Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Χωροταξίας, Πολεοδομίας & Περιφερειακής Ανάπτυξης

ΜΑΘΗΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ: ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης

ΔΙΑΛΕΞΗ 03(β)

Μαρί-Νοέλ Ντυκέν, Μαρία Τσιάπα

mdyken@prd.uth.gr, mtsiapa@prd.uth.gr

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

Α-1. ΣΤΟΧΟΣ

- Από τη γραμμική → στη μη γραμμική καμπύλη
- 11 γνωστές μορφές καμπύλης παλινδρόμησης
- Εφαρμογή στο SPSS – επιλογή της «αποτελεσματικής» καμπύλης

ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Γραμμικότητα? (01)

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, η σχέση μεταξύ της Εξαρτημένης μεταβλητής και της (των) ανεξάρτητης (των) είναι πάντα γραμμική?

Δυο περιπτώσεις

ΝΑΙ

ΚΑΝΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εφαρμογή της ΜΕΤ για την εκτίμηση:

- **των συντελεστών του μοντέλου $\hat{a}_i$, i = 1 …k,**
- **των καταλοίπων ε**

ΟΧΙ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ΜΕΤ μη ικανοποιητική

(i) Διερεύνηση της σχέσης

(ii) Μετατροπή σε γραμμικό μοντέλο

(iii) **Εφαρμογή της ΜΕΤ στις νέες μεταβλητές**

ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Γραμμικότητα? (01)

Διερεύνηση της μορφής της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών

<u>Γνωστό θεωρητικό μοντέλο</u>

Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglass

$$Y = A \cdot K^{b1} \cdot L^{b2} \qquad [1]$$

Άγνωστοι συντελεστές : A, b_1, b_2

Αν: $b_1 + b_2 = 1$ σταθερές αποδόσεις κλίμακας

Σύμφωνα με την εξίσωση [1], η ΜΕΤ δεν μπορεί να εφαρμοστεί

Απαραίτητη μετατροπή:

$$LN(Y) = LN(A) + b_1\, LN(K) + b_2\, LN(L)$$

$$Y^* = a_0 + b_1\, K^* + b_2\, L^* \qquad [2]$$

Η εκτίμηση των συντελεστών είναι πλέον εφικτή

<u>Εμπειρική προσέγγιση</u>

Εμπειρική διερεύνηση της μορφής της σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής

Χρήση εναλλακτικών μορφών καμπύλης παλινδρόμησης για να βρούμε την ***πιο κατάλληλη δηλαδή***:

Οι εκτιμημένες τιμές της Y προσεγγίζουν καλά τις παρατηρούμενες τιμές

(a) Εξέταση του Διαγράμματος με τις εκτιμημένες καμπύλες και τη διασπορά των πραγματικών τιμών
(b) Εξέταση των αποτελεσμάτων : R^2 & συντελεστές

Εναλλακτικές μορφές καμπύλης παλινδρόμησης (02)

SPSS:
11 Υποδείγματα για την εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης

Η εντολή :

Analyze, Regression, Curve estimation

Μορφές καμπύλης	Εξισώσεις Χρονική τάση	Εξισώσεις με μια ανεξάρτητη μεταβλητή
Linear	$Y_t = b_0 + b_1.t$	$Y_i = b_0 + b_1.X_i$
Logarithmic	$Y_t = b_0 + b_1.\mathrm{Ln}(t)$	$Y_i = b_0 + b_1.\mathrm{Ln}(X_i)$
Inverse	$Y_t = b_0 + b_1.(1/t)$	$Y_i = b_0 + b_1.(1/X_i)$
Quadratic	$Y_t = b_0 + b_1.t + b_2.t^2$	$Y_i = b_0 + b_1. X_i + b_2.X_i^2$
Cubic	$Y_t = b_0 + b_1.t + b_2.t^2 + b_3.t^3$	$Y_i = b_0 + b_1. X_i + b_2.X_i^2 + b_3.X_i^3$
Compound	$Y_t = b_0 \,.\, b_1^t$	$Y_i = b_0 \,.\, b_1^{X_i}$
Power	$Y_t = b_0 \,.\, t^{b_1}$	$Y_i = b_0 \,.\, X_i^{b_1}$
S	$Y_t = \exp(b_0 + b_1 / t)$	$Y_i = \exp(b_0 + b_1 / X_i)$
Growth	$Y_t = \exp(b_0 + b_1 .t)$	$Y_i = \exp(b_0 + b_1 \,.\, X_i)$
Exponential	$Y_t = b_0 \,.\, \exp(b_1 .t)$	$Y_i = b_0 \,.\, \exp(b_1 \,.\, X_i)$
Logistic	$Y_t = \left(\frac{1}{u} + b_0 . b_1^t\right)^{-1}$	$Y_i = \left(\frac{1}{u} + b_0 . b_1^{X_i}\right)^{-1}$

