 0$ (διότι παραβιάζουν τον περιορισμό) άρα $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Οπότε από το σύστημα έχουμε

$$\lambda = -\frac{1}{yz} = -\frac{1}{xz} = -\frac{1}{xy} \Rightarrow x = y = z.$$

Για να ισχύει τώρα και

$$xyz = 1$$

θα πρέπει να έχουμε $x = y = z = 1$. Αυτό είναι το *μονο* στασιμο σημείο της $F(x, y, z) = x + y + z$ (υπό τον περιορισμό $G(x, y, z) = xyz - 1 = 0$). Το σημείο αυτό είναι *μέγιστο*, όπως μπορούμε να δούμε δοκιμάζοντας διάφορες τιμές $(x, y, z) = \left(x, y, \frac{1}{xy} \right)$.

5.2.27. Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(3, 1, -1)$ μέχρι την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Λυση. Εστω (x, y, z) τυχόν σημείο της σφαίρας. Αυτό θα ικανοποιεί τον περιορισμό $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Από όλα αυτά τα σημεία ζητούμε εκείνο το οποίο

μεγιστοποιεί (ελαχιστοποιεί) την απόσταση $d(x, y, z) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$ ή ισοδυναμικά μεγιστοποιεί (ελαχιστοποιεί) την συνάρτηση $F(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$. Άρα πρέπει να βρούμε τα ακροτάτα σημεία της

$$L(x, y, z, \lambda) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Έχουμε

$$L_x = 2(x-3) + 2x\lambda = 0$$

$$L_y = 2(y-1) + 2y\lambda = 0$$

$$L_z = 2(z+1) + 2z\lambda = 0$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

Λύνοντας τις τρεις πρώτες ως προς x, y, z παίρνουμε

$$x = \frac{3}{1-\lambda}, \quad y = \frac{1}{1-\lambda}, \quad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

(παρατηρήστε ότι υποθέτουμε $\lambda \neq 1 \dots$ γιατί:). Αντικαθιστώντας στην τελευταία παίρνουμε

$$\left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

και λύνοντας ως προς λ παίρνουμε

$$(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4} \Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Τώρα

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow (x_2, y_2, z_2) = \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Επίσης βλέπουμε ότι

$$d(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{11}} - 3\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{11}} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{11}} + 1\right)^2} \simeq 1.3166$$

$$d(x_2, y_2, z_2) = \sqrt{\left(-\frac{6}{\sqrt{11}} - 3\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{11}} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{11}} + 1\right)^2} \simeq 5.3166$$

Άρα έχουμε ελαχιστή απόσταση στο (x_1, y_1, z_1) και μεγιστή στο (x_2, y_2, z_2) .

5.2.28. Βρείτε την μέγιστη τιμή της $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$ με τους περιορισμούς $G_1(x, y, z) = x - y + z - 1 = 0$ και $G_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Λυση. Πρέπει να βρούμε το μέγιστο της

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + 2y + 3z + \lambda_1 \cdot (x - y + z - 1) + \lambda_2 \cdot (x^2 + y^2 - 1).$$

Παιρνοντας πρώτες παραγώγους έχουμε

$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0$$

$$2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0$$

$$3 + \lambda_1 = 0$$

$$x - y + z - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Βλεπούμε αμεσως οτι $\lambda_1 = -3$ οποτε απο την πρώτη παίρνουμε $x = \frac{1}{\lambda_2}$ παρομοια και $y = -\frac{5}{2\lambda_2}$. Οποτε αντικαθιστώντας στην πεμπτη έχουμε

$$\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{25}{4\lambda_2^2} = 1$$

οποτε $\lambda_2^2 = 29/4$ και $\lambda_2 = \pm\sqrt{29}/2$. Τελικα λοιπον ειτε $1 + 0.37139 + 0.92848 = 2.2999$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -2/\sqrt{29} \simeq -0.37139 \\ y_1 = 5/\sqrt{29} \simeq 0.92848 \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 = 1 - x_1 + y_1 \simeq 2.3$$

ειτε

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 2/\sqrt{29} \simeq 0.37139 \\ y_2 = -5/\sqrt{29} \simeq -0.92848 \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 = 1 - x_1 + y_1 \simeq 0.3.$$

Στο σημειο (x_1, y_1, z_1) έχουμε

$$F(x_1, y_1, z_1) \simeq F(-0.37139, 0.92848, 2.3) = 8.3856$$

και στο σημειο (x_2, y_2, z_2) έχουμε

$$F(x_2, y_2, z_2) \simeq F(-0.37139, 0.92848, 2.3) = -2.3856.$$

Αρα το μέγιστο της $F(x, y, z)$ εμφανιζεται στο σημειο (x_1, y_1, z_1) .

5.3 Αλυτα Προβληματα

5.3.1. Να υπολογιστει η σειρα *Taylor* της $F(x, y) = e^{x+y}$ γυρω απο το σημειο $(0, 0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

Απ. $1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3 + \dots$

5.3.2. Να υπολογιστει η σειρα *Taylor* της $F(x, y) = e^{x+y}$ γυρω απο το σημειο $(1, 2)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

Απ. $e^{-3} + e^{-3} \cdot x + e^{-3} \cdot y + \frac{e^{-3}}{2}x^2 + e^{-3} \cdot xy + \frac{e^{-3}}{2}y^2 + \frac{e^{-3}}{6}x^3 + \frac{e^{-3}}{2}x^2y + \frac{e^{-3}}{2}xy^2 + \frac{e^{-3}}{6}y^3 + \dots$

5.3.3. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 6ης τάξης.

Απ. $1 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4y^2 - \frac{1}{2}x^2y^4 - \frac{1}{6}y^6 + \dots$

5.3.4. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = x^2y \sin(x^2 + y^2)$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 9ης τάξης.

Απ. $x^2y - \frac{1}{6}x^8y - \frac{1}{2}x^6y^3 - \frac{1}{2}x^4y^5 - \frac{1}{6}x^2y^7 + \dots$

5.3.5. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = 21x + 42y - 6xy - 12y^2 + 4y^3 - 109$ γύρω από το σημείο $(5, 1)$. Βρείτε όλους τους όρους.

Απ. $15(x - 5) - 6(x - 5)(y - 1) + 4(y - 1)^3.$

5.3.6. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 8ης τάξης.

Απ. $1 - x^6 - 3x^4y^2 + x^4 - 3x^2y^4 + 2x^2y^2 - x^2 - y^6 + y^4 - y^2 + \dots$

5.3.7. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \sin x \sin y$ γύρω από το σημείο $(\pi/4, \pi/4)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 2ης τάξης.

Απ. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - \pi/4) + \frac{1}{2}(y - \pi/4) - \frac{1}{4}(x - \pi/4)^2 - \frac{1}{4}(y - \pi/4)^2 + \frac{1}{2}(x - \pi/4)(y - \pi/4) + \dots$

5.3.8. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = e^x \sin y$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 3ης τάξης.

Απ. $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + \dots$

5.3.9. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = e^x \ln(1 + y)$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 3ης τάξης.

Απ. $y - \frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \dots$

5.3.10. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \frac{\cos x}{1+x^2+y^2}$ γύρω από το σημείο $(-1, 2)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 8ης τάξης.

Απ. $1 - \frac{1}{24}x^{10} - \frac{1}{8}x^8y^2 + \frac{13}{24}x^8 - \frac{1}{8}x^6y^4 + \frac{19}{12}x^6y^2 - \frac{37}{24}x^6 - \frac{1}{24}x^4y^6 + \frac{37}{24}x^4y^4 - \frac{97}{24}x^4y^2 + \frac{37}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^6 - \frac{7}{2}x^2y^4 + \frac{5}{2}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2 - y^6 + y^4 - y^2 + \dots$

5.3.11. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 3ης τάξης.

Απ. $1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + \dots$

5.3.12. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y) = \ln(1 - x) \ln(1 - y)$ γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 5ης τάξης.

Απ. $xy + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^2y^2}{4} + \frac{x^2y^3}{6} + \frac{x^3y^2}{6} + \dots$

5.3.13. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* (γύρω από το $(1, 1)$) της $z(x, y)$ η οποία ορίζεται εμμεσα από τη σχέση $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 2ης τάξης.

Απ. $1 + (x - 1) + \frac{1}{4}(y - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)(y - 1) + \frac{9}{64}(y - 1)^2 + \dots$

5.3.14. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y, z) = \sin(x + y + z)$ γύρω από το σημείο $(0, 0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 3ης τάξης.

Απ. $x + y + z - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{2}xy^2 - xyz - \frac{1}{2}xz^2 - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{6}z^3 + \dots$

5.3.15. Να υπολογιστεί η σειρά *Taylor* της $F(x, y, z) = \frac{1}{1+x+y+z}$ γύρω από το σημείο $(0, 0, 0)$. Βρείτε τους όρους μέχρι και 2ης τάξης.

Απ. $1 - x - y - z + x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 + \dots$

5.3.16. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$

Απ. Υπάρχει μέγιστο στο $(3, 3/2)$.

5.3.17. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Απ. Στασιμα σημεία $(0, 0)$, $(-5/3, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$.

5.3.18. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 8$

Απ. Μέγιστο (8) στο $(1, 2)$ και ελάχιστο (0) στο $(0, 0)$.

5.3.19. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = xy(a - x - y)$

Απ. Στασιμα σημεία $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$, $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$.

5.3.20. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 3$

Απ. Ελάχιστο (-1) στο $(2, 2)$.

5.3.21. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$

Απ. Στασιμα σημεία $(0, 0)$, $(0, 2b)$, $(2a, 0)$, (a, b) , $(2a, 2b)$.

5.3.22. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 5$.

Απ. Στασιμα σημεία τα $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$.

5.3.23. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^2}{y}$

Απ. Ελάχιστο στο $(a/\sqrt[3]{3}, a/\sqrt[3]{3})$.

5.3.24. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = 13x^2 + 16xy + 7y^2 + 10x + 2y - 5$

Απ. Ελάχιστο στο $(-1, 1)$.

5.3.25. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = \cos(x + y) - 2x^2 - 2y^2 + 8x - 8y + 4xy$

Απ. Δεν έχει στασιμα σημεία.

5.3.26. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.

Απ. Ελάχιστο στα $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

5.3.27. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

Απ. Ελάχιστο στο $(5, 6)$.

5.3.28. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^3y^2(12 - x - y)$.

Απ. Μέγιστο στο $(6, 4)$.

5.3.29. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Απ. Στασιμα σημείο στο $(0, 0)$, ελαχιστο στο $(1, 1)$.

5.3.30. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακροτάτα σημεία της $F(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$.

Απ. Στασιμα σημεία $(8, 5)$, $(3, \frac{3}{2})$.

5.3.31. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Απ. Ελαχιστο στο $(2, 1, 7)$.

5.3.32. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της $F(x, y, z) = 3 \ln x + 2 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

Απ. Ελαχιστο στο $(6, 4, 10)$.

5.3.33. Να βρεθούν τα ακροτάτα της συνάρτησης $F(x, y) = x^m + y^m$ (με $m > 1$) υπό τον περιορισμό $x + y = 2$.

Απ. Ελαχιστο στο $(1, 1)$.

5.3.34. Να βρεθούν τα ακροτάτα της συνάρτησης $F(x, y) = xy$ υπό τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 2a^2$.

Απ. Μεγιστο στα (a, a) , $(-a, -a)$ και ελαχιστο στα $(a, -a)$, $(-a, a)$.

5.3.35. Να βρεθούν τα ακροτάτα της συνάρτησης $F(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ υπό τον περιορισμό $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

Απ. Μεγιστο στα $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ και ελαχιστο στα $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$.

5.3.36. Να βρεθούν τα ακροτάτα της συνάρτησης $F(x, y, z) = x + y + z$ υπό τον περιορισμό $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Απ. Ελαχιστο στο $(3, 3, 3)$.

5.3.37. Να βρεθούν τα ακροτάτα της συνάρτησης $F(x, y, z) = xyz$ υπό τον περιορισμό $x + y + z = 5$.

Απ. Μεγιστο στο $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

5.3.38. Να βρεθούν τα ακροτάτα της συνάρτησης $F(x, y, z) = xyz$ υπό τον περιορισμό $xy + yz + zx = 8$.

Απ. Μεγιστο στο $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

5.3.39. Να βρεθούν τα ακροτάτα της συνάρτησης $F(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 18y$ υπό τον περιορισμό $3x^2 - y^3 - 6x = 0$.

Απ. Ακροτάτα στα $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ και $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

5.3.40. Να βρεθεί το σημείο (x, y, z) του επιπέδου $2x - 6y + 3z = -22$ που έχει ελαχιστή απόσταση από το σημείο $(3, -3, 1)$

Απ. $(1, 3, -2)$.

5.3.41. Να βρεθεί το σημείο (x, y, z) του επιπέδου $3x + 2y + 3z = 5$ που έχει ελαχιστή απόσταση από το σημείο $(2, 3, 5)$

Απ. $(-1, 1, 2)$.

5.3.42. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των ευθειών

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+7}{2} \text{ και } l_2 : \frac{x+3}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}.$$

Απ. $10\sqrt{2}$.

5.3.43. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της z η οποία ορίζεται εμμεσα από την σχέση $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Απ. Στασιμα σημεία στα $(-2, 0)$, $(16/7, 0)$.

5.3.44. Να βρεθούν τα στασιμα σημεία της z η οποία ορίζεται εμμεσα από την σχέση $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

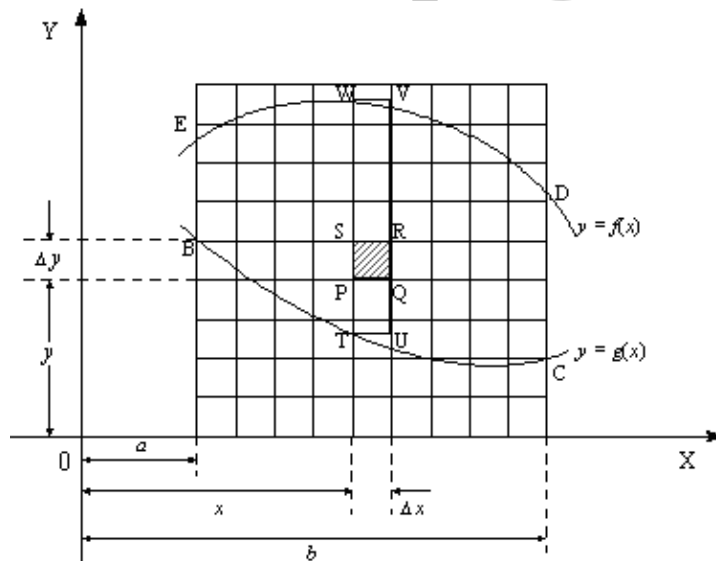
Απ. Στασιμα σημεία στα $(1, 1)$ και $(-1, -1)$.

Κεφάλαιο 6

Διπλα Ολοκληρώματα

6.1 Θεωρία

6.1.1. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μια κλειστή καμπυλή C η οποία ορίζει ένα χωρίο D (δες σχήμα). Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδο S του D . (δες Σχ.7.1).



Σχήμα 7.1

6.1.2. Για να υπολογίσουμε το S χρησιμοποιούμε την κλασσική τεχνική του ολοκληρωτικού λογισμού: υποδιαιρούμε το D σε μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα· τότε το S είναι το όριο του αθροίσματος

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \sum \Delta S = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \sum \sum \Delta x \Delta y = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \sum \sum \Delta y \Delta x.$$

Παραλείποντας τις τεχνικές λεπτομερείες, μπορούμε να πούμε ότι το S είναι το *διπλο ολοκλήρωμα*

$$S = \iint_D dS. \tag{6.1}$$

Προσεξτε ότι το dS είναι το στοιχειώδες εμβαδο και $dS = dx dy$.

6.1.3. Το ζητούμενο εμβαδο μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας το διπλο ολοκληρωμα με το επαναληπτικο ολοκληρωμα

$$S = \int \int_D dS = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x(y_1)}^{x(y_2)} dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} dy dx. \quad (6.2)$$

6.1.4. Γενικότερα, το διπλο ολοκληρωμα μιας συναρτησης $f(x, y)$ οριζεται να είναι το οριο $\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta S$ και είναι ισο με

$$\int \int_D f(x, y) dS = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x(y_1)}^{x(y_2)} f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} f(x, y) dy dx. \quad (6.3)$$

6.1.5. Απο γεωμετρικη αποψη, το διπλο ολοκληρωμα της (6.3) είναι ο ογκος του στερεου που οριζεται απο το χωριο D και την επιφανεια $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$.

6.1.6. Απο την παραπανω παρατηρηση προκυπτουν και μερικες βασικες ιδιοτητες του διπλου ολοκληρωματος (αναλογες με αυτες του απλου):

$$\begin{aligned} a \int \int_D f(x, y) dx dy &= \int \int_D a f(x, y) dx dy \\ \int \int_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy &= \int \int_D f(x, y) dx dy + \int \int_D g(x, y) dx dy \end{aligned}$$

και, αν για καθε $(x, y) \in D$ εχουμε $f(x, y) \leq g(x, y)$, τοτε

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \leq \int \int_D g(x, y) dx dy.$$

6.1.7. Τελος, υπαρχει ενα θεωρημα μεσης τιμης για τα διπλα ολοκληρωματα: αν η $f(x, y)$ είναι ορισμενη και συνεχης στον τοπο D ο οποιος εχει εμβαδον S , τοτε υπαρχει $(x_0, y_0) \in D$ τετοιο οστε

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S.$$

6.1.8. Απο τις (6.1)–(6.3) φαίνεται ότι υπολογίζουμε το διπλο ολοκληρωμα χρησιμοποιωντας δυο "απλα" ολοκληρωματα, οπου τα ορια ολοκληρωσης $y(x_1)$, $y(x_2)$ κτλ. εξαρτωνται απο την καμπυλη C . Η κυριότερη δυσκολια στον υπολογισμο του διπλου ολοκληρωματος είναι ο προσδιορισμος των καταλληλων οριων ολοκληρωσης.

6.1.9. Πολλες φορες ο υπολογισμος του διπλου ολοκληρωματος διευκολυνεται απο την αλλαγη συντεταγμενων. Εστω ότι τα (x, y) εκφραζονται σαν συναρτησεις των νεων συντεταγμενων (u, v) απο τις εξισωσεις

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Τοτε εχουμε

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$$

και το στοιχειωδες εμβαδο dS δινεται απο την σχεση

$$dS = dxdy = \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \times \frac{d\mathbf{r}}{dv} \right| = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} du dv.$$

Ετσι το διπλο ολοκληρωμα μετασχηματιζεται ως εξης

$$\int \int_D f(x,y) dxdy = \int \int_D f(x(u,v), y(u,v)) \frac{D(x,y)}{D(u,v)} du dv.$$

6.1.10. Π.χ., οταν χρησιμοποιουμε πολικες συντεταγμενες, $u = \rho$, $v = \theta$ και $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \rho$, οποτε $dxdy = \rho d\rho d\theta$ και

$$\int \int_D f(x,y) dxdy = \int \int_D f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

6.2 Λυμενα Προβληματα

6.2.1. Υπολογιστε το $\int_0^1 \int_0^2 y^2 dy dx$.

Λυση. Εχουμε

$$\int_0^1 \int_0^2 y^2 dy dx = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 \frac{8}{3} dx = \left(\frac{8x}{3} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{3}.$$

6.2.2. Υπολογιστε το $\int_0^1 \int_0^x y^2 dy dx$.

Λυση. Εχουμε

$$\int_0^1 \int_0^x y^2 dy dx = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx = \left(\frac{x^4}{12} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}.$$

6.2.3. Υπολογιστε το $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} y^2 dy dx$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} y^2 dy dx &= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} \right)_{y=\sqrt{x}}^{y=x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^6}{3} - \frac{\sqrt{x^3}}{3} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^7}{21} - \frac{2}{15} x \sqrt{x^3} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{21} - \frac{2}{15} = -\frac{3}{35}. \end{aligned}$$

6.2.4. Υπολογιστε το εμβαδον του σχηματος που οριζεται απο τις καμπυλες $y_1(x) = \sqrt{x}$, $y_2(x) = x^2$.

Λυση. Οι δυο καμπυλες τεμνονται στα σημεια $\sqrt{x} = x^2$, δηλ. στα $x = 0$ και $x = 1$. Επισης μπορουμε ευκολα να δουμε οτι στο διαστημα $[0, 1]$ εχουμε $x^2 \leq \sqrt{x}$. Εχουμε λοιπον

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 (y)_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

6.2.5. Υπολογίστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $x = 0, y = 0, \frac{1}{2}x + y = 1$.

Λυση. Είναι ενα τριγωνο με κορυφες τα σημεια $(0, 0), (0, 1), (2, 1)$ (σημεια τομης των ευθειων $x = 0, y = 0, \frac{1}{2}x + y = 1$). Το εμβαδον του δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 \int_0^{1-x/2} dy dx = \int_0^2 (y)_{y=0}^{y=1-x/2} dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{4}\right)_{x=0}^{x=2} = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

6.2.6. Υπολογίστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $xy = 1, y = x^2, x = 1, x = 2$.

Λυση. Το ζητουμενο εμβαδον δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_{x^2}^{1/x} dy dx &= \int_1^2 (y)_{y=x^2}^{y=1/x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx = \left(\ln x - \frac{x^3}{3}\right)_{x=1}^{x=2} \\ &= \ln 2 - \frac{8}{3} - \left(0 - \frac{1}{3}\right) = \ln 2 + \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

$6 - 4 \ln 2$.

6.2.7. Υπολογίστε το εμβαδον του σχηματος D που οριζεται απο την παραβολη $y = 4x - x^2$ και τις ευθειες $y = 0, y = -3x + 6$.

Λυση. Εδω πρεπει να χωρισουμε το D σε δυο κομματα, το D_1 , που οριζεται απο την παραβολη $y = 4x - x^2$ και τις ευθειες $x = 2, y = -3x + 6$ και το D_2 , που οριζεται απο τις $y = 4x - x^2, x = 2, y = 0$ και το D_2 . Εχουμε λοιπον

$$\iint_D dy dx = \iint_{D_1} dy dx + \iint_{D_2} dy dx$$

και $\left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{16}{3}$

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} dy dx &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy dx = \int_1^2 (4x - x^2 - (-3x + 6)) dx \\ &= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 6x\right)_{x=1}^{x=2} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$\iint_{D_2} dy dx = \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy dx = \int_2^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_{x=2}^{x=4} = \frac{16}{3}$$

ΟΠΟΤΕ

$$\iint_D dy dx = \iint_{D_1} dy dx + \iint_{D_2} dy dx = \frac{13}{6} + \frac{16}{3} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}.$$

6.2.8. Υπολογίστε το εμβαδο του κυκλου με κεντρο το $(0, 0)$ και ακτινα R .

Λυση. Ο κυκλος εχει την εξισωση $x^2 + y^2 = R^2$, οποτε για καθε x εχουμε $y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$. Το ζητουμενο εμβαδο δινεται λοιπον απο το ολοκληρωμα

$$\int \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy dx.$$

Ομως ειναι πιο απλο να υπολογισουμε το εμβαδον χρησιμοποιωντας πολικες συντεταγμενες. Σε αυτες η εξισωση του κυκλου ειναι $\rho(\theta) = R$ και ετσι το ζητουμενο εμβαδο δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=R} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \left(\frac{R^2}{2}\theta\right)_{\theta=0}^{2\pi} = \pi R^2$$

οπως βεβαια περιμεναμε.

6.2.9. Υπολογίστε το εμβαδον του τετραφυλλου $\rho = \cos 2\theta$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

Λυση. Ενας λοβος του τετραφυλλου αντιστοιχει σε $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} 4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} \rho d\rho d\theta &= 4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\cos 2\theta} d\theta = 4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2 2\theta}{2} d\theta \\ &= 4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4\theta}{4} d\theta = (\theta + \cos 4\theta)_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6.2.10. Υπολογίστε το εμβαδον που περικλειει η καμπυλη $\rho^2 = \cos 2\theta$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ (λημνισκος).

Λυση. Μισος λοβος του λημνισκου αντιστοιχει σε $\theta \in [0, \pi/4]$. Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta = (\sin 2\theta)_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = 1.$$

6.2.11. Υπολογίστε το εμβαδον του τριφυλλου $\rho = \cos 3\theta$, $\theta \in [0, \pi]$.

Λυση. Ενας λοβος του τριφυλλου αντιστοιχει σε $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$ (γιατι;). Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} 3 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{\cos 3\theta} \rho d\rho d\theta &= 3 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\cos 3\theta} d\theta = \frac{3}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{3}{4} (\theta)_{\theta=-\pi/6}^{\theta=\pi/6} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

6.2.12. Υπολογίστε το ολοκληρωμα $\int \int_D xy dx dy$ οπου $D : x^2 + y^2 \leq R^2$.

Λυση. Το ζητούμενο δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R xy \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \cos \theta \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \sin 2\theta d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=0}^{\rho=R} \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{R^4}{8} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

(αφού για $\theta \in [0, 2\pi]$ το ημίτονο διαγράφει δυο πλήρεις περιόδους).

6.2.13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int_D (x^2 + y^2) dy dx$, όπου D είναι ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq 2Rx$.

Λυση. Κατ' αρχήν, το όριο του δίσκου D είναι ο κύκλος με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 2Rx \Leftrightarrow x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - R)^2 + y^2 = R^2$$

δηλ. ο κύκλος με κέντρο το $(0, R)$ και ακτίνα R . Η εμφάνιση του κύκλου δίνει την ιδέα χρήσης πολικών συντεταγμένων ... επειδή όμως ο κύκλος έχει κέντρο το $(0, R)$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια τροποποίηση των "κλασικών" πολικών συντεταγμένων. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε

$$x = R + \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Το στοιχειώδες εμβαδόν στο νέο σύστημα συντεταγμένων προκύπτει με χρήση της Ιακωβιανής ορίζουσας

$$dx dy = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} d\rho d\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta$$

(δηλ. είναι το ίδιο όπως και στις κλασικές πολικές). Το ζητούμενο ολοκλήρωμα τώρα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R ((R + \rho \cos \theta)^2 + \rho \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 + 2\rho \cos \theta + \rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(R^2 \frac{\rho^2}{2} + 2 \frac{\rho^3}{3} \cos \theta + \frac{R^4}{4} \right)_{\rho=0}^{\rho=R} d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{R^4}{2} + 2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{3\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

6.2.14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int_D \frac{\sin x}{x} dx dy$ όπου

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

Λυση. Εάν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το $\int \int_D \frac{\sin x}{x} dx dy$ θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα το $\int \frac{\sin x}{x} dx$, το οποίο δεν είναι δυνατόν. Όμως ισχύει η αρχή της αντιστροφής της σειράς ολοκλήρωσης, δηλ.

$$\int \int_D \frac{\sin x}{x} dx dy = \int \int_D \frac{\sin x}{x} dy dx.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{\sin x}{x} dy dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} y \right)_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} x - \frac{\sin x}{x} 0 \right) dx = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

6.2.15. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int_D x \cos(xy) dy dx$ στο χωρίο

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned} \int \int_D x \cos(xy) dy dx &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 x \cos(xy) dy \right) dx = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \cos(xy) d(xy) \right) dx \\ &= \int_0^\pi (\sin(xy))_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)_{x=0}^{x=\pi} = 2. \end{aligned}$$

6.2.16. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int_D xy dx dy$ όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $y = x - 1$ και $y^2 = 2x + 6$,

Λυση. Για να βρούμε τα όρια του χωρίου βρισκουμε πρώτα τα σημεία τομής των δυο καμπυλών. Έχουμε $y = x - 1$ και $y^2 = 2x + 6$ οπότε

$$y^2 = 2 \cdot (1 + y) + 6 \Rightarrow y_1 = -2 \text{ ή } y_2 = 4.$$

Αν τώρα σχεδιάσουμε το χωρίο βλέπουμε ότι είναι

$$D = \left\{ (x, y) : -2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1 \right\}.$$

Οπότε το ζητούμενο είναι

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 \left(\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy dx \right) dy &= \int_{-2}^4 \left(\frac{x^2 y}{2} \right)_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1} dy = \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{y^6}{24} + y^4 + \frac{2}{3}y^3 - 4y^2 \right)_{y=-2}^{y=4} = 36. \end{aligned}$$

6.2.17. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_D (3x + 4y^2) dx dy$ όπου D είναι ο ημιδακτυλιος ο οποίος ορίζεται ως

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1 \text{ και } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ και } y \geq 0\}.$$

Λυση. Είναι (σε πολικές συντεταγμένες)

$$\begin{aligned} \int_D (3x + 4y^2) dx dy &= \int_0^\pi \int_1^2 (3x + 4y^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3\rho \cos \theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^\pi (\rho^3 \cos \theta + \rho^4 \sin^2 \theta) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\rho^3 \cos \theta + \rho^4 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(7 \cos \theta + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\theta) \right) d\theta \\ &= \left(7 \sin \theta + \frac{15}{2} \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

6.2.18. Εστω D ο δακτυλιος που περιεχεται μεταξύ των κυκλων $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 5$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_D (x^2 + y) dx dy$$

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned} \int_D (x^2 + y) dx dy &= \int_1^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho \sin \theta) d\theta \rho d\rho \\ &= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} (\rho \cos^2 \theta + \sin \theta) d\theta \right) d\rho \\ &= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\rho \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sin \theta \right) d\theta \right) d\rho \\ &= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 \left(\frac{\rho\theta}{2} + \frac{\rho \sin 2\theta}{4} - \cos \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho \\ &= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 (\pi\rho) d\rho = \left(\pi \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{5}} = 6\pi. \end{aligned}$$

6.2.19. Υπολογίστε τον ογκο του σχηματος που ορίζεται απο: $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1$ και $z = x^2 + y^2 + 1$

Λυση. Ο ζητούμενος ογκος δίνεται απο το ολοκληρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^1 (1 + x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^2 \left(y + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{4}{3} + x^2 \right) dx = \left(\frac{4x}{3} + \frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

6.2.20. Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο τα επιπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Λυση. Το σχημα ειναι ενα τετραεδρο (σχεδιαστε το!). Η βαση του ειναι ενα τριγωνο που οριζεται απο τα σημεια $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ (ή απο τις ευθειες $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$). Αν λυσουμε την εξισωση του τελευταιου επιπεδου ως προς z παιρνουμε $z = 1 - x - y$. Αρα ο ζητούμενος ογκος δίνεται απο το ολοκληρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx &= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x - x(y) 1 - x - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

6.2.21. Δίνεται ενας κυκλικος κυλινδρος με εξισωση $x^2 + y^2 = R^2$. Υπολογιστε τον ογκο του τμηματος του κυλινδρου που περιχεται μεταξυ των επιπεδων $z = 2$, $z = 5$.

Λυση. Ο ζητούμενος ογκος δίνεται απο το ολοκληρωμα (οπου D ειναι ο κυκλος $x^2 + y^2 = R^2$)

$$\int_D \int (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dy dx = \int_D \int (5 - 2) dy dx = 3\pi R^2$$

(χρησιμοποιησαμε το γεγονος οτι $\int_D \int dy dx = \pi R^2$, το εμβαδον του κυκλου).

6.2.22. Βρειτε τον ογκο του στερεου που οριζεται απο το ελλειπτικο παραβολοειδες $x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ και τα επιπεδα $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$.

Λυση. Καντε το αντιστοιχο σχημα. Θα δειτε οτι το ζητούμενο στερεο εχει "βαση" το τετραγωνο $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$. Οποτε ο ζητούμενος ογκος ειναι

$$\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy = \int_0^2 \left(16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2 x \right)_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = 48.$$

6.2.23. Βρειτε τον ογκο του στερεου που οριζεται απο την επιφανεια $z = \sin x \cos y$ και το επιπεδο $z = 0$.

Λυση. Καντε το αντιστοιχο σχημα. Θα δειτε οτι το ζητούμενο στερεο εχει "βαση" το τετραγωνο $0 \leq x \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Οποτε ο ζητούμενος ογκος ειναι

$$\int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cos y dx dy = \left(\int_0^\pi \sin x dx \right) \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y dy \right) = (\cos x)_{x=0}^{x=\pi} \cdot (\sin y)_{y=-\pi/2}^{y=\pi/2} = 4.$$

6.2.24. Βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ και έχει βάση το χωρίο D που ορίζεται από την ευθεία $y = 2x$ και την παραβολή $y = x^2$.

Λυση. Κάντε το αντιστοιχο σχήμα. Θα δείτε ότι το χωρίο D (στο επίπεδο xy) είναι το

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Αρα ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right)_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \left(2\frac{x^4}{4} + \frac{8x^4}{12} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)_{x=0}^{x=2} dx = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

6.2.25. Βρείτε τον όγκο του στερεού το οποίο ορίζεται από το επίπεδο $z = 0$ και το παραβολοειδές $z = 1 - x^2 - y^2$.

Λυση. Το επίπεδο $z = 0$ τέμνει το παραβολοειδές κατά τον κύκλο (για $z = 0$) $x^2 + y^2 = 1$. Αρα ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

6.2.26. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περικλείεται από το επίπεδο $z = 0$, το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και τον κυλινδρό $x^2 + y^2 = 1$.

Λυση. Ο ζητούμενος όγκος είναι (κάντε το σχήμα)

$$\int_D \int (x^2 + y^2) dx dy$$

όπου $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ (προσεξτε ότι το D είναι ένα επίπεδο σχήμα, ενώ ο κυλινδρός $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι μια τριδιάστατη επιφάνεια!!!). Σε πολικές συντεταγμένες ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

6.2.27. Βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z = 0$, κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και μέσα στον κυλινδρό $x^2 + y^2 = 2x$.

Λυση. Από την γραφική παράσταση (κάντε την!) βλέπουμε ότι η "βάση" του στερεού είναι ο κύκλος

$$C : x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow C : (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Για αυτό τον κύκλο θα χρησιμοποιήσουμε τις τροποποιημένες πολικές συντεταγμένες

$$x = 1 + \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

στις οποίες το στοιχειώδες εμβαδόν είναι

$$dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (x^2 + y^2) \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 ((1 + \rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 + 2\rho \cos \theta + 1) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^3 + 2\rho^2 \cos \theta + \rho) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{2}{3} \rho^3 \cos \theta + \frac{\rho^2}{2} \right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left(\frac{3\theta}{4} + \frac{2}{3} \sin \theta \right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

6.2.28. Υπολογίστε την μάζα ενός λεπτού τριγωνικού ελασματος. Το ελασμα ορίζεται από τις γραμμές $y = 0$, $y = 2x$ και $x = 1$ και έχει πυκνότητα $d(x, y) = 6x + 6y + 6$.

