# Ομογενή Συστήματα

Ορισμός

Ένα σύστημα λέγεται ομογενές αν όλοι οι σταθεροί όροι του (δηλαδή οι όροι του δεξιού μέλους του συστήματος) είναι μηδέν.

# Ομογενή Συστήματα

Ορισμός

Ένα σύστημα λέγεται ομογενές αν όλοι οι σταθεροί όροι του (δηλαδή οι όροι του δεξιού μέλους του συστήματος) είναι μηδέν.

# Ομογενή Συστήματα

Ορισμός

Ένα σύστημα λέγεται ομογενές αν όλοι οι σταθεροί όροι του (δηλαδή οι όροι του δεξιού μέλους του συστήματος) είναι μηδέν.

Θεώρημα

Αν ένα σύνολο διανυσμάτων είναι λύση ενός ομογενούς συστήματος τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι λύση του.

# Ομογενή Συστήματα

Ορισμός

Ένα σύστημα λέγεται ομογενές αν όλοι οι σταθεροί όροι του (δηλαδή οι όροι του δεξιού μέλους του συστήματος) είναι μηδέν.

Θεώρημα

Αν ένα σύνολο διανυσμάτων είναι λύση ενός ομογενούς συστήματος τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι λύση του.

$$A\underline{v}^i = \underline{0},\ i = 1,\ldots,n \longrightarrow A(\sum_i^n \alpha_i \underline{v}^i) = \underline{0},\ \forall \alpha_i \in \mathbb{R}$$

## Άσκηση

Το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας.

## Άσκηση

Το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας.

<u>Λύση</u>

Έστω $i > j$,

$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \ldots a_{i,j}b_{j,j} + \ldots + a_{i,i}b_{i,j} + \ldots a_{i,n}b_{n,j}$

## Άσκηση

Το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας.

Λύση

Έστω $i > j$,

$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \ldots a_{i,j}b_{j,j} + \ldots + a_{i,i}b_{i,j} + \ldots a_{i,n}b_{n,j} = 0.$

# Ορισμοί

Ταυτοτικός Πίνακας $(I)$ έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιο και μηδενικά όλα τα εκτός κυρίας διαγωνίου στουχεία του. $(I_{i,j} = 0 \ \forall i \neq j, \quad I_{i,i} = 1 \ \forall i)$

Διαγώνιος Πίνακας $(D)$ έχει μηδενικά όλα τα εκτός κυρίας διαγωνίου στοίχεια του. $(D_{i,j} = 0, \ \forall i \neq j)$

Ανω(κάτω) Τριγωνικός Πίνακας $(U(L))$ Κάθε πίνακας που έχει μηδενικά όλα τα στοιχεία του κάτω(άνω) της κυρίας διαγωνίου στοιχεία του. $(U_{i,j}\left(U_{i,j}\right) = 0, \ \forall i > (<) j)$

Πίνακας Αντιμετάθεσης $(P)$ προκύπτει απο εναλλαγές γραμμών ενός ταυτοτικού πίνακα.

Θεμελειώδης Πίνακας $(E^{k,l}(p))$ ταυτοτικός πίνακας ο οποίος έχει το στοιχείο του στην θέση $k,l$ ίσο με $p$.

