Διαφορικές Εξισώσεις   Τελική Εξέταση   22η Ιουνίου 2010

Ονοματεπώνυμο: ______________________

Προσπαθήστε να απαντήσετε σε **ΌΛΑ** τα θέματα. Το καθένα από τα πρώτα έξη θέματα αντιστοιχούν σε 1 βαθμολογική μονάδα, ενώ τα δύο τελευταία σε 2 μονάδες. Δώστε τις απαντήσεις στα πρώτα τέσσερα θέματα πάνω στην κόλλα αυτή.

1. Κυκλώστε όσες από τις παρακάτω προτάσεις νομίζετε ότι είναι αληθείς και διαγράψτε όσες πιστεύεται ότι είναι ψευδείς.

   (α′) Κάθε λύση μιας ομογενούς γραμμικής ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί σαν γραμμικός συνδυασμός δύο γραμμικά ανεξάρτητων λυσεών της.

   (β′) Το πρόβλημα αρχικών τιμών $\frac{dx}{dt} = x^2 - |t|,\ \ x(0) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $a < t < b$ όπου $a < 0 < b$.

   (γ′) Το πρόβλημα $\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = -3x + 4ty - 8t^2 & x(0) = 2 \\ \frac{dy}{dt} = 9t^2 x - 3y & y(0) = 0 \end{array}$ έχει μοναδική λύση $\forall t \geq 0$.

   (δ′) Εάν x_1 και x_2 είναι δύο οποιεσδήποτε λύσεις της εξίσωσης $t^2\frac{d^2x}{dt^2} + (1-x)\frac{dx}{dt} + 4x = 0$ τότε και η $x_1 + x_2$ θα είναι επίσης λύση.

   (ε′) Η συνάρτηση $\vec{x}_c = -7\begin{bmatrix} t & \sin t \\ -t & \cos t \end{bmatrix} + 22\begin{bmatrix} t & \cos t \\ t & \sin t \end{bmatrix}$ αποτελεί συμπληρωματική λύση της εξίσωσης $\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ 1 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ -t \end{bmatrix}$.

2. Υπολογίστε την γενική λύση των εξισώσεων

   (α′) $y'' + y = \frac{1}{\sin x} + x$.

   (β′) $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x$.

3. Αντιστοιχίστε τα παρακάτω προβλήματα ΣΔΕ με τα γραφήματα των λύσεων τους.

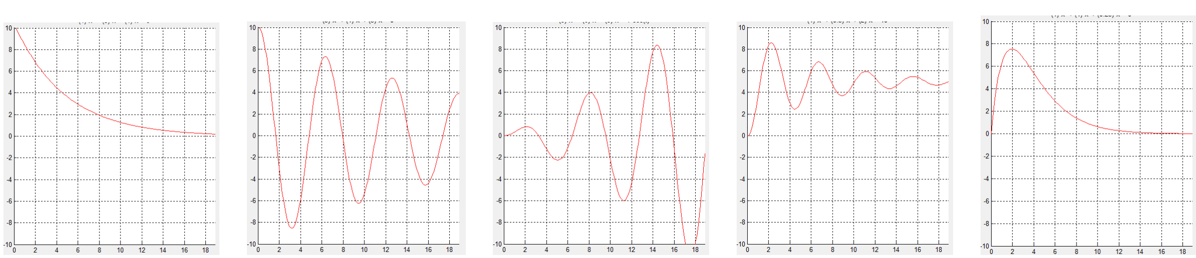
   (α′) $5x'' + x' + 5x = 0\ \ x(0) = 10,\ x'(0) = 0$

   (β′) $x'' + 5x' + x = 0\ \ x(0) = 10,\ x'(0) = 0$

   (γ′) $5x'' + 5x = 4\cos t\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

   (δ′) $x'' + 0.5x' + 2x = 10\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

   (ε′) $x'' + x' + 0.25x = 0\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = 10$

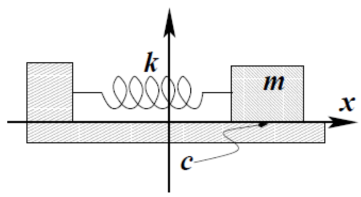


4. Να επεκταθεί περιοδικά η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t \text{ ακέραιο πολλαπλάσιο του } \pi \\ -1, & \text{για } -\pi < t < 0, \\ 1, & \text{για } 0 < t < \pi. \end{cases}$,
να γίνει η γραφική της παράσταση και να γραφθεί σαν σειρά *Fourier*.

5. Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε την e^{tA} και χρησιμοποιήστε την για να υπολογίσετε την λύση του προβλήματος $x' = Ax, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Μαντέψτε μια λύση της εξίσωσης $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0,\;\; t > 0$ και χρησιμοποιήστε την για να περιγράψετε όλες τις λύσεις της.

7. Ένα μεταλλικό κουτί μάζας m είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς k και γλιστρά πάνω σε μία επιφάνεια με σταθερά τριβής c. Δηλαδή, η δύναμη της τριβής δίνεται από την σχέση $F_{tr} = -cmgv$, όπου v είναι η ταχύτητα του κουτιού και g η σταθερά του πεδίου βαρύτητας. Μετακινούμε το κουτί σε απόσταση x_0 από την θέση ισορροπίας του και το



αφήνουμε ελεύθερο.

   (α΄) Χρησιμοποιήστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για να διατυπώσετε την διαφορική εξίσωση που διέπει την απόσταση $x(t)$ την χρονική στιγμή t του κουτιού από την θέση ισορροπίας του.

   (β΄) Καθορίστε τις αρχικές συνθήκες που διέπουν την εξίσωση που δώσατε.

   (γ΄) Υπολογίστε την τιμή του m για την οποία η κίνηση του κουτιού είναι *ισχυρά φθίνουσα*. Δηλαδή υπολογίστε πόσο βαρύ πρέπει να είναι το κουτί έτσι ώστε να επιστρέψει στην αρχική θέση ισορροπίας χωρίς να αλλάζει την κατεύθυνση της κίνησής του.

8. Θεωρήστε την εξής διαφορική εξίσωση $\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 8y = 0$.

   (α΄) Μετατρέψτε την παραπάνω εξίσωση σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της μορφής $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

   (β΄) Ο παραπάνω πίνακας A έχει ιδιοτιμές $r_1 = 2, r_2 = r_3 = -2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ και $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Τα δύο αυτά ιδιοδιανύσματα αποτελούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του παραπάνω συστήματος. Για να βρούμε μια τρίτη λύση υποθέτουμε ότι αυτή θα είναι της μορφής $x(t) = \xi t e^{-2t} + \eta e^{-2t}$. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα ξ και η; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

   (γ΄) Υπολογίστε την τιμή των ξ και η.

   (δ΄) Διατυπώστε την γενική λύση του συστήματος στην απλούστερη δυνατόν μορφή.

   (ε΄) Δώστε την γενική λύση της αρχικής εξίσωσης τρίτης τάξης.