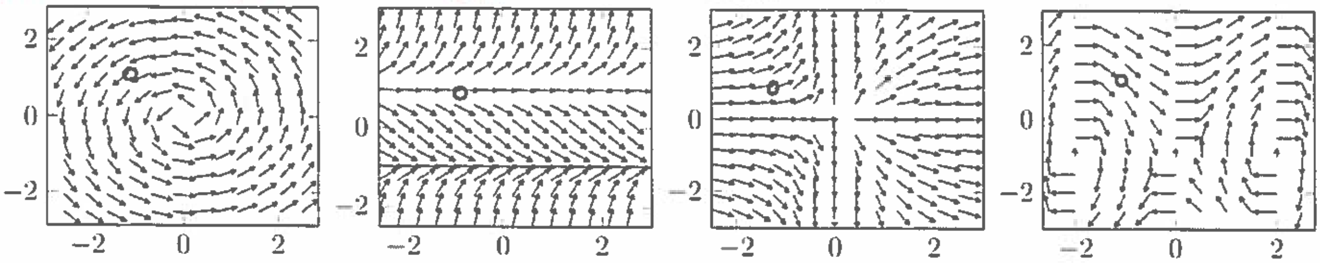
Διαφορικές Εξισώσεις　　　Επαναληπτική Εξέταση　　　06.09.2016 AM: ________

1. Συνταιριάξτε τις εξισώσεις
II $y' + 1 = y^2$, I $yy' + x = 0$, III $x^2y' - y = 0$, ___ $(y-1)y' + x^3 = 4x$ με τα παρακάτω γραφήματα.



(I)　　　(II)　　　(III)　　　(IV)

και τις εξισώσεις (A) $y' - 4y = 0$, (B) $y' + 4^2x = 0$, (Γ) $y'' - 8y' + 16y = 0$, (Δ) $y'' - 6y' + 13y = 0$ με τις λύσεις
___ $\cos 2x - \sin 2x$, Δ $2e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$, A $e^{2x} + e^{-2x}$, Γ $2e^{4x} + 4xe^{4x}$.

2. Δώστε την λύση του συστήματος $\vec{x}\,'(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \vec{x}(t)$.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -5 \qquad \vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{-5t} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t} \right)$$

3. Αν η $g(t)$ είναι λύση του προβλήματος $g'(t) = \phi(t)g(t)$, $g(0) = 1$

και η $u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος $\begin{cases} u_t - ku_{xx} + \phi(t)u = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$

αποδείξτε ότι η $v(x,t) = g(t)u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος $\begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ v(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$

$$V_t(x,t) = g'(t)u(x,t) + g(t)u_t(x,t), \quad V_{xx}(x,t) = g(t)u_{xx}(x,t)$$

$$V_t(x,t) - kV_{xx}(x,t) = g'(t)u(x,t) + g(t)u_t(x,t) - kg(t)u_{xx}(x,t) =$$

$$= \phi(t)g(t)u(x,t) + g(t)u_t(x,t) - kg(t)u_{xx}(x,t)$$

$$= g(t)[\quad 0 \quad] = 0$$

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F(t) = \int_0^L e^{u(x,t)}dx$ είναι φθίνουσα $\forall t \geq 0$, όπου $u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

$$F'(t) = \int_0^L \frac{d}{dt}\left\{e^{u(x,t)}\right\}dx = \int_0^L u_t(x,t)e^{u(x,t)}dx =$$

$$= \int_0^L u_{xx}(x,t)e^{u(x,t)}dx = \left[u_x(x,t)e^{u(x,t)}\right]_0^L - \int_0^L u_x(x,t)\frac{d}{dx}e^{u(x,t)}dx$$

$$= \underset{\substack{\| \\ 0}}{u_x(L,t)}e^{u(L,t)} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{u_x(0,t)}e^{u(0,t)} - \underbrace{\int_0^L (u_x(x,t))^2 e^{u(x,t)}dx}_{\geq 0} \leq 0$$