Λυση. Το τριγωνικό ελασμα έχει κορυφές στα σημεία τομής των ευθειών, τα οποία είναι $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (1, 2)$ (γιατί; κάντε το σχήμα!). Άρα η ζητούμενη μάζα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy dx &= \int_0^1 \left((6xy + 3y^2 + 6y)_{y=0}^{y=2x} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx = (8x^3 + 6x^2)_{x=0}^{x=1} = 14. \end{aligned}$$

6.2.29. Υπολογίστε την μάζα ενός λεπτού δίσκου με κέντρο το $(0, 0)$, ακτίνα R και του οποίου η πυκνότητα μεταβάλλεται αναλόγα με την απόσταση από το κέντρο του.

Λυση. Ο δίσκος έχει την εξίσωση $x^2 + y^2 \leq R^2$. Η πυκνότητα του είναι $d(x, y) = \frac{d_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Η μάζα θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{d_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx.$$

Δουλεύοντας σε πολικές συντεταγμένες το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{d_0}{\rho} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} (d_0 \rho)_{\rho=0}^{\rho=R} d\theta = \int_0^{2\pi} d_0 R d\theta = (d_0 R \theta)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi R d_0.$$

6.2.30. Υπολογίστε την μάζα του ανώ μισού ενός λεπτού δίσκου με κέντρο το $(0, 0)$, ακτίνα R και του οποίου η πυκνότητα στο σημείο (x, y) είναι $d_0 y$.

Λυση. Σε πολικές συντεταγμένες ο δίσκος έχει την εξίσωση $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$. Η ζητούμενη μάζα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^R d_0 y \rho d\rho d\theta &= \int_0^\pi \int_0^R d_0 \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left(d_0 \frac{\rho^3}{3} \right)_{\rho=0}^{\rho=R} \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi d_0 \frac{R^3}{3} \sin \theta d\theta = \left(d_0 \frac{R^3}{3} \cos \theta \right)_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{2}{3} d_0 R^3. \end{aligned}$$

6.3 Άλυτα Προβλήματα

6.3.1. Υπολογίστε το $\int_0^a \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$.

Απ. $\frac{2}{3} a^{3/2}$.

6.3.2. Υπολογίστε το $\int_2^4 \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy dx$.

Απ. 9.

6.3.3. Υπολογίστε το $\int_1^2 \int_0^{\ln y} e^x dx dy$.

Απ. 1/2.

6.3.4. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Απ. 1/2.

6.3.5. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $y^2 = \frac{b^2}{a} x$, $y = \frac{b}{a} x$.

Απ. $\frac{ab}{6}$.

6.3.6. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.

Απ. 16/3.

6.3.7. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $x = y$, $y = 5x$, $x = 1$.

Απ. 2.

6.3.8. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$.

Απ. $6 - 4 \ln 2$.

6.3.9. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$.

Απ. 100/6.

6.3.10. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $ay = x^2 - 2ax$, $y = x$.

Απ. $9a^2/2$.

6.3.11. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $y = \ln x$, $x - y = 1$, $y = -1$.

Απ. $\frac{e-2}{2e}$.

6.3.12. Υπολογίστε το εμβαδο του σχήματος που ορίζεται από: $xy = a^2/2$, $xy = 2a^2$, $y = x/2$, $y = 2x$.

Απ. $\frac{3}{2} a^2 \ln 2$.

6.3.13. Υπολογίστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

Απ. $\frac{5}{8}\pi a^2$.

6.3.14. Υπολογίστε το $\int \int_D x^3 y^2 dx dy$ οπου $D : x^2 + y^2 \leq R^2$.

Απ. 0.

6.3.15. Υπολογίστε το $\int \int_D xy dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

Απ. 1.

6.3.16. Υπολογίστε το $\int \int_D e^{x+y} dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Απ. $(e - 1)^2$.

6.3.17. Υπολογίστε το $\int \int_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Απ. $\pi/12$.

6.3.18. Υπολογίστε το $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ οπου $D : y = x^2, x = y^2$.

Απ. $33/140$.

6.3.19. Υπολογίστε το $\int \int_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ οπου $D : x = 2, y = x, xy = 1$.

Απ. $9/4$.

6.3.20. Υπολογίστε το $\int \int_D x \sin(x + y) dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$

Απ. $\pi - 2$.

6.3.21. Υπολογίστε το $\int \int_D x^2 e^{xy} dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

Απ. 2.

6.3.22. Υπολογίστε το $\int \int_D x^3 y^2 dx dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Απ. 0.

6.3.23. Υπολογίστε το $\int \int_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, D είναι το χωριο που οριζεται απο $x = 2, y = x$ και $xy = 1$.

Απ. $9/4$.

6.3.24. Υπολογίστε το $\int \int_D \cos(x + y) dx dy$, D είναι το χωριο που οριζεται απο $x = 0, y = \pi$ και $x = y$.

Απ. -2 .

6.3.25. Υπολογίστε το $\int \int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, είναι το χωριο που οριζεται απο $x \geq 0, y \geq 0$ και $x^2 + y^2 \leq 1$.

Απ. $\pi/6$.

6.3.26. Υπολογίστε το $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy dx$.

Απ. $\pi/4 - \text{υποδ.}$ χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες..

6.3.27. Υπολογίστε το $\int \int_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dy dx$, D είναι το χωριο που οριζεται απο $x \geq 0, y \geq 0$ και $x^2 + y^2 \leq 1$.

Απ. $\frac{\pi^2 - 2\pi}{8} - \text{υποδ.}$ χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

6.3.28. Υπολογίστε το $\int \int_D (h - 2x - 3y) dydx$, D είναι ο κυκλος $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Απ. $\pi R^2 h$ - **υποδ.** χρησιμοποιησθε πολικες συντεταγμενες.

6.3.29. Υπολογίστε το $\int \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dydx$, D είναι ο κυκλος $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Απ. $\frac{R^3}{3}$ - **υποδ.** χρησιμοποιησθε πολικες συντεταγμενες.

6.3.30. $\int \int_D xy dydx$, D είναι η ελλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Απ. $\frac{a^2 b^2}{8}$ - **υποδ.** χρησιμοποιησθε πολικες συντεταγμενες.

6.3.31. Υπολογίστε το $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dydx$.

Απ. $\pi/4$ - **υποδ.** χρησιμοποιησθε πολικες συντεταγμενες.

6.3.32. Υπολογίστε το $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dydx$.

Απ. $\pi/4$ - **υποδ.** χρησιμοποιησθε πολικες συντεταγμενες.

6.3.33. Υπολογίστε το $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dydx$.

Απ. $\pi/4$ - **υποδ.** χρησιμοποιησθε πολικες συντεταγμενες.

6.3.34. Υπολογίστε το $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dydx$.

Απ. $\pi/4$ - **υποδ.** χρησιμοποιησθε πολικες συντεταγμενες.

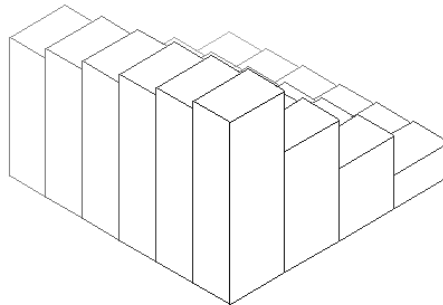
6.3.35. Υπολογίστε το $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dydx$.

Κεφάλαιο 7

Τριπλα Ολοκληρώματα

7.1 Θεωρία

7.1.1. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μια κλειστή επιφάνεια A η οποία ορίζει ένα χώρο D (δες σχήμα). Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο V του D . (δες Σχ.8.1).



Σχήμα 7.1

7.1.2. Για να υπολογίσουμε το V χρησιμοποιούμε την κλασική τεχνική του ολοκληρωτικού λογισμού: υποδιαιρούμε το V σε μικρά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα· τότε το V είναι το όριο του αθροίσματος

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum \sum \sum \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Παραλείποντας τις τεχνικές λεπτομερείες, μπορούμε να πούμε ότι το V είναι το *τριπλο ολοκλήρωμα*

$$V = \int \int \int_D dV. \quad (7.1)$$

Προσεξτε ότι το dV είναι ο *στοιχειώδης όγκος* και $dV = dx dy dz$.

7.1.3. Ο ζητούμενος όγκος μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας το τριπλο ολοκλήρωμα με το *επαναληπτικό ολοκλήρωμα*

$$V = \int \int \int_D dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z_1)}^{y_2(z_2)} \int_{x(y_1, z_1)}^{x(y_2, z_2)} dx dy dz. \quad (7.2)$$

7.1.4. Γενικότερα, το τριπλο ολοκλήρωμα μιας συναρτησης $f(x, y, z)$ (δηλ. το οριο $\sum f(x, y, z) \Delta V$) συμβολίζεται ως εξής

$$V = \int \int \int_D dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z_1)}^{y_2(z_2)} \int_{x(y_1, z_1)}^{x(y_2, z_2)} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (7.3)$$

7.1.5. Να μερικές βασικές ιδιότητες του τριπλου ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned} a \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz &= \int \int \int_D a f(x, y, z) dx dy dz \\ \int \int \int_D [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dx dy dz &= \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz + \int \int \int_D g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

και, αν για κάθε $(x, y, z) \in D$ έχουμε $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, τότε

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \int \int \int_D g(x, y, z) dx dy dz.$$

7.1.6. Τέλος, υπάρχει ένα *θεώρημα μέσης τιμής* για τα τριπλα ολοκλήρωματα: αν η $f(x, y, z)$ είναι ορισμένη και συνεχής στον τοπο D ο οποίος έχει ογκο V , τότε υπάρχει $(x_0, y_0, z_0) \in D$ τέτοιο ώστε

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V.$$

7.1.7. Από τις (7.1)–(7.3) φαίνεται ότι υπολογίζουμε το τριπλο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τρία “απλά” ολοκλήρωματα, όπου τα όρια ολοκλήρωσης εξαρτώνται από την επιφάνεια A . Η κυριότερη δυσκολία στον υπολογισμό του διπλου ολοκλήρωματος είναι ο προσδιορισμός των καταλλήλων ορίων ολοκλήρωσης.

7.1.8. Πολλές φορές ο υπολογισμός του διπλου ολοκλήρωματος διευκολύνεται από την αλλαγή συντεταγμένων. Εστω ότι τα (x, y, z) εκφράζονται σαν συναρτήσεις των νέων συντεταγμένων (u, v, w) από τις εξισώσεις

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

οι οποίες μετασχηματίζουν το D στο D' . Τότε έχουμε

$$f(x, y, z) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

και το στοιχειώδες εμβαδο dV δίνεται από την σχέση

$$dS = dx dy dz = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} du dv dw.$$

Έτσι το τριπλο ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται ως εξής

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} du dv dw.$$

7.1.9. Π.χ., όταν χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες, $u = \rho$, $v = \theta$, $w = z$ και ισχύουν οι σχέσεις

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

και

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho.$$

Οπότε $dx dy dz = \rho d\rho d\theta dz$ και

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{D'} f(x(\rho, \theta, z), y(\rho, \theta, z), z(\rho, \theta, z)) \rho d\rho d\theta dz.$$

7.1.10. Παρομοία, όταν χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες, $u = r$, $v = \theta$, $w = \phi$ και ισχύουν οι σχέσεις

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi$$

και

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \phi.$$

Οπότε $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ και

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{D'} f(x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi.$$

7.2 Λυμένα Προβλήματα

7.2.1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^5 dz dy dx$.

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^5 dz \right) dy \right) dx &= \int_0^3 \left(\int_0^2 (z)_{z=0}^{z=5} dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_0^2 5 dy \right) dx \\ &= \int_0^3 (5y)_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^3 10 dx = (10x)_{x=0}^{x=3} = 30. \end{aligned}$$

7.2.2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^5 xyz dz dy dx$.

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^5 xyz dz \right) dy \right) dx &= \int_0^3 \left(\int_0^2 xy \left(\frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=5} dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_0^2 xy \frac{25}{2} dy \right) dx \\ &= \int_0^3 x \left(\frac{25 y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^3 \frac{100}{4} x dx = \left(\frac{25 x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=3} = \frac{225}{2}. \end{aligned}$$

7.2.3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_P xyz dz dy dx$ όπου P είναι το τετραέδρο που έχει κορυφές τα σημεία $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Λυση. Το τετραεδρο φρασσεται απο τεσσερα επιπεδα (καντε το σχημα). Π.χ. ενα εξ αυτων ειναι το επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ το οποιο οριζεται απο τα σημεια $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, αρα ικανοποιει

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0$$

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D = 0$$

δηλ. ειναι $A = -D, B = -D, D = 0$, οποτε ειναι $Cz = 0$ ή απλα $z = 0$. Τα υπολοιπα επιπεδα ειναι $x = 0, y = 0$ και $x + y + z = 1$. Βρισκουμε την βαση Q του τετραεδρου (στο επιπεδο $z = 0$) παιρνοντας $z = 0$ οποτε εχουμε (στο επιπεδο $z = 0$) το τριγωνο

$$Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Το δε τετραεδρο ειναι

$$P = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

οποτε το ολοκληρωμα γινεται

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} xyz dz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy \left(\frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{4}x^3y^2 + \frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{1}{8}xy^4 \right)_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{24}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{48}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{144}x^6 \right)_{x=0}^1 = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

7.2.4. Να υπολογιστει το $\int \int \int_D (x^2 - 3y + 2z) dz dy dx$ οπου το χωριο D ειναι

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Λυση. Ειναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2 - 3y + 2z) dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2z - 3yz + z^2)_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} ((x^2 - 3y)(1-x-y) + (1-x-y)^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(y^3 + \frac{1}{2}(-x^2 - 3 + 3x)y^2 + x^2(1-x)y - \frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = -\frac{1}{40} \end{aligned}$$

7.2.5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_D (y + z) dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τα $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $z = 0$ και $x + z = 1$.

Λυση. Οι $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ είναι δυο παραβολικοί κυλινδρικοί. Το χωρίο D έχει την μορφή του παρακάτω σχήματος. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{1-x} (y + z) dz dy dx &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(yz + \frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=1-x} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(y(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} (1-x) + y \frac{(1-x)^2}{2} \right)_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} (1-x) + \sqrt{x} \frac{(1-x)^2}{2} - \left(\frac{x^4}{2} (1-x) + x^2 \frac{(1-x)^2}{2} \right) \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 \right) dx \\ &= \frac{53}{420}. \end{aligned}$$

7.2.6. Βρείτε τον όγκο του στερεού D το οποίο ορίζεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + 3y^2$ και $z = 8 - x^2 - y^2$.

Λυση. Το D ορίζεται από τα δυο παραβολοειδή και άρα τα όρια ολοκλήρωσης του z είναι

$$x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2.$$

Πρέπει τώρα να βρούμε τα όρια των x και y . Αυτό το πετυχαίνουμε υπολογίζοντας την καμπυλή τομής των δυο παραβολοειδών, δηλ. λύνοντας την

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2 \Rightarrow 2x^2 + 4y^2 = 8 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4.$$

Αυτή είναι μια ελλείψη, άρα τα όρια να είναι

$$-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{4-x^2}{2}}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Οποτε ο ογκος ειναι

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (8 - x^2 - y^2 - x^2 - 3y^2) dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(8y - 2x^2y - \frac{4y^3}{3} \right)_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{y=\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(2(8 - 2x^2) \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3} \sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^3} \right) dx \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 \left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} dx = 8\pi\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

7.2.7. Βρείτε τον ογκο του στερεου

$$D = \{(x, y, z) : 2 \leq z \leq 5, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Λυση. Η επιφαναεια $y = x^2$ ειναι παραβολικος κυλινδρος και η $y = x$ επιπεδο. Η βαση P του στερεου βρισκεται στο επιπεδο $z = 2$ και ειναι

$$P = \{(x, y, z) : z = 2, x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$$

(οπου 0 και 1 ειναι τα σημεια τομης των $y = x^2, y = x$). Ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_2^5 dz dy dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x 3 dy dx = \int_0^1 (3x - 3x^2) dx = \frac{1}{2}.$$

7.2.8. Βρείτε τον ογκο ενός στερεου το οποιο οριζεται απο την επιφαναεια $z = 4 - x^2 - y^2$ και το επιπεδο $z = 0$.

Λυση. Θα χρησιμοποιησουμε κυλινδρικες συντεταγμενες. Ο ογκος ειναι

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-x^2-y^2} dz \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - x^2 - y^2) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4\rho - \rho^3) d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=0}^{\rho=2} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (8 - 4) d\theta = 8\pi.
 \end{aligned}$$

7.2.9. Βρείτε τον όγκο ενός στερεού το οποίο ορίζεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ και το επίπεδο $z = 0$.

Λυση. Κατασκευάστε το σχήμα του στερεού. Προσεξτε ότι η $x^2 + y^2 = 4$ είναι κυλινδρική επιφάνεια. Θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-x^2-y^2} dz \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (z)_{z=0}^{z=\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=0}^{\rho=2} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$

7.2.10. Βρείτε τον όγκο του στερεού D το οποίο ορίζεται από την σφαίρα $r = 1$ και τον κώνο $\phi = \pi/3$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες).

Λυση. Ο όγκος είναι (δείτε το σχήμα)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \cos \phi \right)_{\phi=0}^{\phi=\pi/3} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) d\theta = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

7.2.11. Βρείτε τον όγκο του στερεού που αποκοπεί ο κυλινδρός με εξίσωση (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) $\rho = 2 \sin \theta$ από την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Λυση. Δείτε το σχήμα. Θα δουλέψουμε με κυλινδρικές συντεταγμένες. Τα όρια του z δίνονται από το γεγονός ότι

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Rightarrow \rho^2 + z^2 \leq 4 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{4 - \rho^2}$$

οπότε ο ζητούμενος ογκος είναι

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho dz d\rho d\theta &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} 2\sqrt{4-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} (4-\rho^2)^{1/2} d(\rho^2) d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{2}{3} (4-\rho^2)^{3/2} \right)_{\rho=0}^{\rho=2\sin\theta} d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (8-8\cos^3\theta) d\theta \\
 &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta) \cos\theta d\theta \\
 &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta) d(\sin\theta) \\
 &= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3} \left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right)_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
 &= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{3}.
 \end{aligned}$$

7.2.12. Να βρεθεί ο ογκος του στερεου που περιεχεται μεταξυ των

$$\begin{aligned}
 S_1 : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} - \frac{z^2}{4} &= 1 \\
 S_2 : x^2 + y^2 &= 25
 \end{aligned}$$

Λυση. Η S_1 είναι ένα μονοχωνο υπερβολοειδης και η S_2 ένας κυλινδρος (δες σχημα). Όταν αυτές τεμνονται έχουμε

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} - \frac{z^2}{4} &= 1 \\
 x^2 + y^2 &= 25
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 - \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow z = \pm 4.$$

Άρα οι S_1 και S_2 τεμνονται κατα δυο κυκλους:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 25, z = 4\} \\
 C_2 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 25, z = -4\}
 \end{aligned}$$

Για να υπολογισουμε τον ζητούμενο ογκο V , θα αφαιρέσουμε απο τον ογκο του εξωτερικου κυλινδρου V_1 τον ογκο του εσωτερικου υπερβολοειδους. Έχουμε $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 200\pi$. Ο ογκος του υπερβολοειδους είναι το ολοκληρωμα των ογκων των λεπτων δισκων με ακτινα

$$\rho(z) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5 \cdot \left(1 + \frac{z^2}{4} \right)}$$

Οποτε εχουμε

$$V_2 = \int_{-4}^4 \pi \rho^2 dz = \int_{-4}^4 5\pi \left(1 + \frac{z^2}{4}\right) dz = \frac{280\pi}{3}.$$

Τελικα λοιπον ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$V = V_1 - V_2 = \frac{200\pi}{1} - \frac{280}{3}\pi = \frac{320}{3}\pi.$$

7.2.13. Να υπολογιστει ο ογκος του χωριου που οριζεται απο τις κυλινδρικες επιφανειες $S_1 : x^2 + y^2 = a^2$ και $S_2 : x^2 + z^2 = a^2$.

Λυση. Λογω συμμετριας αρκει να υπολογισουμε τον ογκο του ενος ογδου του χωριου, το οποιο απεικονιζεται στο παρακατω σχημα. Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned} V &= 8V' = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz dy dx \\ &= 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy dx = 8 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= 8 \int_0^a (a^2-x^2) dx = 8 \left(a^2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} = 8a^3 - \frac{8a^3}{3} = \frac{16a^3}{3}. \end{aligned}$$

7.2.14. Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int \int \int_D (x^2 + y^2) dz dy dx$ οπου το χωριο D ειναι αυτο της προηγουμενης ασκησης.

Λυση. Το ζητουμενο ειναι (σε σφαιρικες συντεταγμενες)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 (x^2 + y^2) r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 (r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta) r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^4 \sin^3 \phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{5} \sin^3 \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 \phi) d \cos \phi d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left(\cos \phi - \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/3} d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

7.2.15. Βρειτε την μαζα του κυβου

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

του οποιου η πυκνοτητα ειναι ιση με το τετραγωνο της αποστασης απο το κεντρο.

Λυση. Η πυκνότητα είναι $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και η ζητούμενη μάζα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x + z^2 x \right)_{x=0}^{x=1} dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + z^2 \right) dy dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} + z^2 y \right)_{y=0}^{y=1} dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + z^2 \right) dz \\ &= \left(\frac{2z}{3} + \frac{z^3}{3} \right)_{z=0}^{z=1} dz = 1. \end{aligned}$$

7.2.16. Βρείτε την μάζα ενός ημισφαιρίου με ακτίνα R του οποίου η πυκνότητα είναι αναλογική της απόστασης από το κέντρο.

Λυση. Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες. Η πυκνότητα είναι $d(r) = kr$ και η ζητούμενη μάζα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R kr \cdot r^2 dr \sin \phi d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} k \frac{R^4}{4} \sin \phi d\phi d\theta \\ &= k \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} (-\cos \phi)_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} d\theta \\ &= k \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} (0 + 1) d\theta = \frac{k\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

7.2.17. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_D z(y^2 + z^2) dx dy dz$, όπου D είναι το ημισφαίριο με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 2.

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z (y^2 + z^2) dz dy dx &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z (y^2 + z^2) dz dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\frac{y^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right)_{z=0}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\frac{y^2 (4-x^2-y^2)}{2} + \frac{(4-x^2-y^2)^2}{4} \right) dy dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left((4-x^2)^2 - y^4 \right) dy dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \left((4-x^2)^2 y - \frac{y^5}{5} \right)_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx \\
 &= \frac{4}{5} \int_0^2 (4-x^2)^{5/2} dx \quad (\mu\epsilon x = 2 \sin u) \\
 &= \frac{4}{5} \int_{u=0}^{u=\pi/2} 64 \cos^6 u du = 8\pi.
 \end{aligned}$$

7.2.18. Βρείτε την μάζα του στερεού που ορίζεται από τον κώνο $\phi = \pi/6$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες) και το επίπεδο $z = a$, αν η πυκνότητα του είναι $d(r, \phi, \theta) = r \cos \phi$.

Λυση. Θα δουλέσουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες. Πρέπει να βρούμε τα όρια του r . Έχουμε

$$0 \leq z \leq a \Rightarrow 0 \leq r \cos \phi \leq a \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{a}{\cos \phi}.$$

Οποτε η ζητούμενη μάζα είναι

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{a/\cos \phi} d(r, \phi, \theta) r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{a/\cos \phi} r^3 \cos \phi \sin \phi dr d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \left(\frac{r^4}{4} \right)_{r=0}^{r=a/\cos \phi} \cos \phi \sin \phi d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \frac{a^4}{4 \cos^3 \phi} \sin \phi d\phi d\theta \\
 &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \cos^{-3} \phi d(\cos \phi) d\theta \\
 &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^{-2} \phi}{-2} \right)_{\phi=0}^{\phi=\pi/6} d\theta = \frac{a^4}{24} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi a^4}{12}.
 \end{aligned}$$

7.2.19. Βρείτε την μάζα του στερεού που ορίζεται από την σφαίρα $r = 5$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες) και το επίπεδο $z = 4$, αν η πυκνότητα του είναι $d(r, \phi, \theta) = r^{-1}$.

Λυση. Θα δουλέψουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες. Πρέπει να βρούμε τα όρια του r . Έχουμε (δείτε το σχήμα)

$$4 \leq z \Rightarrow 4 \leq r \cos \phi \Rightarrow \frac{4}{\cos \phi} \leq r \text{ όπως και } r \leq 5.$$

Επίσης τα όρια του ϕ είναι $0 \leq \phi \leq \arccos \frac{4}{5}$. Οποτε η ζητούμενη μαζα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(4/5)} \int_{4/\cos\phi}^5 d(r, \phi, \theta) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(4/5)} \int_{4/\cos\phi}^5 r \sin\phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(4/5)} \left(\frac{r^2}{2}\right)_{r=4/\cos\phi}^{r=5} \sin\phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(4/5)} \left(\frac{25}{2} - \frac{8}{\cos^2\phi}\right) \sin\phi d\phi d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(4/5)} \left(\frac{25}{2} - \frac{8}{\cos^2\phi}\right) d(\cos\phi) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{2} \cos\phi + \frac{8}{\cos\phi}\right)_{\phi=0}^{\phi=\arccos(4/5)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{2} + 8 - \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{8}{4/5}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi \end{aligned}$$

7.2.20. Υπολογίστε το $\int \int \int_D (2x + 3y)^2 dx dy dz$ όπου $D = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1 \right\}$.

Λυση. Θα χρησιμοποιήσουμε δυο μετασχηματισμούς. Πρώτα θετούμε

$$x = 2u, \quad y = 3v, \quad z = 4w.$$

Τότε έχουμε $dx dy dz = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 24$ και

$$D = \left\{ (x, y, z) : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \right\}$$

οποτε μπορούμε να μεταχειριστούμε σφαιρικές συντεταγμένες, ως ένα μετασχηματισμο των συντεταγμενων u, v, w :

$$u = r \cos\theta \sin\phi$$

$$v = r \sin\theta \sin\phi$$

$$w = r \cos\phi$$

Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned} \int \int \int_D (2x + 3y)^2 dx dy dz &= \int \int \int_D (4u + 9v)^2 24 du dv dw \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (4r \cos\theta \sin\phi + 9r \sin\theta \sin\phi)^2 24r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \\ &= 24 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (4 \cos\theta + 9 \sin\theta)^2 r^4 \sin^3\phi dr d\phi d\theta \\ &= 24 \left(\int_0^1 r^4 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin^3\phi d\phi \right) \left(\int_0^{2\pi} (4 \cos\theta + 9 \sin\theta)^2 d\theta \right) \\ &= \frac{4656\pi}{15}. \end{aligned}$$

7.3 Άλυτα Προβλήματα

7.3.1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 dz dy dx$.

(Απ. 6)

7.3.2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x + y + z) dz dy dx$.

(Απ. $\frac{1}{2}bca(a + c + b)$)

7.3.3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^a \int_0^x \int_0^y xyz dz dy dx$.

(Απ. $a^6/48$)

7.3.4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^a \int_0^x \int_0^{xy} x^3 y^3 z dz dy dx$.

(Απ. $a^{12}/144$)

7.3.5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_D \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

(Απ. $\frac{1}{2}(\ln(2) - \frac{5}{8})$)

7.3.6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_D xy dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τα $z = xy$, $x + y = 1$ και $z = 0$.

(Απ. $1/180$)

7.3.7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_D y \cos(z+x) dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τα $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$ και $x + z = \pi/2$.

(Απ. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$)

7.3.8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^a dz dy dx$.

(Απ. $\pi a/2$)

7.3.9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$.

(Απ. $8a^2/9$)

7.3.10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz dy dx$.

(Απ. $4\pi R^5/15$)

7.3.11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx$.

(Απ. $\pi/8$)

7.3.12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_D (x^2 + y^2) dz dy dx$ όπου το D ορίζεται από τα $z \geq 0$, $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

(Απ. $\frac{4\pi(R^5 - r^5)}{15}$)

7.3.13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \int \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} dz dy dx$ όπου το D ορίζεται από το $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(Απ. $\frac{2\pi}{3}$)

7.3.14. Υπολογίστε το ολοκληρώμα $\int \int \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} dz dy dx$ όπου το D ορίζεται από το $x^2 + y^2 \leq 1$.

(Απ. $\pi \left(3\sqrt{10} + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-1} - \sqrt{2} - 8 \right)$)

7.3.15. Υπολογίστε το ολοκληρώμα $\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x+y+z)^4} dz dy dx$.

(Απ. $\frac{1}{6}$)

7.3.16. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, y = 0, z = 0, 3x + 2y + z = 6$.

Απ. 6.

7.3.17. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $z = 0, 2y = x, x = 1, y = 0, z = x^2 + 3y + 1$.

Απ. $1/2$.

7.3.18. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $z = 0, y = x, y = 2x, y = 3, z = x + y^2$.

Απ. $27/2$.

7.3.19. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x^2 = 2y, y = 2, z = 0, z = x^2 + 3y^2$.

Απ. 8π .

7.3.20. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 4 - x^2$.

Απ. $22/3$.

7.3.21. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $z = 1 - y^2, x^2 = 4y, z = 0$.

Απ. $32/21$.

7.3.22. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $3y = 9 - x^2, z = 0, y = 0, x = 3 - z$.

Απ. 36.

7.3.23. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, x = 16 - z^2 - 4y^2$.

Απ. 64π .

7.3.24. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x^2 + y^2 = k^2, z = 0, z = k^2 - x^2$ ($k > 0$).

Απ. $3\pi k^4/4$.

7.3.25. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $z = 0, y = 3x, y = x, z = 16 - x^2$.

Απ. $abc/6$.

7.3.26. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $z = 4 - x^2, z = 4 - y^2$.

Απ. 32.

7.3.27. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$.

Απ. $16a^3/3$.

7.3.28. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Απ. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

7.3.29. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

Απ. $2\pi a^3 (8 - 3\sqrt{3})/3$.

7.3.30. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $r = 2, y - x + 2z = 8$.

Απ. 16π .

7.3.31. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $r = 3 \sin \theta, z = x$.

Απ. $9/4$.

7.3.32. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $r = 1 - \cos \theta, z = y$.

Απ. $4/3$.

7.3.33. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x^2 + y^2 = 1, z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Απ. $4\pi/3$.

7.3.34. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, y = 0, z = 0, x = 4, y = 4$ και $z = x^2 + y^2 + 1$

Απ. $\frac{560}{3}$.

7.3.35. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Απ. $\frac{abc}{6}$.

7.3.36. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Απ. $84/3$.

7.3.37. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $z = x + y + a, y^2 = ax, x = a, z = 0, y = 0$.

Απ. $79a^3/60$.

7.3.38. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $y = 0, z = 0, 3x + y = 6, 3x + 2y = 12, x + y + z = 6$.

Απ. 12 .

7.3.39. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, y = 0, z = 0, z = x^2 + y^2, x + y = 1$.

Απ. $1/6$.

7.3.40. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$.

Απ. $16a^3/3$.

7.3.41. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $z^2 = xy, x = a, x = 0, y = a, y = 0$.

Απ. $8a^3/9$.

7.3.42. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από: $x = 0, y = 0, z = 0, z = 9 - y^2, 3x + 4y = 12$.

Απ. 45.

Απ. $\pi/4$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες.

7.3.43. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $z = mx, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.

Απ. $4ma^3/3$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.44. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $az = a^2 - x^2 - y^2, z = 0$.

Απ. $\pi a^3/2$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.45. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, x^2 + y^2 = a^2$.

Απ. $4\pi a^3\sqrt{3}$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.46. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Απ. $16ab^2/3$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.47. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $z^2 = (x + a)^2, x^2 + y^2 = a^2$.

Απ. $2\pi a^3$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.48. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $z = \frac{4}{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$.

Απ. $8\pi \ln 2$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.49. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $az = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 \pm ax = 0$.

Απ. $3\pi a^3/16$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.50. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $z = a, x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = 5a^2$ (με $a \leq z \leq a\sqrt{5}$).

Απ. $\pi a^3 (10\sqrt{5} - 19)/3$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.51. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $r = a, z = a^2 - x^2, z \geq 0$.

Απ. $3\pi a^4/4$ - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

7.3.52. Υπολογίστε τον όγκο του σχήματος που ορίζεται από $z = 12 - x^2 - y^2, z = 8$.

Απ. 8π - **υποδ.** χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Κεφάλαιο 8

Καμπυλες και Διανυσματικες Συναρτησεις

8.1 Θεωρια

8.1.1. Σε πολλές εφαρμογες χρησιμοποιουμε *διανυσματικες συναρτησεις*, δηλ. συναρτησεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και πεδίο τιμών το \mathbb{R}^3 . Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι το *διανυσμα θεσης* $\mathbf{r}(t)$: αν θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή t δηλώνει τον χρόνο, τότε το διανυσμα

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

ορίζει την *χρονικά μεταβαλλόμενη* θέση ενός σημείου $(x(t), y(t), z(t))$. Το σύνολο των σημείων $\{(x(t), y(t), z(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$ δίνει την *τροχιά* του σημείου, η οποία γεωμετρικά είναι μια *καμπύλη* στον χώρο. είναι

8.1.2. Γενικότερα, μια διανυσματική συνάρτηση έχει την μορφή $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, δηλ. είναι ένα διανυσμα του οποίου οι συνιστώσες είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής t :

$$\mathbf{F}(t) = P(t)\mathbf{i} + Q(t)\mathbf{j} + R(t)\mathbf{k}.$$

8.1.3. Το όριο της $\mathbf{F}(t)$ όταν το t τείνει στο t_0 ορίζεται ως εξής

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}_0| < \varepsilon).$$

8.1.4. Λέμε ότι η $\mathbf{F}(t)$ είναι *συνεχής στο σημείο* t_0 αν έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0).$$

8.1.5. Η *παραγωγός* της $\mathbf{F}(t) = P(t)\mathbf{i} + Q(t)\mathbf{j} + R(t)\mathbf{k}$ ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{F}'(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} \mathbf{i} + \frac{dQ}{dt} \mathbf{j} + \frac{dR}{dt} \mathbf{k}.$$

και έχει τις εξής ιδιότητες

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \frac{d}{dt}\mathbf{F} + \frac{d}{dt}\mathbf{G} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{F} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{F}(t) \times \frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G} \times \frac{d}{dt}\mathbf{F} \\ \frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F}) &= \mathbf{F} \frac{d}{dt}\phi + \phi \frac{d}{dt}\mathbf{F} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{G} \times \frac{d}{dt}\mathbf{H}\right) + \mathbf{F} \cdot \left(\frac{d}{dt}\mathbf{G} \times \mathbf{H}\right) + \frac{d}{dt}\mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{H}). \end{aligned}$$

8.1.6. Από τον τύπο

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{dP}{dt}\mathbf{i} + \frac{dQ}{dt}\mathbf{j} + \frac{dR}{dt}\mathbf{k}$$

παιρνουμε τον τύπο για το διαφορικό:

$$d\mathbf{F} = dP\mathbf{i} + dQ\mathbf{j} + dR\mathbf{k}$$

για το οποίο ισχύουν:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= d\mathbf{F} + d\mathbf{G} \\ d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot d\mathbf{F} \\ d(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{F}(t) \times d\mathbf{G} + \mathbf{G} \times d\mathbf{F} \\ d(\phi\mathbf{F}) &= \mathbf{F}d\phi + \phi d\mathbf{F} \\ d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times d\mathbf{H}) + \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{G} \times \mathbf{H}) + d\mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{H}). \end{aligned}$$

8.1.7. Θεωρείστε ένα σημείο M το οποίο κινείται στον τριδιάστατο χώρο. Σε κάθε χρονική στιγμή, οι συντεταγμένες του σημείου είναι $(x(t), y(t), z(t))$. Το σημείο M διαγράφει μια καμπύλη C , η οποία μπορεί να παρασταθεί σε *παραμετρική μορφή*:

$$C : (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Επίσης, η C μπορεί να παρασταθεί και ως *διανυσματική συνάρτηση*

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Στο παρόν τεύχος θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως την διανυσματική αναπαράσταση¹.

