Ερωτήματα

- Είναι τα διανύσματα του $\underline{x}_{\text{γενικη}}$ όλα λύσεις του συστήματος;
- Είναι τα διανύσματα του $\underline{x}_{\text{γενικη}}$ όλες οι λύσεις του συστήματος;
- Υπάρχει και άλλος τρόπος αναπαράστασης του $\underline{x}_{\text{γενικη}}$;
- Κάτω απο ποιές συνθήκες ένα σύστημα έχει λύση;

Ύπαρξη λύσεων

- Αν ένα ομογενές σύστημα $A\underline{x} = \underline{0}$ έχει περισσότερους αγνώστους απο εξισώσεις $(n > m)$ τότε έχει μια τουλάχιστον μη-τεριμένη λύση.

Ύπαρξη λύσεων

- Αν ένα ομογενές σύστημα $A\underline{x} = \underline{0}$ έχει περισσότερους αγνώστους απο εξισώσεις $(n > m)$ τότε έχει μια τουλάχιστον μη-τεριμένη λύση.
- Το σύνολο των μη-τετριμένων λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ είναι ίσο με το σύνολο των μη-τετριμένων λύσεων του ομογενούς συστήματος $U\underline{x} = \underline{0}$ όπου U ο άνω κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει απο τον A με απαλοιφή.

Ύπαρξη λύσεων

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν r (μη-μηδενικοί) οδηγοί τότε

- $r = \min\{m, n\}$.

Ύπαρξη λύσεων

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν r (μη-μηδενικοί) οδηγοί τότε

- $r = \min\{m, n\}$.
- Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του U είναι μηδενικές.

Ύπαρξη λύσεων

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν r (μη-μηδενικοί) οδηγοί τότε

- $r = \min\{m, n\}$.
- Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του U είναι μηδενικές.
- Αν $r = m$ υπάρχει πάντα λύση

Ύπαρξη λύσεων

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν r (μη-μηδενικοί) οδηγοί τότε

- $r = \min\{m, n\}$.
- Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του U είναι μηδενικές.
- Αν $r = m$ υπάρχει πάντα λύση
- Υπάρχει λύση του ομογενούς μόνον αν οι τελευταίες $m - r$ συνιστώσες του $\underline{c}$ είναι και αυτές μηδενικές.

Ύπαρξη λύσεων

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν r (μη-μηδενικοί) οδηγοί τότε

- $r = \min\{m, n\}$.
- Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του U είναι μηδενικές.
- Αν $r = m$ υπάρχει πάντα λύση
- Υπάρχει λύση του ομογενούς μόνον αν οι τελευταίες $m - r$ συνιστώσες του $\underline{c}$ είναι και αυτές μηδενικές.
- Αν $r = n$ το ομογενές σύστημα έχει μόνον την τετριμένη λύση

Τέσσερα σημαντικά σύνολα

- Μηδενόχωρος $\mathscr{N}(A)$
- Χώρος Στηλών $\mathscr{R}(A)$
- Χώρος Γραμμών $\mathscr{R}\left(A^T\right)$
- Αριστερός Μηδενόχωρος $\mathscr{N}\left(A^T\right)$

Τέσσερα σημαντικά σύνολα

- Μηδενόχωρος $\mathscr{N}(A)$
- Χώρος Στηλών $\mathscr{R}(A)$
- Χώρος Γραμμών $\mathscr{R}\left(A^T\right)$
- Αριστερός Μηδενόχωρος $\mathscr{N}\left(A^T\right)$

Μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$ ενός Πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\underline{x}$ για τα οποία ισχύει ότι $A\underline{x} = \underline{0}$.

Μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$ ενός Πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\underline{x}$ για τα οποία ισχύει ότι $A\underline{x} = \underline{0}$.

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{0} \right\}$$

Χώρος Στηλών $\mathscr{R}(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A.

Χώρος Στηλών $\mathscr{R}(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A.

$$\mathscr{R}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{k=1}^{n} c_k A_{*,k}, \forall c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Χώρος Γραμμών $\mathscr{R}\left(A^T\right)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των γραμμών του A.

Χώρος Γραμμών $\mathscr{R}\left(A^T\right)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των γραμμών του A.

$$\mathscr{R}\left(A^T\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=1}^{m} c_k A_{k,*}, \forall c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Αριστερός Μηδενόχωρος $\mathcal{N}\left(A^T\right)$ ενός πίνακα A είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\underline{x}$ για τα οποία ισχύει ότι $\underline{x}^T A = \underline{0}$.

Αριστερός Μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$ ενός πίνακα A είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\underline{x}$ για τα οποία ισχύει ότι $\underline{x}^T A = \underline{0}$.

$$\mathcal{N}(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^m : \underline{x}^T A = \underline{0}\}$$

Αριστερός Μηδενόχωρος $\mathcal{N}\left(A^T\right)$ ενός πίνακα A είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\underline{x}$ για τα οποία ισχύει ότι $\underline{x}^T A = \underline{0}$.

$$\mathcal{N}\left(A^T\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \underline{x}^T A = \underline{0}\right\}$$

$$\mathcal{N}\left(A^T\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^m : A^T \underline{x} = \underline{0}\right\}$$

Θεωρήματα

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$.

- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$.

Θεωρήματα

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$.

- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$.
- $\underline{x}$ λύση του $A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{b} \in \mathcal{R}(A)$.