

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Χωροταξίας, Πολεοδομίας & Περιφερειακής Ανάπτυξης

ΜΑΘΗΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ: ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης


ΔΙΑΛΕΞΗ 03

Μαρί-Νοέλ Ντυκέν, Μαρία Τσιάπα

mdyken@prd.uth.gr, mtsiapa@prd.uth.gr

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

A-1. ΣΤΟΧΟΣ

- Από τη γραμμική  στη μη γραμμική καμπύλη
- 11 γνωστές μορφές καμπύλης παλινδρόμησης
- Εφαρμογή στο SPSS – επιλογή της «αποτελεσματικής» καμπύλης

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

Γραμμική συναρτησιακή μορφή:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X$$

Παράδειγμα

$$\widehat{wage} = -0.90 + 0.54 educ$$

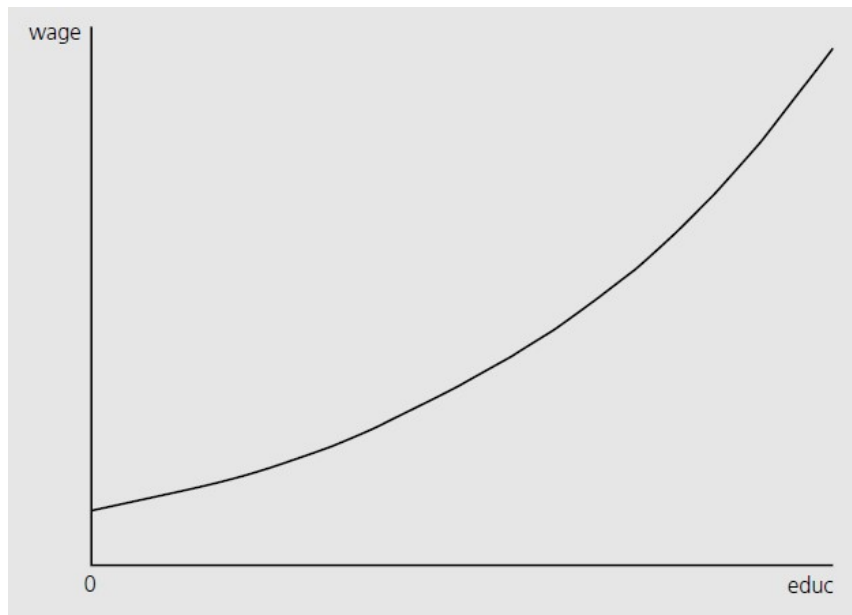
- wage: μισθός απασχολούμενου ανά ώρα
- educ: έτη εκπαίδευσης

- ⇒ Ποια η σημασία των συντελεστών του;
- ⇒ Ποια η μορφή της συνάρτησης;

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

Η μεταβολή του μισθού *αλλάζει* για κάθε επιπρόσθετο έτος μόρφωσης \Rightarrow διαφορετική εξειδίκευση οικονομετρικού υποδείγματος



$$\log(\widehat{wage}) = 0.584 + 0.083 educ$$

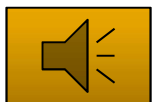
Αύξηση 1 έτους στην εκπαίδευση \Rightarrow αύξηση 8.3% μισθού ανά ώρα

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

$$\log(\widehat{salary}) = 4.822 + 0.257 \log(\text{sales})$$

Αύξηση 1% στις πωλήσεις \Rightarrow αύξηση 25.7% στον μισθό

Model	Dependent Variable	Independent Variable	Interpretation of β_1
level-level	y	x	$\Delta y = \beta_1 \Delta x$
level-log	y	$\log(x)$	$\Delta y = (\beta_1/100)\% \Delta x$
log-level	$\log(y)$	x	$\% \Delta y = (100\beta_1) \Delta x$
log-log	$\log(y)$	$\log(x)$	$\% \Delta y = \beta_1 \% \Delta x$



Εναλλακτικές μορφές καμπύλης παλινδρόμησης (02)

