ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ **ΤΜΗΥΤΔ 2006-07**
Διαφορικές Εξισώσεις **Δευτέρα, 18/6/2007**

Τελική Εξέταση

1. *(10 μονάδες)* Χρησιμοποιώντας το πρόβλημα $y_{\theta\theta} + y = 0,\ y(0) = 1,\ y_\theta(0) = \imath$ αποδείξτε την εξής σχέση (ταυτότητα του *Euler*) $e^{\imath\theta} = \cos(\theta) + \imath\sin(\theta)$ $(\imath = \sqrt{-1})$.

2. *(10 μονάδες)* Ποιά απο τις παρακάτω εκφράσεις είναι ο μετασχηματιμός *Laplace* $Y(s)$ της λύσης $y(t)$ του προβλήματος $y'' + y' - 6y = e^{3t},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

   (α) $\frac{s^2-2s-2}{(s-2)(s-3)(s+3)}$, (β) $\frac{s^2-2s-2}{(s-2)(s-3)^2}$, (γ) $\frac{s^2+2s-2}{(s-2)(s+3)^2}$, (δ) $\frac{s^2+2s-2}{(s-2)(s-3)(s+3)}$, (ε) καμμία.

3. *(15 μονάδες)* Συμπληρώστε την σχέση $u(x,t) = \frac{\quad}{c\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$
   έτσι ώστε η $u(x,y)$ να είναι η λύση του εξής προβλήματος
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
   $$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = x(1-x) \qquad 0 < x < 1, \qquad\qquad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

4. *(10 μονάδες)* Μια μη-τετριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης $u_{xy} = u$ είναι η $u(x,y) =$

5. *(15 μονάδες)* Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $t^2y'' - (t+2)ty' + (t+2)y = 0$. *Υπόδειξη:* $y_1 = t$, *Wronskian*, *Abel*.

6. *(10 μονάδες)* Διατυπώστε το πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων που αφορά την διάδοση της θερμότητας σε ένα κυκλικό σύρμα ακτίνας r του οποίου η αρχική θερμοκρασία είναι 0^o και το οποίο, απο κάποια χρονική στιγμή και μετά, θερμαίνουμε κάποιο σημείο του συνεχώς στους 50^o.

7. *(10 μονάδες)* Εξηγείστε γιατί ο ήχος μιας κιθάρας εξαρτάται απο το σημείο στο οποίο κτυπάμε τις χορδές της.

8. *(10 μονάδες)* Αποδείξτε ότι το παρακάτω πρόβλημα έχει μοναδική λύση.
   $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
   $$u(x,0) = x, \quad 0 < x < L, \qquad\qquad u(0,t) = \sin(t),\ u(L,t) = \cos(t) \quad \forall t > 0.$$

9. *(10 μονάδες)* Βρείτε την λύση του προβλήματος $x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x,\ x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10. *(10 μονάδες)* Θεωρήστε το εξής πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων $y_t = f(y),\ \ y(0) = c$, και την γραφική παράσταση της $f(y)$ που δίδεται παρακάτω.

    (α′) Δώστε την γραφική παράσταση της λύσης $y(t)$ του παραπάνω προβλήματος για $c = -\frac{1}{2}$.

    (β′) Υπολογίστε το όριο $\lim_{t\to\infty} y(t)$ για $c = \frac{1}{2}$ και για $c = -1$.