english
english greek

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ **ΤΜΗΥΤΔ 2007-08**
Διαφορικές Εξισώσεις **Τετάρτη, ;;/9/2008**

Επαναληπτική Εξέταση

1. Βρείτε συναρτήσεις $u(x)$ και $q(x)$ τέτοιες ώστε η εξίσωση $y'' + 4xy' + q(x)y = 0$ να έχει δύο λύσεις της μορφής $y_1 = u(x)$ και $y_2 = xu(x)$ όπου $u(0) = 1$. (Αβελ;)

2. Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:
   (α′) $(x^2 \ln x)\, dy = (xy - 1)dx = 0$, $x > 0$.
   (β′) Πόσες λύσεις έχει το πρόβλημα που δεν επιλέξατε σαν απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση; Δικαιολογήστ την απάντησή σας.
   (γ′) Διατυπώστε όλες τις λύσεις του προβλήματος που επιλέξατε σαν απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση.

3. Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \le x \le a$$
όπου a είναι ένας δοθείς θετικός αριθμός και όπου $f(x)$ είναι μια δοθήσα συνάρτηση.
   (α′) Αποδείξτε ότι το παραπάνω πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων έχει το πολύ μία λύση.
   (β′) Περιγράψτε ένα φυσικό πρόβλημα το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί με το παραπάνω πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων.
   (γ′) Περιγράψτε την συμπεριφορά της λύσης του παραπάνω προβλήματος διαφορικών εξισώσεων όταν $t \to \infty$.

4. Λύστε το εξής πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων
$$u_t = u_{xx} - u, \quad u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \quad u(0,x) = 2 + \cos(2\pi x) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

5. Δώστε την γενική λύση του παρακάτω συστήματος διαφορικών εξισώσεων
$$x'(t) = -2\sin(2t)x(t) + (\cos(2t) - 1)y(t)$$
$$y'(t) = (\cos(2t) + 1)x(t) + \sin(2t)y(t).$$

6. Θεωρούμε δύο άκαμπτες κυλινδρικές ράβδους πολύ μικρής διαμέτρου και μήκους 2 μέτρων. Ψύχουμε την πρώτη στους 0^o, θερμαίνουμε την δεύτερη στους 20^o, τις ενώνουμε μεταξύ τους ('κολλάμε' τα δύο άκρα τους) και τοποθετούμε τα δύο ελέυθερα άκρα τους σε πάγο. Μπορείτε να δώσετε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας στο σημείο της ένωσής τους μετά απο $1'$; Εάν δεν μπορείτε, περιγράψτε πώς μπορεί κάποιος να την υπολογίσει. Δικαιολογήστε πλήρως τους ισχυρισμούς σας.

7. Για να βρούμε την λύση μιας κατηγορίας απλών μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ο *Bernoulli* μας προέτρεψε (πριν 200 περίπου χρόνια) να βρούμε πρώτα την λύση του 'αντίστοιχου' γραμμικού προβλήματος (αυτού που προκύπτει εάν σβήσουμε τον μη-γραμμικό όρο) και να την χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα για να 'μαντέψουμε' την λύση του αρχικού μη-γραμμικού προβλήματος. Προσπαθήστε, είτε χρησιμοποιόντας την προτροπή του είτε με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε την γενική λύση του προβλήματος $2xy'(x) + y(x) - 9y^2(x)x^5 = 0$.

Καλό Καλοκαίρι