8.1.8. Αν τώρα $\mathbf{r}(t)$ είναι μια καμπύλη, γεωμετρικά η παραγωγός $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ είναι το *εφαπτομένο στην καμπύλη διάνυσμα*.

¹Σημειώνουμε ότι μια καμπύλη C στον 3-διάστατο χώρο μπορεί να παρασταθεί και ως τομή δύο επιφανειών:

$$C : \phi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

8.1.9. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ λέγεται *κλειστή* εάν έχουμε $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, *βία* εάν για κάθε t η $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός (δηλ. η καμπύλη έχει μια καλώς ορισμένη εφαπτομένη που αλλάζει κατεύθυνση με συνεχή τρόπο), *απλή* εάν δεν τέμνει τον εαυτό της (για κάθε $p \neq q$ έχουμε $\mathbf{r}(p) \neq \mathbf{r}(q)$).

8.1.10. Θεωρείστε την *εφαπτομένη ευθεία* στην καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ στο σημείο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{i}x(t_0) + \mathbf{j}y(t_0) + \mathbf{k}z(t_0) = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$. Ας συμβολίσουμε την εφαπτομένη με $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}X(t) + \mathbf{j}Y(t) + \mathbf{k}Z(t)$, τότε η $\mathbf{R}(t)$ έχει εξίσωση

$$(\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_0) \times \frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = 0 \text{ ή και } \frac{X(t) - x_0}{x'(t_0)} = \frac{Y(t) - y_0}{y'(t_0)} = \frac{Z(t) - z_0}{z'(t_0)}.$$

8.1.11. Θεωρείστε τώρα το *καθείο επίπεδο* στην $\mathbf{r}(t)$ στο σημείο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{i}x(t_0) + \mathbf{j}y(t_0) + \mathbf{k}z(t_0) = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$. Ας συμβολίσουμε ένα τυχόν σημείο του καθείου επιπέδου με $\mathbf{R} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z$, θα ισχύει

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = 0$$

ή και

$$x'(t_0) \cdot (X - x_0) + y'(t_0) \cdot (Y - y_0) + z'(t_0) \cdot (Z - z_0) = 0.$$

8.1.12. Ολοκλήρωμα. Το (αοριστο, ορισμένο) *ολοκλήρωμα* της $\mathbf{F}(t)$ ορίζεται ως εξής

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \left[\int P(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int Q(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int R(t) dt \right] \mathbf{k},$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int_{t_1}^{t_2} R(t) dt \right] \mathbf{k}.$$

Ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και αναλογές επεκτασεις. Π.χ.

$$\int c\mathbf{F}(t) dt = c \int \mathbf{F}(t) dt,$$

$$\int \mathbf{c} \cdot \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{c} \cdot \int \mathbf{F}(t) dt,$$

$$\int \mathbf{c} \times \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{c} \times \int \mathbf{F}(t) dt.$$

8.2 Λυμένα Προβλήματα

8.2.1. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία στα οποία τέμνονται οι καμπύλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}(t^2 + 1) + \mathbf{j}t + \mathbf{k}e^t$.

Λυση. Θα πρέπει να έχουμε $\mathbf{F}(t) = \mathbf{G}(t)$ δηλ.

$$\cos t = t^2 + 1$$

$$\sin t = t$$

$$1 = e^t$$

Ευκολά βλέπουμε ότι η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος είναι $t = 0$. Οπότε το μοναδικό σημείο τομής αντιστοιχεί στο $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, δηλ. είναι το $(1, 0, 1)$.

8.2.2. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία στα οποία τέμνονται οι καμπύλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} + kt$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}\frac{e^t}{t+1}$.

Λυση. Θα πρέπει να έχουμε $\mathbf{F}(t) = \mathbf{G}(t)$ δηλ.

$$\begin{aligned} \cos t &= t^2 \\ 1 &= 2t \\ t &= \frac{e^t}{t+1} \end{aligned}$$

Απο την δεύτερη εξίσωση θα πρέπει να έχουμε $t = 1/2$, αλλά τότε από την πρώτη θα πρέπει να έχουμε $\cos \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, το οποίο δεν ισχύει. Άρα οι καμπύλες δεν τέμνονται.

8.2.3. Να βρεθεί το όριο $\lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j}\frac{t}{t+1} + kt$.

Λυση. Είναι

$$\lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \lim_{t \rightarrow 2} (\cos t) + \mathbf{j} \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t}{t+1} \right) + \mathbf{k} \lim_{t \rightarrow 2} (t) = \mathbf{i} \cos 2 + \frac{2}{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}..$$

8.2.4. Να υπολογιστούν οι $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t)$, $|\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t)|$, $\frac{d}{dt} |\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + kt$

Λυση. Είναι

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + kt) = -\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}$$

οπότε και

$$\left| \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) \right| = |-\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Εξ άλλου

$$|\mathbf{F}(t)| = |\mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + t\mathbf{k}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} = \sqrt{t^2 + 1}$$

οπότε

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{F}(t)| = \frac{d(\sqrt{t^2 + 1})}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

8.2.5. Για τις συναρτήσεις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + kt$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}$, $\phi(t) = t$ να υπολογιστούν τα $\frac{d}{dt} (\mathbf{F} + \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt} (\phi \mathbf{F})$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + kt + \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}) \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{i}(t + \cos t) + \mathbf{j}(t^2 + \sin t) + \mathbf{k}(1 + t)) \\ &= \mathbf{i}(1 - \sin t) + \mathbf{j}(2t + \cos t) + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \frac{d}{dt} (t^2 \cdot \cos t + t^3 \cdot \sin t + t) \\ &= t^3 \cos t + 2t^2 \sin t + 2t \cos t + 1. \end{aligned}$$

Τελος

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F}) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{i}t \cos t + \mathbf{j}t \sin t + \mathbf{k}t^2) \\ &= \mathbf{i}(\cos t - t \sin t) + \mathbf{j}(t \cos t + \sin t) + \mathbf{k}2t. \end{aligned}$$

8.2.6. Για τις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j} \ln t + \mathbf{k}e^t$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}2 + \mathbf{j}3 - \mathbf{k}$ να υπολογιστούν τα $\int (\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)) dt$, $\int (\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)) dt$, $\int \mathbf{c} \cdot \mathbf{F}(t) dt$.

Λυση. Είναι

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)) dt &= \int (\mathbf{i}(t + \sin t) + \mathbf{j}(t^2 + \ln t) + \mathbf{k}(t + e^t)) dt \\ &= \left(\mathbf{i} \left(\frac{t^2}{2} - \cos t + c_1 \right) + \mathbf{j} \left(\frac{t^3}{3} + t(\ln t - 1) + c_2 \right) + \mathbf{k} \left(\frac{t^2}{2} + e^t + c_3 \right) \right) \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{t^2}{2} - \cos t \right) + \mathbf{j} \left(\frac{t^3}{3} + t(\ln t - 1) \right) + \mathbf{k} \left(\frac{t^2}{2} + e^t \right) + \mathbf{c} \end{aligned}$$

οπου $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Επίσης

$$\int (\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)) dt = \int (t \sin t + t^2 \ln t + te^t) dt = \sin t - e^t + \frac{1}{3}t^3 \ln t - t \cos t + te^t - \frac{1}{9}t^3 + c.$$

Τελος

$$\int \mathbf{c} \cdot \mathbf{F}(t) dt = \int (2 \sin t + 3t^2 - t) dt = t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2 \cos t + c.$$

8.2.7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας και του κάθετου επιπέδου στην καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(1+t) - \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}(1+t^3)$ και στο σημείο $\mathbf{r}(1)$.

Λυση. Στο σημείο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(1)$ έχουμε

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(1) = \mathbf{i}2 - \mathbf{j} + \mathbf{k}2$$

$$\mathbf{n}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=1} = (\mathbf{i} - \mathbf{j}2t + \mathbf{k}3t^2) \Big|_{t=1} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Άρα η εφαπτομένη ευθεία $\mathbf{R}(t)$ στην $\mathbf{r}(t)$ και στο σημείο \mathbf{r}_0 έχει εξίσωση

$$\frac{X(t) - 2}{1} = \frac{Y(t) + 1}{-2} = \frac{Z(t) - 2}{3} = t$$

ή, σε διανυσματική μορφή,

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}(2+t) - \mathbf{j}(1+2t) + \mathbf{k}(2+3t).$$

Το δε κάθετο επίπεδο στην $\mathbf{r}(t)$ στο σημείο \mathbf{r}_0 έχει εξίσωση

$$1 \cdot (X - 2) - 2 \cdot (Y + 1) + 3 \cdot (Z - 2) = 0$$

δηλ

$$X - 2Y + 3Z = 10.$$

8.2.8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στην καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}2 \cos t - \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}t$ και στο σημείο $\mathbf{r}(\pi/2)$.

Λυση. Στο σημείο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\pi/2)$ έχουμε

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\pi/2) = \mathbf{j} + \mathbf{k} \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{n}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=\pi/2} = (-\mathbf{i}2 \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}) \Big|_{t=\pi/2} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

Άρα η εφαπτομένη ευθεία $\mathbf{R}(t)$ στην $\mathbf{r}(t)$ και στο σημείο \mathbf{r}_0 έχει εξίσωση

$$\frac{X(t)}{2} = \frac{Y(t) - 1}{0} = \frac{Z(t) - \pi/2}{1} = t$$

ή, σε διανυσματική μορφή,

$$\mathbf{R}(t) = -\mathbf{i}2t - \mathbf{j} + \mathbf{k}(\pi/2 + t).$$

8.2.9. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου του καθετού στην καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}t$ στο σημείο $\mathbf{r}(t) \Big|_{t=\pi/2} = \mathbf{j} + \mathbf{k} \frac{\pi}{2}$.

Λυση. Το καθετό επίπεδο στο σημείο $\mathbf{r}(t = \pi/2)$ έχει καθετό διάνυσμα $\mathbf{n} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=\pi/2} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$. Οπότε η εξίσωση του καθετού επιπέδου είναι

$$-1 \cdot (X - 0) + 0 \cdot (Y - 1) + 1 \cdot \left(Z - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

ή και $-X + Z = \pi/2$.

8.2.10. Να δείχτει ότι για κάθε t , η εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \frac{2t}{3} + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ σχηματίζει σταθερή γωνία με το διάνυσμα $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Λυση. Η ευθεία $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}X(t) + \mathbf{j}Y(t) + \mathbf{k}Z(t)$ η οποία είναι εφαπτομένη στην $\mathbf{r}(t)$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) έχει εξίσωση

$$\frac{X(t) - x_0}{2/3} = \frac{Y(t) - y_0}{2t} = \frac{Z(t) - z_0}{3t^2}.$$

Άρα η διεύθυνση της ευθείας δίνεται από το διάνυσμα $\mathbf{n}(t) = \mathbf{i} \frac{2}{3} + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}3t^2$ και η γωνία θ του $\mathbf{n}(t)$ με το $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ έχει το συνημίτονο

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{n}(t)\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\frac{2}{3} + 3t^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + 3t^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2} \sqrt{2}} = \frac{\frac{2}{3} + 3t^2}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + \frac{4}{9}} \sqrt{2}} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + 3t^2}{\sqrt{(3t^2 + \frac{2}{3})^2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Άρα λοιπόν $\theta = \pi/4$, ανεξαρτήτως από το t και το ζητούμενο έχει δεχτεί.

8.2.11. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k} \sin t$ που έχει εφαπτομενη παραλληλη με το επιπεδο $E : X + Z = 1$.

Λυση. Στο σημείο $\mathbf{r}(t)$ η εφαπτομενη ευθεια εχει διευθυνση

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k} \cos t.$$

Το επιπεδο E εχει καθετο διανυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$. Για να ειναι η εφαπτομενη ευθεια της $\mathbf{r}(t)$ παραλληλη στο επιπεδο E θα πρεπει να εχουμε

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{n} = -\sin t + \cos t = 0 \Rightarrow \sin t = \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ για } n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Ετσι λοιπον σε οποιοδηποτε σημείο της μορφης $(\cos(\frac{\pi}{4} + n\pi), e^{(\frac{\pi}{4} + n\pi)}, \sin(\frac{\pi}{4} + n\pi)) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{(\frac{\pi}{4} + n\pi)}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ η εφαπτομενη ευθεια της $\mathbf{r}(t)$ ειναι καθετη στο E .

8.2.12. Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{F}$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \frac{d}{dt}((F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \cdot (G_1\mathbf{i} + G_2\mathbf{j} + G_3\mathbf{k})) = \frac{d}{dt}((F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3)) \\ &= \left(F_1 \frac{dG_1}{dt} + F_2 \frac{dG_2}{dt} + F_3 \frac{dG_3}{dt}\right) + \left(\frac{dF_1}{dt}G_1 + \frac{dF_2}{dt}G_2 + \frac{dF_3}{dt}G_3\right) \\ &= \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{F}. \end{aligned}$$

8.2.13. Να βρεθεί η διανυσματικη εξισωση της καμπυλης που δινεται ως τομη των επιφανειων

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad S_2 : z = 1.$$

Λυση. Η καμπυλη ειναι ενας κυκλος, που προκυπτει απο την τομη της σφαιρας S_1 και του επιπεδου S_2 . Αν στην εξισωση της S_1 θεσουμε $z = 1$ παιρουμε $x^2 + y^2 = 1$. Αρα ο κυκλος εχει την ορφη

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = 1$$

ή, σε διανυσματικη μορφη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}$.

8.2.14. Βρειτε την καμπυλη $\mathbf{r}(t)$ κατα την οποια τεμνονται ο κυλινδρος $x^2 + y^2 = 1$ και το επιπεδο $y + z = 2$.

Λυση. Η πρροβολη της $\mathbf{r}(t)$ στο επιπεδο xy ειναι ο κυκλος $x^2 + y^2 = 1$ ο οποιος μπορει ν αγραφει και ως

$$x = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z = 0.$$

Καθε σημείο της $(x(t), y(t), z(t))$ της $\mathbf{r}(t)$ εχει x και y συντεταγμενες ιδιες με αυτες της προβολης του. Αρα, πανω στο επιπεδο $y + z = 2$, θα εχουμε

$$z(t) = 2 - y(t) = 2 - \sin t.$$

Οποτε παραμετρικς εχουμε

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$$

και διανυσματικα

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k} (2 - \sin t).$$

8.2.15. Εστω καμπυλη $\mathbf{r}(t)$ τετοια ωστε για καθε t εχουμε $\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = 0$. Να δειχτει οτι η $\mathbf{r}(t)$ βρικσεται επανω στην επιφανεια μιας σφαιρας.

Λυση. Αν θεωρησουμε την συναρτηση $f(t) = \|\mathbf{r}(t)\|^2$ τοτε

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} (\|\mathbf{r}(t)\|^2) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = 0$$

(εκ της υποθεσεως). Τοτε ομως, για καποια σταθερα c εχουμε

$$f(t) = \|\mathbf{r}(t)\|^2 = c \Rightarrow \sqrt{f(t)} = \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{c}.$$

Με αλλα λογια η αποσταση καθε σημειου της καμπυλης απο την αρχη των αξωνων ειναι σταθερη, δηλ. η καμπυλη βρικσεται εξ ολοκληρου πανω σμια σφαιρα με κεντρο το $\mathbf{0}$ και ακτινα \sqrt{c} .

8.3 Άλυτα Προβληματα

8.3.1. Βρειτε τα σημεια στο οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}t^2$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}2t$.

Απ. Το $(0, 1, 0)$.

8.3.2. Βρειτε τα σημεια στα οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}t^2$.

Απ. Οι καμπυλες δεν τεμνονται.

8.3.3. Βρειτε τα σημεια στα οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}t^4$. Επισης να βρεθει η γωνια υπο την οποια τεμνονται οι καμπυλες.

Απ. Ειναι το σημειο $(1, 1, 1)$. Η γωνια τομης ειναι $\theta = \arccos \frac{20}{\sqrt{406}}$.

8.3.4. Να βρεθει το οριο $\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{F}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$.

Απ. $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

8.3.5. Να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t)$, $\left| \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) \right|$, $\frac{d}{dt} |\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}t^2$

Απ. $\mathbf{i} \cos t - \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}2t$, $\sqrt{4t^2 + 1}$, $\frac{8t^3}{\sqrt{4t^2 + 1}}$.

8.3.6. Να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t)$, $\left| \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) \right|$, $\frac{d}{dt} |\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}e^t + \mathbf{j} \ln t + \mathbf{k}t$

Απ. $\mathbf{i}e^t + \mathbf{j}\frac{1}{t} + \mathbf{k}$, $\sqrt{e^{2t} + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1}$, $\frac{1}{t} \frac{e^{2t} + \ln t + t^2}{\sqrt{e^{2t} + \ln^2 t + t^2}}$.

8.3.7. Να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt} \mathbf{F}(t)$, $\left| \frac{d}{dt} \mathbf{F}(t) \right|$, $\frac{d}{dt} |\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j}t$

Απ. $\mathbf{i} \cos t + \mathbf{j}$, $\sqrt{\cos^2 t + 1}$, $\frac{\sin t \cos t + t}{\sqrt{t^2 + 1 - \cos^2 t}}$.

8.3.8. Για τις συναρτήσεις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}t^2$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}2$, $\phi(t) = t + 2$ να υπολογιστούν τα $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} + \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F})$

Απ.

$$\begin{aligned} & \mathbf{i}(\cos t + 1) - \mathbf{j}(\sin t + 2t) + \mathbf{k}2t, \\ & 3t \cos t + \sin t - t^2 \sin t + 4t, \\ & -\mathbf{i}(2 \sin t - 4t^3) + \mathbf{j}(3t^2 - 2 \cos t) + \mathbf{k}(t^2 \cos t + 3t \sin t - \cos t), \\ & \mathbf{i}(\sin t + (t + 2) \cos t) + \mathbf{j}(\cos t - (t + 2) \sin t) + \mathbf{k}(3t^2 + 2t). \end{aligned}$$

8.3.9. Για τις συναρτήσεις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \ln t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}e^t$, $\phi(t) = t + 1$ να υπολογιστούν οι $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} + \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F})$.

Απ.

$$\begin{aligned} & \mathbf{i} \left(\frac{1}{t} + 3t^2 \right) + \mathbf{j}(1 + 2t) + \mathbf{k}(1 + e^t), \\ & 4t^2 + 3t^2 \ln t + e^t + te^t, \\ & \mathbf{i}(e^t + te^t - 3t^2) + \mathbf{j} \left(4t^3 - \frac{1}{t}e^t - (\ln t)e^t \right) + \mathbf{k}(t + 2(\ln t)t - 4t^3), \\ & \mathbf{i} \left(\ln t + \frac{t+1}{t} \right) + \mathbf{j}(1 + 2t) + \mathbf{k}(1 + 2t). \end{aligned}$$

8.3.10. Για τις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} \ln t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}2t$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}e^t$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}2 + \mathbf{j}3 - \mathbf{k}$ να υπολογιστούν τα $\int (\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)) dt$, $\int (\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)) dt$, $\int (\mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)) dt$, $\int \mathbf{c} \cdot \mathbf{F}(t) dt$, $\int \mathbf{c} \times \mathbf{F}(t) dt$.

Απ.

$$\begin{aligned} & \mathbf{i} \left(t \ln t - t + \frac{1}{4}t^4 \right) + \mathbf{j} \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right) + \mathbf{k}(t^2 + e^t), \\ & \frac{1}{4}t^4 \ln t + \frac{3}{16}t^4 + 2te^t - 2e^t, \\ & \mathbf{i} \left(te^t - e^t - \frac{1}{2}t^4 \right) + \mathbf{j} \left(-e^t \ln t + \frac{2}{5}t^5 \right) + \mathbf{k} \left(\frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{5}t^5 \right), \\ & 2t \ln t - 2t + \frac{1}{2}t^2, \\ & \mathbf{i} \frac{7}{2}t^2 + \mathbf{j}(-t \ln t + t - 2t^2) + \mathbf{k}(t^2 - 3t \ln t + 3t). \end{aligned}$$

8.3.11. Να βρεθεί η γωνία τομής των καμπυλών $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ και $\mathbf{s}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos 2t + \mathbf{k}t$ στο σημείο $\mathbf{r}(0)$.

Απ. $\theta = \arccos(\sqrt{6}/6)$.

8.3.12. Να βρεθεί η γωνία τομής των καμπυλών $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}(1 - t) + \mathbf{k}(3 + t^2)$ και $\mathbf{s}(\tau) = \mathbf{i}(3 - \tau) + \mathbf{j}(\tau - 2) + \mathbf{k}(\tau^2)$.

Απ. Τεμνόνται στο σημείο $\mathbf{r}(t = 1) = \mathbf{s}(\tau = 2) = (1, 0, 4)$ και με γωνία $\theta = \arccos(\sqrt{3}/3)$.

8.3.13. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομενης ευθειας και του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(1+t) - \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}(1+t^3)$ και στο σημειο $\mathbf{r}(1)$.

Απ. $\mathbf{i}(2+t) - \mathbf{j}(1+2t) + \mathbf{k}(2+3t)$ και $X - 2Y + 3Z = 10$.

8.3.14. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομενης ευθειας και του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\frac{t^4}{4} + \mathbf{j}\frac{t^3}{3} + \mathbf{k}\frac{t^2}{2}$.

Απ. Στο τυχον σημειο $\mathbf{r}(t_0)$: $\mathbf{i}\left(t_0^2t + \frac{t_0^4}{4}\right) + \mathbf{j}\left(t_0t + \frac{t_0^3}{3}\right) + \mathbf{k}\left(t + \frac{t_0^2}{2}\right)$ και $t_0^2X + t_0Y + Z = \frac{t_0^6}{4} + \frac{t_0^4}{3} + \frac{t_0^2}{2}$.

8.3.15. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομενης ευθειας και του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\frac{t^2}{2} + \mathbf{k}\frac{t^3}{3}$ και στο σημειο $(6, 18, 72)$.

Απ. $\mathbf{i}(t+6) + \mathbf{j}(6t+18) + \mathbf{k}(36t+72)$ και $X + 6Y + 36Z = 2706$.

8.3.16. Να βρεθεί η εξίσωση του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}2\sin 3t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}\cos 3t$ και στο σημειο $\mathbf{r}(\pi)$.

Απ. $Y - 6X = \pi$.

8.3.17. Να βρεθεί η εξίσωση του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ και στο σημειο $\mathbf{r}(1)$.

Απ. $X + 2Y + 3Z = 6$.

8.3.18. Σε πιο σημειο της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}3t + \mathbf{k}t^4$ ειναι το καθετο επιπεδο παραλληλο στο επιπεδο $6X + 6Y - 8Z = 1$;

Απ. Στο σημειο $\mathbf{r}(-1) = (-1, -3, 1)$.

8.3.19. Να βρεθεί το σημειο της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}e^t$ που εχει εφαπτομενη παραλληλη με το επιπεδο $\sqrt{3}X + Y = 4$.

Απ. $(\sqrt{3}/2, 1/2, e^{\pi/6})$

8.3.20. Να βρεθουν τα σημεια της καμπυλης

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\left(\frac{t^3}{3} + t^2 - t\right) + \mathbf{j}\left(\frac{t^3}{3} - t^2 - t\right) + \mathbf{k}\left(\frac{t^3}{3} - 5t\right)$$

στα οποια η εφαπτομενη ειναι παραλληλη με το επιπεδο $X - Y + Z = 4$.

Απ. Ειναι τα σημεια τα οποια αντιστοιχουν στις τιμες $t = 1$ και $t = -5$.

8.3.21. Να δειχτει οτι η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t\cos t + \mathbf{j}t\sin t + \mathbf{k}t$ βρισκεται επι του κωνου $z^2 = x^2 + y^2$. Καντε την γραφικη παρασταση.

8.3.22. Να δειχτει οτι η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}\sin^2 t$ ειναι η τομη των επιφανειων $z = x^2$ και $x^2 + y^2 = 1$. Καντε την γραφικη παρασταση.

8.3.23. Να δειχτει οτι η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}(1-3t) + \mathbf{k}(1+t^3)$ διερχεται απο τα σημεια $(1, 4, 0)$ και $(9, -8, 28)$.

8.3.24. Βρειτε την καμπυλη η οποια ειναι η τομη των επιφανειων $x^2 + y^2 = 4$ και $z = xy$. Καντε την γραφικη παρασταση.

Απ. $\mathbf{i}2\cos t + \mathbf{j}2\sin t + \mathbf{k}2\sin 2t$.

8.3.25. Βρείτε την καμπυλη η οποια ειναι η τομη των επιφανειων $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $z = 1 + y$. Καντε την γραφικη παρασταση.

Απ. $it + j\frac{t^2-1}{2} + k\frac{t^2+1}{2}$.

8.3.26. Βρείτε την καμπυλη η οποια ειναι η τομη των επιφανειων $z = 4x^2 + y^2$ και $y = x^2$. Καντε την γραφικη παρασταση.

Απ. $it + jt^2 + k(4t^2 + t^4)$.

8.3.27. Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(t) \times \frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G} \times \frac{d}{dt}\mathbf{F}$.

8.3.28. Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F}) = \mathbf{F}\frac{d}{dt}\phi + \phi\frac{d}{dt}\mathbf{F}$.

8.3.29. Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}(h(t))) = \frac{dh}{dt} \cdot \left(\frac{d}{dh}\mathbf{F}\right)$.

8.3.30. Δειξτε οτι η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t$ ικανοποιει $\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0$ (δηλ. σε καθε σημειο της η επιβατικη ακτινα ειναι καθετη στην εφαπτομενη).

8.3.31. Εστω καμπυλη $\mathbf{r}(t)$ τετοια ωστε για καθε t εχουμε $\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(t)$, οπου \mathbf{a} σταθερο διανυσμα. Να δειχτει οτι η $\mathbf{r}(t)$ βρισκεται επανω σε μια σφαιρα με κεντρο το σημειο \mathbf{a} .

8.3.32. Εστω καμπυλη $\mathbf{r}(t)$ τετοια ωστε για καθε t εχουμε $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = 0$. Δειξτε οτι η $\mathbf{r}(t)$ ειναι μια ευθεια.

8.3.33. Εστω καμπυλη $\mathbf{r}(t)$ τετοια ωστε για καθε t εχουμε $\|\mathbf{r}(t)\| = c$ (σταθερα). Δειξτε οτι $\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = 0$.

Κεφάλαιο 9

Επικαμπυλικά Ολοκληρώματα

9.1 Θεωρία

9.1.1. Εστω καμπυλή C με διανυσματική αναπαράσταση $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ($t_1 \leq t \leq t_2$). Την ίδια καμπυλή διαγραμμένη κατά την αρνητική φορά θα συμβολίζουμε με C' . Εχουμε $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$ οπότε το στοιχειώδες μήκος είναι $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$.

9.1.2. Εστω τώρα βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x, y, z)$. Κατω από καταλλήλες προϋποθέσεις συνεχειας και παραγωγισιμοτητας, η ποσότητα

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (9.1)$$

είναι καλά ορισμένη. Επειδή $|\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt}$, την ίδια ποσότητα συμβολίζουμε συντομοτερα ως εξής:

$$\int_C \phi(x, y, z) ds \quad (9.2)$$

και αν η καμπυλή C ή $\mathbf{r}(t)$ είναι κλειστή, δηλ. $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, τότε χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\oint_C \phi(x, y, z) ds.$$

Οι (9.1) και (9.2) συμβολίζουν την ίδια ποσότητα, την οποία ονομάζουμε *επικαμπυλίο ολοκλήρωμα α' ειδους*. Οπως φαίνεται και από τον συμβολισμό, το ολοκλήρωμα $\int_C \phi(x, y, z) ds$ εξαρτάται από την C , δηλ. από τον *δρομο ολοκλήρωσης*.

9.1.3. Ένα τυπικό παράδειγμα επικαμπυλίου ολοκληρώματος α' ειδους είναι το μήκος (του μεταξύ t_1 και t_2) της C :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

9.1.4. Γενικότερα, αν θεωρήσουμε το a σταθερό, μπορούμε να ορίσουμε το μήκος της καμπυλής από a ως t ως εξής

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} d\tau.$$

9.1.5. Για το επικαμπυλίο ολοκληρώμα α' είδους ισχύουν οι συνηθεις ιδιοτητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων. Ιδιαίτερα σημειώνουμε τις παρακατω δυο ιδιοτητες.

1. Το επικαμπυλίο ολοκληρώμα α' είδους είναι ανεξαρτητο της φοράς διαγραφής της καμπυλής.

$$\int_C \phi(x, y, z) ds = \int_{C'} \phi(x, y, z) ds$$

2. Αν η καμπυλή C μπορεί να αποσυντεθεί σε συνεχομενες καμπυλες C_1, C_2, \dots, C_K (αυτο το γραφουμε και $C = C_1 C_2 \dots C_K$) τότε

$$\int_C \phi(x, y, z) ds = \int_{C_1} \phi(x, y, z) ds + \int_{C_2} \phi(x, y, z) ds + \dots + \int_{C_K} \phi(x, y, z) ds.$$

9.1.6. Τα επικαμπυλια ολοκληρώματα α' είδους είναι χρησιμα σε πολλές εφαρμογες. Παρουσιάζουμε μια ενδεικτικη εφαρμογη, η οποια δίνει και μια φυσικη ερμηνεια. Εστω οτι εχουμε ένα λεπτο συρμα του οποίου το σχημα περιγραφεται από την καμπυλή C με αναπαράσταση $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ για $t_1 \leq t \leq t_2$. Εστω ακόμη οτι η πυκνοτητα του συρματος είναι μεταβλητη και περιγραφεται από την συναρτηση $\phi(x, y, z)$. Τότε η συνολικη μαζα του συρματος είναι

$$m = \int_C \phi(x, y, z) ds.$$

Επίσης, οι συντεταγμένες του κεντρου μαζας του συρματος είναι (x_0, y_0, z_0) και δίνονται από τις σχέσεις

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_C x \phi(x, y, z) ds$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_C y \phi(x, y, z) ds$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \int_C z \phi(x, y, z) ds.$$

Παρομοια, οι ροπες αδρανειας ως προς τους άξονες x, y, z είναι

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \phi(x, y, z) ds$$

$$I_y = \int_C (z^2 + x^2) \phi(x, y, z) ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \phi(x, y, z) ds.$$

Και οι ροπες αδρανειας ως προς τα επιπεδα xy, yz, zx είναι

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_C z^2 \phi(x, y, z) ds \\ I_{yz} &= \int_C x^2 \phi(x, y, z) ds \\ I_{zx} &= \int_C y^2 \phi(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

9.1.7. Εστω καμπυλη C με αναπαρασταση $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) και μια διανυσματικη συναρτηση $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}P(x, y, z) + \mathbf{j}Q(x, y, z) + \mathbf{k}R(x, y, z)$. Κατω απο καταλληλες προυποθεσεις συνεχειας και παραγωγισιμοτητας, η ποσοτητα

$$\int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \quad (9.3)$$

είναι καλά ορισμένη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον συντομότερο συμβολισμό

$$\int_C P(x, y, z) dx + \int_C Q(x, y, z) dy + \int_C R(x, y, z) dz. \quad (9.4)$$

ή και

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.5)$$

και αν η καμπυλη C είναι κλειστη γράφουμε $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$. Οι (9.3), (9.4) και (9.5) είναι τρεις διαφορετικοι τροποι συμβολισμου της ίδιας ποσοτητας, την οποία ονομαζουμε *επικαμπυλιο ολοκληρωμα β' ειδους*.

9.1.8. Οπως φαίνεται και απο τον συμβολισμό, το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ εξαρτάται απο την C , δηλ. απο τον *δρομο ολοκληρωσης*.

9.1.9. Ένα τυπικο παραδειγμα επικαμπυλιου ολοκληρωματος β' ειδους είναι το εργο δυναμεως $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

9.1.10. Για το επικαμπυλιο ολοκληρωμα β' ειδους ισχυουν οι συνηθεισ ιδιοτητες των ορισμενων ολοκληρωματων. Ιδιαίτερα σημειωνουμε τις εξής ιδιοτητες.

1. Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα β' ειδους εξαρτάται απο την φορα διαγραφης της καμπυλης.

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C'} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

2. Αν η καμπυλη C μπορεί να αποσυντεθει σε συνεχόμενες καμπυλες C_1, C_2, \dots, C_K (αυτο το γράφουμε και $C = C_1 C_2 \dots C_K$) τότε

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_K} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

3. Εστω ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla\phi$ σε κάποιο χώρο $A \subseteq R^3$. Τότε, αν οι καμπύλες \mathbf{r}_1 / C_1 και \mathbf{r}_2 / C_2 περιέχονται εντός του A και έχουν κοινή αρχή και τέλος ($\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_2(t_1)$ και $\mathbf{r}_1(t_2) = \mathbf{r}_2(t_2)$), έχουμε

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_1(t_2)) - \phi(\mathbf{r}_1(t_1)).$$

Δηλ. σε αυτή την περίπτωση το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ είναι ανεξάρτητο του δρομού ολοκλήρωσης (άρκει $C \subseteq A$) και εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο του δρομού. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ή και} \quad \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

4. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του 3, έχουμε επίσης ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι 0:

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

9.1.11. (Θεώρημα Green) Εστω ότι έχουμε μια καμπύλη C ή $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$.¹ Αν επιπλέον η C είναι απλή και κλειστή, τότε ορίζει ένα χώρο $D \subseteq R^2$. Εστω ακόμα μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}P(x, y) + \mathbf{j}Q(x, y)$ όπου οι P και Q έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους σε όλο το D . Τότε

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \tag{9.6}$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί και ως

$$\oint_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

9.1.12. Εστω απλή, κλειστή καμπύλη C η οποία περικλείει έναν τοπο D και εστω συνάρτηση $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}P(x, y) + \mathbf{j}Q(x, y)$. Αν ισχύει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{9.7}$$

για κάθε $(x, y) \in D$, τότε από την (9.7) βλέπουμε ότι

$$\oint_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

¹Το θεώρημα αυτό αφορά καμπύλες που περιέχονται εξ ολοκλήρου στο επίπεδο xy .

