

Γιατί Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Είναι χρήσιμη
- ▶ Είναι όμορφη
- ▶ Είναι απαραίτητη

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα; (από την Βικιπαίδεια)

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα; (από την Βικιπαίδεια)

Η γραμμική άλγεβρα είναι τομέας των μαθηματικών και της άλγεβρας ο οποίος ασχολείται με τη μελέτη διανυσμάτων, διανυσματικών χώρων, γραμμικών απεικονίσεων και συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Η αναλυτική γεωμετρία αποτελεί έκφρασή της και η ίδια αποτελεί κεντρικό συνδετικό ιστό των σύγχρονων μαθηματικών, ιδιαίτερος μέσω της αφηρημένης έννοιας του διανυσματικού χώρου η οποία μπορεί να μοντελοποιήσει πολλά διαφορετικά προβλήματα που συναντώνται στην πράξη.

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b,$$

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b, \quad cy + dx = f$$

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b, \quad cy + dx = f$$

- ▶ Γραμμή στις τρεις διαστάσεις:

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b, \quad cy + dx = f$$

- ▶ Γραμμή στις τρεις διαστάσεις:

$$cy + dx + ez = f,$$

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b, \quad cy + dx = f$$

- ▶ Γραμμή στις τρεις διαστάσεις:

$$cy + dx + ez = f, \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = f$$

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b, \quad cy + dx = f$$

- ▶ Γραμμή στις τρεις διαστάσεις:

$$cy + dx + ez = f, \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = f$$

- ▶ Γραμμή στις n διαστάσεις:

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b, \quad cy + dx = f$$

- ▶ Γραμμή στις τρεις διαστάσεις:

$$cy + dx + ez = f, \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = f$$

- ▶ Γραμμή στις n διαστάσεις:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = f$$

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

- ▶ Γραμμή στο επίπεδο:

$$y = ax + b, \quad cy + dx = f$$

- ▶ Γραμμή στις τρεις διαστάσεις:

$$cy + dx + ez = f, \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = f$$

- ▶ Γραμμή στις n διαστάσεις:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = f$$

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

Γραμμές στις n διαστάσεις:

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

Γραμμές στις n διαστάσεις:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = f_1$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = f_2$$

⋮

Γραμμές στις n διαστάσεις:

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

Γραμμές στις n διαστάσεις:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = f_1$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = f_2$$

⋮

Γραμμές στις n διαστάσεις:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = f_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = f_2$$

⋮

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = f_i$$

⋮

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = f_n$$

Τι είναι Γραμμική Άλγεβρα;

Γραμμές στις n διαστάσεις:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = f_1$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = f_2$$

⋮

Γραμμές στις n διαστάσεις:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = f_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = f_2$$

⋮

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = f_i$$

⋮

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = f_n$$

Γραμμική Άλγεβρα είναι

κυρίως η μελέτη του παρακάτω συνόλου εξισώσεων:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = f_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = f_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = f_i$$

$$\vdots$$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = f_m$$

Γραμμική Άλγεβρα είναι

κυρίως η μελέτη του παρακάτω συνόλου εξισώσεων:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = f_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = f_2$$

⋮

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = f_i$$

⋮

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = f_m$$

Το παραπάνω λέγεται σύστημα αλγεβρικών γραμμικών εξισώσεων.

Χαρακτηριστικά Γραμμικής Άλγεβρας

- ▶ Εύκολη

Χαρακτηριστικά Γραμμικής Άλγεβρας

- ▶ Εύκολη
- ▶ Όμορφη

Χαρακτηριστικά Γραμμικής Άλγεβρας

- ▶ Εύκολη
- ▶ Όμορφη
- ▶ Χρήσιμη

Χαρακτηριστικά Γραμμικής Άλγεβρας

- ▶ Εύκολη
- ▶ Όμορφη
- ▶ Χρήσιμη
- ▶ Σημαντική

Εξίσωση ευθείας γραμμής

φίλς/ΛινεΕχνα.πδφ

Εξίσωση ευθείας γραμμής

φίλς/ΛινεΕχνα.πδφ

$$y = mx + b$$

Εξίσωση ευθείας γραμμής

φίλς/ΛινεΕχνα.πδφ

$$y = mx + b$$



$$y - mx = b$$

Εξίσωση ευθείας γραμμής

φίγς/ΛινεΕχνΒ.πδφ

$$y = mx + b$$

↕

$$y - mx = b$$

↕

$$x_2 - mx_1 = b$$

Εξίσωση ευθείας γραμμής

φίλγς/ΛινεΕχνΒ.πδφ

$$y = mx + b$$

↕

$$y - mx = b$$

↕

$$x_2 - mx_1 = b$$

↕

$$-mx_1 + x_2 = b$$

Εξίσωση ευθείας γραμμής

φίγς/ΛινεΕχνΒ.πδφ

$$y = mx + b$$

⇕

$$y - mx = b$$

⇕

$$x_2 - mx_1 = b$$

⇕

$$-mx_1 + x_2 = b$$

⇓ (⇑ $a_2 \neq 0$)

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b'$$

Γραμμική εξίσωση ως προς τις εξής μεταβλητές x_1, \dots, x_n :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

όπου οι συντελεστές a_1, \dots, a_n και ενδεχομένως το b είναι γνωστά εκ των προτέρω.

Γραμμική εξίσωση ως προς τις εξής μεταβλητές x_1, \dots, x_n :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

όπου οι συντελεστές a_1, \dots, a_n και ενδεχομένως το b είναι γνωστά εκ των προτέρω.