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

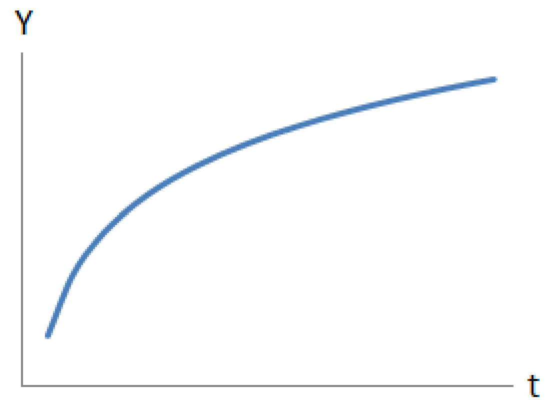
Λογαριθμική καμπύλη

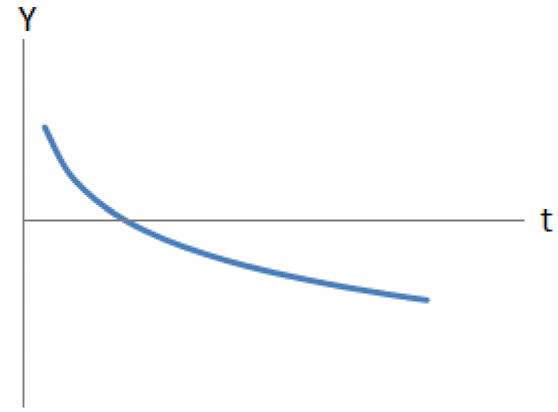
Λογαριθμική γραμμή τάση

$$Y_t = b_0 + b_1 \cdot Ln(t)$$

Η λογαριθμική γραμμή τάσης είναι μια καμπύλη βέλτιστης προσαρμογής όταν σε μια πρώτη φάση, ο ρυθμός αλλαγής των δεδομένων αυξάνεται ή μειώνεται με ταχύτητα ενώ έπειτα τείνει να μένει σταθερός.

Μια λογαριθμική γραμμή τάσης μπορεί να χρησιμοποιεί αρνητικές ή/και θετικές τιμές.





Πολυωνυμικά μοντέλα

Πολυωνυμικά μοντέλα p-τάξης

Η γενική μορφή του πολυωνυμικού μοντέλου (polynomial model) είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + \ldots + b_p X_i^p + \varepsilon_i}$$

Κατά συνέπεια, το μοντέλο περιλαμβάνει p ερμηνευτικές μεταβλητές, οι οποίες είναι <u>δυνάμεις μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής X </u>(μεταβλητή πρόβλεψης – predictor variable).

Αν p = 1 ➔ απλή γραμμική παλινδρόμηση

Αν p = 2 ➔ Πολυωνυμικό μοντέλο 2ης τάξης (Quadratic)

Αν p = 3 ➔ Πολυωνυμικό μοντέλο 3ης τάξης (Cubic)