9.1.13. Εστω δυο καμπυλες C_1 και C_2 η οποια περιεχονται σε εναν τοπο D και δεν τεμονται. Εστω επισης συναρτηση $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}P(x, y) + \mathbf{j}Q(x, y)$. Αν ισχυει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (9.8)$$

για καθε $(x, y) \in D$, τοτε

$$\oint_{C_1} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \oint_{C_2} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy), \quad (9.9)$$

δηλ. το ολοκληρωμα (9.9) ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης.

9.1.14. Θυμηθειτε απο το Κεφ.2 οτι η συνθηκη (9.7) εξασφαλιζει οτι η ποσοτητα $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ ειναι τελειο διαφορικο. Δηλ. αν ισχυει η (9.7), τοτε

$$\oint_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \oint_C d\phi = \phi(x(t), y(t)) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \phi(x(t_2), y(t_2)) - \phi(x(t_1), y(t_1)) = 0$$

αφου, για την κλειστη καμπυλη C εχουμε $\phi(x(t_2), y(t_2)) = \phi(x(t_1), y(t_1))$.

9.1.15. Οι *τωποι του Riemann* ειναι ειδικη περιπτωση του Θεωρηματος του Green και δινουν το εμβαδον S του χωριου D που περικλειει η απλη και κλειστη C ή $\mathbf{r}(t)$:

$$S = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx).$$

9.2 Λυμενα Προβληματα

9.2.1. Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}R \cos t + \mathbf{j}R \sin t$ για $t \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Η καμπυλη ειναι (φυσικα) ενας κυκλος. Εχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R. \end{aligned}$$

οπως ηταν αναμενομενο.

9.2.2. Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}t$ για $t \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

9.2.3. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}12t + \mathbf{j}8t^{3/2} + \mathbf{k}3t^2$ για $t \in [0, 1]$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{12^2 + (12t^{1/2})^2 + (6t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{144 + 144t + 36t^2} dt = \\ &= \int_0^1 6(2+t) dt = (12t + 3t^2)_{t=0}^{t=1} = 15. \end{aligned}$$

9.2.4. Να υπολογιστεί το $\int_C (2 + x^2y) ds$ όπου C είναι το ανώ μισο του κυκλου $x^2 + y^2 = 1$.

Λυση. Παραμετρίζουμε την C ως $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Οποτε

$$\frac{dx}{dt} = -\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

και

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = dt.$$

Οποτε

$$\int_C (2 + x^2y) ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left(2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)_{t=0}^{t=\pi} = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

9.2.5. Να υπολογιστεί το $\int_C 2x ds$ όπου $C = C_1 C_2$ και (α) C_1 είναι το τόξο της παραβολής $y = x^2$ από το $(0, 0)$ ως το $(1, 1)$, (β) C_2 είναι το ευθυγραμμο τμήμα $x = 1$ από το $(1, 1)$ ως το $(1, 2)$.

Λυση. Παραμετρίζουμε την C_1 ως $x(t) = t$, $y(t) = t^2$. Οποτε (για $t \in [0, 1]$)

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2t, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

και

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t^2)_{t=0}^{t=1} = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}.$$

Παραμετρίζουμε την C_2 ως $x(t) = 1$, $y(t) = t$. Οποτε (για $t \in [1, 2]$)

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = dt$$

και

$$\int_{C_2} 2x ds = \int_1^2 2 \cdot 1 dt = 2.$$

Τελικά

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

9.2.6. Να υπολογιστεί το $\int_C (x - 3y^2 + z) ds$ όπου C είναι το ευθυγράμμο τμήμα που ενώνει το $(0, 0, 0)$ με το $(1, 1, 1)$.

Λυση. Παραμετρίζουμε την C ως $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$. Δηλ.

$$\begin{aligned}x(t) &= t, & y(t) &= t, & z(t) &= t, \\dx &= dt, & dy &= dt, & dz &= dt\end{aligned}$$

και $t \in [0, 1]$. Οπότε

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{3} dt$$

και

$$\int_C (x - 3y^2 + z) ds = \int_0^1 (2t - 3t^2) \sqrt{3} dt = \sqrt{3} (t^2 - t^3) \Big|_{t=0}^{t=1} = 0.$$

9.2.7. $\int_C (x - 3y^2 + z) ds$ όπου $C = C_1 C_2$ και (α) C_1 είναι το ευθυγράμμο τμήμα που ενώνει το $(0, 0, 0)$ με το $(1, 1, 0)$, (β) C_2 είναι το ευθυγράμμο τμήμα που ενώνει το $(1, 1, 0)$ με το $(1, 1, 1)$.

Λυση. Παραμετρίζουμε την C_1 ως εξής: για $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}x(t) &= t, & y(t) &= t, & z(t) &= 0, \\dx &= dt, & dy &= dt, & dz &= 0.\end{aligned}$$

Παραμετρίζουμε την C_2 ως εξής: για $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1, & y(t) &= 1, & z(t) &= t, \\dx &= 0, & dy &= 0, & dz &= dt.\end{aligned}$$

Οπότε για την C_1 έχουμε

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 0} dt = \sqrt{2} dt$$

και

$$\int_{C_1} (x - 3y^2 + z) ds = \int_0^1 (t - 3t^2 + 0) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(\frac{t^2}{2} - t^3\right) \Big|_{t=0}^{t=1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Και για την C_2 έχουμε

$$ds = \sqrt{0 + 0 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = dt$$

και

$$\int_{C_2} (x - 3y^2 + z) ds = \int_0^1 (1 - 3 + t) dt = \left(-2t + \frac{t^2}{2}\right) \Big|_{t=0}^{t=1} = -2.$$

Τελικά

$$\int_C (x - 3y^2 + z) ds = \int_{C_1} (x - 3y^2 + z) ds + \int_{C_2} (x - 3y^2 + z) ds = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}.$$

9.2.8. Να υπολογιστεί το κέντρο μαζας ενός λεπτού συρματος το οποίο έχει σχήμα ημικυκλίου $C : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ και έχει πυκνότητα $\phi(x, y) = 1 - y$.

Λυση. Παραμετρίζουμε την C ως $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$. Τότε η μάζα του συρματος είναι

$$\begin{aligned} m &= \int_C \phi(x, y) ds = \int_0^\pi (1 - y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi (1 - \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = (t + \cos t) \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \pi - 2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \int_C y \phi(x, y) ds = \frac{1}{\pi - 2} \int_0^\pi \sin t (1 - \sin t) dt \\ &= \frac{1}{\pi - 2} \left(-\cos t - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4 - \pi}{2\pi - 4}. \end{aligned}$$

Το $x_0 = 0$ λόγω συμμετρίας.

9.2.9. Να υπολογιστεί το κέντρο μαζας της κυκλοειδούς $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(t - \sin t) + \mathbf{j}(1 - \cos t)$ ($t \in [0, 2\pi]$) με ομογενή πυκνότητα $\phi(x, y) = 1$.

Λυση. Η μάζα της κυκλοειδούς είναι

$$\begin{aligned} m &= \int_C \phi(x, y) ds = \int_0^{2\pi} 1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t + \sin^2 t - 2 \cos t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8. \end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου μαζας είναι

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_C x \phi(x, y) ds = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{8\pi}{8} = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \int_C y \phi(x, y) ds = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{32}{8 \cdot 3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Οπότε το κέντρο μαζας είναι το $(\pi, 4/3)$.

9.2.10. Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας ενός λεπτού ελατηρίου C το οποίο έχει σταθερή πυκνότητα και σχημα ελίκας $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos 4t + \mathbf{j} \sin 4t + \mathbf{k}t$, $t \in [0, 2\pi]$

Λυση. Η μάζα του ελατηρίου είναι

$$\begin{aligned} m &= \int_C \phi(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} 1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \sin^2 4t + 16 \cos^2 4t + 1} dt = 2\pi\sqrt{17}. \end{aligned}$$

και

$$z_0 = \frac{1}{m} \int_C z \phi(x, y) ds = \frac{1}{2\pi\sqrt{17}} \int_0^{2\pi} t\sqrt{17} dt = \pi.$$

Επίσης $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ λόγω συμμετρίας. Οπότε το κέντρο μάζας είναι $(0, 0, \pi)$

9.2.11. Να υπολογιστεί το $\int_C y^2 dx + xdy$ όπου C είναι το τόξο της παραβολής $x = 4 - y^2$ από το $(-5, -3)$ ως το $(0, 2)$.

Λυση. Δεν χρειάζεται να παραμετρίσουμε την C . Παρατηρούμε ότι επί της C : $x = 4 - y^2$ έχουμε

$$dx = -2y dy$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + xdy &= \int_C y^2 (-2y) dy + (4 - y^2) dy = \int_{-3}^2 (-2y^3 + 4 - y^2) dy \\ &= \left(-\frac{y^4}{2} + 4y - \frac{y^3}{3} \right)_{y=-3}^{y=2} = \frac{245}{6}. \end{aligned}$$

9.2.12. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}x^2 - \mathbf{j}xy$ και C είναι το τεταρτοκυκλίο $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= (-\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t) dt \\ \mathbf{F} &= \mathbf{i} \cos^2 t - \mathbf{j} \cos t \sin t \end{aligned}$$

και

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t - \cos^2 t \sin t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t d(\cos t) = 2 \left(\frac{\cos^3 t}{3} \right)_{t=0}^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

9.2.13. Να υπολογιστεί το $\int_C ydx + zdy + xdz$ όπου C είναι το ευθυγραμμο τμήμα C από το $(2, 0, 0)$ ως το $(3, 4, 5)$.

Λυση. Το ευθυγραμμο τμήμα C είναι τμήμα της ευθείας με εξισώσεις

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-0}{4-0} = \frac{z-0}{5-0}$$

οπότε παραμετρίζεται ως εξής (για $t \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned}x &= 2 + t, & y &= 4t, & z &= 5t, \\dx &= dt, & dy &= 4dt, & dz &= 5dt\end{aligned}$$

Οπότε

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \int_0^1 4tdt + 5t \cdot 4dt + (2+t) \cdot 5dt = \int_0^1 (4t + 20t + 10 + 5t) dt = \int_0^1 (10 + 29t) dt = \frac{49}{2}.$$

9.2.14. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}(y - x^2) + \mathbf{j}(z - y^2) + \mathbf{k}(x - z^2)$ και C είναι η $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$, $t \in [0, 1]$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= (\mathbf{i} + \mathbf{j}2t + \mathbf{j}3t^2) dt \\ \mathbf{F} &= \mathbf{i}(t^2 - t^2) + \mathbf{j}(t^3 - t^4) + \mathbf{k}(t - t^6)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 ((t^3 - t^4) \cdot 2t + (t - t^6) \cdot 3t^2) dt \\ &= \left(\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^6}{6} + \frac{3t^4}{4} - \frac{3t^9}{9} \right)_{t=0}^{t=1} = \frac{29}{60}.\end{aligned}$$

9.2.15. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}zx$ και C είναι η $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$, $t \in [0, 1]$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= (\mathbf{i} + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}3t^2) dt \\ \mathbf{F} &= \mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}t^5 + \mathbf{k}t^4\end{aligned}$$

και

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^3 + 2t^6 + 3t^6) dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right)_{t=0}^{t=1} = \frac{27}{28}.$$

9.2.16. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}z + \mathbf{k}y$ και C είναι η ελικά $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}t$, $t \in [0, \pi/2]$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= (-\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}) dt \\ \mathbf{F} &= \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j}t + \mathbf{k} \sin t\end{aligned}$$

και

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (-\cos t \sin t + t \cos t + \sin t) dt = \left(\frac{\cos^2 t}{2} + t \sin t \right)_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

9.2.17. Δειξτε οτι το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}(3 + 2xy) + \mathbf{j}(x^2 - 3y^2)$, δεν εξαρταται απο την C .

Λυση. Αν θεσουμε $P = 3 + 2xy$, $Q = x^2 - 3y^2$, παρατηρουμε οτι $P_y = 2x = Q_x$ οποτε το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης C .

9.2.18. Δειξτε οτι το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}(e^x \cos y + yz) + \mathbf{j}(xz - e^x \sin y) + \mathbf{k}(xy + z)$, δεν εξαρταται απο την C .

Λυση. Για να δειξουμε το ζητουμενο πρεπει να βρουμε μια συναρτηση $\phi(x, y, z)$ τετοια ωστε $\nabla\phi = \mathbf{F}$, δηλ.

$$\phi_x = e^x \cos y + yz, \quad \phi_y = xz - e^x \sin y, \quad \phi_z = xy + z.$$

Ολοκληρωνοντας τησιν ϕ_x ως προς x εχουμε

$$\phi = \int \phi_x dx = \int (e^x \cos y + yz) dx = e^x \cos y + xyz + g(y, z).$$

Παραγωγιζουμε ως προς y . Θα πρεπει να εχουμε

$$xz - e^x \sin y = \phi_y = xz - e^x \sin y + g_y \Rightarrow g_y = 0.$$

Ολοκληρωνουμε ως προς y και εχουμε

$$g = \int 0 dy = h(z)$$

οποτε

$$\phi = xyz + e^x \cos y + h(z).$$

Τωρα παραγωγιζουμε ως προς z και εχουμε

$$xy + z = \phi_z = xy + \frac{dh}{dz} \Rightarrow \frac{dh}{dz} = z \Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + d.$$

Οποτε τελικα

$$\phi(x, y, z) = xyz + e^x \cos y + \frac{z^2}{2} + d.$$

Πραγματι, ευκολα επαληθευουμε οτι $\nabla\phi = \mathbf{F}$ και αρα το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ δεν εξαρταται απο την C .

9.2.19. Υπολογιστε το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, αν $\mathbf{F} = \mathbf{i}(3 + 2xy) + \mathbf{j}(x^2 - 3y^2)$ και C η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}e^t \sin t + \mathbf{j}e^t \cos t$, $t \in [0, \pi]$.

Λυση. Εχουμε ηδη δει οτι το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης. Αρα υπαρχει συναρτηση $\phi(x, y)$ τετοια $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Θα πρεπει λοιπον να ειναι

$$\mathbf{i}(3 + 2xy) + \mathbf{j}(x^2 - 3y^2) = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_y$$

δηλ.

$$\phi_x = 3 + 2xy, \quad \phi_y = x^2 - 3y^2.$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη έχουμε

$$\phi(x, y) = \int \phi_x dx = \int (3 + 2xy) dx = 3x + x^2y + c(y),$$

επειδή η $c(y)$ είναι σταθερά μόνο ως προς x , αλλά μπορεί να εξαρτάται από το y (η ολοκλήρωση ήταν ως προς x). Αν τώρα παραγωγίσουμε την $\phi(x, y) = 3x + x^2y + c(y)$ ως προς y παίρνουμε

$$x^2 - 3y^2 = \phi_y = x^2 + \frac{dc}{dy}.$$

Άρα

$$\frac{dc}{dy} = -3y^2 \Rightarrow c(y) = -y^3 + d.$$

Τελικά λοιπόν έχουμε

$$\phi(x, y) = 3x + x^2 - y^3 + d$$

και

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^{t=\pi} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x(\pi), y(\pi)) - \phi(x(0), y(0)) \\ &= \left(3e^t \sin t + (e^t \sin t)^2 - (e^t \cos t)^3 \right) \Big|_{t=0}^{t=\pi} = e^{3\pi} + 1. \end{aligned}$$

9.2.20. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}(x - y) + \mathbf{j}(x - 2)$, εξαρτάται από την C .

Λυση. Αν θέσουμε $P = x - y$, $Q = x - 2$, παρατηρούμε ότι $P_y = -1 \neq 1 = Q_x$ οπότε το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ δεν είναι ανεξάρτητο του δρομού ολοκλήρωσης C .

9.2.21. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}y^2 + \mathbf{j}(2xy + e^{3z}) + \mathbf{k}3ye^{3z}$, δεν εξαρτάται από την C .

Λυση. Για να δείξουμε το ζητούμενο πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση $\phi(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\nabla \phi = \mathbf{F}$, δηλ.

$$\phi_x = y^2, \quad \phi_y = 2xy + e^{3z}, \quad \phi_z = 3ye^{3z}.$$

Ολοκληρώνοντας την ϕ_x ως προς x έχουμε

$$\phi = \int \phi_x dx = \int y^2 dx = xy^2 + g(y, z).$$

Παραγωγίζουμε ως προς y . Θα πρέπει να έχουμε

$$2xy + e^{3z} = \phi_y = 2xy + g_y \Rightarrow g_y = e^{3z}.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και έχουμε

$$g = \int g_y dy = ye^{3z} + h(z)$$

οπότε

$$\phi = xy^2 + ye^{3z} + h(z).$$

Τώρα παραγωγίζουμε ως προς z και έχουμε

$$3ye^{3z} = \phi_z = 3ye^{3z} + \frac{dh}{dz} \Rightarrow \frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow h(z) = d.$$

Οπότε τελικά

$$\phi(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + d.$$

Πραγματι, ευκολα επαληθευουμε οτι

$$\nabla\phi = \mathbf{i}y^2 + \mathbf{j}(2xy + e^{3z}) + \mathbf{k}3ye^{3z} = \mathbf{F}$$

και αρα το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ δεν εξαρταται απο την C .

9.2.22. Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy$ επι της C η οποια ειναι το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει τα σημεια $(-1, 3, 9)$ και $(1, 6, -4)$.

Λυση. Παρατηρουμε οτι $\mathbf{F} = \nabla\phi$ οπου $\phi = xyz$. Οποτε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, 6, -4) - \phi(-1, 3, 9) = 1 \cdot 6 \cdot (-4) - (-1) \cdot 3 \cdot 9 = -24 + 27 = 3.$$

9.2.23. Υπολογιστε το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, αν $\mathbf{F} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}4$ και C το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει το $(1, 1, 1)$ και το $(2, 3, -1)$.

Λυση. Ειναι $\mathbf{F} = \nabla\phi$, $\phi = xy + 4z + c$. Οποτε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(2, 3, -1) - \phi(1, 1, 1) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + c - 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - c = -3$$

9.2.24. Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}x^4 + \mathbf{j}xy$ και C ειναι το τριγωνο με κορυφες $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Λυση. Θα μπορούσαμε να υπολογισουμε το επικαμπυλιο ολοκληρωμα. Ομως αντ' αυτου θα χρησιμοποιησουμε το Θεωρημα του *Green*. Εχουμε

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int \int_D (Q_x - P_y) dydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dydx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \left(-\frac{1}{6} (1-x)^3 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

9.2.25. Επαληθευστε το Θεωρημα του *Green* για την $\mathbf{F} = \mathbf{i}(x - y) + \mathbf{j}x$ και τον κυκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Λυση. Παραμετριζουμε τον κυκλο ως

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}(\cos t - \sin t) + \mathbf{j} \cos t) \cdot (-\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t \sin t) dt = 2\pi.\end{aligned}$$

και

$$\iint_D (Q_x - P_y) dydx = \iint_D (1 + 1) dydx = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta = 2\pi.$$

9.2.26. Υπολογίστε το ολοκληρώμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}(3y - e^{\sin x}) + \mathbf{j}(7x + \sqrt{1 + y^4})$ και C είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$.

Λυση. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκληρώμα. Όμως αντ' αυτού θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Green. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D (Q_x - P_y) dydx = \iint_D (7 - 3) dydx = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho d\rho d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=3} d\theta = 36\pi.\end{aligned}$$

9.2.27. Υπολογίστε το ολοκληρώμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F} = -iy^2 + jxy$ και C είναι το τετράγωνο με κορυφές τις $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Λυση. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Green. Εχουμε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dydx = \iint_D (y - (-2y)) dydx = - \int_0^1 \int_0^1 3y dydx = 3 \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1} dx = \frac{3}{2}.$$

9.2.28. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείει η ελλειψη $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Λυση. Η ελλειψη έχει παραμετρική $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Το δε εμβαδόν το οποίο αυτή περικλείει είναι

$$\begin{aligned}\iint_D dx dy &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t dt - b \sin t \cdot a \sin t dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.\end{aligned}$$

9.2.29. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείει η αστροειδής $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos^3 t + \mathbf{j} \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Δείτε το σχήμα. Εχουμε

$$dx = -3 \cos^2 t \sin t dt, \quad dy = 3 \sin^2 t \cos t dt,$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} \int \int_D dx dy &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (\cos t \sin^2 t \cos t + \sin t \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Λυση.

9.2.30. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείει η ασπεροειδής $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)$, $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Λυση. Δείτε το σχήμα. Έχουμε

$$dx = 2t dt, \quad dy = (t^2 - 1) dt,$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} \int \int_D dx dy &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(t^2 (t^2 - 1) - \left(\frac{t^3}{3} - t \right) 2t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{t^4}{3} + t^2 \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{15} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

9.3 Άλυτα Προβλήματα

9.3.1. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}\frac{4}{3}t^{3/2}$ για $t \in [0, 1]$.

Απ. 2.

9.3.2. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j}5t + \mathbf{k}2 \cos t$ για $t \in [-10, 10]$.

Απ. $20\sqrt{29}$.

9.3.3. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}(\sin t - t \cos t) + \mathbf{k}(\cos t + t \sin t)$ για $t \in [0, \pi]$.

Απ. $\sqrt{5}\pi^2/2$.

9.3.4. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sqrt{2}t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}\frac{4}{3}e^{-t}$ για $t \in [0, 1]$.

Απ. $e - e^{-1}$.

9.3.5. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}2t + \mathbf{k} \ln t$ για $t \in [1, e]$.

Απ. e^2 .

9.3.6. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ για $t \in [0, 1]$.

Απ. $(13^{3/2} - 8)/27$.

9.3.7. Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $C : \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$. Κατόπιν να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας, υποθέτοντας ότι η πυκνότητα είναι σταθερή.

Απ. $\pi\sqrt{2}$, $(0, 2/\pi, \pi/2)$.

9.3.8. Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{ds}{x-y}$ όπου $C : \mathbf{i}t + \mathbf{j} \left(\frac{t}{2} - 2\right)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

Απ. $\sqrt{5} \ln 2$.

9.3.9. Να υπολογιστεί το $\int_C xyds$ όπου C : το ορθογώνιο με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(4, 2, 0)$, $(0, 2, 0)$.

Απ. 24.

9.3.10. Να υπολογιστεί το $\int_C (x^2 + y^2)^n ds$ όπου $C : \mathbf{i}a \cos t + \mathbf{j}a \sin t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Απ. $2\pi a^{2n+1}$.

9.3.11. Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2} ds$ όπου $C : \mathbf{i}a \cos t + \mathbf{j}a \sin t + \mathbf{k}at$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Απ. $8\pi^2 a \sqrt{2}/3$.

9.3.12. Να υπολογιστεί το $\int_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$ όπου $C : \mathbf{i}t \cos t + \mathbf{j}t \sin t + \mathbf{k}t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Απ. $\left((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1\right) 2\sqrt{2}/3$.

9.3.13. Να υπολογιστεί το $\int_C (x - y) ds$ όπου $C : x^2 + y^2 = ax$.

Απ. $\pi a^2/2$.

9.3.14. Να υπολογιστεί το $\int_C x \sqrt{x^2 - y^2} ds$ όπου $C : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Απ. $2a^3 \sqrt{2}/3$.

9.3.15. Να υπολογιστεί το $\int_C \arctan \frac{y}{x} ds$ όπου $C : x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Απ. $8a\pi^3/\sqrt{2}/3$.

9.3.16. Να υπολογιστεί το $\int_C xyz ds$ όπου $C : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ και $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ και $x, y, z \geq 0$.

Απ. $R^4 \sqrt{3}/32$.

9.3.17. Να υπολογιστούν οι ροπές αδρανείας ως προς τους άξονες x , y και z της καμπύλης $C : \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k}t/2\pi$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, υποθέτοντας ότι η πυκνότητα είναι σταθερή.

Απ. $\frac{5}{6}\sqrt{1+4\pi^2}$, $\frac{5}{6}\sqrt{1+4\pi^2}$, $\sqrt{1+4\pi^2}$.

9.3.18. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}(y-x)$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t$ και $0 \leq t \leq 1$.

Απ. $1/3$.

9.3.19. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}(y-x)$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2$ και $0 \leq t \leq 1$.

Απ. $1/12$.

9.3.20. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i2xy + jx^2$, $\mathbf{r}(t) = it + jt$ και $0 \leq t \leq 1$.

Απ. 1.

9.3.21. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i2xy + jx^2$, $\mathbf{r}(t) = it + jt^2$ και $0 \leq t \leq 1$.

Απ. 1.

9.3.22. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = iy + j2x$ και $\mathbf{r}(t)$ είναι η επιβατική ακτίνα της ελλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Απ. πab .

9.3.23. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i(2y + 3) + jxz + k(yz - x)$, $\mathbf{r}(t) = i2t^2 + jt + kt^3$ και $0 \leq t \leq 2$.

Απ. 8728/105.

9.3.24. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i3x^2 + j(2xz - y) + kz$ και $\mathbf{r}(t) = i2t^2 + jt + k(4t - 1)t$ και $-1 \leq t \leq 1$.

Απ. $-8/5$.

9.3.25. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i3x^2 + j(2xz - y) + kz$ και $\mathbf{r}(t) = it + j\frac{t^2}{4} + k\frac{3t^3}{8}$ και $0 \leq t \leq 1$.

Απ. 141/128.

9.3.26. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i(2y + 3) + jxz + k(yz - x)$ και η $\mathbf{r}(t)$ συνδέει τα σημεία $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$.

Απ. 29/3.

9.3.27. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i(2x + y^2) + j(3y - 4x)$ και C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$.

Απ. 7.

9.3.28. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = i(x - y) + j(x + y) + kz$, $C = C_1C_2$ και $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$).

Απ. 2/3.

9.3.29. Να υπολογιστεί το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{r}(t) = ix + jy + k(x + y - 1)$ και C είναι το ευθυγράμμο τμήμα από $(1, 1, 1)$ ως $(2, 3, 4)$.

Απ. 13.

9.3.30. Να υπολογιστεί το $\int_C (-x \cos y dx + y \sin x dy)$ όπου C είναι το ευθυγράμμο τμήμα που συνδέει τα $(0, 0)$ και $(\pi, 2\pi)$.

Απ. 4π .

9.3.31. Να υπολογιστεί το $\int_C (x^2 + y^2) dy$ όπου C είναι η τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$.

Απ. 37/3.

9.3.32. Να υπολογιστεί το $\int_C ((2a - y) dx - (a - y) dy)$ όπου C είναι το πρώτο τόξο της $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Απ. πa^2 .

9.3.33. Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$ όπου C είναι το πρώτο τόξο της $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$, από το σημείο $(R, 0)$ ως το $(0, R)$.

Απ. $\frac{3}{16} \pi R^{4/3}$.

9.3.34. Να υπολογιστεί το $\int_C (yz dx + xz dy + xy dz)$ όπου C είναι η $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ και $t \in [0, 2\pi]$.

Απ. 0.

9.3.35. Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 2z}}$ όπου C είναι το ευθυγραμμο τμήμα από $(1, 1, 1)$ ως $(4, 4, 4)$.

Απ. $3\sqrt{3}$.

9.3.36. Δείξτε ότι το $\int_C ((yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy)$ όπου C είναι τυχούσα κλειστή καμπύλη, *συμμετρική* ως προς το $(0, 0)$.

9.3.37. Δείξτε ότι το $\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi$ για οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C περιλαμβάνει το $(0, 0)$.

9.3.38. Να επαληθευτεί το Θεώρημα του Green για το ολοκλήρωμα $\int_C ((1 - x^2) y dx + x(1 + y^2) dy)$ όπου C : ο κύκλος με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα R .

Απ. $\pi R^4/2$.

9.3.39. Να επαληθευτεί το Θεώρημα του Green για το ολοκλήρωμα $\int_C ((xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy)$ όπου C : η ελλειψη $4x^2 + y^2 = 4$.

Απ. 0.

9.3.40. Να επαληθευτεί το Θεώρημα του Green για το ολοκλήρωμα $\int_C \left((x^2 y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy}) dx + (x + xe^{xy}) dy \right)$ όπου C : το ημικύκλιο $x^2 + y^2 = 1$ και $y \geq 0$.

Απ. $\pi/4$.

9.3.41. Αφού δείχτεί ότι το $\int_C (xdx - y^2 dy + z dz)$ λαμβάνει σταθερή τιμή για οποιαδήποτε απλή C αρχίζει στο (x_1, y_1, z_1) και καταλήγει στο (x_2, y_2, z_2) , να υπολογιστεί αυτή η τιμή.

Απ. Είναι $\phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$ όπου $\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + z^2) - \frac{1}{3}y^3$.

9.3.42. Αφού δείχτεί ότι το $\int_C (yz dx + xz dy + xy dz)$ λαμβάνει σταθερή τιμή για οποιαδήποτε απλή C αρχίζει στο (x_1, y_1, z_1) και καταλήγει στο (x_2, y_2, z_2) , να υπολογιστεί αυτή η τιμή.

Απ. Είναι $\phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$ όπου $\phi(x, y, z) = xyz$.

9.3.43. Εστω $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(4xy - 3x^2 z^2) + \mathbf{j}2x^2 - 2x^3 z \mathbf{k}$. Να δείχτεί ότι το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της C .

Υποδ. Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση $\phi(x, y, z) = 2x^2 y - x^3 z^2$.

9.3.44. Εστω $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(y^2 \cos x + z^3) + \mathbf{j}(2y \sin x - 4) + \mathbf{k}(3xz^2 + 2)$. Να δειχτεί ότι το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της C .

Υποδ. Χρησιμοποιήστε την συναρτησιμότητα $\phi(x, y, z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z$.

9.3.45. Είναι αληθές ότι το $\int_C \frac{xdx+yd y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ λαμβάνει σταθερή τιμή για οποιαδήποτε απλή C αρχίζει στο (x_1, y_1) και καταλήγει στο (x_2, y_2) ; Αν ναι, να υπολογιστεί αυτή η τιμή.

Υποδ. Χρησιμοποιήστε την συναρτησιμότητα $\sqrt{x^2 + y^2}$.

9.3.46. Είναι αληθές ότι το $\int_C \frac{-yzdx+zx dy+xy dz}{(x-yz)^2}$ λαμβάνει σταθερή τιμή για οποιαδήποτε απλή C αρχίζει στο (x_1, y_1, z_1) και καταλήγει στο (x_2, y_2, z_2) ; Αν ναι, να υπολογιστεί αυτή η τιμή.

Υποδ. Χρησιμοποιήστε την συναρτησιμότητα $yz/(x - yz)$.

9.3.47. Να υπολογιστεί το $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} (xdx - y^2 dy + z dz)$ κατά μήκος τυχούσας καμπύλης C .

Απ. 10/3.

9.3.48. Να υπολογιστεί το $\int_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} (yz dx + xz dy + xy dz)$ κατά μήκος τυχούσας καμπύλης C .

Απ. 0.

9.3.49. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείει η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a \cos t + \mathbf{j}b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Απ. πab .

9.3.50. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείει η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a \cos^3 t + \mathbf{j}a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Απ. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

9.3.51. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείει η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(2a \cos t - a \cos 2t) + \mathbf{j}(2a \sin t - a \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Απ. $6\pi a^2$.

Κεφάλαιο 10

Βαθμωτα και Διανυσματικα Πεδια

10.1 Θεωρια

10.1.1. Βαθμωτο πεδιο είναι απλα μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το \mathbb{R}^3 και πεδιο τιμων το \mathbb{R} .

10.1.2. Π.χ. η θερμοκρασια σε ενα χωρο δινεται απο μια συναρτηση $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$. Γενικα, ενα βαθμωτο πεδιο εχει την μορφη $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και (χρησιμοποιωντας $\mathbf{r} = ix + jy + kz$) μπορει να γραφτει σε οποιαδηποτε απο τις πρακατω μορφες

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(ix + jy + kz) = \phi(x, y, z).$$

10.1.3. Υπαρχουν και συναρτησεις οι οποιες εχουν πεδιο ορισμου και πεδιο τιμων το \mathbb{R}^3 . Π.χ. ενα πεδιο δυναμεων στον χωρο γραφεται

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}. \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= P(\mathbf{r})\mathbf{i} + Q(\mathbf{r})\mathbf{j} + R(\mathbf{r})\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Θα αποκαλουμε τετοιου τυπου συναρτησεις *διανυσματικα πεδια*.

10.1.4. Το *οριο* της $\phi(\mathbf{r})$ οριζεται ως εξης

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta \Rightarrow |\phi(\mathbf{r}) - \phi_0| < \varepsilon).$$

10.1.5. Λεμε οτι η $\phi(\mathbf{r})$ είναι *συνεχης στο σημειο* \mathbf{r}_0 αν εχουμε

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \phi(\mathbf{r}) = \phi_0.$$

10.1.6. Το *οριο* της $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ οριζεται ως εξης

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}_0| < \varepsilon).$$

10.1.7. Λεμε οτι η $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι *συνεχης* στο σημειο \mathbf{r}_0 αν εχουμε

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0).$$

10.1.8. Εστω διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. *Διανυσματικη γραμμη* του πεδιου λεγεται μια καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ της οποιας η εφαπτομενη σε καθε σημειο (x, y, z) είναι παραλληλη με το πεδιο $\mathbf{F}(x, y, z)$.

10.1.9. Για μια συναρτηση $\mathbf{F}(x, y, z)$ μπορουμε να ορισουμε τις μερικες παραγωγους ($\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z, \mathbf{F}_{xx}, \mathbf{F}_{xy}, \mathbf{F}_{xz}, \dots$) ως εξης

$$\mathbf{F}_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{F}(x, y, z)}{\Delta x},$$

με αντιστοιχο τροπο οριζονται οι $\mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z, \mathbf{F}_{xx}, \dots$ κτλ.

