Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{w} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{w})$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{w} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{w})$
- $\underline{z} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{z} = \underline{z}$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{w} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{w})$
- $\underline{z} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{z} = \underline{z}$
- $\underline{x} + (-\underline{x}) = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{w} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{w})$
- $\underline{z} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{z} = \underline{z}$
- $\underline{x} + (-\underline{x}) = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$
- $t(\underline{x} + \underline{y}) = t\underline{x} + t\underline{y}$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{w} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{w})$
- $\underline{z} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{z} = \underline{z}$
- $\underline{x} + (-\underline{x}) = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$
- $t(\underline{x} + \underline{y}) = t\underline{x} + t\underline{y}$
- $(s + t)\underline{x} = s\underline{x} + t\underline{x}$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{w} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{w})$
- $\underline{z} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{z} = \underline{z}$
- $\underline{x} + (-\underline{x}) = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$
- $t(\underline{x} + \underline{y}) = t\underline{x} + t\underline{y}$
- $(s + t)\underline{x} = s\underline{x} + t\underline{x}$
- $s(t\underline{x}) = (st)\underline{x}$

Ιδιότητες

$\forall \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $s, t \in \mathbb{R}$, έχουμε.

- $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{w} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{w})$
- $\underline{z} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{z} = \underline{z}$
- $\underline{x} + (-\underline{x}) = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$
- $t(\underline{x} + \underline{y}) = t\underline{x} + t\underline{y}$
- $(s + t)\underline{x} = s\underline{x} + t\underline{x}$
- $s(t\underline{x}) = (st)\underline{x}$
- $1\underline{x} = \underline{x}$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}$$

Προσοχή $\underline{x} \cdot \underline{y} \in \mathbb{R}$

Πίνακας

Ορισμός - Πίνακας είναι ένα σύνολο αριθμών διατεταγμένων σε γραμμές και στήλες.
Συμβολισμός -

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Στοιχεία πίνακα: $a_{i,j} \in R, i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$

Πίνακας επί διάνυσμα

Ορισμός - Γινόμενο ενός πίνακα με ένα διάνυσμα είναι ένα άλλο διάνυσμα τα στοιχεία του οποίου είναι το εσωτερικό γινόμενο της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα με το διάνυσμα.

Πίνακας επί διάνυσμα

Ορισμός - Γινόμενο ενός πίνακα με ένα διάνυσμα είναι ένα άλλο διάνυσμα τα στοιχεία του οποίου είναι το εσωτερικό γινόμενο της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα με το διάνυσμα. Συμβολισμός - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow$

Πίνακας επί διάνυσμα

Ορισμός - Γινόμενο ενός πίνακα με ένα διάνυσμα είναι ένα άλλο διάνυσμα τα στοιχεία του οποίου είναι το εσωτερικό γινόμενο της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα με το διάνυσμα. Συμβολισμός - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$

$$Ab = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

Πίνακας επί διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,j} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \ldots a_{1,j}b_j + \ldots a_{1,n}b_n \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \ldots a_{2,j}b_j + \ldots a_{2,n}b_n \\ \vdots \\ a_{i,1}b_1 + a_{i,2}b_2 + \ldots a_{i,j}b_j + \ldots a_{i,n}b_n \\ \vdots \\ a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + \ldots a_{m,j}b_j + \ldots a_{m,n}b_n \end{bmatrix}$$

Πίνακας επί πίνακα

Ορισμός - Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ τότε το γινόμενο AB είναι ένας νέος πίνακας $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ το στοιχείο $c_{i,j}$ του οποίου είναι το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του A με την j στήλη του B.

Πίνακας επί πίνακα

Ορισμός - Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ τότε το γινόμενο AB είναι ένας νέος πίνακας $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ το στοιχείο $c_{i,j}$ του οποίου είναι το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του A με την j στήλη του B.

φιγς/μμμ1.πνγ

Πίνακας επί πίνακα

Ορισμός - Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ τότε το γινόμενο AB είναι ένας νέος πίνακας $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ το στοιχείο $c_{i,j}$ του οποίου είναι το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του A με την j στήλη του B.

φιγς/μμμ1.πνγ

φιγς/μμμ2.πνγ

Παρατηρήσεις

1. Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί σαν $A\underline{x} = \underline{b}$

Παρατηρήσεις

1. Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί σαν $A\underline{x} = \underline{b}$
2. Εν γένει $AB \neq BA$

Παρατηρήσεις

1. Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί σαν $A\underline{x} = \underline{b}$
2. Εν γένει $AB \neq BA$
3. Για να μπορέσω να πολλαπλασιάσω δύο πίνακες πρέπει το πλήθος των στηλών του πρώτου να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου.