## Άσκηση

Περιγράψτε το γινόμενο (από δεξιά και από αριστερά) ενός πίνακα $A$ με

1. τον ταυτοτικό πίνακα $I$

## Άσκηση

Περιγράψτε το γινόμενο (από δεξιά και από αριστερά) ενός πίνακα $A$ με

1. τον ταυτοτικό πίνακα $I$ ο ίδιος ο πίνακας

## Άσκηση

Περιγράψτε το γινόμενο (από δεξιά και από αριστερά) ενός πίνακα $A$ με

1. τον ταυτοτικό πίνακα $I$ ο ίδιος ο πίνακας
2. έναν διαγώνιο πίνακα $D$

## Άσκηση

Περιγράψτε το γινόμενο (από δεξιά και από αριστερά) ενός πίνακα $A$ με

1. τον ταυτοτικό πίνακα $I$ ο ίδιος ο πίνακας
2. έναν διαγώνιο πίνακα $D$ η κάθε γραμμή (στήλη) του $A$ πολλαπλασιάζεται με το αντίστοιχο διαγώνιο στοιχείο του $D$
3. με τον πίνακα $P$ που προκύπτει από τον ταυτοτικό $I$ αν αντιμεταθέσουμε την $i$ με την $j$ γραμμή του.

## Άσκηση

Περιγράψτε το γινόμενο (από δεξιά και από αριστερά) ενός πίνακα $A$ με

1. τον ταυτοτικό πίνακα $I$ ο ίδιος ο πίνακας
2. έναν διαγώνιο πίνακα $D$ η κάθε γραμμή (στήλη) του $A$ πολλαπλασιάζεται με το αντίστοιχο διαγώνιο στοιχείο του $D$
3. με τον πίνακα $P$ που προκύπτει από τον ταυτοτικό $I$ αν αντιμεταθέσουμε την $i$ με την $j$ γραμμή του. ο πίνακας που προκύπτει από τον $A$ αν αντιμεταθέσουμε την $i$ με την $j$ γραμμή (στήλη) του.

# Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

# Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Ασκήσεις

Περιγράψτε το γινόμενο (απο δεξιά και απο αριστερά) ενός πίνακα $A$ με τον θεμελειώδη πίνακα $E^{k,l}(p)$ τέτοιον ώστε

$$E_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ p, & i = k\ , j = l; \\ 0, & \text{ειδάλως.} \end{cases}$$

# Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -p, & i = k\ , j = l; \\ 0, & \text{ειδάλως}. \end{cases} \quad A^{3,1} =$$

# Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -p, & i = k \ , j = l; \\ 0, & \text{ειδάλως.} \end{cases} \quad A^{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Ανάστροφος - Συμμετρικός Πίνακας

Ανάστροφος του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει απο τον $A$ αν κάνουμε τις στήλες γραμμές και τις γραμμές στήλες και συμβολίζεται με $A^T$.

# Ανάστροφος - Συμμετρικός Πίνακας

Ανάστροφος του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει απο τον $A$ αν κάνουμε τις στήλες γραμμές και τις γραμμές στήλες και συμβολίζεται με $A^T$.

$$A^T_{i,j} = A_{j,i} \; \forall i,j$$

# Ανάστροφος - Συμμετρικός Πίνακας

**Ανάστροφος** του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει απο τον $A$ αν κάνουμε τις στήλες γραμμές και τις γραμμές στήλες και συμβολίζεται με $A^T$.

$$A^T_{i,j} = A_{j,i} \ \forall i,j$$

**Συμμετρικός** πίνακας είναι Κάθε πίνακας που είναι ίσος με τον ανάστροφό του.

# Ανάστροφος - Συμμετρικός Πίνακας

Ανάστροφος του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει απο τον $A$ αν κάνουμε τις στήλες γραμμές και τις γραμμές στήλες και συμβολίζεται με $A^T$.

$$A^T_{i,j} = A_{j,i} \ \forall i,j$$

Συμμετρικός πίνακας είναι Κάθε πίνακας που είναι ίσος με τον ανάστροφό του.

$$A = A^T \Leftrightarrow a_{i,j} = a_{j,i}$$

# Παραδείγματα Συμμετρικών Πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

# Παραδείγματα Συμμετρικών Πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

# Παραδείγματα Συμμετρικών Πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

# Αντίστροφος - Αντιστρέψιμος Πίνακας

Αντίστροφος του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που συμβολίζουμε με $A^{-1}$, ο οποίος αν πολλαπλασιαθεί με τον $A$ μας δίνει τον ταυτοτικό πίνακα.