Λύση είναι μια λίστα αριθμών s_1, \dots, s_n τέτοιων ώστε

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$$

Γραμμική εξίσωση ως προς τις εξής μεταβλητές x_1, \dots, x_n :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

όπου οι συντελεστές a_1, \dots, a_n και ενδεχομένως το b είναι γνωστά εκ των προτέρω.

Λύση είναι μια λίστα αριθμών s_1, \dots, s_n τέτοιων ώστε

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$$

Παράδειγμα 1: Για την εξίσωση της γραμμής $a_1x_1 + a_2x_2 = b$:

Το ζεύγος s_1, s_2 είναι λύση \iff το σημείο (s_1, s_2) βρίσκεται πάνω στην γραμμή.

Παράδειγμα 2 Υπολογισμός του τελικού βαθμού στο μάθημα:

- ▶ x_1 ο βαθμός της τελικής εξέτασης μου
- ▶ x_2 ο μέσος όρος των βαθμών των εξετάσεων προόδου μου
- ▶ x_3 ο μέσος όρος των βαθμών των τεστ μου
- ▶ x_4 ο βαθμός συμμετοχής στο μάθημα

Παράδειγμα 2 Υπολογισμός του τελικού βαθμού στο μάθημα:

- ▶ x_1 ο βαθμός της τελικής εξέτασης μου
- ▶ x_2 ο μέσος όρος των βαθμών των εξετάσεων προόδου μου
- ▶ x_3 ο μέσος όρος των βαθμών των τεστ μου
- ▶ x_4 ο βαθμός συμμετοχής στο μάθημα

Γραμμική εξίσωση

$$0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 + 0.05x_4 = 7$$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων:

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Λύση του συστήματος είναι μια λίστα

$$s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$$

η οποία αποτελεί λύση **όλων των m** εξισώσεων ταυτόχρονα.

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Λύση του συστήματος είναι μια λίστα

$$s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$$

η οποία αποτελεί λύση **όλων των m** εξισώσεων ταυτόχρονα.

Δηλαδή, **όλες οι m** εξισώσεις αληθεύουν όταν

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n.$$

Παράδειγμα

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Παράδειγμα

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Λύση \Leftrightarrow η τομή των δύο γραμμών:

φίγς/ΛινεΠαιρΑ.πδφ

Παράδειγμα

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Λύση \Leftrightarrow η τομή των δύο γραμμών:

φίγς/ΛινεΠαιρΑ.πδφ

Παράδειγμα:

$$1x_1 + 2x_2 = 3$$

$$2x_1 + 1x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (1, 1)$$

Άλλες πιθανότητες:

φιγς/ΛινεΠαιρB.πδφ

Άλλες πιθανότητες:

φιγς/ΛινεΠαιρB.πδφ

$$1x_1 + 2x_2 = 3$$

$$1x_1 + 2x_2 = 4$$

ασυνέπεια

Άλλες πιθανότητες:

φιγς/ΛινεΠαιρB.πδφ

$$1x_1 + 2x_2 = 3$$

$$1x_1 + 2x_2 = 4$$

ασυνέπεια

$$1x_1 + 2x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 6$$

αοριστία

Υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα

Υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα

- ▶ Δεν υπάρχει καμία λύση

Υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα

- ▶ Δεν υπάρχει καμία λύση
- ▶ Υπάρχει μια μοναδική λύση

Υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα

- ▶ Δεν υπάρχει καμία λύση
- ▶ Υπάρχει μια μοναδική λύση
- ▶ Υπάρχει απειρία λύσεων

Υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα

- ▶ Δεν υπάρχει καμία λύση
- ▶ Υπάρχει μια μοναδική λύση
- ▶ Υπάρχει απειρία λύσεων

Στόχοι:

- ▶ Μελέτησε το ποιό ενδεχόμενο ισχύει.

Υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα

- ▶ Δεν υπάρχει καμία λύση
- ▶ Υπάρχει μια μοναδική λύση
- ▶ Υπάρχει απειρία λύσεων

Στόχοι:

- ▶ Μελέτησε το ποιό ενδεχόμενο ισχύει.
- ▶ Δώσε την λύση αν είναι μοναδική.

Υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα

- ▶ Δεν υπάρχει καμία λύση
- ▶ Υπάρχει μια μοναδική λύση
- ▶ Υπάρχει απειρία λύσεων

Στόχοι:

- ▶ Μελέτησε το ποιό ενδεχόμενο ισχύει.
- ▶ Δώσε την λύση αν είναι μοναδική.
- ▶ Βρές έναν τρόπο να περιγράψεις όλες τις λύσεις όταν αυτές είναι πολλές.

Η κρίσιμη πληροφορία βρίσκεται στα a_{ij}, b_i .

Η κρίσιμη πληροφορία βρίσκεται στα a_{ij}, b_i .

Άρα τοποθέτησε όλους αυτούς τους αριθμούς σε έναν πίνακα

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Η κρίσιμη πληροφορία βρίσκεται στα a_{ij}, b_i .

Άρα τοποθέτησε όλους αυτούς τους αριθμούς σε έναν πίνακα

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$m \times n$ πίνακας συντελεστών

Η κρίσιμη πληροφορία βρίσκεται στα a_{ij}, b_i .

Άρα τοποθέτησε όλους αυτούς τους αριθμούς σε έναν πίνακα

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$m \times n$ πίνακας συντελεστών

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

$m \times (n + 1)$ επαυξημένος πίνακας

Μελετήστε το σύστημα

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1 + x_3 = 3$$