10.1.10. Εχουμε ηδη δει οτι μπορουμε να συνδυασουμε ολες τις μερικες παραγωγους της $\phi(x, y, z)$ σε μια *διανυσματικη* παραγωγο, την *κλιση* της $\phi(x, y, z)$, η οποια συμβολιζεται $grad\phi$ και οριζεται ως εξης:

$$grad\phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Επισης εχουμε δει οτι μπορουμε να γραψουμε την κλιση της ϕ ως

$$grad\phi = \nabla \phi$$

και την ολικη παραγωγο ως

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right).$$

10.1.11. Η *αποκλιση* ενος διανυσματικου πεδιου \mathbf{F} συμβολιζεται με $div\mathbf{F}$ και οριζεται ως εξης:

$$div\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

10.1.12. Η *περιστροφη* ενος διανυσματικου πεδιου \mathbf{F} συμβολιζεται με $rot\mathbf{F}$ και οριζεται ως εξης:

$$rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

10.1.13. Ισχυουν τα εξης

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) &= (\nabla \phi) \cdot \mathbf{F} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{F}) \\ \nabla \times (\phi \mathbf{F}) &= (\nabla \phi) \times \mathbf{F} + \phi (\nabla \times \mathbf{F}) \\ \nabla \times (\nabla \phi) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \\ \nabla \times \nabla \phi &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0. \end{aligned}$$

10.1.14. Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} λέγεται *συντηρητικό* αν υπάρχει συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε $\nabla\phi = \mathbf{F}$. Η ϕ λέγεται *δυναμικό* του \mathbf{F} .

10.1.15. Αν η ϕ είναι το δυναμικό του $\mathbf{F} = \mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R$, τότε ισχύει

$$\phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz \quad (10.1)$$

όπου τα x_0, y_0, z_0 είναι αυθαίρετα.

10.1.16. Αν το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρητικό, τότε το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ είναι ανεξάρτητο του δρομού ολοκλήρωσης για κάθε καμπύλη C .

10.1.17. Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} λέγεται *αστροβίλο* αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

10.1.18. Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} είναι αστροβίλο αν είναι συντηρητικό.

10.1.19. Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} λέγεται *σληνοειδές* αν $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

10.1.20. Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} είναι σληνοειδές αν υπάρχει άλλο πεδίο \mathbf{G} τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$. Τότε το \mathbf{G} λέγεται *διανυσματικό δυναμικό* του \mathbf{F} .

10.2 Λυμένα Προβλήματα

10.2.1. Αν $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}xz + \mathbf{j}xyz - \mathbf{k}y^2$ να υπολογιστούν οι $\nabla \cdot \mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}xyz - \mathbf{k}y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (xz) + \frac{\partial}{\partial y} (xyz) - \frac{\partial}{\partial z} (y^2) = z + xz. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -y^2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xz & xyz \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-2y - xy) - \mathbf{j}(-x) + \mathbf{k}(yz) \\ &= -\mathbf{i}(2y + xy) + \mathbf{j}x + \mathbf{k}yz. \end{aligned}$$

10.2.2. Αν $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} \sin z + \mathbf{j}xe^y + \mathbf{k}y^2$ να υπολογιστούν οι $\nabla \cdot \mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i} \sin z + \mathbf{j}xe^y + \mathbf{k}y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\sin z) + \frac{\partial}{\partial y} (xe^y) + \frac{\partial}{\partial z} (y^2) = xe^y. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin z & xe^y & y^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^y & y^2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin z & y^2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \sin z & xe^y \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(2y - 0) - \mathbf{j}(0 - \cos z) + \mathbf{k}(e^y - 0) \\ &= \mathbf{i}2y + \mathbf{j}\cos z + \mathbf{k}e^y.\end{aligned}$$

10.2.3. Να αποδειχτεί ότι $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla\phi) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

10.2.4. Αν $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, να δείχτεί ότι $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c}$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) &= \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \nabla \times (\mathbf{i}(c_2z - c_3y) - \mathbf{j}(c_1z - xc_3) + \mathbf{k}(c_1y - c_2x)) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (c_2z - c_3y) & -(c_1z - xc_3) & (c_1y - c_2x) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -(c_1z - xc_3) & (c_1y - c_2x) \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (c_2z - c_3y) & (c_1y - c_2x) \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ (c_2z - c_3y) & -(c_1z - xc_3) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(c_1 + c_1) - \mathbf{j}(-c_2 - c_2) + \mathbf{k}(c_3 + c_3) = 2\mathbf{c}.\end{aligned}$$

10.2.5. Να υπολογιστεί το $\nabla \times (\mathbf{r}g(r))$, όπου $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $r = \|\mathbf{r}\|$.

Λυση. Εχουμε

$$\frac{\partial g(r)}{\partial x} = \frac{\partial g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\partial (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}$$

και ομοίως

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}.$$

Επίσης

$$\mathbf{r}g(r) = \mathbf{i}xg(r) + \mathbf{j}yg(r) + \mathbf{k}zg(r)$$

και αρα

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{r}g(r)) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xg(r) & yg(r) & zg(r) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yg(r) & zg(r) \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xg(r) & zg(r) \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xg(r) & yg(r) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(z \frac{\partial g}{\partial y} - y \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(z \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial g}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(y \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \left(\mathbf{i} \frac{zy - yz}{r} + \mathbf{j} \frac{zx - xz}{r} + \mathbf{k} \frac{xy - yx}{r} \right) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

10.2.6. Εστω $\mathbf{F} = \mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R$. Να δειχτεί ότι, αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, τότε $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = 0$, όπου $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$.

Λυση. Εχουμε

$$\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (Qz - Ry) - \frac{\partial}{\partial y} (Pz - Rx) + \frac{\partial}{\partial z} (Py - Qx) \\ &= z \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + y \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + x \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned}$$

10.2.7. Να δειχτεί ότι, αν $\nabla^2 \phi = 0$, τότε το πεδίο $\nabla \phi$ είναι αστροβίλο και σωληνοειδές.

Λυση. Το πεδίο $\nabla \phi$ είναι προφανώς αστροβίλο, αφού, όπως είναι γνωστό, $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$. Επίσης έχουμε

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{10.2}$$

και

$$\nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

οπότε, από την (10.2) έχουμε

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

αρα το πεδίο είναι και σωληνοειδές.

10.2.8. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}xz + \mathbf{j}xyz - \mathbf{k}y^3$ δεν είναι συντηρητικό.

Λυση. Για να είναι το \mathbf{F} συντηρητικό, θα πρέπει να είναι και αστροβίλο, δηλ. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Αλλά

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -y^3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xz & xyz \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-3y^2 - xy) - \mathbf{j}(-x) + \mathbf{k}(yz) \\ &= -\mathbf{i}(3y^2 + xy) + \mathbf{j}x + \mathbf{k}yz \neq \mathbf{0}.\end{aligned}$$

10.2.9. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}y^2z^3 + \mathbf{j}2xyz^3 + \mathbf{k}3xy^2z^2$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί το δυναμικό του.

Λυση. Το \mathbf{F} θα είναι συντηρητικό αν είναι αστροβίλο, δηλ. αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Οντως

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(6xyz^2 - 6xyz^2) - \mathbf{j}(3y^2z^2 - 3y^2z^2) + \mathbf{k}(2yz^3 - 2yz^3) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Παιρνοντας $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ στον τύπο (10.1), η συνάρτηση δυναμικού ϕ θα είναι

$$\phi = \int_0^x y^2 z^3 dx + \int_0^y 2 \cdot 0 \cdot yz^3 dy + \int_0^z 3 \cdot 0 \cdot 0^2 \cdot z^2 dz = xy^2 z^3.$$

Οντως,

$$\begin{aligned}\nabla \phi &= \nabla(xy^2 z^3) = \mathbf{i} \frac{\partial(xy^2 z^3)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial(xy^2 z^3)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial(xy^2 z^3)}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}y^2 z^3 + \mathbf{j}2xyz^3 + \mathbf{k}3xy^2 z^2 = \mathbf{F}.\end{aligned}$$

10.2.10. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί το δυναμικό του.

Λυση. Το \mathbf{F} θα είναι συντηρητικό αν είναι αστροβίλο, δηλ. αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Οντως

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x & y \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(1 - 1) - \mathbf{j}(1 - 1) + \mathbf{k}(1 - 1) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Παιρνοντας $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ στον τυπο (10.1), η συνάρτηση δυναμικού ϕ θα είναι

$$\phi = \int_0^x x + \int_0^y y dy + \int_0^z z dz = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Οντως,

$$\nabla\phi = \nabla\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)}{\partial z} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{F}.$$

10.2.11. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}(e^x \cos y + yz) + \mathbf{j}(xz - e^x \sin y) + \mathbf{k}(xy + z)$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί το δυναμικό του.

Λυση. Το \mathbf{F} θα είναι συντηρητικό αν είναι αστροβίλο, δηλ. αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Οντως

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y + yz & xz - e^x \sin y & xy + z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - e^x \sin y & xy + z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y + yz & xy + z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \cos y + yz & xz - e^x \sin y \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(x - x) - \mathbf{j}(y - y) + \mathbf{k}(z - e^x \sin y + e^x \sin y - z) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Παιρνοντας $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ στον τυπο (10.1), η συνάρτηση δυναμικού ϕ θα είναι

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^x (e^x \cos y + yz) dx + \int_0^y (-\sin y) dy + \int_0^z z dz \\ &= e^x \cos y + xyz - \cos y + \cos y + \frac{z^2}{2} = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

Οντως,

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \nabla\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right) \\ &= \mathbf{i}\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right)}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}(e^x \cos y + yz) + \mathbf{j}(-e^x \sin y + xz) + \mathbf{k}(xy + z) = \mathbf{F}. \end{aligned}$$

10.2.12. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}2xy + \mathbf{j}(x^2 - y)$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(-1, 4)$ και $(1, 2)$.

Λυση. Έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 - y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 - y \end{vmatrix} = \mathbf{k}(2x - 2x) = \mathbf{0}.$$

Αρα το \mathbf{F} είναι συντηρητικό. Αρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα της C . Βρίσκουμε την συναρτησιακή δυναμική:

$$\phi(x, y) = \int_0^x 2xy dx + \int_0^y (0^2 - y) dy = x^2 y - \frac{y^2}{2}.$$

Οπότε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, 2) - \phi(-1, 4) = \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right)_{(x,y)=(-1,4)}^{(x,y)=(1,2)} = 4.$$

10.2.13. Να δείχεται ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}e^x \sin y + \mathbf{j}e^x \cos y$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, \pi/2)$.

Λυση. Εχουμε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y & e^x \cos y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = \mathbf{k} (e^x \cos y - e^x \cos y) = \mathbf{0}.$$

Αρα το \mathbf{F} είναι συντηρητικό. Αρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα της C . Βρίσκουμε την συναρτησιακή δυναμική:

$$\phi(x, y) = \int_0^x e^x \sin y dx + \int_0^y e^x \cos y dy = e^x \sin y - e^0 \sin y + \sin y = e^x \sin y.$$

Οπότε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(0, 0) - \phi(1, \pi/2) = (e^x \sin y)_{(x,y)=(0,0)}^{(x,y)=(1,\pi/2)} = e.$$

10.2.14. Να δείχεται ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}2xy + \mathbf{j}(x^2 + z^2) + \mathbf{k}2zy$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(1, 1, 0)$ και $(0, 2, 3)$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2zy \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & 2zy \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 2zy \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 + z^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} (2z - 2z) - \mathbf{j} (0 - 0) + \mathbf{k} (2x - 2x) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Αρα το \mathbf{F} είναι συντηρητικό. Αρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα της C . Βρίσκουμε την συναρτησιακή δυναμική:

$$\phi(x, y, z) = \int_0^x 2xy dx + \int_0^y (0^2 + z^2) dy + \int_0^z 0 dz = x^2 y + z^2 y.$$

Οπότε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, 1, 0) - \phi(0, 2, 3) = (x^2 y + z^2 y)_{(x,y,z)=(0,2,3)}^{(x,y,z)=(1,1,0)} = 17.$$

10.2.15. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}e^x \cos y - \mathbf{j}e^x \sin y + \mathbf{k}2$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(0, \pi/2, 1)$ και $(1, \pi, 3)$.

Λυση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & -e^x \sin y & 2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -e^x \sin y & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(0 - 0) - \mathbf{j}(0 - 0) + \mathbf{k}(-e^x \sin y + e^x \sin y) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Άρα το \mathbf{F} είναι συντηρητικό. Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα της C . Βρίσκουμε την συναρτησιακή δυναμική:

$$\phi(x, y, z) = \int_0^x e^x \cos y dx - \int_0^y e^0 \sin y dy + \int_0^z 2 dz = e^x \cos y + 2z.$$

Οπότε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(0, \pi/2, 1) - \phi(1, \pi, 3) = (e^x \cos y + 2z)_{(x,y,z)=(0,\pi/2,1)}^{(x,y,z)=(1,\pi,3)} = -e + 6 - 2 = 4 - e.$$

10.3 Άλυτα Προβλήματα

10.3.1. Για την συναρτησιακή $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}(2x^2y - x^4) + \mathbf{j}(e^{xy} - y \sin x) + \mathbf{k}z^2$ να υπολογιστούν οι $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial^2 x^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial^2 y^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial^2 z^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z \partial x}$.

Απ. $\mathbf{i}(4xy - 4x^3) + \mathbf{j}(ye^{xy} - y \cos x), \mathbf{i}2x^2 + \mathbf{j}(xe^{xy} - \sin x), \mathbf{k}2z, \mathbf{i}(4y - 12x^2) + \mathbf{j}(y^2 e^{xy} + y \sin x), \mathbf{j}x^2 e^{xy}, \mathbf{k}2, \mathbf{i}4x + \mathbf{j}(e^{xy} + yxe^{xy} - \cos x), \mathbf{0}, \mathbf{0}$.

10.3.2. Να δειχτεί ότι για συναρτησιακές $\mathbf{F}(x, y, z)$ και $x(t), y(t), z(t)$ έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

10.3.3. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}x^2y^3 + \mathbf{j}z + \mathbf{k} \sin(xy)$

Απ. $2xy^3, \mathbf{i}(x \cos(xy) - 1) - \mathbf{j}y \cos xy - \mathbf{k}3x^2y^2$.

10.3.4. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}yz \sin x + \mathbf{j}zx + \mathbf{k} \sin(xy)$

Απ. $yz \cos x, \mathbf{i}(x \cos(xy) - x) + \mathbf{j}(y \sin x - (\cos xy)y) + \mathbf{k}(z - z \sin x)$.

10.3.5. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}z^2y^2 + \mathbf{j}xyz + \mathbf{k}z^2x^2$

Απ. $zx + 2zx^2, -\mathbf{i}xy + \mathbf{j}(2zy^2 - 2z^2x) + \mathbf{k}(zy - 2z^2y)$.

10.3.6. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{j} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{k} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Απ. $\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \mathbf{0}$.

10.3.7. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$.

Απ. $3y, x\mathbf{k}$.

10.3.8. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$.

Απ. $yz + 2y, -2z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - zx\mathbf{k}$.

10.3.9. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z^2)\mathbf{i} + (y + z + x^2)\mathbf{j} + (z + x + y^2)\mathbf{k}$.

Απ. $3, (2y - 1)\mathbf{i} + (2z - 1)\mathbf{j} + (2x - 1)\mathbf{k}$.

10.3.10. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2yz)\mathbf{i} + (xy^2 + 2\sin z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$

Απ. $2xyz + 2xy + 1, (-2\cos z)\mathbf{i} + (x^2y - 1)\mathbf{j} + (y^2 - zx^2)\mathbf{k}$.

10.3.11. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x+y}{z}\mathbf{i} + \frac{y+z}{x}\mathbf{j} + \frac{z+x}{y}\mathbf{k}$.

Απ. $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \left(-\frac{z+x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{x+y}{z^2} - \frac{1}{y}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{y+z}{x^2} - \frac{1}{z}\right)\mathbf{k}$.

10.3.12. Να βρεθεί η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφή $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2yz)\mathbf{i} + (xy^2 + 2\sin z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$

Απ. $2xyz + 2xy + 1, (-2\cos z)\mathbf{i} + (x^2y - 1)\mathbf{j} + (y^2 - zx^2)\mathbf{k}$.

10.3.13. Αν $\mathbf{F} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ (όπου \mathbf{c} είναι σταθερό διάνυσμα), να δείχτει ότι $\nabla \times \mathbf{F} = 2\mathbf{c}$.

10.3.14. Να δείχτει ότι $\nabla \cdot (\mathbf{r} |\mathbf{r}|^n) = (n + 3) |\mathbf{r}|^n$.

10.3.15. Αν $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{km}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{r}$, δείξτε ότι $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \left(\frac{km}{|\mathbf{r}|} \right)$ και $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

10.3.16. Εστώ ότι τα $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ ικανοποιούν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{G}$ και $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Δείξτε ότι $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G} = 0$.

10.3.17. Να δείχτει ότι $\mathbf{n} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) = \nabla \cdot \mathbf{A}$, όπου \mathbf{A}, \mathbf{n} σταθερά διανύσματα, $\|\mathbf{n}\| = 1$.

10.3.18. Να δείχτει ότι $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F})$.

10.3.19. Να δείχτει ότι $\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \phi (\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla \phi$.

10.3.20. Να δείχτει ότι $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

10.3.21. Να δείχτει ότι $\nabla \cdot (\nabla \phi \times \nabla \psi) = 0$.

10.3.22. Να δείχτει ότι $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F})$.

10.3.23. Εστω $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ και $r = \|\mathbf{r}\|$. Να δειχτεί ότι: (α) $\nabla r = \mathbf{r}/r$, (β) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, (γ) $\nabla (r^{-1}) = \mathbf{r}/r^3$, (δ) $\nabla (\ln r) = \mathbf{r}/r^2$.

10.3.24. Αν $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^n$, υπάρχει τιμή του n τέτοια ώστε $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$;

Απ. Ναι, για $n = 3$.

10.3.25. Να δειχτεί ότι κάθε πεδίο της μορφής $\mathbf{F} = iP(y, z) + jQ(x, z) + kR(x, y)$ είναι σωληνοειδές.

10.3.26. Να υπολογιστεί $\nabla \cdot \mathbf{F}$, όταν $\mathbf{F} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{r}$.

Απ. 0.

10.3.27. Να υπολογιστεί $\nabla \cdot \mathbf{F}$, όταν $\mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3$.

Απ. 0.

10.3.28. Να υπολογιστεί $\nabla \cdot \mathbf{F}$, όταν $\mathbf{F} = 1 / \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$.

Απ. 0.

10.3.29. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = ix + jy$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το δυναμικό του.

Απ. $\phi = x^2 + y^2$.

10.3.30. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = i3y^2 + j6xy$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το δυναμικό του.

Απ. $\phi = 3xy^2$.

10.3.31. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = i2xe^{y+z} + jx^2e^{y+z} + kx^2e^{y+z}$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το δυναμικό του.

Απ. $\phi = x^2e^{y+z}$.

10.3.32. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = i2(\cos(x^2 + y^3))xe^{z^2} + j3(\cos(x^2 + y^3))y^2e^{z^2} + k2(\sin(x^2 + y^3))ze^{z^2}$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το δυναμικό του.

Απ. $\phi = \sin(x^2 + y^3)e^{z^2}$.

10.3.33. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = i2xe^y + jx^2e^y$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(0, 0)$ και $(3, 2)$.

Απ. $9e^2$.

10.3.34. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = i(e^x \ln y - e^y/x) + j(e^x/y - e^y \ln x)$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(1, 1)$ και $(3, 3)$.

Απ. 0.

10.3.35. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = iy + jx + kz$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(0, 0, 0)$ και $(1, 1, 1)$.

Απ. $3/2$.

10.3.36. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}e^xy + \mathbf{j}(e^x + 2yz^2) + \mathbf{k}2y^2z$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(0, 0, 0)$ και $(1, 1, 1)$.

Απ. $e + 1$.

10.3.37. Να δειχτεί ότι το $\mathbf{F} = \mathbf{i} \cosh x + \mathbf{j}6yz^2 + \mathbf{k}6y^2z$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C είναι τυχούσα καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(0, 0, 0)$ και $(1, 1, 1)$.

Απ. $\sinh 1 + 3$.

10.3.38. Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού ενός σταθερού πεδίου $\mathbf{F} = \mathbf{i}a + \mathbf{j}b + \mathbf{k}c$.

Απ. $\phi = ax + by + cz$.

10.3.39. Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού ενός πεδίου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k \cdot \mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|$.

Απ. $\phi = -\frac{1}{2} \|\mathbf{r}\|^2$.

10.3.40. Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού ενός πεδίου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\|\mathbf{r}\|) \cdot \mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|$.

Απ. $\phi(\mathbf{r}) = \int_a^{\|\mathbf{r}\|} f(p) dp$.

Κεφάλαιο 11

Επιφάνειες σε Παραμετρική Αναπαράσταση

11.1 Θεωρία

11.1.1. Μια επιφάνεια S είναι ένα σύνολο σημείων στον τρισδιάστατο χώρο: $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

11.1.2. Έχουμε ήδη δει στο Κεφάλαιο ;; ότι μια επιφάνεια S μπορεί να αναπαρασταθεί από μια εξίσωση της μορφής

$$S : \phi(x, y, z) = 0. \quad (11.1)$$

δηλ.

$$S = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = 0\}$$

11.1.3. Επίσης όμως, μια επιφάνεια μπορεί να αναπαρασταθεί από μια διανυσματική διπαράμετρική σχέση:

$$S : \mathbf{r}(u, v) = i x(u, v) + j y(u, v) + k z(u, v) \quad (11.2)$$

όπου $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ και λέγονται *παραμετροί της επιφάνειας*.

11.1.4. Μια ειδική περίπτωση της (11.2) είναι να πάρουμε $u = x$ και $v = y$, δηλ.

$$S : \mathbf{r}(x, y) = i x + j y + k z(x, y). \quad (11.3)$$

11.1.5. Έχουμε ήδη δει ότι, όταν η S δίνεται στην μορφή $\phi(x, y, z) = 0$, το διάνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι

$$\mathbf{n} = \nabla \phi(x, y, z) |_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}.$$

11.1.6. Όταν η επιφάνεια S δίνεται στην μορφή $\mathbf{r}(u, v)$, ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια (στο σημείο $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$) είναι το

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \mathbf{j} \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \mathbf{k} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}. \quad (11.4)$$

11.1.7. Όταν η S δίνεται στην μορφή

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z(x, y)$$

η (11.4) απλοποιείται και ένα διανυσμα κάθετο στην επιφάνεια (στο σημείο $(x, y, z(x, y))$) είναι το

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = -\mathbf{i} \frac{\partial z}{\partial x} - \mathbf{j} \frac{\partial z}{\partial y} + \mathbf{k}.$$

11.1.8. Μια επιφάνεια λέγεται *απλή* όταν αναπαριστάται από συνεχείς συναρτήσεις και δεν τερνεί τον εαυτό της.

11.1.9. Μια επιφάνεια S λέγεται *λεία* όταν έχει κάθετο διανυσμα σε κάθε σημείο της. Π.χ., αν η επιφάνεια δίνεται στην μορφή $\mathbf{r}(u, v)$, τότε είναι λεία αν $|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}| \neq 0$ για κάθε u, v .

11.1.10. Η εξίσωση της καθετής *ευθείας* στο (x_0, y_0, z_0) είναι

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}_0 = 0$$

όπου $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0)$ και $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(x_0, y_0, z_0)$ (το διανυσμα κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο (x_0, y_0, z_0)).

11.1.11. Η εξίσωση του επιπέδου το οποίο εφαπτεται στην επιφάνεια στο σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι

$$(\mathbf{i}(x - x_0) + \mathbf{j}(y - y_0) + \mathbf{k}(z - z_0)) \cdot \mathbf{n}_0 = 0.$$

11.1.12. *Προσανατολισμένη* ή *διπλευρη* λέγεται μια απλή, λεία επιφάνεια S εάν έχει δυο *οψεις* και δεν μπορούμε να μεταβούμε από την μια οψη στην άλλη χωρίς να διατρυπήσουμε την επιφάνεια ή να συναντήσουμε το περας αυτής (ο ορισμός αυτός είναι διαισθητικός, όχι αυστηρός).

11.1.13. Σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια S μπορούμε να ορίσουμε την *θετική* και την *αρνητική* οψη. Η θετική πλευρά της επιφάνειας είναι αυτή "υπεράνω" της οποίας βρίσκεται το μοναδιαίο διανυσμα \mathbf{n}_0 κάθετο στην S .

11.1.14. Υπάρχουν και μονοπλευρες επιφάνειες (π.χ. η ταινία του *Moebius* - δες το πρόβλημα 11.2.31).

11.1.15. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια επιφάνεια "κτιζεται" από μια οικογένεια καμπυλών. Π.χ., εστω η επιφάνεια S

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}x(u, v) + \mathbf{j}y(u, v) + \mathbf{k}z(u, v). \quad (11.5)$$

Ας δώσουμε μια σταθερή τιμή u_0 στην παραμετρο u . Τότε η (11.5) γίνεται

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{i}x(u_0, v) + \mathbf{j}y(u_0, v) + \mathbf{k}z(u_0, v), \quad (11.6)$$

δηλ. μια καμπυλη C με παραμετρο v . Επειδη καθε σημειο της (11.6) ικανοποιει και την (11.5), καθε σημειο της C ανηκει στην S . Αν τωρα θεωρησουμε το συνολο $\{r(u_0, v)\}_{v \in \mathbb{R}}$ παιρνομε μια οικογενεια καμπυλων και εχουμε

$$\cup_{u_0 \in \mathbb{R}} \{r(u_0, v)\}_{v \in \mathbb{R}} = \{r(u, v)\}_{u, v \in \mathbb{R}} = S,$$

δηλ. η οικογενεια καμπυλων ταυτιζεται με την επιφανεια. Παρομοια, μπορομε να θεωρησουμε οτι η S κτιζεται απο την οικογενεια καμπυλων $\cup_{v_0 \in \mathbb{R}} \{r(u, v_0)\}_{u \in \mathbb{R}}$ οπου η v παιρνει μια σταθερη τιμη v_0 και η (11.5) γινεται

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{i}x(u, v_0) + \mathbf{j}y(u, v_0) + \mathbf{k}z(u, v_0), \quad (11.7)$$

11.2 Λυμενα Προβληματα

11.2.1. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του επιπεδου $E : x - y + z = 2$ και σχεδιαστε το επιπεδο.

Λυση. Θετουμε $u = x$, $v = y$. Κατοπιν λυνουμε την $x - y + z = 2$ ως προς z και παιρνομε

$$z = 2 - x + y \Rightarrow z = 2 - u + v \Rightarrow \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}(2 - u + v).$$

Η τελευταια ειναι η παραμετρικη διανυσματικη εξισωση του επιπεδου.

11.2.2. Να βρεθουν τα σημεια στα οποια η επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}(a - u - v)^2$ τεμνει τους αξονες x, y, z .

Λυση. Το σημειο στο οποιο η επιφανεια τεμνει τον αξονα των x εχει την μορφη

$$\mathbf{r}(u_1, v_1) = \mathbf{i}u_1 = \mathbf{i}u_1 + \mathbf{j}v_1 + \mathbf{k} \cdot (a - u_1 - v_1)^2.$$

Αρα

$$v_1 = 0, \quad (a - u_1 - v_1)^2 = 0 \Rightarrow u_1 = a.$$

Δηλ. η επιφανεια τεμνει τον αξονα των x στο σημειο $(a, 0, 0)$. Αντιστοιχα, το σημειο στο οποιο η επιφανεια τεμνει τον αξονα των y εχει την μορφη $\mathbf{r}(u_2, v_2) = \mathbf{0}$ οποτε τελικα προκυπτει οτι αυτο ειναι το σημειο $(0, a, 0)$. Τελος, η επιφανεια τεμνει τον αξονα των z στο σημειο

$$\mathbf{r}(u_3, v_3) = \mathbf{k}(a - u_3 - v_3)^2 = \mathbf{i}u_3 + \mathbf{j}v_3 + \mathbf{k} \cdot (a - u_3 - v_3)^2.$$

αρα $u_3 = v_3 = 0$ και τελικα το ζητυμενο σημειο (στο οποιο η επιφανεια τεμνει τον αξονα των z) ειναι το $(0, 0, a)$.

11.2.3. Βρείτε τις εξισώσεις του επιπέδου E το οποίο περνάει από το σημείο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$ και είναι παραλληλο στα διανυσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} .

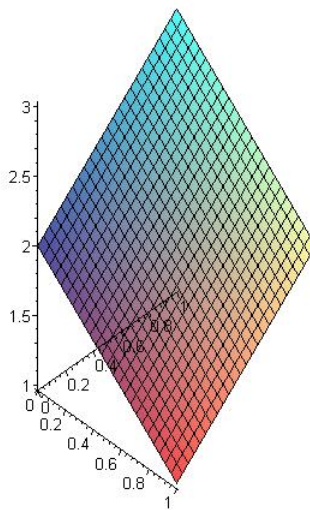
Λυση. Εστω τυχόν σημείο $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ του E . Το διάνυσμα $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των \mathbf{a} και \mathbf{b} . Δηλ.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Δηλ. η ζητούμενη εξίσωση θα είναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Η γραφική παρασταση είναι αυτή του Σχ.11.1. Βλέπουμε ότι το επίπεδο γεννιέται από ευθείες γραμμές παραλλήλες στα διανυσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} .



Σχήμα 11.1: Η γραφική παρασταση του επιπέδου.

11.2.4. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της σφαιρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ και σχεδιαστε αυτη.

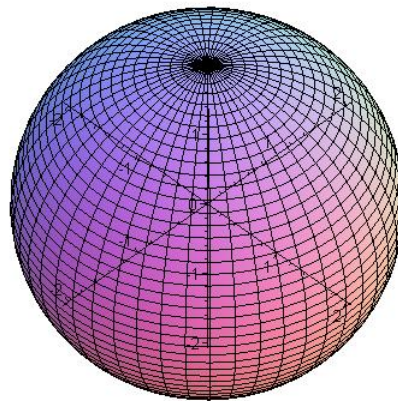
Λυση. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η εξίσωση σφαιρας με ακτινα 2 είναι $R = 2$. Αρα τυχον σημειο της σφαιρας θα εχει συντεταγμένες

$$\mathbf{i}2 \cos \theta \cos \phi + \mathbf{j}2 \sin \theta \cos \phi + \mathbf{k}2 \sin \phi$$

Θετουμε $u = \theta$, $v = \phi$. Οποτε οι ζητουμενες εξισώσεις γινονται

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}2 \cos u \cos v + \mathbf{j}2 \sin u \cos v + \mathbf{k}2 \sin v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

Αυτη είναι η παραμετρική διανυσματική εξίσωση της σφαιρας. Η γραφική παρασταση είναι αυτη του Σχ. 11.2.



Σχήμα 11.2: Η γραφική παρασταση της σφαιρας.

Βλεπουμε οτιο η σφαιρα γεννιεται απο κυκλους οι οποιοι περνουν απο τον βορειο και νοτιο πολο αυτης· αυτοι οι κυκλοι περιγραφονται απο εξισώσεις (για δοθεν u_0)

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}2 \cos u_0 \cos v + \mathbf{j}2 \sin u_0 \cos v + \mathbf{k}2 \sin v, \quad v \in [0, \pi],$$

και απο κυκλους παραλληλους στον ισημερινο· αυτοι οι κυκλοι περιγραφονται απο εξισώσεις (για δοθεν v_0)

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}2 \cos u \cos v_0 + \mathbf{j}2 \sin u \cos v_0 + \mathbf{k}2 \sin v_0, \quad u \in [0, 2\pi].$$

11.2.5. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της σφαιρας $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 2^2$ και σχεδιαστε αυτη.

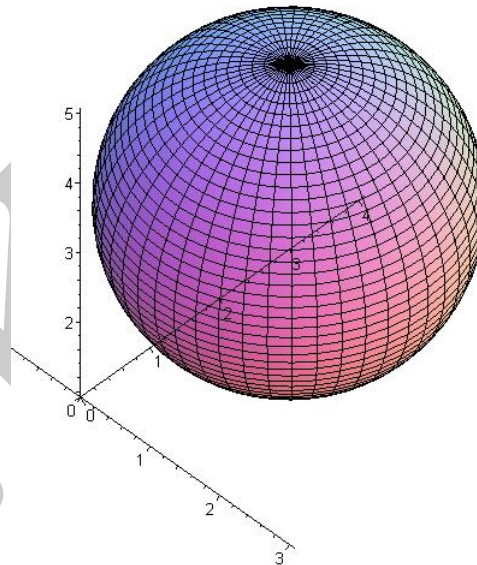
Λυση. Η εξίσωση είναι παρομοια με αυτη της προηγουμενης ασκησης:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(1 + 2 \cos u \cos v) + \mathbf{j}(2 + 2 \sin u \cos v) + \mathbf{k}(3 + 2 \sin v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη είναι η σωστη εξίσωση: εχουμε

$$\begin{aligned} & (x(u, v) - 1)^2 + (y(u, v) - 2)^2 + (z(u, v) - 3)^2 \\ &= (1 + 2 \cos u \cos v - 1)^2 + (2 + 2 \sin u \cos v - 2)^2 + (3 + 2 \sin v - 3)^2 \\ &= 4 \cos^2 u \cos^2 v + 4 \sin^2 u \cos^2 v + 4 \sin^2 v \\ &= 4 \cdot ((\cos^2 u + \sin^2 u) \cos^2 v + \sin^2 v) \\ &= 4 \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v) = 4. \end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση είναι αυτη του Σχ. 11.3.



Σχήμα 11.3: Η γραφικη παρασταση της σφαιρας.

11.2.6. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του ελλειψοειδους $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ και σχεδιαστε αυτο.

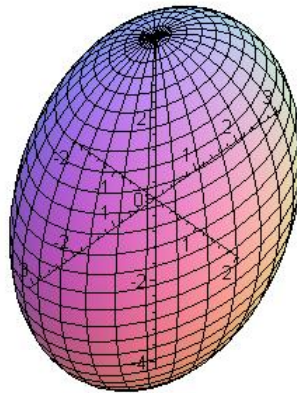
Λυση. Το ελλειψοειδες εχει παραμετρικη εξισωση (παρομοια με αυτη της σφαιρας):

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \cos v + \mathbf{j}b \sin u \cos v + \mathbf{k}c \sin v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x(u, v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b}\right)^2 + \left(\frac{z(u, v)}{c}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a \cos u \cos v}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \sin u \cos v}{b}\right)^2 + \left(\frac{c \sin v}{c}\right)^2 \\ &= \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) \cos^2 v + \sin^2 v \\ &= \cos^2 v + \sin^2 v = 1. \end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.4. Απο ποιες καμπυλες γενναιται το ελλειψοειδες;



Σχήμα 11.4: Η γραφικη παρασταση του ελλειψοειδους.