SPSS:
11 Υποδείγματα
για την εκτίμηση
της καμπύλης
παλινδρόμησης

Μορφές καμπύλης	Εξισώσεις Χρονική τάση	Εξισώσεις με μια ανεξάρτητη μεταβλητή
Linear	$Y_t = b_0 + b_1 \cdot t$	$Y_i = b_0 + b_1 \cdot X_i$
Logarithmic	$Y_t = b_0 + b_1 \cdot \ln(t)$	$Y_i = b_0 + b_1 \cdot \ln(X_i)$
Inverse	$Y_t = b_0 + b_1 \cdot (1/t)$	$Y_i = b_0 + b_1 \cdot (1/X_i)$
Quadratic	$Y_t = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2$	$Y_i = b_0 + b_1 \cdot X_i + b_2 \cdot X_i^2$
Cubic	$Y_t = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3$	$Y_i = b_0 + b_1 \cdot X_i + b_2 \cdot X_i^2 + b_3 \cdot X_i^3$
Compound	$Y_t = b_0 \cdot b_1^t$	$Y_i = b_0 \cdot b_1^{X_i}$
Power	$Y_t = b_0 \cdot t^{b_1}$	$Y_i = b_0 \cdot X_i^{b_1}$
S	$Y_t = \exp(b_0 + b_1/t)$	$Y_i = \exp(b_0 + b_1/X_i)$
Growth	$Y_t = \exp(b_0 + b_1 \cdot t)$	$Y_i = \exp(b_0 + b_1 \cdot X_i)$
Exponential	$Y_t = b_0 \cdot \exp(b_1 \cdot t)$	$Y_i = b_0 \cdot \exp(b_1 \cdot X_i)$
Logistic	$Y_t = \left(\frac{1}{u} + b_0 \cdot b_1^t \right)^{-1}$	$Y_i = \left(\frac{1}{u} + b_0 \cdot b_1^{X_i} \right)^{-1}$

**ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΩΝ ΜΟΡΦΩΝ
ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ**

Πολυωνυμικά μοντέλα

Πολυωνυμικά μοντέλα p-τάξης

Η γενική μορφή του πολυωνυμικού μοντέλου (polynomial model) είναι η ακόλουθη:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + \dots + b_p X_i^p + \varepsilon_i$$

Κατά συνέπεια, το μοντέλο περιλαμβάνει p ερμηνευτικές μεταβλητές, οι οποίες είναι δυνάμεις μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής X (μεταβλητή πρόβλεψης – predictor variable).

Αν $p = 1 \rightarrow$ απλή γραμμική παλινδρόμηση

Αν $p = 2 \rightarrow$ πολυωνυμικό μοντέλο 2^{ης} τάξης (Quadratic)

Αν $p = 3 \rightarrow$ πολυωνυμικό μοντέλο 3^{ης} τάξης (Cubic)

Τα μοντέλα 4^{ης} ή ανώτερης τάξης είναι πολύ σπάνια σε αντίθετα με τα μοντέλα 2^{ης} τάξης και σε μικρότερο βαθμό 3^{ης} τάξης.

