Παράδειγμα

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 6x_4 &= 8\\
2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1\\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3\\
-x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 4
\end{aligned}$$

Επαυξημένος πίνακας:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 6 & 8\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Γενικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots \ + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Σε μορφή πίνακα

$$Ax = b$$

όπου $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$
είναι ο πίνακας των συντελεστών και το δεξιό μέρος

Επαυξημένος πίνακας:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \widetilde{A} = [A \ b]$$

Απαλοιφή του 1ου αγνώστου

$$\widetilde{A}^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1,i-1}^{(1)} & a_{1i}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2,i-1}^{(1)} & a_{2i}^{(1)} & & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1}^{(1)} & a_{i-1,2}^{(1)} & a_{i-1,3}^{(1)} & \ldots & a_{i-1,i-1}^{(1)} & a_{i-1,i}^{(1)} & \ldots & a_{i-1,n}^{(1)} & a_{i-1,n+1}^{(1)} \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & a_{i3}^{(1)} & \ldots & a_{i,i-1}^{(1)} & a_{ii}^{(1)} & \ldots & a_{in}^{(1)} & a_{i,n+1}^{(1)} \\ a_{i+1,1}^{(1)} & a_{i+1,2}^{(1)} & a_{i+1,3}^{(1)} & \ldots & a_{i+1,i-1}^{(1)} & a_{i+1,i}^{(1)} & \ldots & a_{i+1,n}^{(1)} & a_{i+1,n+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{n,i-1}^{(1)} & a_{ni}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\left(E_2 - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} E_1\right) \to E_2$$

Για $j = 2, \ldots, n$

$$\left(E_3 - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} E_1\right) \to E_3$$

$$m_{j1} = a_{j1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$$

$$\left(E_j - m_{j1} E_1\right) \to E_j$$

. . . .

$$\left(E_n - \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} E_1\right) \to E_n$$

τέλος

Απαλοιφή του 2ου αγνώστου

$$\widetilde{A}^{(2)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1,i-1}^{(1)} & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2,i-1}^{(2)} & a_{2i}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,2}^{(2)} & a_{i-1,3}^{(2)} & \dots & a_{i-1,i-1}^{(2)} & a_{i-1,i}^{(2)} & \dots & a_{i-1,n}^{(2)} & a_{i-1,n+1}^{(2)} \\ 0 & a_{i2}^{(2)} & a_{i3}^{(2)} & \dots & a_{i,i-1}^{(2)} & a_{ii}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} & a_{i,n+1}^{(2)} \\ 0 & a_{i+1,2}^{(2)} & a_{i+1,3}^{(2)} & \dots & a_{i+1,i-1}^{(2)} & a_{i+1,i}^{(2)} & \dots & a_{i+1,n}^{(2)} & a_{i+1,n+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{n,i-1}^{(2)} & a_{ni}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

για $j=3,\dots,n$

$m_{j2}=a_{j2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$

$\left(E_j - m_{j2}E_2\right) \rightarrow E_j$

τέλος

Απαλοιφή του iστου αγνώστου

$$\widetilde{A}^{(i)}=\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1,i-1}^{(1)} & a_{1i}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2,i-1}^{(2)} & a_{2i}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_{i-1,i-1}^{(i-1)} & a_{i-1,i}^{(i-1)} & \ldots & a_{i-1,n}^{(i-1)} & a_{i-1,n+1}^{(i-1)} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{ii}^{(i)} & \ldots & a_{in}^{(i)} & a_{i,n+1}^{(i)} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{i+1,i}^{(i)} & \ldots & a_{i+1,n}^{(i)} & a_{i+1,n+1}^{(i)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{ni}^{(i)} & \ldots & a_{nn}^{(i)} & a_{n,n+1}^{(i)}
\end{bmatrix}$$

για $j=i+1,\ldots,n$

$m_{ji}=a_{ji}^{(i)}/a_{ii}^{(i)}$

$\left(E_j-m_{ji}E_i\right)\rightarrow E_j$

τέλος

Σημειώστε: Αν $a_{ii}^{(i)}=0$ τότε η iστη εξίσωση ενναλάσεται με μια απο τις επόμενες εξισώσεις ως εξής: $E_i \leftrightarrow E_p$ όπου $p \geq i$ είναι ο (μικρότερος) ακέραιος για τον οποίο έχουμε $a^{(i)} \neq 0$

$$
\widetilde{A}^{(n)} = \begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1,i-1}^{(1)} & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2,i-1}^{(2)} & a_{2i}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1,i-1}^{(i-1)} & a_{i-1,i}^{(i-1)} & \dots & a_{i-1,n}^{(i-1)} & a_{i-1,n+1}^{(i-1)} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{ii}^{(i)} & \dots & a_{in}^{(i)} & a_{i,n+1}^{(i)} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{i+1,n}^{(i+1)} & a_{i+1,n+1}^{(i+1)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)}
\end{bmatrix}
$$

Επίλυση άνω τριγωνικού συστήματος

$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$

Για $i = n-1, .., 1$

$$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right) / a_{ii}^{(i)}$$

τέλος

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής (1ο Βήμα)