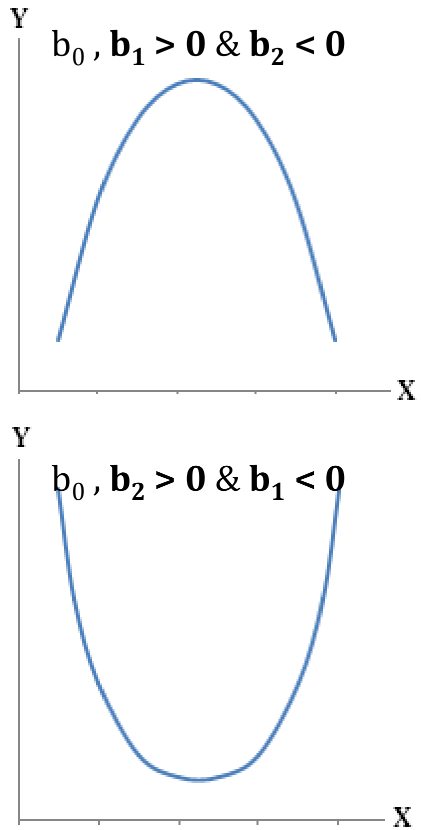
Τα μοντέλα 4ης ή ανώτερης τάξης είναι πολύ σπάνια σε αντίθετα με τα μοντέλα 2ης τάξης και σε μικρότερο βαθμό 3ης τάξης.

Πολυωνυμικά μοντέλα

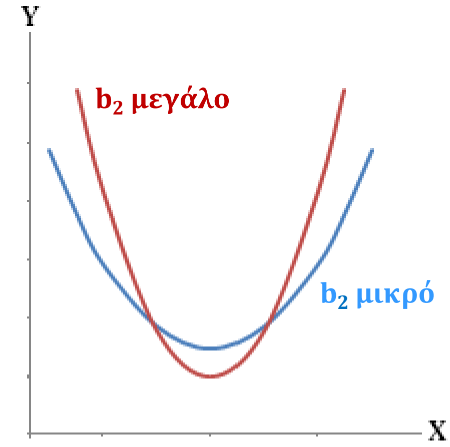
Πολυωνυμικά μοντέλα 2ης τάξης → $Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + \varepsilon_i$

Οι συντελεστές b_1 και b_2 καθορίζουν τη μορφή της καμπύλης :

- Το *πρόσημο* του b_2 καθορίζει τη μορφή της καμπύλης.
- Αν b_1 και b_2 έχουν ίδιο πρόσημο, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής b_1, τόσο η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα πάνω.
- Αν b_1 και b_2 έχουν διαφορετικό πρόσημο, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής b_1, τόσο η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα πάνω.



Quadratic curves



Πολυωνυμικά μοντέλα

Πολυωνυμικά μοντέλα 3ης τάξης

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + b_3 X_i^3 + \varepsilon_i$$

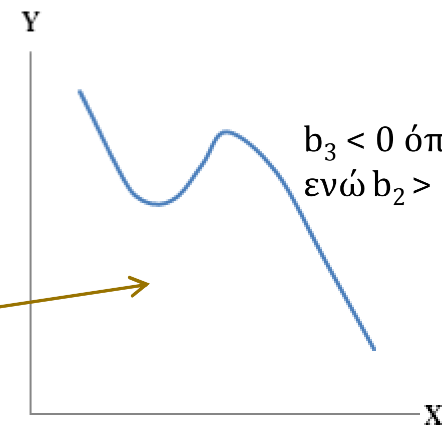
Η τάση της καμπύλης έχει:

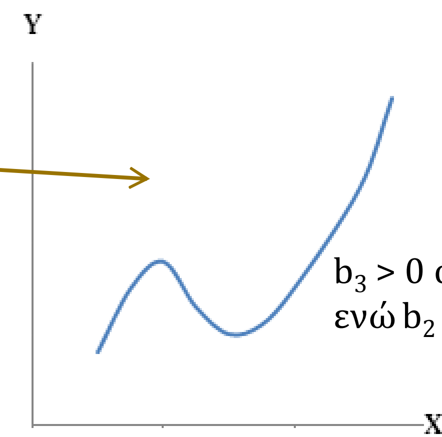
- είτε παντού καθοδική πορεία (αρνητική) με εξαίρεση ένα ενδιάμεσο διάστημα.

  $b_1 < 0$, $b_3 < 0$ & $b_2 > 0$

- είτε παντού ανοδική πορεία (θετική), με εξαίρεση ένα ενδιάμεσο διάστημα.

  $b_1 > 0$, $b_3 > 0$ & $b_2 < 0$





Cubic curves

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΑΞΙΟΠΙΣΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Τα δεδομένα για την αναζήτηση κατάλληλης καμπύλης βρίσκονται στο αρχείο : LECTURE3.xls