Πολυωνυμικά μοντέλα

Πολυωνυμικά μοντέλα 2^{ης} τάξης

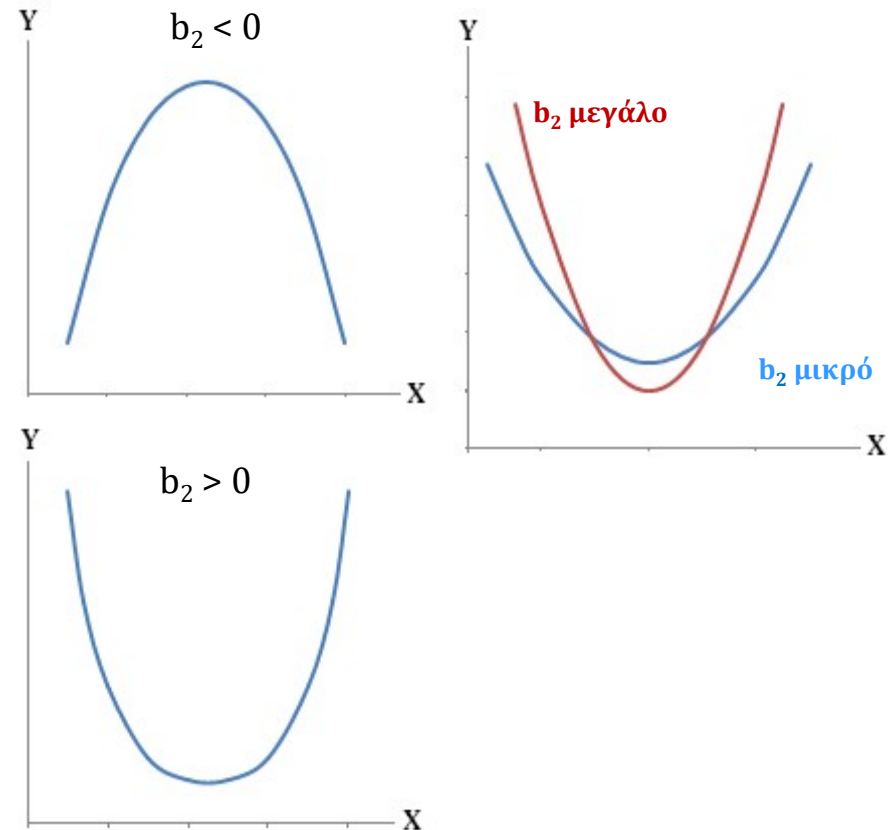


$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + \varepsilon_i$$

Οι συντελεστές b_1 και b_2 καθορίζουν τη θέση της καμπύλης:

- Το πρόσημο του b_2 καθορίζει τη μορφή της καμπύλης.
- Όσο μεγαλύτερο το b_2 τόσο πιο στενή είναι η καμπύλη, όσο μικρότερο το b_2 τόσο πιο φαρδιά η καμπύλη.
- Αν b_2 έχει θετικό πρόσημο, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής b_1 , τόσο η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα αριστερά.
- Αν b_2 έχει αρνητικό πρόσημο, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής b_1 , τόσο η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά.

Quadratic curves



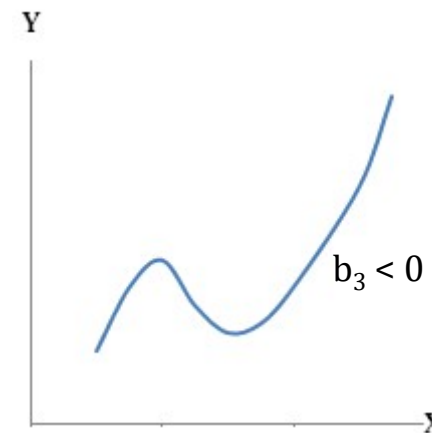
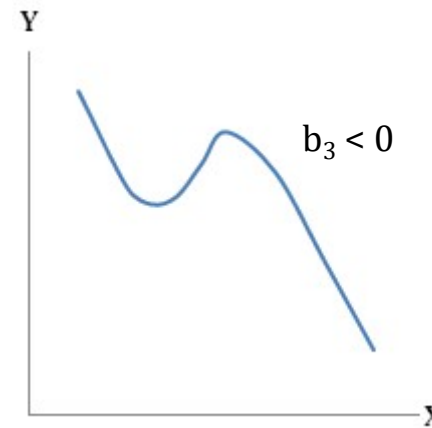
Πολυωνυμικά μοντέλα

Πολυωνυμικά μοντέλα 3^{ης} τάξης

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + b_3 X_i^3 + \varepsilon_i$$

Η τάση της καμπύλης έχει παντού ανοδική πορεία (θετική) ή καθοδική πορεία (αρνητική) με εξαίρεση ένα ενδιάμεσο διάστημα.

- Αν $b_3 < 0$, η καμπύλη έχει καθοδική τάση εκτός από το ενδιάμεσο διάστημα.
- Αν $b_3 > 0$, η καμπύλη έχει ανοδική τάση εκτός από το ενδιάμεσο διάστημα.



Cubic curves

Λογαριθμική καμπύλη

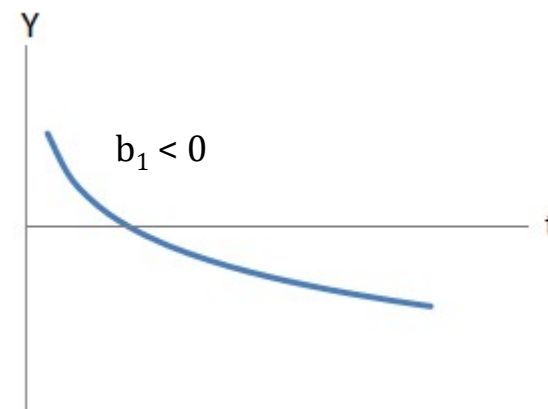
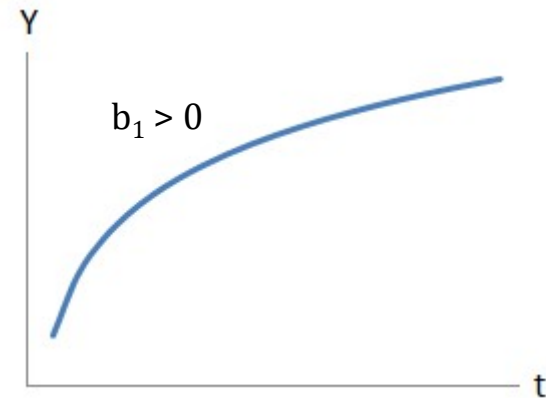
Λογαριθμική γραμμή τάση