Απαλοιφή 1ου αγνώστου απο $i = 2, \ldots, n$ εξίσωση

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής (1ο Βήμα)

Απαλοιφή 1ου αγνώστου απο $i = 2, \ldots, n$ εξίσωση

$$a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής (1ο Βήμα)

Απαλοιφή 1ου αγνώστου απο $i = 2, \ldots, n$ εξίσωση

$$a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

πολλαπλασιαστής $p = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$, οδηγός $= a_{1,1}$,

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής (1ο Βήμα)

Απαλοιφή 1ου αγνώστου απο $i = 2, \ldots, n$ εξίσωση

$$a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

πολλαπλασιαστής $p = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$, οδηγός $= a_{1,1}$,

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - p \cdot a_{1,j}, \quad j = 2, \ldots, n$$

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής ($k=1,\ldots,n-1$ Βήμα)

Απαλοιφή k αγνώστου απο $i=k+1,\ldots,n$ εξίσωση

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής ($k = 1, \ldots, n-1$ Βήμα)

Απαλοιφή k αγνώστου απο $i = k+1, \ldots, n$ εξίσωση

$$a_{k,k}x_k + \cdots + a_{k,j}x_j + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k$$

$$a_{i,k}x_k + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής ($k=1,\ldots,n-1$ Βήμα)

Απαλοιφή k αγνώστου απο $i=k+1,\ldots,n$ εξίσωση

$$a_{k,k}x_k + \cdots + a_{k,j}x_j + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k$$

$$a_{i,k}x_k + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

πολλαπλασιαστής $p = \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$, οδηγός $= a_{k,k}$, Ο αλγόριθμος της απαλοιφής ($k = 1, \ldots, n-1$ Βήμα)

Απαλοιφή k αγνώστου απο $i = k+1, \ldots, n$ εξίσωση

$$a_{k,k}x_k + \cdots + a_{k,j}x_j + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k$$
$$a_{i,k}x_k + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

πολλαπλασιαστής $p = \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$, οδηγός $= a_{k,k}$,

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - p \cdot a_{k,j}, \quad j = k+1, \ldots, n$$

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής (χωρίς εναλλαγές γραμμών)

Για $k = 1,\ldots,n-1$ (τα βήματα της απαλοιφής)
.   Για $i = k+1,\ldots,n$ (οι υπόλοιπες εξισώσεις)
. $p = a_{i,k} / a_{k,k}$
.   Για $j = k+1,\ldots,n$ (συντ. υπολοίπων αγνώστων)
. $a_{i,j} = a_{i,j} - p \cdot a_{k,j}$
. $b_i = b_i - p \cdot b_k$

Ερωτήσεις

1. Πόσες περίπου πράξεις εκτελούνται στην απαλοιφή ενός συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους.

Ερωτήσεις

1. Πόσες περίπου πράξεις εκτελούνται στην απαλοιφή ενός συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους.
2. Μετατρέψτε τον παραπάνω αλγόριθμο έτσι ώστε αυτός να εκμεταλεύεται κατάλληλα την μη-μηδενικη δομή ενός συστήματος του οποίου οι συντελεστές των αγνώστων ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη όπου k ακέραιος θετικός αριθμός μικρότερος του n.

$$a_{i,j} = 0, \ \forall i,j: \ |i-j| > k$$

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής (χωρίς εναλλαγές γραμμών)

Για $k = 1, \ldots, n-1$ (τα βήματα της απαλοιφής)
. Για $i = k+1, \ldots, n$ (οι υπόλοιπες εξισώσεις)
. $p = a_{i,k} / a_{k,k}$
. Για $j = k+1, \ldots, n$ (συντ. υπολοίπων αγνώστων)
. $a_{i,j} = a_{i,j} - p \cdot a_{k,j}$
. $b_i = b_i - p \cdot b_k$

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
2. αν $a_{k,k} = 0$ ψάχνεις για ένα στοιχείο στην υποστήλη κάτω απο το οδηγό στοιχείο

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
2. αν $a_{k,k} = 0$ ψάχνεις για ένα στοιχείο στην υποστήλη κάτω απο το οδηγό στοιχείο
   2.1 αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο (έστω το $a_{s,k}$) το κάνεις οδηγό στοιχείο αλλάζοντας την σειρά των εξισώσεων και συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
2. αν $a_{k,k} = 0$ ψάχνεις για ένα στοιχείο στην υποστήλη κάτω απο το οδηγό στοιχείο
   - 2.1 αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο (έστω το $a_{s,k}$) το κάνεις οδηγό στοιχείο αλλάζοντας την σειρά των εξισώσεων και συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
   - 2.2 αν δεν υπάρχει τότε προχωράς στο επόμενο βήμα της απαλοιφής

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

οδηγά στοιχεία τα $2, 0, 0, 4,$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

οδηγά στοιχεία τα $2, 0, 0, 4$,
λύση η $x_4 = 1/2, x_3 = s, x_2 = t, x_1 = 2 - t + s/2 - 3/2$.

Άσκηση

Άλλαξε μια ή περισσότερες τιμές στον αρχικό πίνακα έτσι ώστε το σύστημα να

1. έχει μόνον μια λύση.
2. μην έχει καμία λύση.