11.2.7. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του μονοχώνου υπερβολοειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ και σχεδιάστε αυτό.

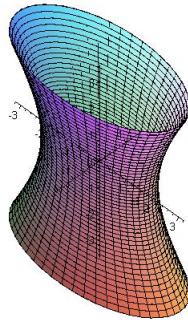
Λυση. Το υπερβολοειδές έχει παραμετρική εξίσωση (παρομοία με αυτή της σφαίρας):

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \cosh v + \mathbf{j}b \sin u \cosh v + \mathbf{k}c \sinh v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε ευκολά να επαληθεύσουμε ότι αυτή είναι η σωστή εξίσωση: έχουμε

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x(u, v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b}\right)^2 - \left(\frac{z(u, v)}{c}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a \cos u \cosh v}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \sin u \cosh v}{b}\right)^2 - \left(\frac{c \sinh v}{c}\right)^2 \\ &= \cos^2 u \cosh^2 v + \sin^2 u \cosh^2 v - \sinh^2 v \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) \cosh^2 v - \sinh^2 v \\ &= \cosh^2 v - \sinh^2 v = 1. \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση είναι αυτή του Σχ.11.5. Από ποιες καμπύλες γεννιέται το υπερβολοειδές;



Σχήμα 11.5: Η γραφική παράσταση του μονοχώνου υπερβολοειδούς.

11.2.8. Γραψτε παραμετρικές εξισώσεις του μονοχώνου υπερβολοειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ διαφορετικές από αυτές της προηγούμενης άσκησης.

Λυση. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sqrt{1 + v^2} + \mathbf{j}b \sin u \sqrt{1 + v^2} + \mathbf{k}cv, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε ευκολά να επαληθεύσουμε ότι αυτή η εξίσωση είναι σωστή: έχουμε

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x(u, v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b}\right)^2 - \left(\frac{z(u, v)}{c}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a \cos u \sqrt{1 + v^2}}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \sin u \sqrt{1 + v^2}}{b}\right)^2 - \left(\frac{c v}{c}\right)^2 \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) (1 + v^2) - v^2 = 1. \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι μια επιφάνεια μπορεί να έχει περισσότερες από μια παραμετρικές.

11.2.9. Γραψτε δυο διαφορετικες παραμετρισεις του διχωνου υπερβολοειδους $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ και σχεδιαστε αυτο.

Λυση. Μια δυνατη παραμετριση (δινει μονο το ανω μισο της επιφανειας) ειναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sinh v + \mathbf{j}b \sin u \sinh v + \mathbf{k}c \cosh v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη ειναι η σωστη εξισωση: εχουμε

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x(u, v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b}\right)^2 - \left(\frac{z(u, v)}{c}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a \cos u \sinh v}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \sin u \sinh v}{b}\right)^2 - \left(\frac{c \cosh v}{c}\right)^2 \\ &= \cos^2 u \sinh^2 v + \sin^2 u \sinh^2 v - \cosh^2 v \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) \sinh^2 v - \cosh^2 v = -1. \end{aligned}$$

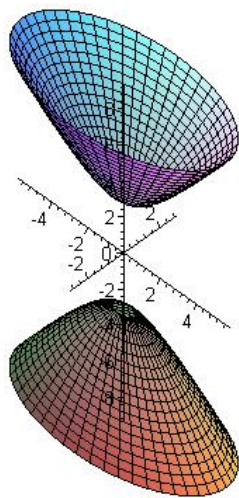
Μια αλλη παραμετριση (η οποια δινει και τα δυο μερη της επιφανειας) ειναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sqrt{v^2 - 1} + \mathbf{j}b \sin u \sqrt{v^2 - 1} + \mathbf{k}cv, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R} - (-1, 1).$$

Πραγματι

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x(u, v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b}\right)^2 - \left(\frac{z(u, v)}{c}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a \cos u \sqrt{v^2 - 1}}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \sin u \sqrt{v^2 - 1}}{b}\right)^2 - \left(\frac{c v}{c}\right)^2 \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) (v^2 - 1) - v^2 = -1. \end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.6. Απο ποιες καμπυλες γενναιται το υπερβολοειδες; Ποια απο τις δυο παραμετρισεις χρησιμοποιηθηκε στο Σχ. 11.6;



Σχήμα 11.6: Η γραφική παρασταση του διχωνου υπερβολοειδους.

11.2.10. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του ελλειπτικού παραβολοειδους $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιαστε αυτο.

Λυση. Μια απλη παραμετρηση ειναι (προφανως):

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k} \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right), \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Μια αλλη παραμετρηση ειναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u\sqrt{v} + \mathbf{j}b \sin u\sqrt{v} + \mathbf{k}cv, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(u, v)}{a} \right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b} \right)^2 &= \left(\frac{a \cos u\sqrt{v}}{a} \right)^2 + \left(\frac{b \sin u\sqrt{v}}{b} \right)^2 \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) v = v = z(u, v). \end{aligned}$$

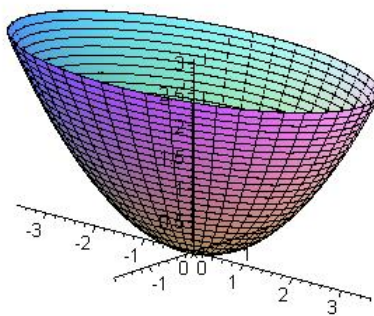
Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.7. Βλεπουμε οτι το παραβολοειδες γεννιεται απο τις καμπυλες

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{i}a \cos u_0\sqrt{v} + \mathbf{j}b \sin u_0\sqrt{v} + \mathbf{k}cv, \quad v \in \mathbb{R}.$$

που ειναι παραβολες· και απο τις

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{i}a \cos u\sqrt{v_0} + \mathbf{j}b \sin u\sqrt{v_0} + \mathbf{k}cv_0, \quad u \in [0, 2\pi].$$

που ειναι ελλειψεις.



Σχήμα 11.7: Η γραφικη παρασταση του ελλειπτικού παραβολοειδους.

11.2.11. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του υπερβολικού παραβολοειδούς $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιάστε αυτό.

Λυση. Μια απλή παραμετρική είναι (προφανώς):

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k} \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Μια άλλη παραμετρική είναι

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cosh u \sqrt{v} + \mathbf{j}b \sinh u \sqrt{v} + \mathbf{k}c \sin v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε ευκολά να επαληθεύσουμε ότι αυτή η εξίσωση είναι σωστή: έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(u, v)}{a} \right)^2 - \left(\frac{y(u, v)}{b} \right)^2 &= \left(\frac{a \cosh u \sqrt{v}}{a} \right)^2 - \left(\frac{b \sinh u \sqrt{v}}{b} \right)^2 \\ &= (\cosh^2 u - \sinh^2 u) v = v = z(u, v). \end{aligned}$$

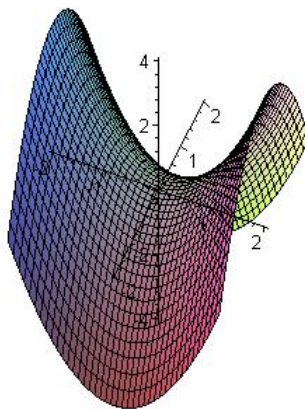
Η γραφική παράσταση είναι αυτή του Σχ.11.8. Βλέπουμε ότι το παραβολοειδές γεννιέται από τις καμπύλες

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{i}u_0 + \mathbf{j}v + \mathbf{k} \left(\frac{u_0^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), \quad v \in \mathbb{R}.$$

που είναι παραβολές (στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω)· και από τις

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v_0 + \mathbf{k} \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v_0^2}{b^2} \right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

που είναι επίσης παραβολές (στρέφουν τα κοίλα προς τα πάνω).



Σχήμα 11.8: Η γραφική παράσταση του υπερβολικού παραβολοειδούς.

11.2.12. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του κωνου $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιαστε αυτον.

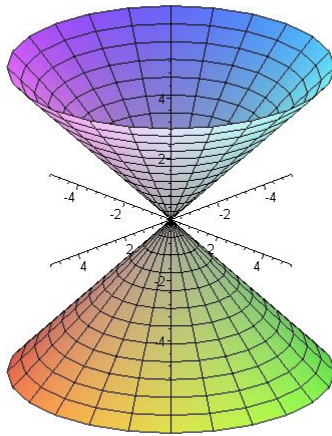
Λυση. Μια δυνατη παραμετρηση ειναι η

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}av \cos u + \mathbf{j}bv \sin u + \mathbf{k}v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(u, v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b}\right)^2 &= \left(\frac{a \cos u}{a}v\right)^2 + \left(\frac{b \sin u}{b}v\right)^2 = \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) \cdot v^2 = v^2 = z^2(u, v). \end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.9.



Σχήμα 11.9: Η γραφικη παρασταση του κωνου.

11.2.13. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του κυλινδρου $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιαστε αυτον.

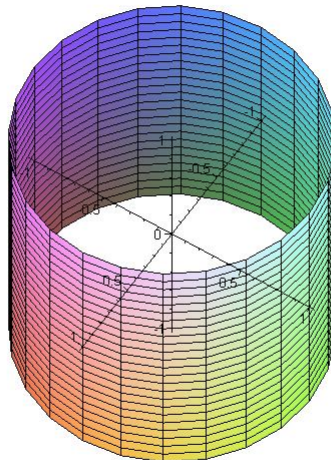
Λυση. Μια δυνατη παραμετρηση ειναι η

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u + \mathbf{j}b \sin u + \mathbf{k}v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(u, v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{b}\right)^2 &= \left(\frac{a \cos u}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \sin u}{b}\right)^2 = \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u) = 1. \end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.10.



Σχήμα 11.10: Η γραφικη παρασταση του κυλινδρου.

11.2.14. Η επιφάνεια που περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση

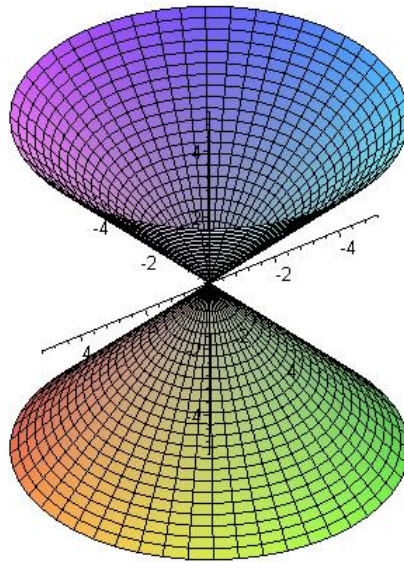
$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \quad (11.8)$$

λεγεται *κωνική επιφάνεια* με *κορυφή* το σημείο \mathbf{r}_0 και *οδηγο καμπύλη* την $\mathbf{r}_1(u)$. Εάν η $\mathbf{r}_1(u)$ είναι ένας κύκλος, τότε η (11.8) δίνει τον «κλασικό» κώνο. Γραψτε την εξίσωση και σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια όταν $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u + \mathbf{k}$.

Λυση. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{0} + v\mathbf{r}_1(u) = v\cos u \mathbf{i} + v\sin u \mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

η οποία είναι η εξίσωση του “κλασικού” κώνου. Πραγματι, η εν λόγω κωνική επιφάνεια έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και οδηγό καμπύλη τον κύκλο $\mathbf{r}_1(u)$ ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $(0, 0, 1)$, ακτίνα 1 και βρίσκεται επί του επιπέδου $z = 1$ (γιατί συμβαίνουν όλα αυτά;). Με άλλα λόγια, η κυλινδρική επιφάνεια σχηματίζεται φεροντας από κάθε σημείο του κύκλου μια ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 0, 1)$. Η γραφική παράσταση είναι αυτή του Σχ.11.11.



Σχήμα 11.11: Η γραφική παράσταση του κώνου.

11.2.15. Γραψτε την εξίσωση και σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια όταν $\mathbf{r}_0 = \mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u$.

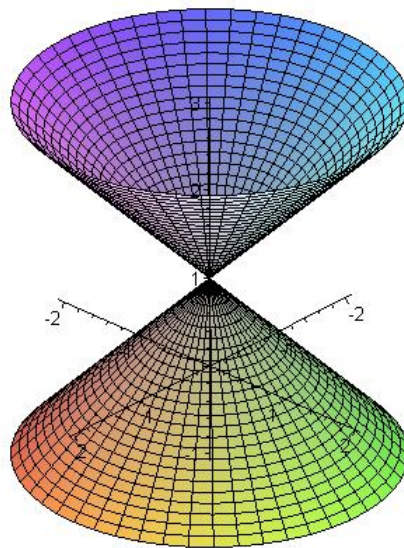
Λυση. Η εν λόγω κωνική επιφάνεια έχει κορυφή το σημείο $(0, 0, 1)$ και οδηγό καμπυλη τον κύκλο $\mathbf{r}_1(u)$ ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$, ακτίνα 1 και βρίσκεται επί του επιπέδου $z = 0$. Με άλλα λόγια, η κυλινδρική επιφάνεια σχηματίζεται φεροντας από κάθε σημείο του κύκλου μια ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 0, 1)$. Η εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0)$$

γίνεται

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) = \mathbf{k} + v \cdot (\mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u - \mathbf{k}) = v \cos u \mathbf{i} + v \sin u \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot (1 - v) ..$$

Η γραφική παρασταση είναι αυτή του Σχ. 11.12.



Σχήμα 11.12: Η γραφική παρασταση του κώνου.

11.2.16. Γραψτε την εξίσωση και σχεδιαστε την κωνική επιφάνεια όταν $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j} \sin u$.

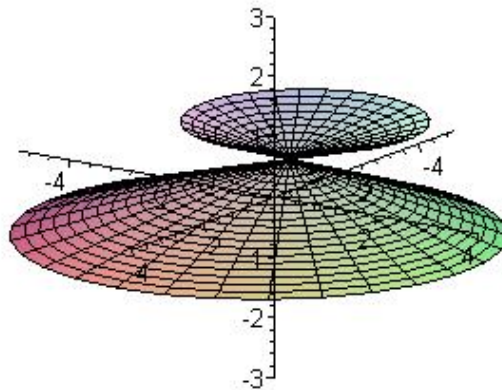
Λυση. Η εν λόγω κωνική επιφάνεια έχει κορυφή το σημείο $(1, 1, 1)$ και οδηγό καμπυλή την ελλειψη $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$ η οποία βρίσκεται επί του επιπέδου $z = 0$. Με άλλα λόγια, η κυλινδρική επιφάνεια σχηματίζεται φεροντας απο κάθε σημείο της ελλειψης μια ευθεια η οποία διερχεται απο το σημείο $(1, 1, 1)$. Η εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0)$$

γίνεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + v \cdot (\mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j} \sin u) \\ &= \mathbf{i}(1 + 2v \cos u) + \mathbf{j}(1 + v \sin u) + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Η γραφική παρασταση είναι αυτή του Σχ. 11.13.



Σχήμα 11.13: Η γραφική παρασταση του κωνου.

11.2.17. Η επιφάνεια που περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση

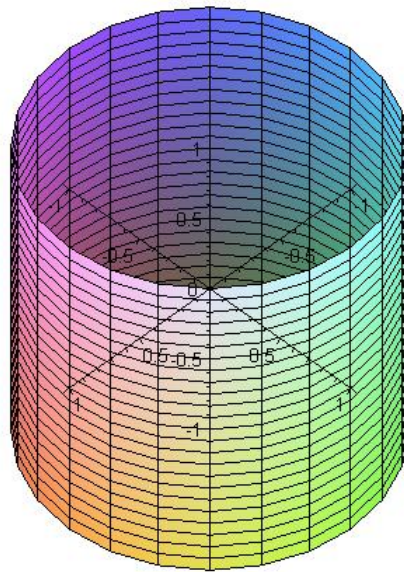
$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1(u) + v \cdot \mathbf{r}_2 \quad (11.9)$$

λεγεται *κυλινδρική επιφάνεια* με γενετειρα το διανυσμα \mathbf{r}_2 και οδηγο καμπυλη την $\mathbf{r}_1(u)$. Εάν η $\mathbf{r}_1(u)$ είναι ένας κυκλος και το \mathbf{r}_2 παραλληλο σε ένα από τους άξονες Ox, Oy, Oz τότε η (11.9) δίνει τον «κλασικο» κυλινδρο. Γραψτε την εξίσωση και σχεδιαστε την κωνική επιφάνεια όταν $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u$ και $\mathbf{r}_2 = \mathbf{k}$.

Λυση. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u + \mathbf{k}v$$

η οποία είναι η εξίσωση του “κλασικου” κυλινδρου. Πραγματι, η εν λόγω κυλινδρική επιφάνεια έχει γενετειρα ένα διανυσμα παραλληλο στον άξονα των z και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $\mathbf{r}_1(u)$ ο οποίος έχει κεντρο το σημείο $(0, 0, 0)$, ακτινα 1 και βρισκεται επι του επιπεδου $z = 0$ (γιατι συμβαινουν ολα αυτα;). Με αλλα λογια, η κυλινδρική επιφάνεια σχηματιζεται φεροντας απο καθε σημείο του κυκλου μια ευθεια παραλληλη στο διανυσμα \mathbf{k} (στον άξονα των z). Η γραφική παρασταση είναι αυτή του Σχ.11.14.



Σχήμα 11.14: Η γραφική παρασταση της κυλινδρικής επιφάνειας.

11.2.18. Γραψτε την εξίσωση και σχεδιαστε την κυλινδρική επιφάνεια όταν $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j} \sin u$.

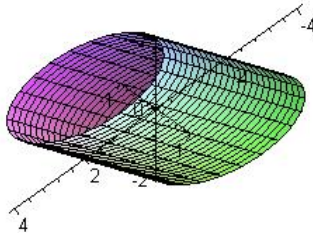
Λυση. Η εν λόγω επιφάνεια έχει γενετειρα το διανυσμα $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ και οδηγο καμπυλη την ελλειψη $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$ και βρισκεται επι του επιπεδου $z = 0$. Με αλλα λογια, η κυλινδρική επιφάνεια σχηματιζεται φεροντας απο καθε σημειο της ελλειψης μια ευθεια παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{i} + \mathbf{k}$. Η εξίσωση

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1 + v \cdot \mathbf{r}_2(u)$$

γινεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}_1 + v \cdot \mathbf{r}_2(u) \\ &= \mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j} \sin u + v \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{i}(1 + 2 \cos u) + \mathbf{j} \sin u + \mathbf{k} \cdot (1 + v) \dots \end{aligned}$$

Η γραφική παρασταση είναι αυτή του Σχ. 11.15.



Σχήμα 11.15: Η γραφική παρασταση της κυλινδρικής επιφάνειας.

11.2.19. Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(2u + 1) + \mathbf{j}(-u + 3v) + \mathbf{k}(2 + 4u + 5v)$.

Λυση. Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως εξής

$$\mathbf{i}(2u + 1) + \mathbf{j}(-u + 3v) + \mathbf{k}(2 + 4u + 5v) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) + u \cdot (\mathbf{i}2 - \mathbf{j} + \mathbf{k}4) + v \cdot (\mathbf{j}3 + \mathbf{k}5) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1 + v\mathbf{r}_2$$

με

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}2 - \mathbf{j} + \mathbf{k}4, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{j}3 + \mathbf{k}5.$$

Αρα η επιφάνεια είναι ένα επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το σημείο $(1, 0, 2)$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\mathbf{i}2 - \mathbf{j} + \mathbf{k}4$ και $\mathbf{j}3 + \mathbf{k}5$.

11.2.20. Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}2u + \mathbf{j}3v + \mathbf{k}(u^2 + v^2)$.

Λυση. Εχουμε

$$x(u, v) = 2u, \quad y(u, v) = 3v, \quad z(u, v) = u^2 + v^2$$

οπότε

$$\left(\frac{x(u, v)}{2}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{3}\right)^2 = \left(\frac{2u}{2}\right)^2 + \left(\frac{3v}{3}\right)^2 = u^2 + v^2 = z(u, v).$$

Αρα η επιφάνεια είναι ελλειπτικό παραβολοειδές.

11.2.21. Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}2u \cos v + \mathbf{j}3u \sin v + \mathbf{k}u^2$.

Λυση. Εχουμε

$$x(u, v) = 2u \cos v, \quad y(u, v) = 3u \sin v, \quad z(u, v) = u^2$$

οπότε

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(u, v)}{2}\right)^2 + \left(\frac{y(u, v)}{3}\right)^2 &= \left(\frac{2u \cos v}{2}\right)^2 + \left(\frac{3u \sin v}{3}\right)^2 \\ &= u^2 \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 = z(u, v). \end{aligned}$$

Αρα η επιφάνεια είναι ελλειπτικό παραβολοειδές.

11.2.22. Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}3 \cos v + \mathbf{k}4 \sin v$.

Λυση. Εχουμε

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = 3 \cos v, \quad z(u, v) = 4 \sin v$$

οπότε

$$\left(\frac{y(u, v)}{3}\right)^2 + \left(\frac{z(u, v)}{4}\right)^2 = \left(\frac{3 \cos v}{3}\right)^2 + \left(\frac{4 \sin v}{4}\right)^2 = 1.$$

Αρα η επιφάνεια είναι κυκλικός κυλινδρός παράλληλος προς τον άξονα των x .

11.2.23. Να αναγνωριστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}3u \cos v + \mathbf{k}4u \sin v$.

Λυση. Εχουμε

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = 3u \cos v, \quad z(u, v) = 4u \sin v$$

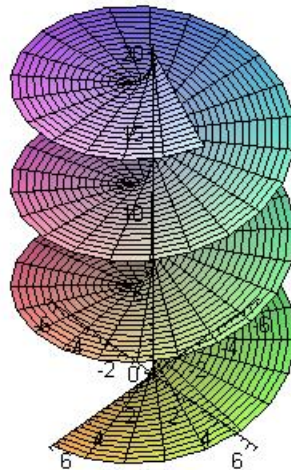
οπότε

$$\left(\frac{y(u, v)}{3}\right)^2 + \left(\frac{z(u, v)}{4}\right)^2 = \left(\frac{3u \cos v}{3}\right)^2 + \left(\frac{4u \sin v}{4}\right)^2 = u^2.$$

Αρα η επιφάνεια είναι κυκλικός κώνος παράλληλος προς τον άξονα των x .

11.2.24. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u \cos v + \mathbf{j}u \sin v + \mathbf{k}v$, $u \in [0, 5]$, $v \in [0, 6\pi]$.

Λυση. Η γραφική παρασταση της επιφάνειας δίνεται στο Σχ. 11.16. Το σχήμα θυμίζει μια ελικοειδή κλιμακα και πραγματι η "επίσημη" ονομασία του είναι *ελικοειδης*. Ας προσπαθησουμε να καταλαβουμε πως δημιουργειται το σχημα αυτο. Η επιφάνεια



Σχήμα 11.16: Η γραφική παρασταση του ελικοειδους.

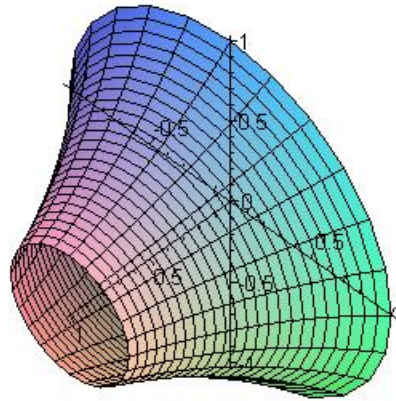
αποτελειται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{i}u_0 \cos v + \mathbf{j}u_0 \sin v + \mathbf{k}v$$

(για $u_0 \in [0, 5]$). Για σταθερο u_0 , καθε τετοια καμπυλη είναι μια ελικά - μεγαλύτερες τιμες του u_0 δινουν ελικες με μεγαλύτερη ακτινα. Στο Σχ. 11.16 βλέπουμε τις ελικες αυτές και κατανοουμε πως η ένωση τους δημιουργει το ελικοειδης.

11.2.25. Να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}e^{-u} \cos v + \mathbf{k}e^{-u} \sin v$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Η γραφική παρασταση της επιφάνειας δίνεται στο Σχ. 11.17. Το σχήμα θυμίζει το στομίο μιας τρμπετας. Για να καταλαβουμε πως δημιουργείται το σχήμα αυτο



Σχήμα 11.17: Η γραφική παρασταση της τρμπετας.

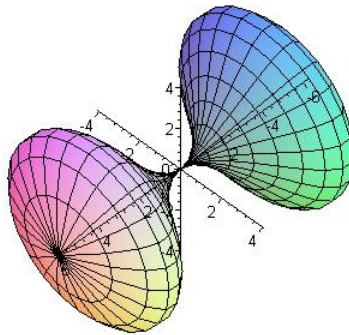
παρτηρουμε οτι η επιφάνεια αποτελείται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{i}u_0 + \mathbf{j}e^{-u_0} \cos v + \mathbf{k}e^{-u_0} \sin v$$

(για $u_0 \in [0, 1]$). Για σταθερο u_0 , καθε τετοια καμπυλη ειναι ενας κυκλος με κεντρο το $(u_0, 0, 0)$, ακτινα e^{-u_0} και κειμενος εξολοκληρου επι του επιπεδου $x = u_0$. Η ενωση αυτων των κυκλων δημιουργει την επιφάνεια. Το σχημα της τρμπετας δημιουργείται απο την μειωση της ακτινα συμφωνα με την συναρτηση e^{-u_0} - μια φθινουσα εκθετικη συναρτηση.

11.2.26. Να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}3u + \mathbf{j}u^2(4 - u^2)\cos v + \mathbf{k}u^2(4 - u^2)\sin v$, $u \in [-2, 2]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Η γραφική παρασταση της επιφάνειας δίνεται στο Σχ. 11.18. ∴ Το σχήμα θυμίζει ένα αδραχτι. Για να καταλάβουμε πως δημιουργείται το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι η



Σχήμα 11.18: Η γραφική παρασταση του αδραχτιου.

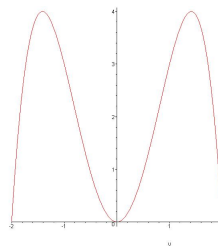
επιφάνεια αποτελείται από καμπύλες της μορφής

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{i}3u + \mathbf{j}u^2(4 - u^2)\cos v_0 + \mathbf{k}u^2(4 - u^2)\sin v_0$$

για $v_0 \in [0, 2\pi]$. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $v_0 = 0$. Τότε παίρνουμε στο επίπεδο xy την καμπύλη

$$\mathbf{r}(u, v_1) = \mathbf{i}3u + \mathbf{j}u^2(4 - u^2).$$

Αυτή είναι μια τεταρτοβάθμια καμπύλη με ρίζες στο σύνολο $\{-2, 0, 2\}$ και έχει γραφική παρασταση του Σχ.11.19. Για $v_2 = \pi/2$ παίρνουμε στο επίπεδο yz την καμπύλη



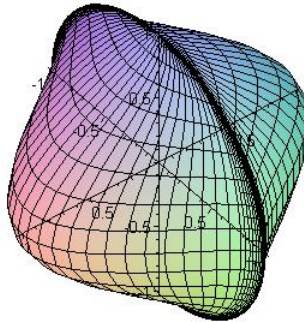
Σχήμα 11.19: Η γραφική παρασταση μιας καμπύλης του αδραχτιου.

$$\mathbf{r}(u, v_2) = \mathbf{i}3u + \mathbf{k}u^2(4 - u^2)$$

δηλ. την ίδια με αυτή της $\mathbf{r}(u, v_1)$ αλλά περιστραμμένη κατά $\pi/2$. Με αντιστοίχο τρόπο παίρνουμε και όλες τις υπολοίπες καμπύλες $\mathbf{r}(u, v)$, οι οποίες είναι περιστραμμένες της $\mathbf{r}(u, v_1)$, για $v \in [0, 2\pi]$. η ένωση αυτών δίνει το αδραχτι.

11.2.27. Να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos^3 u \cos v + \mathbf{j} \sin^3 u \cos v + \mathbf{k} \sin v$, $u \in [-2, 2]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Η γραφική παρασταση της επιφάνειας δίνεται στο Σχ. ::. Για να καταλάβουμε



Σχήμα 11.20: Η γραφική παρασταση του αδραχτιού.

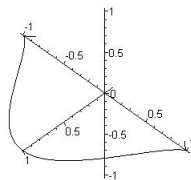
πως δημιουργείται το σχημα αυτο παρατηρουμε οτι η επιφάνεια αποτελείται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{i} \cos^3 u \cos v_0 + \mathbf{j} \sin^3 u \cos v_0 + \mathbf{k} \sin v_0$$

για $v_0 \in [0, 2\pi]$. Ας θεωρησουμε την περιπτωση $v_1 = 0$. Τότε παίρνουμε στο επιπεδο xy την καμπυλη

$$\mathbf{r}(u, v_1) = \mathbf{i} \cos^3 u + \mathbf{j} \sin^3 u.$$

Αυτη ικανοποιει την σχεση $x^{2/3} + y^{2/3} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$. Η γραφική της παρασταση δίνεται στο Σχ.11.21. Με αντιστοιχο τροπο παίρνουμε και ολες τις υπολοιπες καμπυλες

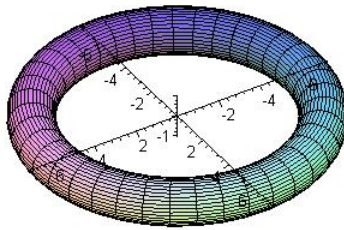


Σχήμα 11.21: Η γραφική παρασταση μιας καμπυλης του αδραχτιού.

$\mathbf{r}(u, v)$, οι οποιες είναι περιστραμμενες της $\mathbf{r}(u, v_1)$, για $v \in [0, 2\pi]$. η ενωση αυτων δινει την επιφάνεια του Σχ.::.

11.2.28. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(6 + \cos u) \cos v + \mathbf{j}(6 + \cos u) \sin v + \mathbf{k} \sin u$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Η γραφική παρασταση της επιφάνειας δίνεται στο Σχ. 11.22. Για να καταλ-



Σχήμα 11.22: Η γραφική παρασταση του τορνού.

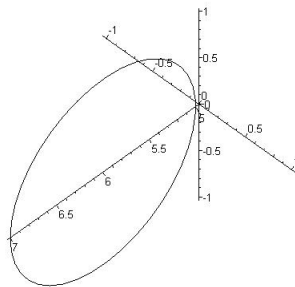
αβουμε πως δημιουργείται το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι η επιφάνεια αποτελείται από καμπύλες της μορφής

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{i}(6 + \cos u) \cos v_0 + \mathbf{j}(6 + \cos u) \sin v_0 + \mathbf{k} \sin u$$

για $v_0 \in [0, 2\pi]$. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $v_0 = 0$. Τότε παίρνουμε στο επίπεδο xy την καμπύλη

$$\mathbf{r}(u, v_1) = \mathbf{i}(6 + \cos u) + \mathbf{k} \sin u.$$

Αυτή η καμπύλη είναι ένας κύκλος στο επίπεδο xz , με κέντρο το $(6, 0, 0)$ και ακτίνα 1. Η γραφική παρασταση δίνεται στο Σχ.11.23. Με αντιστοίχο τρόπο παίρνουμε και όλες τις

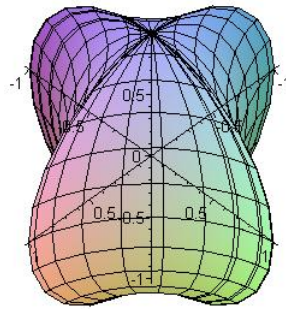


Σχήμα 11.23: Η γραφική παρασταση μιας καμπύλης του τορνού.

υπολοίπες καμπύλες $\mathbf{r}(u, v)$, οι οποίες είναι περιστραμμένες της $\mathbf{r}(u, v_1)$, για $v \in [0, 2\pi]$. Η ένωση αυτών δίνει την επιφάνεια του τορνού.

11.2.29. Να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos^3 u \cos v + \mathbf{j} \sin^3 u \cos v + \mathbf{k} \sin v$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Η γραφική παρασταση της επιφάνειας δίνεται στο Σχ. 11.24. Για να καταλ-



Σχήμα 11.24: Η γραφική παρασταση του αστεροειδούς.

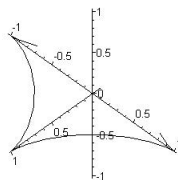
αβουμε πως δημιουργείται το σχημα αυτο παρατηρούμε οτι η επιφάνεια αποτελείται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{i} \cos^3 u \cos v_0 + \mathbf{j} \sin^3 u \cos v_0 + \mathbf{k} \sin v_0$$

για $v_0 \in [0, 2\pi]$. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $v_1 = 0$. Τότε παίρνουμε στο επίπεδο xy την καμπυλη

$$\mathbf{r}(u, v_1) = \mathbf{i} \cos^3 u + \mathbf{j} \sin^3 u.$$

Αυτη η καμπυλη είναι μια αστεροειδης στο επίπεδο xy . Η γραφική παρασταση δίνεται στο Σχ.::: Με αντιστοιχο τροπο παίρνουμε και ολες τις υπολοιπες καμπυλες $\mathbf{r}(u, v)$, οι οποίες

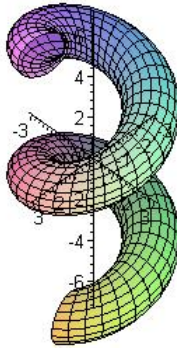


Σχήμα 11.25: Η γραφική παρασταση μιας καμπυλης του αστεροειδούς.

είναι περιστραμμενες της $\mathbf{r}(u, v_1)$, για $v \in [0, 2\pi]$ · η ενωση αυτων δινει την επιφάνεια του αστεροειδούς.

11.2.30. Να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(2 + \sin v) \cos u + \mathbf{j}(2 + \sin v) \sin u + \mathbf{k}(u + \cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-6, 6]$.

Λυση. Είναι μια σωληνοειδής ελικά, όπως φαίνεται στο Σχ.11.26. Η επιφάνεια αυτή



Σχήμα 11.26: Η γραφική παρασταση της σωληνοειδούς ελίκας.

