Παραγοντοποίηση $A = LU$

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U.

- Ο L έχει τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής κάτω απο την διαγώνιο
- Ο U τα στοιχεία του A όπως αυτά προκύπτουν μετά την απαλοιφή

Ύπαρξη και μοναδικότητα LU

Θεώρημα

Οι πίνακες L U που περιγράφθηκαν παραπάνω

- υπάρχουν και
- και αν ο A είναι αντιστρέψιμος είναι μοναδικοί.

Απόδειξη.

$$L_k L_{k-1} \cdots L_3 L_2 L_1 A = U \rightarrow A = (L_1)^{-1} (L_2)^{-1} (L_3)^{-1} \cdots \left(L_{k-1}\right)^{-1} \left(L_k\right)^{-1} U$$

$$L_1 U_1 = L_2 U_2 \rightarrow (L_2)^{-1} L_1 = U_2 (U_1)^{-1}$$

□

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

- $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

- $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$
- Θέτω $\underline{y} = U\underline{x}$ και έχω $L\underline{y} = \underline{b}$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

- $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$
- Θέτω $\underline{y} = U\underline{x}$ και έχω $L\underline{y} = \underline{b}$
- Λύνω το $L\underline{y} = \underline{b}$ για να υπολογίσω το $\underline{y}$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

- $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$
- Θέτω $\underline{y} = U\underline{x}$ και έχω $L\underline{y} = \underline{b}$
- Λύνω το $L\underline{y} = \underline{b}$ για να υπολογίσω το $\underline{y}$
- Λύνω το $U\underline{x} = \underline{y}$ για να υπολογίσω το $\underline{x}$

Παράδειγμα

Να λυθεί το $$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$U\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$U\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός πίνακα αντιμετάθεσης P, ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U.

- Ο P καθορίζεται απο τις εναλλαγές γραμμών που απαιτεί η διαδικασία της απαλοιφής με οδήγηση.
- Ο L έχει τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής κάτω απο την διαγώνιο.
- Ο U τα στοιχεία του A όπως αυτά προκύπτουν μετά την απαλοιφή.

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = PLU$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα

$$A = PLU$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

- $Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

- $Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$
- Θέτω $y = Ux$ και έχω $Ly = P^{-1}b$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

- $Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$
- Θέτω $y = Ux$ και έχω $Ly = P^{-1}b$
- Λύνω το $Ly = P^{-1}b$ για να υπολογίσω το y

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

- $Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$
- Θέτω $y = Ux$ και έχω $Ly = P^{-1}b$
- Λύνω το $Ly = P^{-1}b$ για να υπολογίσω το y
- Λύνω το $Ux = y$ για να υπολογίσω το x

Παράδειγμα

Χρησιμοποιήστε την ανάλυση PLU του A που βρήκατε παραπάνω για να υπολογίστε την λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ανάλυση συμμετρικού πίνακα σε LDL^T

Θεώρημα

Κάθε συμμετρικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί στην μορφή $A = LDL^T$ όπου

- L κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές κάτω απο αυτή και
- D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα οδηγά στοιχεία.

Απόδειξη.

Αν $A = A^T$ και $A = LU \Rightarrow A = LD\tilde{U}$ τότε

$$LD\tilde{U} = (LD\tilde{U})^T = \tilde{U}^T DL^T$$

Ανάλυση συμμετρικού πίνακα σε LDL^T

Θεώρημα

Κάθε συμμετρικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί στην μορφή $A = LDL^T$ όπου

- L κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές κάτω απο αυτή και
- D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα οδηγά στοιχεία.

Απόδειξη.

Αν $A = A^T$ και $A = LU \Rightarrow A = LD\tilde{U}$ τότε

$$LD\tilde{U} = (LD\tilde{U})^T = \tilde{U}^T DL^T$$

Απο την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης LU έχουμε

$$LD = \tilde{U}^T D \Rightarrow L = \tilde{U}^T \Rightarrow \tilde{U} = L^T$$

$\square$

Άσκηση

Θεώρημα

Ο ανάστροφος του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το ανάστροφο γινόμενο των αναστρόφων των πινάκων.

Άσκηση

Θεώρημα

Ο ανάστροφος του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το ανάστροφο γινόμενο των αναστρόφων των πινάκων. Δηλαδή

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Άσκηση

Θεώρημα

Ο ανάστροφος του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το ανάστροφο γινόμενο των αναστρόφων των πινάκων. Δηλαδή

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Απόδειξη.

