Διαφορικές Εξισώσεις — Τελική Εξέταση — 13 Ιουνίου 2013

Ονοματεπώνυμο: ______________________

1. Δώστε την λύση της εξίσωσης $y' + 8y = 1 + e^{-6t}$.

   $\frac{1}{8} + \frac{1}{2}e^{-6t} - \frac{5}{8}e^{-8t}$.

2. Κυκλώστε όποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων πιστεύετε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $y'' + y' - 2y = 0$.

   e^{-3x} και e^{2x}, e^{-2x} και e^{3x}, e^{-x} και e^{6x}, e^{-6x} και e^{x}.

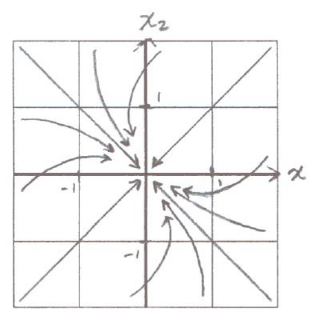
3. Έστω $y_1(t)$ μια λύση της γραμμικής μη-ομογενούς εξίσωσης $ay'' + by' + cy = g(t)$ και $y_2(t)$ μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $ay'' + by' + cy = 0$. Κυκλώστε όποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις πιστεύετε ότι είναι λύσεις της μη-ομογενούς εξίσωσης.

   $y_1(t) + y_2(t)$ $\surd$, $2y_1(t)$, $2y_2(t)$, $2y_1(t) + y_2(t)$, $y_1(t) + 2y_2(t)$ $\surd$.

4. Κυκλώστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις πιστεύετε ότι αποτελούν ολοκληρωτικό παράγοντα της εξίσωσης $xy' + y = 3xy$.

   $\frac{e^{3x}}{x}$, $\frac{x^3}{e^{3x}}$, x, e^{-3x}, e^{3x}, $\frac{3x}{e^{x}}$, $\frac{1}{3x}$, $\frac{x}{e^{3x}}$ $\surd$, $3x^2$, $\ln(x)$.

5. Κυκλώστε το διάνυσμα των συναρτήσεων που αντιστοιχεί στο παράπλευρο γράφημα το οποίο παριστά το διάγραμμα φάσης της γενικής λύσης ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.



   $c_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{-3t}$, $c_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{3t}$, $c_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{-3t}$,
   $c_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{3t}$, $c_1 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{-3t}$ $\surd$, $c_1 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{3t}$,
   $c_1 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{-3t}$, $c_1 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{3t}$.

6. Συνδέουμε ένα σωματίδιο μάζας $\frac{1}{2}kg$ στο άκρο ενός ελατηρίου το οποίο επιμηκύνεται κατά $10m$ λόγω της επίδρασης μιας δύναμης $100N$ και το θέτουμε σε κίνηση με αρχική θέση $x_0 = 1m$ και αρχική ταχύτητα $u_0 = -5m/s$. Κυκλώστε όποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις πιστεύετε ότι δίνουν (κατά προσέγγιση) την θέση του σωματιδίου.

   $\frac{5}{\sqrt{2}}\cos(10t - 0,4636)$, $\frac{5}{\sqrt{2}}\cos(10t - 5,8195)$,
   $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cos(10t - 6,7468)$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cos(10t - 0,4636)$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cos(10t - 5,8195)$ $\surd$.

7. Κυκλώστε όσες απο τις παρακάτω συναρτήσεις πιστεύετε ότι είναι λύσεις μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης της οποίας οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $2, -4, 0$ (με πολλαπλότητα 2) και $2 \pm \imath$ (με πολλαπλότητα 2).

   $c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + e^{4x}(c_4 + c_5 \cos(2x) + c_6 \sin(2x))$,
   $c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + e^{2x}(c_4 + c_5 \cos(4x) + c_6 \sin(4x))$,
   $c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + e^{2x}(c_4 + c_5 \cos(4x) + c_6 \sin(4x) + x(c_7 \cos(4x) + c_8 \sin(4x))$ $\checkmark$,
   $c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + e^{4x}(c_4 + c_5 \cos(2x) + c_6 \sin(2x) + x(c_7 \cos(2x) + c_8 \sin(2x))$,
   $c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + c_4 + c_5 \cos(4x) + c_6 \sin(4x)) + x(c_7 \cos(4x) + c_8 \sin(4x))$,
   $c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + c_4 + c_5 \cos(2x) + c_6 \sin(4x)) + x(c_7 \cos(2x) + c_8 \sin(4x))$.

8. Υπολογίστε την γενικευμένη λύση $u(x,y,z)$ της εξίσωσης $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

   Έστω $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

   $$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y)Z(z) + X(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} Z(z) + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

   $$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

   Συνεπώς υπάρχουν σταθερές a, b τέτοιες ώστε

   $$X''(x) - aX(x) = 0,\ Y''(y) - bY(y) = 0,\ Z''(z) + (a+b)Z(z) = 0$$

   οπότε $u(x,y,z) = c e^{\pm\sqrt{a}x} e^{\pm\sqrt{b}x} e^{\pm\imath\sqrt{a+b}x}$

9. Εξετάστε αν η $x^2 y'' + x^2 y' + y = 0$ έχει μη-τριμμένη λύση της μορφής $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

   $$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

   $$c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n(n-1)+1)c_n + (n-1)c_{n-1}] x^n = 0$$

10. Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς Λαπλάς και συναρτήσεις Χέβισάιντ για να υπολογίσετε την λύση του παρακάτω προβλήματος. (Γνωρίσουμε ότι $\mathscr{L}(C) = \frac{C}{s}$ και $\mathscr{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.)

   $$y'' + 4y = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi, \\ 1, & \pi \le t < 2\pi, \\ 0, & 2\pi \le t. \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

   $$s^2 Y - s + 4Y = \frac{1}{s}(e^{-\pi} - e^{-2\pi})$$

   $$Y(s) = \frac{e^{-\pi}}{s(s^2+4))} - \frac{e^{-2\pi}}{s(s^2+4))} + \frac{s}{s^2+4}$$

   $$y(t) = \cos 2t + \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - \cos 2t), & \pi \le t < 2\pi, \\ 0, & \text{ειδάλως} \end{cases}$$