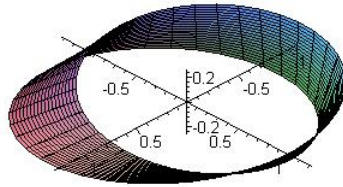
δημιουργείται ως εξής. Ας γράψουμε την $\mathbf{r}(u, v)$ ως εξής:

$$\mathbf{r}(u, v) = (\mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j}2 \sin u + \mathbf{k}u) + (\mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v)$$

βλεπούμε ότι η $\mathbf{r}(u, v)$ είναι το άθροισμα της $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j}2 \sin u + \mathbf{k}u$ η οποία είναι μια ελικά (δηλ. μια *καμπύλη*) στην οποία (για κάθε δεδομένο u_0) προστίθεται η $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{i} \cos u_0 \sin v + \mathbf{j} \sin u_0 \sin v + \mathbf{k} \cos v$, ένας κύκλος με κέντρο το αντίστοιχο σημείο της ελίκας, δηλ. το $\mathbf{r}_1(u_0)$. Έτσι δημιουργείται η σωληνοειδής ελικά.

11.2.31. Να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(2 \cos u + v \cos \frac{u}{2}) + \mathbf{j}(2 \sin u + v \cos \frac{u}{2}) + \mathbf{k}v \sin \frac{u}{2}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Λυση. Η γραφική παρασάση της επιφάνειας δίνεται στο Σχ. ;. Η επιφάνεια αυτή



Σχήμα 11.27: Η γραφική παρασάση του τορου.

λεγεται λωριδα *Moebius*. Μπορει να γραφτει ως εξης:

$$\mathbf{r}(u, v) = (\mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j}2 \sin u) + \left(\mathbf{i}v \cos \frac{u}{2} + \mathbf{j}v \cos \frac{u}{2} + \mathbf{k}v \sin \frac{u}{2} \right)$$

βλεπουμε οτι η $\mathbf{r}(u, v)$ είναι το άθροισμα της $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j}2 \sin u$ (η οποία είναι ένας κύκλος στο επίπεδο xy με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 2) με την $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{i}v \cos \frac{u}{2} + \mathbf{j}v \cos \frac{u}{2} + \mathbf{k}v \sin \frac{u}{2}$, η οποία, για δεδομένο u_0 είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με μεταβλητό προσανατολισμό. Η ένωση αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων δίνει την λωρίδα του *Moebius*. Η λωρίδα αυτή έχει το εξής χαρακτηριστικό έχει *μόνο μια επιφάνεια*.

11.2.32. Δίνεται η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v - \mathbf{k}(3u^2 + v^2)$. Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(1, 1, -4)$.

Λυση. Η επιφάνεια είναι ένα ελλειπτικό παραβολοειδές. Το κάθετο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -6u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \mathbf{i}6u + \mathbf{j}2v + \mathbf{k}$$

και στο σημείο $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}6 + \mathbf{j}2 + \mathbf{k}$. Το εφαπτομένο επίπεδο είναι

$$0 = (\mathbf{i} \cdot (x-1) + \mathbf{j} \cdot (y-1) + \mathbf{k} \cdot (z+4)) \cdot (\mathbf{i}6 + \mathbf{j}2 + \mathbf{k}) \Rightarrow 4 = 6x + 2y + z$$

και σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k} \cdot (4 - 6u - 2v).$$

11.2.33. Δίνεται η επιφάνεια $z - x^2 + y^2 = 0$. Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(1, 0, 1)$.

Λυση. Το κάθετο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{n} = \nabla \phi|_{(x,y,z)=(1,0,1)} = (-\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y + \mathbf{k})|_{(x,y,z)=(1,0,1)} = (-\mathbf{i}2 + \mathbf{k}).$$

Το εφαπτομένο επίπεδο είναι

$$0 = (\mathbf{i} \cdot (x-1) + \mathbf{j} \cdot (y-0) + \mathbf{k} \cdot (z-1)) \cdot (-\mathbf{i}2 + \mathbf{k}) \Rightarrow -1 = -2x + z$$

και σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k} \cdot (-1 + 2u).$$

Όλα τα επίπεδα περνούν από το $(0, 0, 0)$. $\zeta \ 3(x_0^2 - y_0)x - 3x_0(y + y_0) + 2z + 4z_0 = 0$.

11.2.34. Να βρεθεί το κάθετο διάνυσμα και το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $S : z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ και στο σημείο $(0, 0, 0)$.

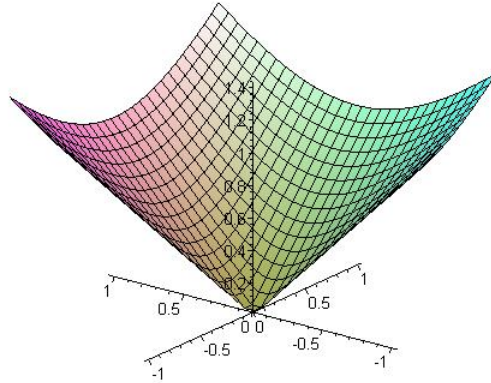
Λυση. Γράφουμε την επιφάνεια στην μορφή

$$\phi(x, y, z) = z - (x^2 + y^2)^{1/2} = 0$$

Το κάθετο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \nabla \phi|_{(x,y,z)=(1,0,1)} = \left(-\mathbf{i} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \mathbf{j} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathbf{k} \right).$$

Παρατηρούμε ότι στο σημείο $(0, 0, 0)$ το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}_{(x,y,z)=(1,0,1)} = (-\mathbf{i}2 + \mathbf{k})$ δεν ορίζεται (οπότε δεν ορίζεται ούτε το εφαπτομένο επίπεδο)! Πραγματι, εάν εξετάσουμε την γραφική παράσταση της S στο Σχ. ;; βλέπουμε ότι στο $(0, 0, 0)$ σχηματίζει μια αιχμή και δεν μπορούμε να φέρουμε ούτε το κάθετο διάνυσμα ούτε το εφαπτομένο επίπεδο.



Σχήμα 11.28: Μια επιφάνεια η οποία στο σημείο $(0, 0, 0)$ δεν έχει ούτε καθετό διάνυσμα ούτε εφαπτομένο επίπεδο.

11.2.35. Να βρεθούν τα σημεία $(x_a, 0, 0)$, $(0, y_a, 0)$, $(0, 0, z_a)$, στα οποία τέμνει τους άξονες x , y , z το επίπεδο που εφαπτεται σε τυχόν σημείο της επιφάνειας $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - 1 = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Να δείχτει ότι το άθροισμα $x_a + y_a + z_a$ είναι σταθερό..

Λυση. Το καθετό διάνυσμα σε τυχόν σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \nabla \phi|_{(x,y,z)=(1,0,1)} = \left(\mathbf{i} \frac{1}{2\sqrt{x}} + \mathbf{j} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \mathbf{k} \frac{1}{2\sqrt{z}} \right)_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} \\ &= \left(\mathbf{i} \frac{1}{2\sqrt{x_0}} + \mathbf{j} \frac{1}{2\sqrt{y_0}} + \mathbf{k} \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \right). \end{aligned}$$

Το εφαπτομένο επίπεδο στο (x_0, y_0, z_0) είναι

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{i} \cdot (x-x_0) + \mathbf{j} \cdot (y-y_0) + \mathbf{k} \cdot (z-z_0)) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{1}{2\sqrt{x_0}} + \mathbf{j} \frac{1}{2\sqrt{y_0}} + \mathbf{k} \frac{1}{2\sqrt{z_0}} \right) \\ &\Rightarrow \frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}} = 0. \end{aligned}$$

Τα σημεία x_a λαμβάνονται θέτοντας $y = z = 0$, δηλ.

$$\begin{aligned} \frac{x_a - x_0}{2\sqrt{x_0}} - \frac{y_0}{2\sqrt{y_0}} - \frac{z_0}{2\sqrt{z_0}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{x_a}{\sqrt{x_0}} &= \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = 1 \\ \Rightarrow x_a &= \sqrt{x_0} \end{aligned}$$

Αντιστοίχα παίρνουμε

$$y_a = \sqrt{y_0}, \quad z_a = \sqrt{z_0}$$

οπότε

$$x_a + y_a + z_a = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = 1.$$

(Στα παραπάνω εκμεταλλευτήκαμε ότι το (x_0, y_0, z_0) είναι ένα σημείο της επιφάνειας, άρα ικανοποιεί $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = 1$.)

11.3 Άλυτα Προβλήματα

11.3.1. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου $x - 2y + z = 4$ και σχεδιάστε το επίπεδο.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}(4 - u + 2v)$.

11.3.2. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου το οποίο περνάει από το σημείο $\mathbf{r}_0 = (1, 2, 3)$ και περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{a} = \mathbf{i}2 + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(1 + 2u + v) + \mathbf{j}(2 + u - v) + \mathbf{k}(3 - u + 2v)$.

11.3.3. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου το οποίο περνάει από το σημείο $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και περιέχει τα διανύσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} .

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$.

11.3.4. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της σφαιρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (1 + 2 \cos u \cos v, 2 + \sin u \cos v, 1 + \sin v)$.

11.3.5. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της σφαιρας $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (1 + 2 \cos u \cos v, 2 + \sin u \cos v, 1 + \sin v)$.

11.3.6. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του ελλειψοειδους $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (2 \cos u \cos v, 3 \sin u \cos v, 5 \sin v)$.

11.3.7. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του κυλινδρου $1 = x^2 + y^2$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$.

11.3.8. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του παραβολοειδους $z = x^2 + 4y^2$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\sqrt{u} \cos v, 2\sqrt{u} \sin v, u)$.

11.3.9. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις του κωνου $x^2 = z^2 + y^2$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (u, u \cos v, u \sin v)$.

11.3.10. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $(0, 0, 1)$ και οδηγό καμπυλή τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ στο επίπεδο xy . Σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (0, 0, 1) + v \cdot ((\cos u, \sin u, 0) - (0, 0, 1)) = (v \cos u, v \sin u, 1 - v)$.

11.3.11. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $(0, 1, 0)$ και οδηγό καμπυλή την παραβολή $x^2 = z$ στο επίπεδο xz . Σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (0, 1, 0) + v \cdot ((u, 0, u^2) - (0, 1, 0)) = (vu, 1 - v, vu^2)$.

11.3.12. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κυλινδρικής επιφάνειας με γενετήρα το διάνυσμα $(0, 1, 0)$ και οδηγό καμπυλή τον κύκλο $x^2 + z^2 = 1$ στο επίπεδο xz . Σχεδιάστε την κωνική επιφάνεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, 0, \sin u) + v \cdot (0, 1, 0) = (\cos u, v, \sin u)$.

11.3.13. Γραψτε τις παραμετρικές εξισώσεις της κυλινδρικής επιφάνειας με γενετήρα το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ και οδηγό καμπυλή την ελλειψη $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ στο επίπεδο xz . Σχεδιάστε την κυλινδρική επιφάνεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, 0, 2 \sin u) + v \cdot (1, 1, 1) = (v + \cos u, v, v + 2 \sin u)$.

11.3.14. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u \cos v + \mathbf{j}u \sin v + \mathbf{k}u^2$.

Απ. Είναι ελλειπτικό παραβολοειδές.

11.3.15. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(5 + 3u + 2v) + \mathbf{j}(u + 3v) + \mathbf{k}(1 + u + v)$.

Απ. Είναι επίπεδο.

11.3.16. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j} \cos v + \mathbf{k} \sin v$.

Απ. Είναι κυκλικός κυλινδρός.

11.3.17. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}u \cos v + \mathbf{k}u \sin v$.

Απ. Είναι κυκλικός κώνος.

11.3.18. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(1 - v + 3v \cos u) + \mathbf{j}(1 - v + 2v \sin v) + \mathbf{k}(1 - v)$.

Απ. Είναι ελλειψοειδής κώνος.

11.3.19. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}2 \cos u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}2 \sin u$.

Απ. Είναι κυκλικός κυλινδρός, παράλληλος στον άξονα των y .

11.3.20. Να αναγνωριστεί και να σχεδιαστεί η επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(v + 3 \cos u) + \mathbf{j}(v + 2 \sin u) + \mathbf{k}v$.

Απ. Είναι ελλειψοειδής κυλινδρός.

11.3.21. Δίνεται η επιφάνεια $z - xy = 0$. Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(2, 3, 6)$

Απ. $-\mathbf{i}3 - \mathbf{j}2 + \mathbf{k}, 3x + 2y - z - 6 = 0$.

11.3.22. Δίνεται η επιφάνεια $4z - x^2 - y^2 = 0$. Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(2, -4, 5)$.

Απ. $\mathbf{i} - \mathbf{j}2 - \mathbf{k}, x - 2y - z - 5 = 0$.

11.3.23. Δίνεται η επιφάνεια $4z - x^2 + y^2 = 0$. Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(3, 1, 2)$.

Απ. $-6\mathbf{i} + \mathbf{j}2 + \mathbf{k}4, -6x + 2y + 4z + 8 = 0$.

11.3.24. Δίνεται η επιφάνεια $x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$. Να βρεθεί ένα κάθετο διάνυσμα και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(1, 2, -1)$.

Απ. $-\mathbf{i}6 + \mathbf{j}11 + \mathbf{k}14, 6x - 11y - 14z + 2 = 0$.

11.3.25. Δίνεται η επιφάνεια $z - 2x^2 + 4y^2 = 0$. Να βρεθεί η κάθετη ευθεία και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(2, 1, 4)$.

Απ. $\frac{x-2}{8} = \frac{1-y}{8} = 4 - z, 8x - 8y - z - 4 = 0$.

11.3.26. Δίνεται η επιφάνεια $z - x^3 - y^3 + 3xy = 0$. Να βρεθεί η κάθετη ευθεία και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(1, 1, -1)$.

11.3.27. Απ. $x = y = 1, z = -1$.

11.3.28. Δίνεται η επιφάνεια $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$. Να βρεθεί η κάθετη ευθεία και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(1, 2, -1)$.

Απ. $x - 1 = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}, x + 11y + 5z - 18 = 0$.

11.3.29. Δίνεται η επιφάνεια $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z) = 0$. Να βρεθεί η κάθετη ευθεία και το εφαπτομένο επίπεδο στο σημείο $(2, 3, 6)$.

Απ. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = z - 6, 5x + 4y + z - 28 = 0$.

11.3.30. Να βρεθεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\sqrt{u^2 + v^2} - uv$ και στο σημείο $(3, 4, -7)$.

Απ. $17x + 11y + 5z = 60$.

11.3.31. Να βρεθεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sin v + \mathbf{j}b \sin u \sin v + \mathbf{k}c \cos v$ και στο σημείο $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

Απ. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$.

11.3.32. Να βρεθεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v$ και παραλληλο στο επίπεδο $x - y + 2z = 0$.

Απ. $x - y + 2z = \sqrt{11/2}$.

11.3.33. Να βρεθεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sin v + \mathbf{j}b \sin u \sin v + \mathbf{k}c \cos v$ το οποίο τέμνει ίσες αποστάσεις από τους άξονες x, y και z .

Απ. $x + y + z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

11.3.34. Να βρεθεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u \cos v + \mathbf{j}u \sin v + \mathbf{k}\sqrt{a^2 - u^2}$ και στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Απ. $x_0x + y_0y + z_0z = a^2$.

11.3.35. Να βρεθεί το εφαπτομένο επίπεδο στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}uv$ και κάθετο στο διάνυσμα $(2, 2, -1)$.

Απ. $2x + y - z = 2$

11.3.36. Αποδειξτε ότι όλα τα επίπεδα που εφαπτόνται στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}uf(v/u)$ περνούν από ένα σταθερό σημείο.

11.3.37. Να δείχτει ότι το επίπεδο το οποίο εφαπτεται στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\frac{1}{uv}$ σε τυχόν σημείο, και τα επίπεδα xy, yz, zx σχηματίζουν ένα τετραέδρου σταθερού ογκού.

Κεφάλαιο 12

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

12.1 Θεωρία

12.1.1. Εστω ότι μας δίνεται μια απλή, λεία επιφάνεια A με διανυσματική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}x(u, v) + \mathbf{j}y(u, v) + \mathbf{k}z(u, v), \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

και ζητούμε να βρούμε το εμβαδό αυτής, το οποίο συμβολίζουμε με S .

12.1.2. Το στοιχειώδες εμβαδό είναι $dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$. Ορίζουμε τα θεμελιώδη ποσα πρώτης τάξης ως εξής

$$E = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2, \quad G = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

και τότε το στοιχειώδες εμβαδό είναι

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (12.1)$$

και το συνολικό εμβαδό της επιφάνειας είναι

$$S = \iint_A dS = \iint_D \sqrt{\left| \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|^2} dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (12.2)$$

12.1.3. Όταν η επιφάνεια δίνεται στην μορφή

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z(x, y)$$

τότε η (12.1) απλοποιείται και γίνεται

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy \quad (12.3)$$

(συγκρίνετε την (12.3) με την εκφραση για το στοιχειώδες μήκος καμπυλης) και το συνολικό εμβαδο της επιφανειας είναι

$$\iint_A dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (12.4)$$

οπου D_{xy} είναι η εικονα του D στο επιπεδο xy : $D_{xy} = \{(x(u, v), y(u, v)) : (u, v) \in D\}$.

12.1.4. Τελος, οταν η επιφανεια δινεται στην μορφη $\phi(x, y, z) = 0$, το στοιχειώδες εμβαδο της επιφανειας είναι

$$dS = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|} dx dy, \quad (12.5)$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|} dy dz, \quad (12.6)$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|} dz dx \quad (12.7)$$

(συγκρίνετε τις (12.5)-(12.7) με την (12.3)) και το συνολικο εμβαδο της επιφανειας είναι

$$\iint_A dS = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|} dx dy \quad (12.8)$$

$$= \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|} dy dz \quad (12.9)$$

$$= \iint_{D_{zx}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|} dz dx. \quad (12.10)$$

12.1.5. Οι παραπανω τυποι για το εμβαδο είναι ειδικες περιπτώσεις μιας κατηγορίας ολοκληρωματων τα οποια λεγονται *επιφανειακα ολοκληρωματα A' ειδους*.

12.1.6. Εστω οτι μας δινεται μια επιφανεια A μεσω της διανυσματικης σχεσης $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}x(u, v) + \mathbf{j}y(u, v) + \mathbf{k}z(u, v)$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Αν ισχυουν καταλληλες συνθηκες συνεχειας και παραγωγιμοτητας, μπορουμε να ορισουμε το διπλο ολοκληρωμα

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv. \quad (12.11)$$

Θυμηθείτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια. Έτσι η ποσότητα

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv = \mathbf{n} dudv$$

είναι το στοιχειώδες προσανατολισμένο εμβαδό της A και το $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$ είναι το στοιχειώδες "βαθμωτό εμβαδό". Χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv,$$

και

$$\iint_A f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv. \quad (12.12)$$

Τα ολοκληρώματα αυτού του τύπου λέγονται *επιφανειακά ολοκληρώματα A' ειδους*.

12.1.7. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \mathbf{j} \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \mathbf{k} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

οπότε η (12.12) γίνεται

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left| \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|^2} dudv. \quad (12.13)$$

12.1.8. Στην περίπτωση που $u = x, v = y$, η (12.12) γίνεται

$$\iint_A f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (12.14)$$

Αντιστοίχα, όταν $u = x, v = z$, η (12.12) γίνεται

$$\iint_A f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2} dx dz. \quad (12.15)$$

και όταν $u = y, v = z$, η (12.12) γίνεται

$$\iint_A f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2} dy dz. \quad (12.16)$$

12.1.9. Τελος, αν η επιφάνεια δίνεται στην μορφή $\phi(x, y, z)$ και $(x, y, z) \in D$, τότε η (12.12) μπορεί να γραφεί σε οποιαδήποτε από τις παρακάτω μορφές

$$\iint_A f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z) \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|} dx dy \quad (12.17)$$

$$= \iint_{D_{yz}} f(x, y, z) \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|} dy dz \quad (12.18)$$

$$= \iint_{D_{zx}} f(x, y, z) \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|} dz dx \quad (12.19)$$

όπου D_{xy} είναι η προβολή του D στο επίπεδο xy , D_{yz} είναι η προβολή του D στο επίπεδο yz , D_{zx} είναι η προβολή του D στο επίπεδο zx .

12.1.10. Το κέντρο μάζας και οι ροπές αδρανείας μιας υλικής επιφάνειας μπορούν να υπολογιστούν με χρήση επιφανειακού ολοκληρώματος A' είδους.

12.1.11. Αν μας δοθεί μια λεία υλική επιφάνεια A με πυκνότητα $\rho(x, y, z)$, μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα, τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας και τις ροπές αδρανείας (ως προς τους άξονες x, y, z) της A από τους παρακάτω τύπους

$$m = \iint_A \rho(x, y, z) dS$$

$$x_0 = \iint_A x\rho(x, y, z) dS, \quad y_0 = \iint_A y\rho(x, y, z) dS, \quad z_0 = \iint_A z\rho(x, y, z) dS$$

$$I_x = \iint_A (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS,$$

$$I_y = \iint_A (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dS,$$

$$I_z = \iint_A (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS.$$

12.1.12. Έστω ότι μας δίνεται μια επιφάνεια A και μια συνάρτηση $f(x, y, z)$. Στο σημείο (x, y, z) η επιφάνεια έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{i}a(x, y, z) + \mathbf{j}b(x, y, z) + \mathbf{k}c(x, y, z) \quad (12.20)$$

Παρατηρήστε ότι

$$1 = |\mathbf{n}_0| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Έτσι η (12.20) μπορεί να γραφτεί και στην μορφή

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{i} \cos(\alpha) + \mathbf{j} \cos(\beta) + \mathbf{k} \cos(\gamma) \quad (12.21)$$

για καταλλήλες γωνίες α, β, γ (συγκεκριμένα, α είναι η γωνία του \mathbf{n}_0 με τον άξονα των x , β είναι η γωνία του \mathbf{n}_0 με τον άξονα των y και γ είναι η γωνία του \mathbf{n}_0 με τον άξονα των z).

12.1.13. Κατω απο καταλληλες συνθηκες συνεχειας και παραγωγιμοτητας, το παρακατω ολοκληρωμα ειναι καλα ορισμενο.

$$\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dS = \iint_A (\mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R) \cdot (\mathbf{i} \cos(\alpha) + \mathbf{j} \cos(\beta) + \mathbf{k} \cos(\gamma)) dS \quad (12.22)$$

$$= \iint_A P \cos(\alpha) dS + \iint_A Q \cos(\beta) dS + \iint_A R \cos(\gamma) dS \quad (12.23)$$

$$= \iint_{D_{xy}} P dydz + \iint_{D_{yz}} Q dzdx + \iint_{D_{zx}} R dx dy \quad (12.24)$$

και λεγεται *ροη* της \mathbf{F} δια της επιφανειας. Στο τελευταιο βημα των παραπανω σχεσεων χρησιμοποιησαμε τις ισοτητες

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{i}) dS = dS \cos \alpha = dydz, \quad (12.25)$$

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{j}) dS = dS \cos \beta = dzdx, \quad (12.26)$$

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{k}) dS = dS \cos \gamma = dx dy. \quad (12.27)$$

Π.χ. $(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{i}) dS$ ειναι η προβολη του στοιχειωδους εμβαδου dS στο επιπεδο yz .

12.1.14. Γενικα, ολοκληρωματα της μορφης (12.22)-(12.24) λεγονται *επιφανειακα ολοκληρωματα* B' ειδους.

12.1.15. (Θεωρημα Gauss) Εστω μια κλειστη και λεια επιφανεια A και μια διανυσματικη συναρτηση $\mathbf{F} = \mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R$ με συνεχεις μερικες παραγωγους. Η A οριζει ενα χωριο $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Ισχυει το εξης

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dS.$$

12.1.16. (Θεωρημα Stokes) Εστω μια ανοιχτη, λεια επιφανεια A η οποια εχει συνορο μια κλειστη, απλη και λεια καμπυλη C . Εστω ακομη μια διανυσματικη συναρτηση $\mathbf{F} = \mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R$ με συνεχεις μερικες παραγωγους. Ισχυει το εξης

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

12.2 Λυμενα Προβληματα

12.2.1. Να υπολογιστει το εμβαδον της επιφανειας του στερεου που οριζεται απο τις επιφανειες

$$S_1 : z = x^2 + y^2,$$

$$S_2 : z = 9.$$

Λυση. Η S_2 είναι επίπεδο το οποίο τέμνει την S_1 (παραβολοειδής) κατά τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$ (και $z = 9$). Θεωρούμε την συνάρτηση $z(x, y) = x^2 + y^2$. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int \int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx = \int \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dy dx$$

Το χωρίο D είναι ο δίσκος

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

σε πολικές συντεταγμένες. Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^3 (1 + 4\rho^2)^{1/2} d(\rho^2) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right)_{\rho=0}^{\rho=3} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} \left((37)^{3/2} - 1 \right) d\theta = \frac{\pi}{6} \left((37)^{3/2} - 1 \right). \end{aligned}$$

12.2.2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που ορίζεται από τις επιφάνειες

$$\begin{aligned} S_1 : z &= 2 - x^2 - y^2, \\ S_2 : z &= 0. \end{aligned}$$

Λυση. Θεωρούμε την συνάρτηση $z(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int \int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx = \int \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dy dx$$

και μένει να βρούμε τα χωρία D στο οποίο παίρνουν τιμές οι x, y . Αυτό είναι η προβολή της επιφάνειας S_1 στο επίπεδο $z = 0$, η οποία προκύπτει αν θέσουμε $z = 0$. Δηλ.

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

σε πολικές συντεταγμένες. Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (1 + 4\rho^2)^{1/2} d(\rho^2) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right)_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{13}{6} d\theta = \frac{13\pi}{3}. \end{aligned}$$

12.2.3. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που ορίζεται από τις επιφάνειες

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$S_2 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Λυση. Η S_1 είναι μια σφαίρα και η S_2 ένας κυλινδρός (δες Σχ.;;). Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της ανώ επιφάνειας· κατοπιν θα διπλασιάσουμε το αποτέλεσμα για να απαρτιούμε την τελική απάντηση. Για την ανώ επιφάνεια, αρκεί να γράψουμε το ημισφαίριο $z(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ το οποίο έχει

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int \int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx = \int \int_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx.$$

Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι η προβολή του κυλινδρού στο επίπεδο $z = 0$, το οποίο είναι ο κύκλος $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Αυτός ζ επολικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} &= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 \Rightarrow \\ x^2 + y^2 &= ax \Rightarrow \rho^2 = a\rho \cos \theta \Rightarrow \rho = a \cos \theta \end{aligned}$$

με $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ (γιατί ;). Οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{a}{2} \int_0^{a \cos \theta} (a^2 - \rho^2)^{-1/2} d(\rho^2) \right) d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-a (a - \rho^2)^{1/2} \right)_{\rho=0}^{\rho=a \cos \theta} d\theta \\ &= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin \theta) d\theta = (\pi - 2) a^2 \end{aligned}$$

και η ζητούμενη επιφάνεια είναι η διπλασιασμός του παραπάνω, δηλ. $2(\pi - 2)a^2$.

12.2.4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της της σφαίρας $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$.

Λυση. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για το εμβαδόν επιφάνειας σε παραμετρική μορφή, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \sin v & \cos u \sin v & 0 \\ \cos u \cos v & \sin u \cos v & -\sin v \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \cos u \sin^2 v + \mathbf{j} \sin u \sin^2 v + \mathbf{k} \cos v \sin v. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{\cos^2 u \sin^4 v + \sin^2 u \sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} \\ &= \sqrt{\sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} = \sin v.\end{aligned}$$

Οποτε το ζητούμενο εμβαδον είναι

$$\int \int_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dv du = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin v \, dv \right) du = \int_0^{2\pi} (-\cos v) \Big|_{v=0}^{v=\pi} du = 4\pi.$$

Ποιο θα ήταν το ζητούμενο εμβαδον αν η σφαιρα είχε ακτινα R ;

12.2.5. Να βρεθεί το εμβαδον του τμήματος του επιπέδου $S_1 : x + 2y + z = 4$ το οποίο βρίσκεται εντος του κυλινδρου $S_2 : x^2 + y^2 = 4$.

Λυση. Εδω έχουμε την συναρτηση $z = 4 - x - 2y$ και $z_x = -1$, $z_y = -2$. Το ζητούμενο εμβαδον είναι

$$\int \int_D \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2} dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{6} \rho d\rho \right) d\theta = 4\pi\sqrt{6}.$$

12.2.6. Να βρεθεί το εμβαδον του τμήματος της επιφανειας $S_1 : z = xy$ το οποίο βρίσκεται εντος του κυλινδρου $S_2 : x^2 + y^2 = 2$.

Λυση. Εδω έχουμε την συναρτηση $z = xy$ και $z_x = y$, $z_y = x$. Το ζητούμενο εμβαδον είναι

$$\int \int_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = (5^{3/2} - 1) \frac{2\pi}{3}.$$

12.2.7. Να βρεθεί το εμβαδον του τμήματος της επιφανειας $S_1 : z = y^2 - x^2$ το οποίο βρίσκεται μεταξύ των κυλινδρων $S_2 : x^2 + y^2 = 1$ και $S_3 : x^2 + y^2 = 4$.

Λυση. Εδω έχουμε την συναρτηση $z = y^2 - x^2$ και $z_x = -2x$, $z_y = 2y$. Επίσης, το χωριο ολοκληρωση σε πολικες συντεταγμενες είναι

$$D = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Το ζητούμενο εμβαδον είναι

$$\int \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = (17^{3/2} - 5^{3/2}) \frac{\pi}{6}.$$

12.2.8. Να βρεθεί το εμβαδον του τμήματος του ημισφαιρου $S_1 : 2 = x^2 + y^2 + z^2, z \geq 0$ το οποίο αποκοπεται απο τον κυλινδρο $S_2 : x^2 + y^2 = 1$.

Λυση. Θεωρούμε την συναρτηση $z(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Εχουμε

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}},$$

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{2 - x^2 - y^2}} dy dx \\ &= \sqrt{2} \iint_D \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dy dx. \end{aligned}$$

Το χωρίο D στο οποίο παίρνουν τιμές οι x, y είναι η προβολή της επιφάνειας S_2 στο επίπεδο $z = 0$, η οποία προκύπτει αν θέσουμε $z = 0$. Δηλ.

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

σε πολικές συντεταγμένες. Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\theta &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(- (2 - \rho^2)^{1/2} \right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2} - 1) d\theta = 2\pi (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

12.2.9. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που κοβεί το επίπεδο $S_1 : z = 2$ από το παραβολοειδές του τμήματος του ημισφαιρίου $S_2 : z = x^2 + y^2$.

Λυση. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $\phi = x^2 + y^2 - z = 0$. Έχουμε

$$\phi_x = 2x, \quad \phi_y = 2y, \quad \phi_z = -1$$

και το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\iint_D \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} dx dy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy.$$

Η τομή της S_2 από το S_1 προκύπτει αν θέσουμε

$$2 = z = x^2 + y^2$$

και το χωρίο D στο οποίο παίρνουν τιμές οι x, y είναι σε πολικές συντεταγμένες:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4\rho^2 + 1} \rho d\rho \right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} \left((4\rho^2 + 1)^{3/2} \right)_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{13}{6} d\theta = \frac{13\pi}{3}. \end{aligned}$$

οπότε το ζητούμενο

$$\iint_D \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} dx dy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy.$$

12.2.10. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που κοβεί ο κώνος $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ από την σφαίρα $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Λυση. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$. Έχουμε

$$\phi_x = 2x, \quad \phi_y = 2y, \quad \phi_z = 2z$$

και το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} dx dy &= \iint_D \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dx dy \\ &= \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dx dy = \iint_D \frac{\sqrt{2}}{z} dx dy. \end{aligned}$$

Η τομή της S_2 από το S_1 προκύπτει αν θεσουμε

$$x^2 + y^2 = 2 - z^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

και το χωρίο D στο οποίο παίρνουν τιμές οι x, y είναι σε πολικές συντεταγμένες:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{z} \rho d\rho \right) d\theta &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{z} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2} - 1) d\theta = 2\pi (2 - \sqrt{2}) \dots \end{aligned}$$

12.2.11. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που κοβεί ο κυλινδρος $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ από το επίπεδο $S_2 : z = x$.

Λυση. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $\phi = x - z = 0$. Έχουμε

$$\phi_x = 1, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_z = -1$$

και το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\iint_D \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} dx dy = \iint_D \frac{\sqrt{2}}{1} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy.$$

Το χωρίο D στο οποίο παίρνουν τιμές οι x, y είναι σε πολικές συντεταγμένες:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{2} \rho d\rho \right) d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

12.2.12. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του παραβολοειδούς $S_1 : x = 4 - z^2 - y^2$ που βρίσκεται πάνω από τον δακτυλίο $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4, x = 0$.

Λυση. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $\phi = x + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Έχουμε

$$\phi_x = 1, \quad \phi_y = 2y, \quad \phi_z = 2z$$

και το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\int \int_D \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} dx dy = \int \int_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dx dy.$$

Το χωρίο D στο οποίο παίρνουν τιμές οι x, y είναι (σε πολικές συντεταγμένες για το επίπεδο yz):

$$D = \{(x, y) : 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4\} = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} \left((1 + 4\rho^2)^{3/2} \right)_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}).$$

12.2.13. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \int_S y dS$ όπου

$$S : z = x + y^2, \quad x \in [0, 1], y \in [0, 2].$$

Λυση. Θεωρούμε την συνάρτηση $z(x, y) = x + y^2$. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \int \int_D y \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx &= \int \int_D y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} dy dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \left(\int_0^2 \sqrt{1 + 2y^2} y dy \right) dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{6} (1 + 2y^2)^{3/2} \right)_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \frac{13\sqrt{2}}{3} \int_0^1 dx = \frac{13\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

12.2.14. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \int_S x^2 dS$ όπου S είναι η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λυση. Χρησιμοποιούμε την παραμετρική μορφή της σφαίρας

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

Όπως έχουμε ήδη δει

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \mathbf{i} \cos u \sin^2 v + \mathbf{j} \sin u \sin^2 v + \mathbf{k} \cos v \sin v, \\ \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sin v. \end{aligned}$$

Οποτε το ζητούμενο ολοκληρώμα είναι

$$\begin{aligned} \int \int_D x^2 \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dv du &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos u \sin v)^2 \sin v \, dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 u \left(\int_0^\pi \sin^3 v \, dv \right) du \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du \right) \left(\int_0^\pi (\sin v - \sin v \cos^2 v) \, dv \right) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} \, du \right) \left(-\cos v + \frac{\cos^3 v}{3} \right)_{v=0}^{v=\pi} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

12.2.15. Να υπολογιστεί το ολοκληρώμα $\int \int_S z \, dS$ όπου S είναι το τμήμα του επιπέδου $S_1 : z = 1 + x$ το οποίο αποκοπεί ο κυλινδρός $S_2 : x^2 + y^2 = 1$.