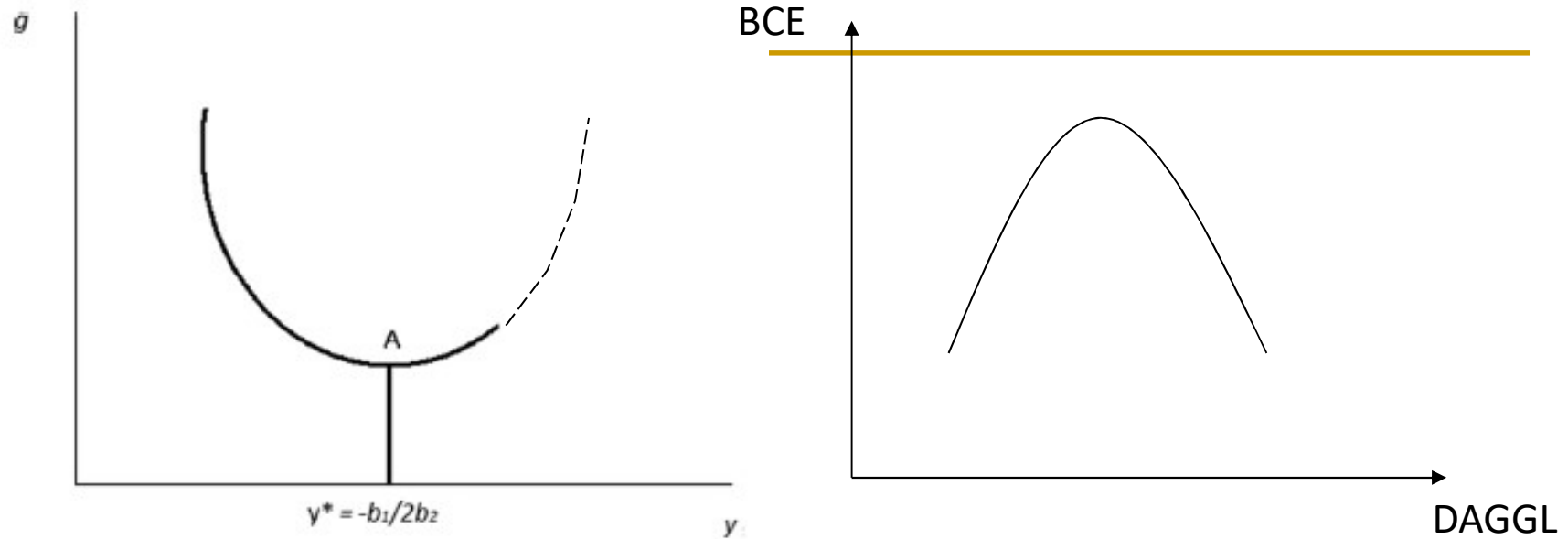
$$Y_t = b_0 + b_1 \cdot \ln(t)$$

Η λογαριθμική γραμμή τάσης είναι μια καμπύλη βέλτιστης προσαρμογής όταν σε μια πρώτη φάση, ο ρυθμός αλλαγής των δεδομένων αυξάνεται ή μειώνεται με ταχύτητα ενώ έπειτα τείνει να μένει σταθερός.

Μια λογαριθμική γραμμή τάσης μπορεί να χρησιμοποιεί αρνητικές ή/και θετικές τιμές.



Πως ερμηνεύετε τα παρακάτω οικονομετρικά ευρήματα?



Variables	g: real growth y: GDP/cap	BCE: business cycle correlation DAGGL: dissimilarity in agglomeration economies
Model	$g_{i,T} = b_0 + b_1 y_{i,T} + b_2 y_{i,T}^2 + e_{i,T}$	$\rho(\tilde{y}_i, \tilde{y}_j)_t = a_0 + b_1 ISIM_{ijt} + b_2 ISIM_{ijt} TERT_{ijt} + b_3 SPEC_{ijt} + b_4 SPEC_{ijt} CAP_{ijt} + b_5 LINK_{ijt} + b_6 LINK_{ijt} LLINK_{ijt} + b_7 AGGL_{ijt} + b_8 AGGL_{ijt}^2 + b_9 NAGGL_{ijt} + b_{10} NAGGL_{ijt}^2 + b_{11} INTRAREG_{ijt} + e_{ijt}$
Data of analysis	249 NUTSII EU regions, 1990-2003	51 NUTSIII regions of Greece (pairs)
Source	Petrakos et al (2011)	Panteladis and Tsiapa (2011)

Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

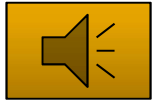
1^η υπόθεση: Γραμμική σχέση μεταξύ Y και X , $Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + \varepsilon_i$

a_0 και a_1 : άγνωστοι συντελεστές : πρέπει να τους εκτιμήσουμε

Άρα η χρησιμοποίηση διάφορων μορφών των Y και X έρχεται σε αντίθεση με την 1^η υπόθεση;

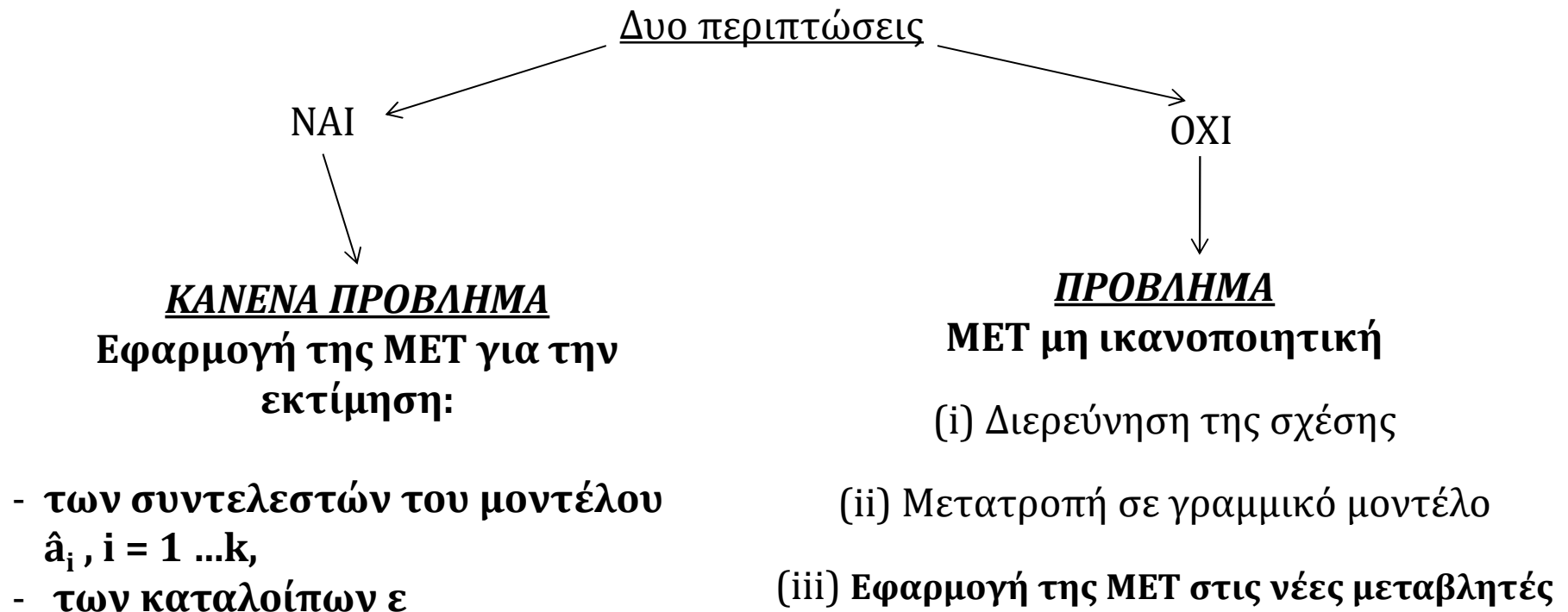
Η γραμμική σχέση των Y και X αφορά τους συντελεστές a_0 και a_1 .

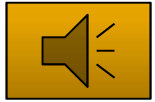
Άρα η μορφή των Y και X δεν μας απασχολεί (ln, υψωμένα σε δύναμη κλπ)



ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Γραμμικότητα? (01)

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, η σχέση μεταξύ της Εξαρτημένης μεταβλητής και της (των) ανεξάρτητης (των) είναι πάντα γραμμική?