# Αντίστροφος - Αντιστρέψιμος Πίνακας

Αντίστροφος του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που συμβολίζουμε με $A^{-1}$, ο οποίος αν πολλαπλασιαθεί με τον $A$ μας δίνει τον ταυτοτικό πίνακα.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

# Αντίστροφος - Αντιστρέψιμος Πίνακας

Αντίστροφος του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που συμβολίζουμε με $A^{-1}$, ο οποίος αν πολλαπλασιαθεί με τον $A$ μας δίνει τον ταυτοτικό πίνακα.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Αντιστρέψιμος πίνακας είναι κάθε πίνακας που έχει αντίστροφο.

Αντίστροφος του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας που αναιρεί την δράση του εν λόγω πίνακα.

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$
- $D$ διαγώνιος πίνακας $\Rightarrow D^{-1}$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστροφα αντίστοιχα στοιχεία του $D$

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$
- $D$ διαγώνιος πίνακας $\Rightarrow D^{-1}$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστροφα αντίστοιχα στοιχεία του $D$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$
- $D$ διαγώνιος πίνακας $\Rightarrow D^{-1}$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστροφα αντίστοιχα στοιχεία του $D$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

- $P$ πίνακας αντιμετάθεσης $\Rightarrow P^{-1} =$

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$
- $D$ διαγώνιος πίνακας $\Rightarrow D^{-1}$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστροφα αντίστοιχα στοιχεία του $D$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

- $P$ πίνακας αντιμετάθεσης $\Rightarrow P^{-1} = P$.
- $E^{k,l}(p)$ θεμελειώδης πίνακας $\Rightarrow \left(E^{k,l}(p)\right)^{-1} =$

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$
- $D$ διαγώνιος πίνακας $\Rightarrow D^{-1}$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστροφα αντίστοιχα στοιχεία του $D$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

- $P$ πίνακας αντιμετάθεσης $\Rightarrow P^{-1} = P$.
- $E^{k,l}(p)$ θεμελειώδης πίνακας $\Rightarrow \left(E^{k,l}(p)\right)^{-1} = E^{k,l}(-p)$.

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$
- $D$ διαγώνιος πίνακας $\Rightarrow D^{-1}$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστροφα αντίστοιχα στοιχεία του $D$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

- $P$ πίνακας αντιμετάθεσης $\Rightarrow P^{-1} = P$.
- $E^{k,l}(p)$ θεμελειώδης πίνακας $\Rightarrow \left(E^{k,l}(p)\right)^{-1} = E^{k,l}(-p)$.

$$E^{3,1}(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

# Παραδείγματα Αντίστροφων Πινάκων

- $I^{-1} = I$
- $D$ διαγώνιος πίνακας $\Rightarrow D^{-1}$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστροφα αντίστοιχα στοιχεία του $D$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

- $P$ πίνακας αντιμετάθεσης $\Rightarrow P^{-1} = P$.
- $E^{k,l}(p)$ θεμελειώδης πίνακας $\Rightarrow \left(E^{k,l}(p)\right)^{-1} = E^{k,l}(-p)$.

$$E^{3,1}(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left(E^{3,1}(6)\right)^{-1} = E^{3,1}(-6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Υπολογισμός Αντίστροφου Πίνακα

Να υπολογισθεί ο αντίστροφος ενός δοθέντος πίνακα $A$

$$A\left(A^{-1}\right) = I \rightarrow A\underline{v}^j = \underline{e}^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

όπου $\underline{v}^j$ η $j$-στη στήλη του $A^{-1}$ και όπου $\underline{e}^j$ η $j$-στη στήλη του $I$.

Αλγόριθμος

1. Λύνω γιά $j = 1, \ldots, n$ τα γραμμικά συστήματα

$$A\underline{v}^j = \underline{e}^j$$

.

2. Τα $\underline{v}^j$ είναι οι αντίστοιχες στήλες του $A^{-1}$.