Λυση. Χρησιμοποιούμε τη συναρτηση $\phi = x - z + 1 = 0$. Έχουμε

$$\phi_x = 1, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_z = -1$$

και το ζητούμενο εμβαδον είναι

$$\int \int_D z \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} \, dx dy = \sqrt{2} \int \int_D (1 + x) \, dx dy.$$

Το χωριο D στο οποίο παίρνουν τιμές οι x, y είναι σε πολικές συντεταγμένες:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Αρα το ζητούμενο ολοκληρώμα είναι

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 + \rho \cos \theta) \rho \, d\rho \right) d\theta &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3} \cos \theta \right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \theta \right) d\theta \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin \theta}{3} \right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

12.2.16. Να υπολογιστεί το ολοκληρώμα $\int \int_S xyz \, dS$ όπου S είναι η επιφάνεια του κυβου ο οποίος ορίζεται από τα επίπεδα

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

Λυση. Είναι

$$\int \int_S xyz \, dS = \sum_{n=1}^6 \int \int_{S_n} xyz \, dS$$

όπου S_1, S_2, \dots, S_6 είναι οι έξη πλευρες του κυβου. Τώρα, στις πλευρες με $x = 0, y = 0, z = 0$, τα αντιστοιχα ολοκληρώματα ισουνται με μηδεν. Στην πλευρα

$$S_6 = \{(x, y, 1) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

εχουμε

$$\int \int_{S_2} xyzdS = \int_0^1 \int_0^1 xydydx = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \right)_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}.$$

Για λόγους συμμετρίας, το ίδιο ισχυει και στις S_2 και S_4 οποτε τελικα $\int \int_S xyzdS = \frac{3}{4}$.

12.2.17. Να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int \int_S x^2 y z dS$ οπου S ειναι το τμημα του επιπεδου $S_1 : z = 1 + 2x + 3y$ το οποιο βρισκεται πανω απο το ορθογωνιο παραλληλογραμμο

$$x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 2, \quad z = 0.$$

Λυση. Θεωρωντας την συναρτηση $z(x, y) = 1 + 2x + 3y$ εχουμε $z_x = 2, z_y = 3$, οποτε το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned} \int \int_D x^2 y z \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dydx &= \int \int_D x^2 y (1 + 2x + 3y) \sqrt{1 + 3^2 + 2^2} dydx \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 \int_0^2 (x^2 y + 2x^3 y + 3x^2 y^2) dydx \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 \left(\frac{x^2 y^2}{2} + x^3 y^2 + x^2 y^3 \right)_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \sqrt{14} \int_0^3 (10x^2 + 4x^3) dx \\ &= \sqrt{14} \left(\frac{10x^3}{3} + x^4 \right)_{x=0}^{x=3} = 171\sqrt{14}. \end{aligned}$$

12.2.18. Να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int \int_S xy dS$ οπου S ειναι το τριγωνο με κορυφες $(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$

Λυση. Το τριγωνο βρισκεται στο επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ που ικανοποιει

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 2 + C \cdot 0 + D = 0$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 2 + D = 0$$

οποτε, παρνοντας $D = -2$, εχουμε $A = 2, B = 1, C = 1$, δηλ. το επιπεδο ειναι $2x + y + z = 2$ ή $z = 2 - 2x - y$. Οποτε $z_x = -2, z_y = -1$ και το ζητουμενο ολοκληρωμα γινεται

$$\int \int_D xy \sqrt{1 + 4 + 1} dydx = \sqrt{6} \int \int_D xy dydx.$$

Το χωριο D ειναι η προβολη του τριγωνου στο επιπεδο xy , και ειναι

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\}.$$

Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^{2-2x} xy dydx &= \sqrt{6} \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right)_{y=0}^{y=2-2x} dx = \sqrt{6} \int_0^1 \frac{x(2-2x)^2}{2} dx \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (2x + 2x^3 - 4x^2) dx = \frac{\sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

12.2.19. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}zx) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $S_1 : z = 4 - x^2 - y^2$ που βρίσκεται πάνω από το τετράγωνο

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0.$$

Λυση. Μπορούμε να ξαναγραφούμε το πεδίο $\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}zx$ ως

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}(4y - x^2y - y^3) + \mathbf{k}(4 - x^3 - y^2x).$$

Το στοιχειώδες διανυσματικό εμβαδόν είναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) dx dy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dx dy = (\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k}) dx dy$$

Παρατηρήστε ότι η \mathbf{k} συνιστώσα είναι αρνητική. Άρα το $\mathbf{n}_0 dS$ που υπολογίσαμε παραπάνω είναι αυτό το οποίο δείχνει προς το εσωτερικό της επιφάνειας! Τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} & \iint_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS \\ &= \int \int_D (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}(4y - x^2y - y^3) + \mathbf{k}(4x - x^3 - y^2x)) (\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k}) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 8y^2 - 2x^2y^2 - 2y^4 - 4x - x^3 - y^2x) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} + \frac{11x}{3} - x^3 + \frac{34}{15} \right) dx = \frac{713}{180}. \end{aligned}$$

12.2.20. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{j}yz + \mathbf{k}z^2) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι το τμήμα του κυλίνδρου $S_1 : 1 = y^2 + z^2$ με $z \geq 0$, το οποίο αποκοπείται από τα επίπεδα $x = 0$ και $x = 1$.

Λυση. Ξαναγραφούμε τον κύλινδρο σε παραμετρική αναπαράσταση ως εξής:

$$\mathbf{r}(x, v) = \mathbf{i}x + \mathbf{j} \cos v + \mathbf{k} \sin v, \quad x \in [0, 1], v \in [0, \pi]$$

(το $v \in [0, \pi]$ πορκυπτει από το $z \geq 0$) οπότε το στοιχειώδες διανυσματικό εμβαδόν είναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dx dv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{vmatrix} dx dv = (-\mathbf{j} \cos v - \mathbf{k} \sin v) dx dv$$

Παρατηρήστε ότι το $\mathbf{n}_0 dS = -\mathbf{j} \cos v - \mathbf{k} \sin v$ δείχνει προς το εσωτερικό του κυλίνδρου· π.χ. για $v = \pi/4$ το $\mathbf{n}_0 dS = -\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι

$$D = \{(x, v) : x \in [0, 1], v \in [0, \pi]\}.$$

Μπορούμε να ξαναγραφουμε το πεδίο $\mathbf{j}yz + \mathbf{k}z^2$ ως

$$\mathbf{F}(x, v) = \mathbf{j} \cos v \sin v + \mathbf{k} \sin^2 v.$$

Τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \iint_A (\mathbf{j}yz + \mathbf{k}z^2) \mathbf{n}_0 dS &= \int \int_D (\mathbf{j} \cos v \sin v + \mathbf{k} \sin^2 v) (-\mathbf{j} \cos v - \mathbf{k} \sin v) dx dv \\ &= - \int_0^1 \int_0^\pi (\cos^2 v \sin v + \sin^3 v) dv dx \\ &= - \int_0^1 \int_0^\pi \sin v dv dx = - \int_0^1 (\cos v)_{v=0}^{v=\pi} dx = \int_0^1 2 dx = 2. \end{aligned}$$

12.2.21. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $S_1 : z = 1 - x^2 - y^2$ που αντιστοιχεί σε $z \geq 0$.

Λύση. Μπορούμε να ξαναγραφουμε το πεδίο $\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z$ ως

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}(1 - x^2 - y^2).$$

Γραφουμε δε το παραβολοειδές σε παραμετρική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}(1 - x^2 - y^2)$$

οπότε το στοιχειώδες διανυσματικό εμβαδόν είναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) dx dy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dx dy = (\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k}) dx dy$$

Παρατηρείστε ότι η \mathbf{k} συνιστώσα είναι αρνητική. Άρα το $\mathbf{n}_0 dS$ που υπολογίσαμε παραπάνω είναι αυτό το οποίο δείχνει προς το εσωτερικό της επιφάνειας! Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι η προβολή του παραβολοειδούς στο επίπεδο $z = 0$, οπότε το χωρίο ολοκλήρωσης είναι

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \iint_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS &= \int \int_D (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}(1 - x^2 - y^2)) (\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k}) dx dy \\ &= \int \int_D (2xy + 2xy - 1 + x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4\rho^2 \cos \theta \sin \theta - \rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho + 2\rho^3 \sin 2\theta - \rho^3) d\rho d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \right) d\theta = - \left(\frac{\theta}{4} \right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

12.2.22. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}z + \mathbf{j}y + \mathbf{k}x) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η σφαίρα $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λυση. Γραφουμε την σφαίρα σε παραμετρική μορφή:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi],$$

Το στοιχειώδες διανυσματικό εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 dS &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \sin v & \cos u \sin v & 0 \\ \cos u \cos v & \sin u \cos v & -\sin v \end{vmatrix} dudv \\ &= (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv. \end{aligned}$$

Το $\mathbf{n}_0 dS$ που υπολογίσαμε παραπάνω είναι αυτό το οποίο δείχνει προς το εσωτερικό της σφαίρας! Μπορούμε να ξαναγράψουμε το πεδίο $\mathbf{i}z + \mathbf{j}y + \mathbf{k}x$ ως

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos u \sin v.$$

Τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} &\iint_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS \\ &= \int_D \int_D (\mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos u \sin v) (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos u \sin^2 v \cos v + \sin^2 u \sin^3 v + \cos u \sin^2 v \cos v) dudv \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2 \cos u \cos v \sin^2 v dudv - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 u \sin^3 v dudv = -\frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

12.2.23. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}xze^y - \mathbf{j}xze^y + \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι το τμήμα του επιπέδου $S_1 : x + y + z = 1$ με $x, y, z \geq 0$.

Λυση. Γραφουμε το επίπεδο σε παραμετρική μορφή:

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}(1 - x - y).$$

Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Το στοιχειώδες διανυσματικό εμβαδόν είναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) dxdy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} dxdy = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) dxdy.$$

Τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \iint_A (\mathbf{i}xze^y - \mathbf{j}xze^y + \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS &= \int \int_D (\mathbf{i}xze^y - \mathbf{j}xze^y + \mathbf{k}(1-x-y)) (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dx dy = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

12.2.24. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{j}y - \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι το τμήμα του παραβολοειδούς $S_1 : y = x^2 + z^2$ με $y \leq 1$.

Λυση. Γραφουμε το παραβολοειδης σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(x, z) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}(x^2 + z^2) + \mathbf{k}z.$$

Το χωριο ολοκληρωσης D είναι το εσωτερικο του κυκλου ο οποίος είναι η τομη του παραβολοειδους με το επιπεδο $y = 1$, δηλ. η τομη είναι $1 = x^2 + z^2$ (κυκλος) και το χωριο είναι

$$D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον είναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right) dx dz = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} dx dz = (\mathbf{i}2x - \mathbf{j} + \mathbf{k}2z) dx dz.$$

Τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} \iint_A (\mathbf{j}y - \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS &= \int \int_D (\mathbf{j}(x^2 + z^2) - \mathbf{k}z) (\mathbf{i}2x - \mathbf{j} + \mathbf{k}2z) dx dz \\ &= \int \int_D (-x^2 - z^2 - 2z^2) dx dz \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 + 2\rho^2 \cos^2 \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^4}{2} \cos^2 \theta \right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos^2 \theta) d\theta = -\pi. \end{aligned}$$

(Προσεξτε οτι χρησιμοποιησαμε πολικες συντεταγμενες στο επιπεδο xz : $x = \rho \cos \theta$, $z = \rho \sin \theta$.)

12.2.25. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}x + \mathbf{k}y) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι το τμήμα της σφαιρας $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 25$ με $y \geq 0$.

Λυση. Γραφουμε την σφαιρα σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}5 \cos u \sin v + \mathbf{j}5 \sin u \sin v + \mathbf{k}5 \cos v, \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi],$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι (οπως εχουμε ηδη δει)

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv = 25 (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv.$$

Μπορουμε να ζανγραψουμε το πεδιο $\mathbf{i}xz + \mathbf{j}x + \mathbf{k}y$ ως

$$\mathbf{F}(u, v) = \mathbf{i}25 \cos u \sin v \cos v + \mathbf{j}5 \cos u \sin v + \mathbf{k}5 \sin u \sin v.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned} & \iint_A (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}x + \mathbf{k}y) \mathbf{n}_0 dS \\ &= 125 \iint_D (\mathbf{i}5 \cos u \sin v \cos v + \mathbf{j} \cos u \sin v + \mathbf{k} \sin u \sin v) \cdot \\ & \quad (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv \\ &= -125 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (5 \cos^2 u \sin^3 v \cos v + \cos u \sin u \sin^3 v + \sin u \sin^2 v \cos v) dudv. \end{aligned}$$

Μετα απο αρκετες παρξεις, το παραπανω αποτελεσμα προκυπτει ισο με το 0!

12.2.26. Να υπολογιστει το $\iint_A (\mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS$ οπου A ειναι το τμημα της σφαιρας S_1 : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ με $x, y, z \geq 0$.

Λυση. Η σφαιρα γραφεται σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sin v + \mathbf{j}a \sin u \sin v + \mathbf{k}a \cos v, \quad u \in [0, \pi/2], v \in [0, \pi/2],$$

(Τα $u \in [0, \pi/2], v \in [0, \pi/2]$ εξασφαλιζουν $x, y, z \geq 0$.) Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι (οπως εχουμε ηδη δει)

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv = a^2 (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv.$$

Μπορουμε να ζανγραψουμε το πεδιο $\mathbf{k}z$ ως

$$\mathbf{F}(u, v) = \mathbf{k}a \cos v.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned} & \iint_A \mathbf{k}z \mathbf{n}_0 dS = a^3 \iint_D (\mathbf{k} \cos v) (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv \\ &= -a^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin v \cos^2 v dudv = -a^3 \left(\int_0^{\pi/2} du \right) \left(- \int_0^{\pi/2} \cos^2 v d(\cos v) \right) \\ &= a^3 (u)_{u=0}^{u=\pi/2} \left(\frac{\cos^3 v}{3} \right)_{v=0}^{v=\pi/2} = -\frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

12.2.27. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}y - \mathbf{j}x + \mathbf{k}) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι το τμήμα της σφαιρας $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ με $x, y, z \geq 0$.

Λυση. Η σφαιρα γραφεται σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sin v + \mathbf{j}a \sin u \sin v + \mathbf{k}a \cos v, \quad u \in [0, \pi/2], v \in [0, \pi/2],$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv = a^2 (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv.$$

Μπορουμε να ξαναγραφουμε το πεδιο $(\mathbf{i}y - \mathbf{j}x + \mathbf{k})$ ως

$$\mathbf{F}(u, v) = (\mathbf{i}a \sin u \sin v - \mathbf{j}a \cos u \sin v + \mathbf{k}).$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned} & \iint_A (\mathbf{i}y - \mathbf{j}x + \mathbf{k}) \mathbf{n}_0 dS \\ &= a^2 \iint_D (\mathbf{i}a \sin u \sin v - \mathbf{j}a \cos u \sin v + \mathbf{k}) (-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv \\ &= -a^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (a \sin u \cos u \sin^3 v - a \cos u \sin u \sin^3 v + \sin v \cos v) dudv \\ &= -a^2 \left(\int_0^{\pi/2} du \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin v d(\sin v) \right) \\ &= -a^2 (u)_{u=0}^{u=\pi/2} \left(\frac{\sin^2 v}{2} \right)_{v=0}^{v=\pi/2} = -\frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

12.2.28. Να επαληθευτεί το Θεωρημα Gauss για το πεδιο $\mathbf{F} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ και για την επιφανεια $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Λυση. Χρησιμοποιωντας τη γνωστη παραμετρηση της σφαιρας εχουμε

$$\mathbf{n}_0 dS = -\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v.$$

Ομως αυτο ειναι το καθето διανυσμα προς το εσωτερικο της σφαιρας! Το καθето διανυσμα προς το εξωτερικο ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \mathbf{i} \cos u \sin^2 v + \mathbf{j} \sin u \sin^2 v + \mathbf{k} \sin v \cos v.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}
 & \iint_S (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS \\
 &= \int \int_D (\mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v) (\mathbf{i} \cos u \sin^2 v + \mathbf{j} \sin u \sin^2 v + \mathbf{k} \sin v \cos v) dudv \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 u \sin^3 v + \sin^2 u \sin^3 v + \cos^2 v \sin v) dudv \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin^3 v + \cos^2 v \sin v) dudv = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin v dudv = \left(\int_0^\pi \sin v dv \right) \left(\int_0^{2\pi} du \right) \\
 &= (-\cos v)_{v=0}^{v=\pi} (u)_{u=0}^{u=2\pi} = 4\pi.
 \end{aligned}$$

Επισης εχουμε

$$\int \int \int_V \nabla \cdot (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) dV = \int \int \int_V (1 + 1 + 1) dV = 3V = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi 1^2 = 4\pi.$$

Αρα το Θεωρημα *Gauss* επαληθευεται.

12.2.29. Χρησιμοποιειστε το Θεωρημα *Gauss* για να υπολογιστε το ολοκληρωμα

$$\iint_S (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz) \mathbf{n}_0 dS,$$

οπου S ειναι η επιφαναεια του κυβου

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
 \iint_S (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz) \mathbf{n}_0 dS &= \int \int \int_V \nabla \cdot (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz) dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (y + z + x) dx dy dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(xy + xz + \frac{x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=1} dy dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(y + z + \frac{1}{2} \right) dy dz \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + zy + \frac{y}{2} \right)_{y=0}^{y=1} dz \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + \frac{1}{2} \right) dz = \left(z + \frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=1} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

12.2.30. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα *Gauss* για να υπολογίσετε το ολοκληρώμα

$$\iint_S \left(\mathbf{i} \frac{x}{r^3} + \mathbf{j} \frac{y}{r^3} + \mathbf{k} \frac{z}{r^3} \right) \mathbf{n}_0 dS,$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και S είναι η επιφάνεια του στερεού

$$a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$$

το οποίο ορίζεται από δύο ομοκεντρους κυκλους.

Λυση. Έχουμε

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{i} \frac{x}{r^3} + \mathbf{j} \frac{y}{r^3} + \mathbf{k} \frac{z}{r^3} \right) = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0.$$

Οποτε

$$\iint_S \left(\mathbf{i} \frac{x}{r^3} + \mathbf{j} \frac{y}{r^3} + \mathbf{k} \frac{z}{r^3} \right) \mathbf{n}_0 dS = \int \int \int_V \nabla \cdot (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz) dV = \int \int \int_V \nabla \cdot \mathbf{0} \cdot dV = 0.$$

12.2.31. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα *Gauss* για να υπολογίσετε το ολοκληρώμα

$$\iint_S (\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3) \mathbf{n}_0 dS,$$

όπου S είναι η επιφάνεια του στερεού που ορίζεται από τον κυλινδρο $y^2 + z^2 = a$ και τα επιπεδα $x = -1$ και $x = 2$.

Λυση. Έχουμε

$$\nabla \cdot (\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3) = 3y^2 + 3z^2.$$

Οποτε

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3) \mathbf{n}_0 dS &= \int \int \int_V \nabla \cdot (\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3) dV \\ &= 3 \int \int \int_V (y^2 + z^2) dV \\ &= 3 \int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^2 \rho d\rho d\theta dx = \frac{9}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

(Χρησιμοποιήσαμε κυλινδρικές συντεταγμένες ως προς τον άξονα x , δηλ. $x = x$, $y = \rho \cos \theta$, $z = \rho \sin \theta$.)

12.2.32. Να υπολογιστεί με χρήση του Θεωρήματος *Stokes*

$$\iint_A \nabla \times (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) \mathbf{n}_0 dS$$

οπου A είναι το τμήμα της σφαιρας $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ το οποίο βρίσκεται εντος του κυλινδρου $S_2 : x^2 + y^2 = 1$ και πανω απο το επιπεδο xy .

Λυση. Για να χρησιμοποιησουμε το Θεωρημα *Stokes* πρεπει να βρουμε την καμπυλη η οποια περικλειει το τμήμα της σφαιρας. Αυτη η καμπυλη είναι η τομη $S_1 \cap S_2$. Λυνουμε

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow z^2 = 3.$$

Αφου ξεουμε και οτι η καμπυλη βρίσκεται πανω απο το xy επιπεδο, τελικα η ζητουμενη καμπυλη είναι ο κυκλος

$$C : \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3} \right\}$$

ή, σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \sin t + \mathbf{k} \sqrt{3}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

και

$$d\mathbf{r} = -\mathbf{i} \sin t dt + \mathbf{j} \cos t dt.$$

Εχουμε επισης, επι του κυκλου C ,

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy = \mathbf{i}\sqrt{3} \cos t + \mathbf{j}\sqrt{3} \sin t + \mathbf{k} \cos t \sin t.$$

Αρα λοιπον

$$\begin{aligned} \iint_A \nabla \times (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) \mathbf{n}_0 dS &= \int_C (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}\sqrt{3} \cos t + \mathbf{j}\sqrt{3} \sin t + \mathbf{k} \cos t \sin t) \cdot (-\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t) dt = 0. \end{aligned}$$

Προσοχη! Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα μηδενιζεται στη συγκεκριμενη καμπυλη. Αυτο δεν σημανει οτι το πεδιο $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy$ είναι συντηρητικο.

$$\nabla \times (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) = \mathbf{i}(x - y) + \mathbf{j}(x - y) \neq \mathbf{0}.$$

12.2.33. Να υπολογιστει με χρηση του Θεωρηματος *Stokes* το

$$\iint_A \nabla \times (\mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy) \mathbf{n}_0 dS$$

οπου A είναι το τμήμα του παραβολοειδους $S_2 : z = 9 - x^2 - y^2$ το οποίο βρίσκεται πανω απο το επιπεδο $S_1 : z = 5$.

Λυση. Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα *Stokes* πρέπει να βρούμε την καμπύλη η οποία ορίζει το τμήμα του παραβολοειδούς το οποίο μας ενδιαφέρει. Αυτή είναι η τομή $S_1 \cap S_2$. Λύνουμε

$$\left. \begin{array}{l} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Δηλ. η ζητούμενη καμπύλη είναι ο κύκλος

$$C : \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z = 5\}$$

ή, σε παραμετρική μορφή

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}2 \cos t + \mathbf{j}2 \sin t + \mathbf{k}5, \quad t \in [0, 2\pi]$$

και

$$d\mathbf{r} = -\mathbf{i}2 \sin t dt + \mathbf{j}2 \cos t dt.$$

Εχουμε επίσης, επί του κύκλου C ,

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy = \mathbf{i}10 \sin t + \mathbf{j}10 \cos t + \mathbf{k}4 \cos t \sin t.$$

Άρα λοιπόν

$$\begin{aligned} \iint_A \nabla \times (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) \mathbf{n}_0 dS &= \int_C (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}10 \sin t + \mathbf{j}10 \cos t + \mathbf{k}4 \cos t \sin t) \cdot (-\mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-10 \sin^2 t + 10 \cos^2 t) dt = 10 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0. \end{aligned}$$

12.2.34. Να υπολογιστεί με χρήση του Θεωρήματος *Stokes* το

$$\iint_A \nabla \times (\mathbf{i}x^2y^3z + \mathbf{j} \sin(xyz) + \mathbf{k}xyz) \mathbf{n}_0 dS$$

όπου A είναι το τμήμα του κώνου $S_2 : y^2 = x^2 + z^2$ το οποίο βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $y = 0$ και $y = 3$.

Λυση. Στο επίπεδο $y = 0$ έχουμε την κορυφή του κώνου, δηλαδή το σημείο $(0, 0, 0)$. Στο επίπεδο $y = 3$ έχουμε έναν κύκλο ο οποίος ορίζει το ανώ τμήμα του κώνου και ικανοποιεί το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = x^2 + z^2 \\ y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + z^2 = 9,$$

δηλ. έναν κύκλο ο οποίος σε παραμετρική μορφή έχει την εξίσωση

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}3 \sin t + \mathbf{j}3 + \mathbf{k}3 \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

και

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}3 \cos t dt - \mathbf{k}3 \sin t dt.$$

Εχουμε επίσης, επί του κυκλου C ,

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}729 \sin^2 t \cos t + \mathbf{j}27 \sin t \cos t + \mathbf{k}27 \cos t \sin t.$$

Αρα λοιπον

$$\begin{aligned} & \iint_A \nabla \times (\mathbf{i}x^2y^3z + \mathbf{j} \sin(xyz) + \mathbf{k}xyz) \mathbf{n}_0 dS \\ &= \int_C (\mathbf{i}x^2y^3z + \mathbf{j} \sin(xyz) + \mathbf{k}xyz) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}729 \sin^2 t \cos t + \mathbf{j}27 \sin t \cos t + \mathbf{k}27 \cos t \sin t) \cdot (\mathbf{i}3 \cos t - \mathbf{k}3 \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2187 \cos^2 t \sin^2 t - 81 \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2187}{2} \sin^2 2t - 81 \sin^2 t \cos t \right) dt \\ &= \frac{2187}{4} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} \right)_{t=0}^{t=2\pi} - \left(\frac{81}{3} \sin^3 t \right)_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2187\pi}{4}. \end{aligned}$$

12.3 Άλυτα Προβλήματα

12.3.1. Να υπολογιστεί το εμβαδο του τμηματος του επιπεδου $x + 2y + 2z = 12$ το οποιο αποκοπεται απο τα επιπεδα $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Απ. $3/2$.

12.3.2. Να υπολογιστεί το εμβαδο του τμηματος του επιπεδου $x + 2y + 2z = 12$ το οποιο αποκοπεται απο τα επιπεδα $x = 0$, $y = 0$ και τον κυλινδρο $x^2 + y^2 = 16$.

Απ. 6π .

12.3.3. Να βρεθεί το εμβαδον του τμηματος της επιφανειας $y^2 + z^2 - az = 0$ που αποκοπτι η σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Απ. $2\pi a^2$.

12.3.4. Να υπολογιστεί το εμβαδο του τμηματος που αποκοπεται απο τους κυλινδρους $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$.

Απ. 16 .

12.3.5. Να υπολογιστεί το $\iint_A (z + 2x + 4y/3) dS$, οπου A είναι το τμημα της επιφανειας $12x + 8y + 6z = 24$ που βρίσκεται στο πρωτο ογδοημοριο.

Απ. $4\sqrt{61}$.

12.3.6. Να υπολογιστεί το $\iint_A \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dS$, οπου A είναι το ημισφαιριο $z =$

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Απ. πR^3 .

12.3.7. Να υπολογιστεί το $\iint_A \frac{dS}{x^2+y^2+(z-c)^2}$, όπου A είναι η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ και

$c > R$.

Απ. $\frac{2\pi R}{C} \ln \frac{c+R}{c-R}$.

12.3.8. Να υπολογιστεί το $\iint_A xyz dS$, όπου A είναι το τμήμα της επιφάνειας $x + y + z = 1$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο.

Απ. $\sqrt{3}/120$.

12.3.9. Να υπολογιστεί το $\iint_A x dS$, όπου A είναι το τμήμα της επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο.

Απ. $\pi a^3/4$.

12.3.10. Να υπολογιστεί το $\iint_A y dS$, όπου A είναι η επιφάνεια $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Απ. 0.

12.3.11. Να υπολογιστεί το $\iint_A x^2 y^2 dS$, όπου A είναι η επιφάνεια $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Απ. $2\pi a^6/15$.

12.3.12. Να υπολογιστεί το $\iint_A \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS$, όπου A είναι το τμήμα της επιφάνειας $x^2 + y^2 = 1$ που αποκόπτεται από τα $z = 0$ και $z = 1$.

Απ. $\pi^2/2$.

12.3.13. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}2x - \mathbf{k}z) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι το τμήμα του επιπέδου $2x + y - 6 = 0$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και αποκόπτεται από το $z = 4$.

Απ. 108.

12.3.14. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}(y^2 + x) - \mathbf{j}2x + \mathbf{k}2yz) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι το τμήμα του επιπέδου $2x + y + 2z - 6 = 0$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο.

Απ. 81.

12.3.15. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}2y - \mathbf{j}z + \mathbf{k}x^2) \mathbf{n}_0 dS$ όπου S είναι η επιφάνεια $y^2 - 8x = 0$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο και μεταξύ των $y = 4$ και $z = 6$.

Απ. 132.

12.3.16. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}6z + \mathbf{j}(2x + y) - \mathbf{k}x) \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του χώρου που ορίζεται από τα $x^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 8$, και $z = 0$.

Απ. 18π .

12.3.17. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του κυβού με κορυφές στα $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, ..., $(1, 1, 1)$.

Απ. 3.

12.3.18. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια της σφαιρας με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και μοναδιαία ακτίνα

Απ. 4π .

12.3.19. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}4xz + \mathbf{j}xyz^2 + \mathbf{k}3z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του χωρίου που ορίζεται από τα $x^2 + z^2 = z^2$, $z = 4$ και $z = 0$.

Απ. 320π .

12.3.20. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}z + \mathbf{j}x - \mathbf{k}3zy^2) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του χωρίου που ορίζεται από τα $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ και $z = 5$ και βρίσκεται στο πρώτο ογδοημορίο

Απ. 90.

12.3.21. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του κυβού με κορυφές στα $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, ..., $(1, 1, 1)$. (**Απ.** 3).

12.3.22. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{k}x^2y^2z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Απ. $2\pi/105$.

12.3.23. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η επιφάνεια του τετραεδρού με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

Απ. $1/8$.

12.3.24. Να υπολογιστεί το $\iint_A (\mathbf{i}zx + \mathbf{j}xy + \mathbf{k}yz) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ όπου A είναι η εξωτερική επιφάνεια της πυραμίδας που σχηματίζουν τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Απ. $1/8$.

12.3.25. Να υπολογιστεί το $\iint_A (xdzdy + ydxdz + zdxdy)$ όπου A είναι το τμήμα του επιπέδου $x + y + z = a$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημορίο.

Απ. $a^3/2$.

12.3.26. Να υπολογιστεί το $\iint_A (x^2 dz dy + y^2 dx dz + z^2 dx dy)$ όπου A είναι το τμήμα του παραβολοειδούς $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ που βρίσκεται στο δεύτερο ογδομήριο.

Απ. $\frac{a^4}{3} \left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16} \right)$.

12.3.27. Να υπολογιστεί το $\iint_A (yz dx dy + xz dy dz + yx dx dz)$ όπου A είναι η εξωτερική επιφάνεια της επιφάνειας που βρίσκεται στο πρώτο ογδομήριο και σχηματίζεται από τον κυλινδρό $x^2 + y^2 = R^2$ και τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0, z = H$.

Απ. $R^2 H \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8} \right)$.

12.3.28. Να υπολογιστεί το $\iint_A (xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz)$ όπου A είναι η επιφάνεια του κυλινδρού $x^2 + y^2 = 1$ που αποκοπείται από τα $x = 0, y = 0, z = 0, z = 1$.

Απ. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8}$.

12.3.29. Να υπολογιστεί το $\iint_A (y^2 z dx dy + xz dy dz + yx^2 dx dz)$ όπου A είναι η εξωτερική επιφάνεια της επιφάνειας που βρίσκεται στο πρώτο ογδομήριο και σχηματίζεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$, τον κυλινδρό $x^2 + y^2 = 1$ και τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0$.

Απ. $\pi/8$.

12.3.30. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα

$$\iint_A (i2xy + jy^2 + kxz) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

όπου A είναι η επιφάνεια του στερεού που ορίζεται από τα $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1, z = 0, z = 3$.

12.3.31. Απ. Το ολοκλήρωμα ισούται με 30.

12.3.32. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

όπου A είναι η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Απ. Το ολοκλήρωμα ισούται με $351/2$.

12.3.33. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα

$$\iint_A (i2xy + jy^2 + kxz) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

όπου A είναι η επιφάνεια του στερεού που ορίζεται από τα $x = 0, x = 6 - 2z, y = 0, y = 3, z = 0$.

Απ. Το ολοκλήρωμα ισούται με $351/2$.

12.3.34. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα

$$\iint_A (\mathbf{i}2x^2y - \mathbf{j}y^2 + \mathbf{k}4xz^2) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου A είναι η επιφάνεια του στερεου που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημριο και ορίζεται από τα $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$.

Απ. Το ολοκλήρωμα ισουται με 180.

12.3.35. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα

$$\iint_A (\mathbf{i}4x - \mathbf{j}2y^2 + \mathbf{k}z^2) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου A είναι η επιφάνεια του στερεου που ορίζεται από τα $y^2 + x^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

Απ. Το ολοκλήρωμα ισουται με 84π .

12.3.36. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα

$$\iint_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου A είναι η επιφάνεια του κυβου με κορυφες $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, ..., $(1, 1, 1)$.

Απ. Το ολοκλήρωμα ισουται με 24.

12.3.37. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα $\iint_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot$

$\mathbf{n}_0 dS$ οπου A είναι η επιφάνεια της σφαιρας με κεντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτινα 2.

Απ. Το ολοκλήρωμα ισουται με 32π .

12.3.38. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το ολοκλήρωμα $\iint_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot$

$\mathbf{n}_0 dS$ οπου A είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τα $y^2 + x^2 = 4 - z$ και $z = 0$.

Απ. Το ολοκλήρωμα ισουται με 24π .

12.3.39. Να υπολογιστεί το $\iint_A (x^3 dz dy + y^3 dx dz + z^3 dx dy)$ οπου A είναι η σφαιρα

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Απ. $12\pi a^5/5$.

12.3.40. Να υπολογιστεί το $\iint_A (x^3 dz dy + y^3 dx dz + z^3 dx dy)$ οπου A είναι η εξωτερική

επιφάνεια της πυραμιδας που σχηματίζουν τα επιπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $x + y + z = a$.

Απ. $15a^5/100$.

12.3.41. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για την $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}xz - \mathbf{j}y + \mathbf{k}yx^2$ και την επιφάνεια S του τριγώνου με κορυφές $(4, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$ και $(0, 0, 4)$.

Απ. Το επικαμπυλίο ολοκλήρωμα ισούται με $32/3$.

12.3.42. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για την $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}(y - z + 2) + \mathbf{j}(yz + 4) - \mathbf{k}xz$ και την επιφάνεια S του κυβού οριζείται από τα $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$.

Απ. Το επικαμπυλίο ολοκλήρωμα ισούται με -4 .

12.3.43. Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για την $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}(2x - y) - \mathbf{j}yz^2 - \mathbf{k}y^2z$ και την επιφάνεια S που οριζείται από την $z = \sqrt{1 - y^2 - x^2}$.

Απ. Το επικαμπυλίο ολοκλήρωμα ισούται με π .

12.3.44. Να υπολογιστεί το $\int_C (x(z - y) dx + y(x - z) dy + z(y - x) dz)$ όπου C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$.

Απ. a^3 .

12.3.45. Να υπολογιστεί το $\int_C (yz dx + xz dy + xy dz)$ όπου C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.

Απ. 0 .