Αλγόριθμος της απαλοιφής χωρίς οδήγηση (εναλλαγές γραμμών)

Για $k = 1, \ldots, n-1$ (τα βήματα της απαλοιφής)
. Για $i = k+1, \ldots, n$ (οι υπόλοιπες εξισώσεις)
. $p = a_{i,k} / a_{k,k}$
. Για $j = k+1, \ldots, n$ (συντελ. υπολοίπων αγνώστων)
. $a_{i,j} = a_{i,j} - p \cdot a_{k,j}$
. $b_i = b_i - p \cdot b_k$

Η απαλοιφή με χρώματα

φιγς/γεπιςτυρε.πδφ

Δεν χρησιμοποιούνται, χρησιμοποιούνται, υπολογίζονται

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
2. αν $a_{k,k} = 0$ ψάχνεις για ένα στοιχείο στην υποστήλη κάτω απο το οδηγό στοιχείο

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
2. αν $a_{k,k} = 0$ ψάχνεις για ένα στοιχείο στην υποστήλη κάτω απο το οδηγό στοιχείο
   2.1 αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο (έστω το $a_{s,k}$) το κάνεις οδηγό στοιχείο αλλάζοντας την σειρά των εξισώσεων και συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά

Οδήγηση

πριν ξεκινήσεις κάποιο (έστω κ) βήμα της απαλοιφής

1. αν $a_{k,k} \neq 0$ συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
2. αν $a_{k,k} = 0$ ψάχνεις για ένα στοιχείο στην υποστήλη κάτω απο το οδηγό στοιχείο
   2.1 αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο (έστω το $a_{s,k}$) το κάνεις οδηγό στοιχείο αλλάζοντας την σειρά των εξισώσεων και συνεχίζεις την απαλοιφή κανονικά
   2.2 αν δεν υπάρχει τότε προχωράς στο επόμενο βήμα της απαλοιφής

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

οδηγά στοιχεία τα $2, 0, 0, 4$,

Παράδειγμα με μηδενικό οδηγό

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

οδηγά στοιχεία τα $2, 0, 0, 4$,
λύση η $x_4 = 1/2, x_3 = s, x_2 = t, x_1 = 2 - t + s/2 - 3/2$.

Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης

Κάθε σύστημα έχει μοναδική λύση ανν $a_{i,i}^{(i)} \neq 0 \; \forall i$ όπου $a_{i,i}^{(i)}$ είναι το i-στο διαγώνιο στοιχείο μετά την διαδικασία της απαλοιφής με οδήγηση.

Ασκήσεις

1. Άλλαξε μια ή περισσότερες τιμές στον παραπάνω αρχικό πίνακα έτσι ώστε το σύστημα να (α) έχει μόνον μια λύση και (β) να μην έχει καμία λύση.
2. Για ποιές τιμές της παραμέτρου $t \in \mathrm{R}$ έχει λύση το παρακάτω σύστημα;

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ tx_1 + 2tx_2 + 2x_3 &= b_2 \\ (t+1)x_1 + 2tx_3 &= b_3 \end{aligned}$$

3. Υπολογίστε την λύση του παραπάνω συστήματος αν $b_1 = 3$, $b_2 = 3t + 2$ και $b_3 = 3t + 1$.
4. Έχει το παρακάτω σύστημα λύση;

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 10 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

Διανύσματα και Πίνακες

$$
\begin{aligned}
x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 + x_3 + x_4 &= 4 \\
-x_1 + x_2 - x_4 &= 2 \\
2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

Διανύσματα και Πίνακες

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Διανύσματα και Πίνακες

$$
\begin{aligned}
x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 + x_3 + x_4 &= 4 \\
-x_1 + x_2 - x_4 &= 2 \\
2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}
$$

Διανύσματα και Πίνακες

$$
\begin{aligned}
x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1\\
x_1 + x_3 + x_4 &= 4\\
-x_1 + x_2 - x_4 &= 2\\
2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
$$

Διανύσματα

Ορισμός - Διάνυσμα είναι ένα σύνολο αριθμών διατεταγμένων σε μια σειρά.

Συμβολισμός -

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

Στοιχεία διανύσματος - x_i είναι η i-στη συνιστώσα του διανύσματος $\underline{x}$.

Πράξεις με διανύσματα

$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \underline{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Γραμμικός συνδοιασμός διανυσμάτων

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix};$$

Παραδείγματα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}; \qquad -1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}; \qquad -1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$$

$$3\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - 7\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} =$$

Παραδείγματα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}; \qquad -1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$$

$$3\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-7\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3\cdot1-7\cdot0+2\cdot1\\3\cdot2-7\cdot2+2\cdot(-1)\\3\cdot3-7\cdot4+2\cdot0\end{bmatrix}=$$

Παραδείγματα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}; \qquad -1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$$

$$3\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-7\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3\cdot1-7\cdot0+2\cdot1\\3\cdot2-7\cdot2+2\cdot(-1)\\3\cdot3-7\cdot4+2\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-10\\-19\end{bmatrix}$$