Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων
- Ο πολλαπλασιασμός $A\underline{x}$ μπορεί να ειδωθεί σαν μετασχηματισμός του διανύσματος $\underline{x}$ στο $\underline{y} = A\underline{x}$

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων
- Ο πολλαπλασιασμός $A\underline{x}$ μπορεί να ειδωθεί σαν μετασχηματισμός του διανύσματος $\underline{x}$ στο $\underline{y} = A\underline{x}$
- Δηλαδή

$$x \rightarrow \underline{y} = A\underline{x}$$

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων
- Ο πολλαπλασιασμός $A\underline{x}$ μπορεί να ειδωθεί σαν μετασχηματισμός του διανύσματος $\underline{x}$ στο $\underline{y} = A\underline{x}$
- Δηλαδή

$$x \to \underline{y} = A\underline{x}$$

- Μερικοί αντιστρέφονται, άλλοι όχι.

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

φιγς/γραμετ.πνγ

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων
- Ο πολλαπλασιασμός $A\underline{x}$ μπορεί να ειδωθεί σαν μετασχηματισμός του διανύσματος $\underline{x}$ στο $\underline{y} = A\underline{x}$

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων
- Ο πολλαπλασιασμός $A\underline{x}$ μπορεί να ειδωθεί σαν μετασχηματισμός του διανύσματος $\underline{x}$ στο $\underline{y} = A\underline{x}$
- Δηλαδή

$$\underline{x} \rightarrow \underline{y} = A\underline{x}$$

Μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$

- Μπορούν να παρασταθούν (και να υλοποιηθούν) με πολλαπλασιασμό πινάκων
- Ο πολλαπλασιασμός $A\underline{x}$ μπορεί να ειδωθεί σαν μετασχηματισμός του διανύσματος $\underline{x}$ στο $\underline{y} = A\underline{x}$
- Δηλαδή

$$\underline{x} \to \underline{y} = A\underline{x}$$

- Μερικοί αντιστρέφονται, άλλοι όχι.

Μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^n$

Οι πίνακες μπορούν να υλοποιήσουν μετασχηματισμούς αν

1. δεν μετακινούν την αρχή των αξόνων

Μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^n$

Οι πίνακες μπορούν να υλοποιήσουν μετασχηματισμούς αν

1. δεν μετακινούν την αρχή των αξόνων
2. $\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \Rightarrow cx \rightarrow c\underline{x}', \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$

Μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^n$

Οι πίνακες μπορούν να υλοποιήσουν μετασχηματισμούς αν

1. δεν μετακινούν την αρχή των αξόνων
2. $\underline{x} \to \underline{x}' \Rightarrow cx \to c\underline{x}', \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$
3. $\underline{x} \to \underline{x}', \underline{y} \to \underline{y}' \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \to \underline{x}' + \underline{y}', \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμοί που ικανοποιούν τις προηγούμενες τρείς συνθήκες λέγονται γραμμικοί μετασχηματισμοί

Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να παρασταθεί με πίνακα

Παραδείγματα

1. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}4\\6\\8\end{bmatrix}$

Παραδείγματα

1. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}4\\6\\8\end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}6\\9\\12\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Άσκηση

Βρείτε τον πίνακα που υλοποιεί την

1. παραγώγιση πολυωνύμων βαθμού το πολύ p

Άσκηση

Βρείτε τον πίνακα που υλοποιεί την

1. παραγώγιση πολυωνύμων βαθμού το πολύ p
2. ολοκλήρωση πολυωνύμων βαθμού το πολύ p

Παραγώγιση Πολυωνύμων

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Παραγώγιση Πολυωνύμων

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$p_n'(x) = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}$$

Παραγώγιση Πολυωνύμων

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$p'_n(x) = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}$$

$$p_n(x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \quad p'_n(x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ 2a_2 \\ \ldots \\ (n-1)a_{n-1} \\ n a_n \end{bmatrix}$$

Πίνακας Μετασχηματισμού

Έστω $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ βάση του V και $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n$ βάση του W τότε

Πίνακας Μετασχηματισμού

Έστω $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ βάση του V και $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n$ βάση του W τότε

- Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός A από το V στο W μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα A

Πίνακας Μετασχηματισμού

Έστω $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ βάση του V και $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n$ βάση του W τότε

- Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός A από το V στο W μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα A
- Η j-στη στήλη του A μπορεί να υπολογισθεί εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό A στο j-στο διάνυσμα της $\underline{v}_j$ της βάσης του V

Πίνακας Μετασχηματισμού

Έστω $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ βάση του V και $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n$ βάση του W τότε

- Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός A από το V στο W μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα A
- Η j-στη στήλη του A μπορεί να υπολογισθεί εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό A στο j-στο διάνυσμα της $\underline{v}_j$ της βάσης του V
- $A\underline{v}_j = a_{1,j}\underline{w}_j + a_{2,j}\underline{w}_2 + \ldots + a_{m,j}\underline{w}_m$

Περιστροφή

φιγς/ροτατιον.πνγ

Περιστροφή

φιγς/ροτατιον.πνγ

φιγς/ροτατιον2.πνγ

Περιστροφή

φιγς/ροτατιον.πνγ

φιγς/ροτατιον2.πνγ

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Περιστροφή

- $Q_\theta Q_{-\theta} =$

Περιστροφή

- $Q_\theta Q_{-\theta} = I$

Περιστροφή

- $Q_\theta Q_{-\theta} = I \Rightarrow Q_\theta^{-1} = Q_{-\theta}$

Περιστροφή

- $Q_\theta Q_{-\theta} = I \Rightarrow Q_\theta^{-1} = Q_{-\theta}$
- $Q_{\theta_1} Q_{\theta_2} =$

Περιστροφή

- $Q_\theta Q_{-\theta} = I \Rightarrow Q_\theta^{-1} = Q_{-\theta}$
- $Q_{\theta_1} Q_{\theta_2} = Q_{\theta_1+\theta_2}$

Περιστροφή

- $Q_\theta Q_{-\theta} = I \Rightarrow Q_\theta^{-1} = Q_{-\theta}$
- $Q_{\theta_1} Q_{\theta_2} = Q_{\theta_1+\theta_2}$
- …

Μετασχηματιμός Γινομένου

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z \Rightarrow x \xrightarrow{AB} z$$

Μετασχηματιμός Γινομένου

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z \Rightarrow x \xrightarrow{AB} z$$

Συμπέρασμα

$$A_{\text{παραγ}} A_{\text{ολοκλ}} = I$$

Μετασχηματιμός Γινομένου

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z \Rightarrow x \xrightarrow{AB} z$$

Συμπέρασμα

$$A_{\pi\alpha\rho\alpha\gamma} A_{o\lambda o\kappa\lambda} = I \Rightarrow A_{\pi\alpha\rho\alpha\gamma}^{-1} = A_{o\lambda o\kappa\lambda}$$

Παράδειγμα - Προβολή

φιγς/προολι.πνγ

Παράδειγμα - Προβολή

φιγς/προολι.πνγ

φιγς/προολι2.πνγ

Παράδειγμα - Προβολή

φιγς/προολι.πνγ

φιγς/προολι2.πνγ

$$P_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$