Παρατηρήσεις

1. Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί σαν $A\underline{x} = \underline{b}$
2. Εν γένει $AB \neq BA$
3. Για να μπορέσω να πολλαπλασιάσω δύο πίνακες πρέπει το πλήθος των στηλών του πρώτου να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου.
4. $AI = IA = A$ όπου με I συμβολίζουμε τον ταυτοτικό πίνακα.

Πίνακας επί πίνακα

Αν $AB = C$ όπου A είναι ένας $m \times p$ πίνακας και όπου B ένας $p \times n$ πίνακας τότε

- Ο C είναι ένας $m \times n$ πίνακας
- Το στοιχείο του πίνακα C στην θέση στην θέση i, j είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της i-στης γραμμής του A με την j-στη στήλη του B.
- Η j-στη στήλη του πίνακα C είναι ίση με το γινόμενο του πίνακα A με την j-στη στήλη του B
- Η i-στη γραμμή του πίνακα C είναι ίση με το γινόμενο της i-στης γραμμής του πίνακα A με τον πίνακα B

Πίνακας επί διάνυσμα

$$
\begin{aligned}
A\underline{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 2\cdot 0 - 1\cdot 3 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Πίνακας επί πίνακα

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 4\cdot 1 - 2\cdot 2 & 0\cdot 1 + 4\cdot(-1) - 2\cdot 3 \\ -4\cdot 0 - 3\cdot 1 + 0\cdot 2 & -4\cdot 1 - 3\cdot(-1) + 0\cdot 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+4-4 & 0-4-6 \\ 0-3+0 & -4+3+0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση

Εστω ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας A. Άν ισχύει ότι $AB = BA$ δώστε τις συνθήκες κάτω απο τις οποιές ο πίνακας B είναι και αυτός διαγώνιος. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση

Εστω ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας A. Άν ισχύει ότι $AB = BA$ δώστε τις συνθήκες κάτω απο τις οποιές ο πίνακας B είναι και αυτός διαγώνιος. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση
$(AB)_{i,j} = a_{ii}b_{ij}$, $(BA)_{i,j} = b_{i,j}a_{j,j}$ άρα πρέπει $a_{ii}b_{ij} = b_{i,j}a_{j,j}$ δηλαδή $b_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ αν $a_{ii} \neq a_{j,j}$.

Θεώρημα

Αν $\underline{v}$ είναι λύση ενός συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ τότε και το $\boldsymbol{\alpha}\underline{v}$ είναι λύση του ίδιου συστήματος όπου $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Θεώρημα

Αν $\underline{v}$ είναι λύση ενός συστήματος $A\underline{x}=\underline{0}$ τότε και το $\alpha\underline{v}$ είναι λύση του ίδιου συστήματος όπου α είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη

$\underline{v}$ λύση του $A\underline{x}=\underline{0}$

Θεώρημα

Αν $\underline{v}$ είναι λύση ενός συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ τότε και το $\mathbf{\alpha}\underline{v}$ είναι λύση του ίδιου συστήματος όπου $\mathbf{\alpha}$ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη

$\underline{v}$ λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow A\underline{v} = \underline{0}$

Θεώρημα

Αν $\underline{v}$ είναι λύση ενός συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ τότε και το **α**$\underline{v}$ είναι λύση του ίδιου συστήματος όπου **α** είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη

$\underline{v}$ λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow A\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \alpha A\underline{v} = \underline{0}$

Θεώρημα

Αν $\underline{v}$ είναι λύση ενός συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ τότε και το $\alpha\underline{v}$ είναι λύση του ίδιου συστήματος όπου α είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη

$\underline{v}$ λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow A\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \alpha A\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow A\alpha\underline{v} = \underline{0}$

Θεώρημα

Αν $\underline{v}$ είναι λύση ενός συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ τότε και το $\alpha\underline{v}$ είναι λύση του ίδιου συστήματος όπου α είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη

$\underline{v}$ λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow A\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \alpha A\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow A\alpha\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow A(\alpha\underline{v}) = \underline{0}$

Θεώρημα

Αν $\underline{v}$ είναι λύση ενός συστήματος $A\underline{x} = \underline{0}$ τότε και το $\alpha\underline{v}$ είναι λύση του ίδιου συστήματος όπου α είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη

$\underline{v}$ λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow A\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \alpha A\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow A\alpha\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow A(\alpha\underline{v}) = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha\underline{v}$ είναι λύση του $A\underline{x} = \underline{0}$.