ΣΥΖΗΤΗΣΗ: Γραμμικότητα? (01)

Διερεύνηση της μορφής της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών

Γνωστό θεωρητικό μοντέλο

Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

$$Y = A \cdot K^{b_1} \cdot L^{b_2} \quad [1]$$

Άγνωστοι συντελεστές : A, b_1, b_2

Αν: $b_1 + b_2 = 1$ σταθερές αποδόσεις κλίμακας

Σύμφωνα με την εξίσωση [1], η MET δεν μπορεί να εφαρμοστεί

Απαραίτητη μετατροπή:

$$\text{LN}(Y) = \text{LN}(A) + b_1 \text{LN}(K) + b_2 \text{LN}(L)$$

$$Y^* = a_0 + b_1 K^* + b_2 L^* \quad [2]$$

Η εκτίμηση των συντελεστών είναι πλέον εφικτή

Εμπειρική προσέγγιση

Εμπειρική διερεύνηση της μορφής της σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής

Χρήση εναλλακτικών μορφών καμπύλης παλινδρόμησης για να βρούμε την **πιο κατάλληλη δηλαδή:**

Οι εκτιμημένες τιμές της Y προσεγγίζουν καλά τις παρατηρούμενες τιμές

- (a) Εξέταση του Διαγράμματος με τις εκτιμημένες καμπύλες και τη διασπορά των πραγματικών τιμών
- (b) Εξέταση των αποτελεσμάτων : R^2 & συντελεστές

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ:
ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΑΕΙΟΠΙΣΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ**

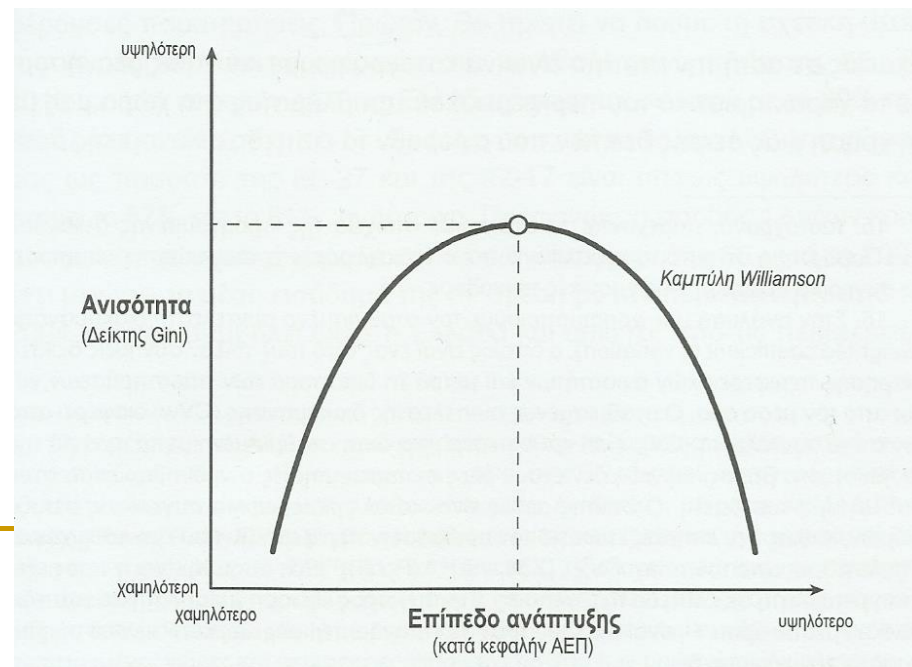
Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

Αντικείμενο μελέτης: Διερεύνηση της θεωρίας Williamson για χώρες μη μέλη της Ε.Ε

Ερώτημα: Εάν οι περιφερειακές ανισότητες ακολουθούν μία αντίστροφη U τύπου καμπύλη σε σχέση με την αύξηση του ΑΕΠ/κεφ

Παρατηρήσεις: 5 χώρες (Αρμενία, Αζερμπαϊτζάν, Γεωργία, Ισραήλ, Ουκρανία)

Χρονική περίοδος: 2000-2010



Εκτίμηση της καμπύλης παλινδρόμησης (Curve estimation)

SPSS, εντολή: *Analyze, Regression, Curve estimation*

Model Summary and Parameter Estimates

Dependent Variable: *cvw*

Equation	Model Summary					Parameter Estimates		
	R Square	F	df1	df2	Sig.	Constant	b1	b2
Linear	,313	24,153	1	53	,000	1,376	-5,633E-5	
Quadratic	,355	14,331	2	52	,000	1,089	,000	-1,272E-8

The independent variable is *gdpcap00*.

