1. Χρησιμοποιείστε μετασχηματισμούς Laplace για να υπολογίσετε την λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών.

$$x'' = -6x + 4y, \quad , y' = 5x, \qquad x(0) = 6, \quad x'(0) = -6, \quad y(0) = 6.$$

2. Δώστε την λύση του παρακάτω συστήματος.

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Βρείτε τιμές των παραμέτρων c_0, c_1, c_2, c_3 τέτοιες σώστε η συνάρτηση $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$ να είναι λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών.

$$y'' + (x+1)y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 3.$$

4. Δώστε το $\lim_{t\to\infty} x(t)$ εαν $\frac{dx}{dt} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

5. Δώστε την λύση του παρακάτω προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t = & \quad u_{xx} + \gamma, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = & \quad 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = & \quad \alpha, & t > 0, \\ u(1,t) = & \quad \beta, & t > 0. \end{aligned}$$

όπου α, β και γ δοθείσες θετικές σταθερές. (Υπόδειξη: $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$.)

6. Υπολογίστε όλες τις λύσεις των παρακάτω προβλημάτων
   (α΄) $y'' - y' - 12y = 20e^{2t}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$
   (β΄) $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0.$

7. Έστω ότι έχουμε μια λεπτή μεταλλική ράβδο μήκους π και θερμικής σταθεράς $k = \frac{1}{4}$ η οποία είναι μονωμένη παντού εκτός από το αριστερό άκρο της όπου διατηρούμε την θερμοκρασία σταθερή και ίση με 10 βαθμούς. Έστω επίσης ότι η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας σε κάθε σημείο της ράβδου είναι κατά 10 βαθμούς μεγαλύτερη του ημίτονου των 3/2 της απόστασής του απο το αριστερό άκρο της ράβδου.
   (α΄) Διατυπώστε το πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που αντιστοιχεί στο παραπάνω φυσικό πρόβλημα.
   (β΄) Δώστε την τιμή της θερμοκρασίας σε οποιοδήποτε σημείο της ράβδου την οποιαδήποτε χρονική στιγμή (στο μέλλον).

12 μονάδες για καθένα από τα θέματα 1-4 και 24 μονάδες για καθένα από τα υπόλοιπα. Άριστα είναι οι 100 μονάδες. Μπορείτε να προσθήσετε όλα τα θέματα. Καλή σας επιτυχία.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
C	$\frac{C}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^3	$\frac{6}{s^4}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin \frac{n\pi}{L}\, x\right)\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos \frac{n\pi}{L}\, x\right)\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi a} \left(\sin \frac{n\pi}{L}\, x\right) \left(\sin \frac{n\pi a}{L}\, t\right) + c_n \left(\sin \frac{n\pi}{L}\, x\right) \left(\cos \frac{n\pi a}{L}\, t\right)$$

$$-\int_0^1 \left[-\frac{1}{2}\gamma x^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma - \alpha + \beta\right) x + \alpha\right] \sin(n\pi x) dx = \frac{\gamma}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right] + \frac{2}{n\pi}\left[\alpha - (-1)^n \beta\right]$$