ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ　　　　　　　　　　ΤΜΗΥΤΔ 2005-06
Διαφορικές Εξισώσεις　　　　　　　　　　　Τετάρτη, 13/9/2006

Εξέταση Περιόδου Σεπτεμβρίου

1. Αληθές ή Ψευδές *(+5 μονάδες για κάθε σωστή και -3 μονάδες για κάθε λανθασμένη απάντηση)*

   (α′) Εάν $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f(t)$ τότε $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$.

   (β′) Εάν x_1 και x_2 είναι δύο οποιεσδήποτε λύσεις της
   $$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + (1-x)\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$
   τότε και η $x_1 + x_2$ είναι επίσης λύση.

   (γ′) Εάν ισχύει οτι $x_1(0)x_2'(0) - x_2(0)x_1'(0) \neq 0$ όπου $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι λύσεις της
   $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{1+t^2}\frac{dx}{dt} + (1-t^2)x = 0$$
   τότε $x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t) \neq 0, \forall t > 0$.

   (δ′) Το πρόβλημα
   $$\frac{dx}{dt} = -3x + 4ty - 8t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 9t^2x - 3y, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$
   έχει μοναδική λύση $\forall t > 0$.

2. *(15 μονάδες)* Χρησιμοποιήστε τους μετασχηματισμούς *Laplace*
   $$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$
   και την εξίσωση
   $$\frac{s^2 + s + 4}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{s-5}{s^2+9}\right)$$
   για να λύσετε το εξής πρόβλημα
   $$y'' + 9y = \cos 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

3. *(15 μονάδες)* Αποδείξτε ότι κάθε λύση της εξίσωσης $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ ικανοποιεί την σχέση (ή ισοδύναμα βρίσκεται πάνω στην καμπύλη) $x^3y + x^2y^2/2 =$σταθερά.

4. Λύστε τα παρακάτω πρόβληματα διαφορικών εξισώσεων

   (α′) *(10 μονάδες)* $(2x - y)dy + (3 - 4y)dx = 0.$

   (β′) *(25 μονάδες)*
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad -\infty < \theta < \infty, \quad t > 0,$$
   $$u(\theta, t) = u(\theta + 2\pi, t)\ \forall \theta, t, \qquad u(\theta, 0) = 10\ \forall \theta.$$

   (γ′) *(15 μονάδες)*
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sin(3\pi x),\ 0 < x < 1,\ \forall t > 0$$
   $$u(0,t) = u(1,t) = 0\ \forall t > 0, \qquad u(x,0) = sin(\pi x),\ 0 < x < 1.$$