Γραμμική Ανεξαρτησία

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^k \in \mathbb{R}^n$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αννυπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ εκ των οποίων τουλάχιστον ένας δεν είναι μηδέν και για τους οποίους ισχύει $c_1\underline{v}^1 + c_2\underline{v}^2 \ldots, c_k\underline{v}^k = \underline{0}$.

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^k \in \mathbb{R}^n$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα ανν υπάρχουν αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ εκ των οποίων τουλάχιστον ένας δεν είναι μηδέν και για τους οποίους ισχύει $c_1\underline{v}^1 + c_2\underline{v}^2 \ldots, c_k\underline{v}^k = \underline{0}$.

Για να ελέγξουμε την εξάρτηση των $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^k \in \mathbb{R}^n$

- Σχηματίζουμε τον πίνακα A οποίος έχει σαν στήλες τα διανύσματα αυτά
- Υπολογίζουμε τον μηδενόχωρο του A

Αν αυτός περιλαμβάνει μόνον το μηδενικό διάνυσμα τότε αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμοί

- Εάν ένας διανυσματικός χώρος V αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^k$ τότε λέμε ότι αυτά παράγουν τον V.

Ορισμοί

- Εάν ένας διανυσματικός χώρος V αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^k$ τότε λέμε ότι αυτά παράγουν τον V.
- Ένα σύνολο διανυσμάτων παράγει έναν διανυσματικό χώρο ανν κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των εν λόγω διανυσμάτων.

Ορισμοί

- Εάν ένας διανυσματικός χώρος V αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^k$ τότε λέμε ότι αυτά παράγουν τον V.
- Ένα σύνολο διανυσμάτων παράγει έναν διανυσματικό χώρο ανν κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των εν λόγω διανυσμάτων.
- Ένα σύνολο διανυσμάτων αποτελεί βάση ενός διανυσματικού χώρου ανν αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον χώρο.

Ορισμοί

- Εάν ένας διανυσματικός χώρος V αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^k$ τότε λέμε ότι αυτά παράγουν τον V.
- Ένα σύνολο διανυσμάτων παράγει έναν διανυσματικό χώρο ανν κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των εν λόγω διανυσμάτων.
- Ένα σύνολο διανυσμάτων αποτελεί βάση ενός διανυσματικού χώρου ανν αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον χώρο.
- Διάσταση ενός υποχώρου είναι το πλήθος των στοιχείων της βάσης του.

Παρατηρήσεις

- Υπάρχουν άπειρες διαφορετικές βάσεις ενός υπόχωρου.

Παρατηρήσεις

- Υπάρχουν άπειρες διαφορετικές βάσεις ενός υπόχωρου.
- Δύο οποιεσδήποτε βάσεις ενός χώρου αποτελούνται από το ίδιο πλήθος διανυσμάτων.

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη:Έστω $m < n$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη: Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m$$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη:Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m \Rightarrow W = VA$$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη: Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m \Rightarrow W = VA$$

Επειδή $m < n$ τότε ο A έχει στον μηδενόχωρό του τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα έστω το $\underline{c} \neq 0$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη:Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m \Rightarrow W = VA$$

Επειδή $m < n$ τότε ο A έχει στον μηδενόχωρό του τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα έστω το $\underline{c} \neq 0$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με το c αυτό και έχουμε $\Rightarrow W\underline{c} = VA\underline{c}$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη:Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m \Rightarrow W = VA$$

Επειδή $m < n$ τότε ο A έχει στον μηδενόχωρό του τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα έστω το $\underline{c} \neq 0$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με το c αυτό και έχουμε $\Rightarrow W\underline{c} = VA\underline{c}$

Τότε $A\underline{c} = 0$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη:Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m \Rightarrow W = VA$$

Επειδή $m < n$ τότε ο A έχει στον μηδενόχωρό του τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα έστω το $\underline{c} \neq 0$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με το c αυτό και έχουμε $\Rightarrow W\underline{c} = VA\underline{c}$

Τότε $A\underline{c} = 0 \Rightarrow VA\underline{c} = 0$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη:Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m \Rightarrow W = VA$$

Επειδή $m < n$ τότε ο A έχει στον μηδενόχωρό του τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα έστω το $\underline{c} \neq 0$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με το c αυτό και έχουμε $\Rightarrow W\underline{c} = VA\underline{c}$

Τότε $A\underline{c} = 0 \Rightarrow VA\underline{c} = 0 \Rightarrow W\underline{c} = 0, \underline{c} \neq 0$

Θεώρημα

Αν τα σύνολα $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^m$ και $\underline{w}^1, \underline{w}^2, \ldots, \underline{w}^n$ αποτελούν βάσεις του χώρου V τότε $m = n$.

Απόδειξη:Έστω $m < n$

$$\underline{w}^j = a_{1,j}\underline{v}^1 + a_{2,j}\underline{v}^2 + \ldots + a_{m,j}\underline{v}^m \Rightarrow W = VA$$

Επειδή $m < n$ τότε ο A έχει στον μηδενόχωρό του τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα έστω το $\underline{c} \neq 0$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με το c αυτό και έχουμε $\Rightarrow W\underline{c} = VA\underline{c}$

Τότε $A\underline{c} = 0 \Rightarrow VA\underline{c} = 0 \Rightarrow W\underline{c} = 0, \underline{c} \neq 0$

Άτοπο γιατί τα $\underline{w}^i, i = 1, \ldots, m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατηρήσεις

- Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων ενός χώρου V μπορεί, εάν αυτό είναι απαραίτητο, να επεκταθεί (με προσθήκη άλλων διανυσμάτων) έτσι ώστε να γίνει βάση του V.

Παρατηρήσεις

- Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων ενός χώρου V μπορεί, εάν αυτό είναι απαραίτητο, να επεκταθεί (με προσθήκη άλλων διανυσμάτων) έτσι ώστε να γίνει βάση του V.
- Κάθε σύνολο διανυσμάτων που παράγει έναν χώρο V μπορεί, εάν αυτό είναι απαραίτητο, να συρρικνωθεί (αφαιρώντας διανύσματα) έτσι ώστε να γίνει βάση του V.

Παρατηρήσεις

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήσεις

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

1. Ο χώρος γραμμών του A ταυτίζεται (άρα έχει την ίδια διάσταση r και την ίδια βάση) με τον χώρο γραμμών του U.

Παρατηρήσεις

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

1. Ο χώρος γραμμών του A ταυτίζεται (άρα έχει την ίδια διάσταση r και την ίδια βάση) με τον χώρο γραμμών του U.
2. Ο χώρος στηλών του A δεν ταυτίζεται με τον χώρο γραμμών του U.

Παρατηρήσεις

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

1. Ο χώρος γραμμών του A ταυτίζεται (άρα έχει την ίδια διάσταση r και την ίδια βάση) με τον χώρο γραμμών του U.
2. Ο χώρος στηλών του A δεν ταυτίζεται με τον χώρο γραμμών του U.
3. Ο μηδενόχωρος του A ταυτίζεται με τον μηδενόχωρο του U.

Παρατηρήσεις

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

1. Ο χώρος γραμμών του A ταυτίζεται (άρα έχει την ίδια διάσταση r και την ίδια βάση) με τον χώρο γραμμών του U.
2. Ο χώρος στηλών του A δεν ταυτίζεται με τον χώρο γραμμών του U.
3. Ο μηδενόχωρος του A ταυτίζεται με τον μηδενόχωρο του U.