5. Δώστε την λύση του προβλήματος $\begin{cases} u_t = t u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$ $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$tX''T = XT' \Rightarrow X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda t T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0, \; X(0) = 0, \; X(\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = n^2 \\ X_n(x) = \sin(nx) \end{cases}$$

$$T' + \lambda_n t T = 0 \Rightarrow T_n(t) = e^{-\frac{n^2 t^2}{2}}$$

$$u_n(x,t) = X_n(x) T(t) = e^{-\frac{n^2 t^2}{2}} \sin x$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 t^2}{2}} \sin x \\ u(x,0) &= x \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\cos(n\pi)}{n} e^{-\frac{n^2 t^2}{2}} \sin(nx)$$

6. Δώστε την γενικευμένη λύση της εξίσωσης $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$.

$$r^3 + r^2 + r + 1 = (r^2+1)(r+1) \quad r: \mp i, -1$$

$$y_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_2 \sin t$$

$$y_p(t) = Ate^{-t} + (Bt + C) \Longrightarrow \begin{cases} y_p' = Ae^{-t} - Ate^{-t} + B \\ y_p'' = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} \\ y_p''' = 3Ae^{-t} - Ate^{-t} \end{cases}$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = 1/2, \quad B = 4, \quad C + B = 0 \Rightarrow C = -4$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} t e^{-t} + 4t - 4$$

7. (α') Έστω ότι η αρχική θερμοκρασία ενός λεπτού καλωδίου μήκους π, θερμικής αγωγιμότητας 2 δίνεται απο την συνάρτηση $u(x,0) = \sin x + \sin 2x$. Αν διατηρήσουμε τα άκρα του καλωδίου σε σταθερή θερμαρασία 0 βαθμών τότε η θερμοκρασία στο μέσο του καλωδίου την χρονική στιγμή $t = 1$ θα είναι (κυκλώστε το ορθό) $e^{-1} + e^{-2}$, $0, e^{-2} + e^{-8}$, 1, e^{-2} ενώ σε βάθος χρόνου (δηλαδή όταν $t \longrightarrow \infty$) θα είναι (κυκλώστε το ορθό) 0, -1, e^{-2}, e^{-8}, 1.

(β') Αν αναπτύξουμε την συνάρτηση $f(x) = |x|$ σε σειρά Φουριέ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ τότε ο συντελεστής Φουριέ a_1 θα είναι (κυκλώστε το ορθό) -2, $\frac{-2}{\pi}$, $\frac{2}{\pi}$, $\frac{-4}{\pi}$ ενώ ο συντελεστής b_1 θα είναι (κυκλώστε το ορθό) -2, $\frac{-2}{\pi}$, 0, $\frac{2}{\pi}$.

8. Γνωρίσουμε ότι $\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$, $\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$. Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμό Λαπλάς για να υπολογίσετε την λύση του προβλήματος

$$y''' + y' = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 0.$$

$$s^3\bar{Y} - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + s\bar{Y} - y(0) = e^{-s}$$

$$s^3\bar{Y} - s + s\bar{Y} = e^{-s}$$

$$\bar{Y} = \frac{s}{s^3+s} + \frac{1}{s^3+s} e^{-s}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{s^2+1} + \left(\frac{\overset{=1}{A}}{s} + \frac{\overset{=-1}{B}s + \overset{=0}{C}}{s^2+1}\right) e^{-s}$$

$$\bar{Y} = \sin(t) + u(t-1)(1 - \cos(t-1))$$

9. Αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ και $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε $e^A = \overset{+6}{\begin{bmatrix} e^{\alpha} & e^{\alpha} b \\ 0 & e^{\alpha} \end{bmatrix}}$ και $\vec{x}(t) = e^a \overset{+4}{\begin{bmatrix} 2b \\ 1 \end{bmatrix}}$