Γράφουμε το στοιχείο του πίνακα $(AB)^T$ στην θέση i,j το οποίο είναι το στοιχείο του πίνακα AB στην θέση j,i το οποίο ισούται με το εσωτερικό γινομενο της j γραμμής του A με την i στήλη του B … $\square$

Άσκηση

Θεώρημα

Ο αντίστροφος του αναστρόφου ενός πίνακα ισούται με τον ανάστροφο του αντιστρόφου.

Απόδειξη.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

$\square$

Προσοχή

Απο εδώ και πέρα έχουμε

$$n \neq m$$

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε άνω κλιμακωτή μορφή αν

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε άνω κλιμακωτή μορφή αν

- όλες οι μηδενικές σειρές του βρίσκονται στον κάτω μέρος του, και

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε άνω κλιμακωτή μορφή αν

- όλες οι μηδενικές σειρές του βρίσκονται στον κάτω μέρος του, και
- το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, το οποίο λέγεται οδηγό στοιχείο, βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής.

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε άνω κλιμακωτή μορφή αν

- όλες οι μηδενικές σειρές του βρίσκονται στον κάτω μέρος του, και
- το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, το οποίο λέγεται οδηγό στοιχείο, βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής.

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} \$ & * & * & * & * & * \\ 0 & \$ & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \$ & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\$ =$ μη-μηδενικό στοιχείο ή οδηγό στοιχείο, $\quad * =$ οτιδήποτε στοιχείο

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παραγοντοποίηση $A = PLU$ $(n \neq m)$

Κάθε $n \times m$ πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός πίνακα αντιμετάθεσης P, ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω κλιμακωτού πίνακα U.

- Ο P καθορίζεται απο τις εναλλαγές γραμμών που απαιτεί η διαδικασία της απαλοιφής με οδήγηση.
- Ο L έχει τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής κάτω απο την διαγώνιο.
- Ο U τα στοιχεία του A όπως αυτά προκύπτουν μετά την απαλοιφή.

Ορισμοί

$x_{\text{γενικη}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

Ορισμοί

$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

$x_{o\mu o\gamma\epsilon\nu o\upsilon\varsigma}$: όλες οι λύσεις του $Ax = 0$

Ορισμοί

$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

$x_{o\mu o\gamma\epsilon\nu o\upsilon\varsigma}$: όλες οι λύσεις του $Ax = 0$

$x_{\epsilon\iota\delta\iota\kappa\eta}$: μια οποιαδήποτε λύση του $Ax = b$

Ορισμοί

$x_{\text{γενικη}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

$x_{\text{ομογενους}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = 0$

$x_{\text{ειδικη}}$: μια οποιαδήποτε λύση του $Ax = b$

Ελεύθερες μεταβλητές: όλες οι συνιστώσες της λύσης που δεν αντιστοιχούν σε στήλη με οδηγό.

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ $(A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c})$

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c}$)
2. Μηδένισε τις ελεύθερες μεταβλητές και λύσε ($x_{\text{ειδικη}}$)

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c}$)
2. Μηδένισε τις ελεύθερες μεταβλητές και λύσε ($x_{\text{ειδικη}}$)
3. Θέσε $\underline{b} = \underline{0}$ και διαδοχικά, σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή 1 θέτοντας ταυτόχρονα τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με 0 και βρες μια ομογενή λύση ($\underline{x}_{\text{ομογενους}}$)

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c}$)
2. Μηδένισε τις ελεύθερες μεταβλητές και λύσε ($x_{\text{ειδικη}}$)
3. Θέσε $\underline{b} = \underline{0}$ και διαδοχικά, σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή 1 θέτοντας ταυτόχρονα τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με 0 και βρες μια ομογενή λύση ($\underline{x}_{ομογενους}$)
4. $\underline{x}_{\text{γενικη}} = \underline{x}_{\text{ειδικη}} + \underline{x}_{ομογενους}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{\varepsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = x_{\epsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} + x_{o\mu o\gamma\epsilon\nu o\upsilon\varsigma}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = x_{\epsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} + x_{o\mu o\gamma\epsilon\nu o\upsilon\varsigma}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = x_{\varepsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} + x_{o\mu o\gamma\epsilon\nu o\upsilon\varsigma}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$