Ορισμοί

$$\underline{x}_{\text{γενικη}}: \text{ όλες οι λύσεις του } A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x}_{\text{ομογενους}}: \text{ όλες οι λύσεις του } A\underline{x} = \underline{0}$$

$$\underline{x}_{\text{ειδικη}}: \text{ μια οποιαδήποτε λύση του } A\underline{x} = \underline{b}$$

Ελεύθερες μεταβλητές: όλες οι συνιστώσες της λύσης που δεν αντιστοιχούν σε στήλη με οδηγό.

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $A\underline{x}=\underline{b}$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x}=\underline{b}$ $(A\underline{x}=\underline{b} \Rightarrow U\underline{x}=\underline{c})$
2. Μηδένισε τις ελεύθερες μεταβλητές και λύσε $(\underline{x}_{\text{ειδικη}})$
3. Θέσε $\underline{b}=\underline{0}$ και διαδοχικά, σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή 1 θέτοντας ταυτόχρονα τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με 0 και βρες το σύνολο των λύσεων του ομογενούς $(\underline{x}_{ομογενους})$
4. $\underline{x}_{\text{γενικη}}=\underline{x}_{\text{ειδικη}}+\underline{x}_{ομογενους}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Λύσεις ομογενούς

$$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{\varepsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Λύσεις

$$\underline{x}_{\text{γενικη}} = \underline{x}_{ομογενους} + \underline{x}_{\text{ειδικη}}$$

$$\underline{x}_{\text{γενικη}} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Επίλυση ομογενούς $m \times n$

$$Ax = 0 \Rightarrow LUx = 0 \Rightarrow Ux = L^{-1}0 \Rightarrow Ux = 0$$

Επίλυση ομογενούς $m \times n$

$$Ax = 0 \Rightarrow LUx = 0 \Rightarrow Ux = L^{-1}0 \Rightarrow Ux = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επίλυση ομογενούς $m \times n$

$$Ax = 0 \Rightarrow LUx = 0 \Rightarrow Ux = L^{-1}0 \Rightarrow Ux = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3}y \\ y \end{bmatrix}$$

Επίλυση ομογενούς $m \times n$

$$Ax = 0 \Rightarrow LUx = 0 \Rightarrow Ux = L^{-1}0 \Rightarrow Ux = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3}y \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ερωτήματα

- Είναι τα διανύσματα του $\underline{x}_{\text{γενικη}}$ όλα λύσεις του συστήματος;
- Είναι τα διανύσματα του $\underline{x}_{\text{γενικη}}$ όλες οι λύσεις του συστήματος;
- Υπάρχει και άλλος τρόπος αναπαράστασης του $\underline{x}_{\text{γενικη}}$;
- Κάτω απο ποιές συνθήκες ένα σύστημα έχει λύση;

Ύπαρξη λύσεων

- Αν ένα ομογενές σύστημα $A\underline{x} = \underline{0}$ έχει περισσότερους αγνώστους απο εξισώσεις $(n > m)$ τότε έχει μια τουλάχιστον μη-τεριμένη λύση.

Ύπαρξη λύσεων

- Αν ένα ομογενές σύστημα $A\underline{x} = \underline{0}$ έχει περισσότερους αγνώστους απο εξισώσεις $(n > m)$ τότε έχει μια τουλάχιστον μη-τεριμένη λύση.
- Το σύνολο των μη-τετριμένων λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ είναι ίσο με το σύνολο των μη-τετριμένων λύσεων του ομογενούς συστήματος $U\underline{x} = \underline{0}$ όπου U ο άνω κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει απο τον A με απαλοιφή.

Ύπαρξη λύσεων

Έστω ότι η απαλοιφή μετατρέπει το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ στο σύστημα $U\underline{x} = \underline{c}$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν r (μη-μηδενικοί) οδηγοί τότε

- $r = \min\{m, n\}$.
- Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του U είναι μηδενικές.
- Υπάρχει λύση μόνον αν οι τελευταίες $m - r$ συνίστώσες του $\underline{c}$ είναι και αυτές μηδενικές.
- Αν $r = m$ υπάρχει πάντα λύση
- Αν $r = n$ το ομογενές σύστημα έχει μόνον την τετριμένη λύση